



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

Ulveczki Mihály Ádám

XILOFON REZGÉSAKUSZTIKAI MODELLEZÉSE

KONZULENS

Dr. Rucz Péter

BUDAPEST, 2019

Tartalomjegyzék

Összefoglaló	4
Abstract	5
1 Bevezetés	6
1.1 Motiváció és célkitűzés.....	6
1.2 A dolgozat felépítése	6
2 A xilofon részei és hangkeltése	8
2.1 A hanglap	9
2.1.1 A hanglap anyaga.....	9
2.1.2 A hanglap hangolása	9
2.1.3 Méreti megfontolások	11
2.1.4 A hanglap felfüggesztése	12
2.2 A rezonátor	12
2.2.1 Helmholtz-rezonátor	12
2.2.2 A rezonátor hangolása	13
2.2.3 Nehézségek a rezonátor tervezésénél	13
2.3 A kalapács	14
3 Modellezés	15
3.1 A hanglap modellezése mechanikai végeselem-módszerrel.....	15
3.1.1 Koncentrált paraméteres rendszer.....	15
3.1.2 A Navier–Cauchy egyenlet.....	16
3.1.3 Elosztott paraméteres rendszer egydimenzióban.....	17
3.1.4 Csillapítás figyelembe vétele	18
3.1.5 Elosztott paraméteres rendszer háromdimenzióban	19
3.1.6 Módusok számítása.....	20
3.1.7 Modális szuperpozíció alkalmazása.....	21
3.1.8 A hanglapmodell.....	22
3.1.9 Válasz számítása impulzusszerű gerjesztés esetén	24
3.2 A rezonátor modellezése akusztikai végeselem-módszerrel.....	25
3.2.1 Az akusztikai végeselem-módszer mátrixegyenlete	25
3.2.2 Fali viszkózus veszteség számítása.....	27
3.2.3 A rezonátormodell	28

3.2.4 Rezonanciafrekvencia vizsgálata.....	30
3.2.5 Viszkózus veszteség szimulációja	31
3.2.6 Hanglap hatása a rezonátorra.....	32
3.2.7 Rezonátor hatása a hanglapra	33
3.3 A kalapácsütés	36
3.3.1 A kalapács alapegyenletei.....	36
3.3.2 A kalapács mozgásegyenlete	37
3.3.3 A hanglap és a kalapács kölcsönhatása.....	38
3.3.4 Módusok használata a válasz számításához.....	41
3.3.5 Csillapítás figyelembe vétele	42
3.3.6 Csillapítás alkalmazása a módusokon.....	43
3.3.7 Teljes csatolt modell	44
4 Eredmények.....	46
4.1 hanglapok modellezése	46
4.2 Rezonátorok sajátfrekvenciái.....	48
4.3 A teljes modell összefüggései.....	50
4.3.1 Kezdősebesség és az erő kapcsolata	50
4.3.2 Ütési pozíció változtatása	52
4.3.3 A rendszer energiája	52
4.3.4 Rezonátor hangolásának hatása	54
5 Összefoglalás.....	56
Irodalomjegyzék.....	58

Összefoglaló

Új hangszermodellek tervezése, optimalizálása során egyre fontosabb szerepet kap a számítógéppel segített tervezés, szimulációkon alapuló virtuális prototípuskészítés. E módszerek segítséget nyújtanak a precízen behangolt, minőségi termékek hatékony kialakításában és megkönnyítik a sorozatgyártás előkészítését is.

A xilofon esetében a hangszer hanglesugárzásában két elem játszik döntő szerepet: a hanglap és a rezonátor, melyek egymással illetve az őket gerjesztő kalapáccsal is kölcsönhatásban vannak. Ezen elemek lesugárzott hangterét és mechanikai rezgéseit a hangszer valós geometriája mellett nincs lehetőségünk analitikusan kiszámítani. Ezért valószerű elrendezések (szabálytalan hanglapkivágások, különböző alakú rezonátorok) modellezéséhez érdemes valamilyen közelítő módszerrel – például a végeelem-módszerrel – végezni a számításokat.

Dolgozatomban egy xilofon hanglapjainak és rezonátorainak rezgésakusztikai viselkedését vizsgálom először egymástól függetlenül, majd csatolt modellben az egymásra gyakorolt kétirányú kölcsönhatások figyelembevételével. E hatások elemzéséhez a modell bemenetén mind pontszerű, mind modális gerjesztést, mind pedig a kalapács dinamikáját leíró nemlineáris gerjesztést is megvizsgáltam. A vizsgált hangszerről rendelkezésre állnak mérések is, így eredményeimet a mérési adatokkal is össze tudtam hasonlítani.

Eredményeim, amellett, hogy a hangszer tervezése során virtuális prototípuskészítéshez alkalmazhatóak, használhatóak xilofonhang szintetizálására is, ugyanis a hanglapon bármilyen pozícióban elhelyezett, tetszőleges nagyságú kalapácsgerjesztés esetén meghallgatható a hangszermodell által szimulált lesugárzott hang. Dolgozatomban azt is bemutatom, hogy a hangszer egyes elemeinek változtatása hogyan befolyásolja a megszólaló hangot.

Abstract

Computer-aided design and simulation-based virtual prototyping play an increasingly important role in the design and optimization of new musical instrument models. These methods help to create precisely tuned, high-quality products and also facilitate the preparation of series production.

In the case of the xylophone, two elements have a decisive role in the sound emission of the instrument: the sound bar and the resonator, which interact with each other and with the excitation produced by the mallet. The radiated sound field and mechanical vibrations of these elements cannot be calculated analytically with the actual geometry of the instrument. Therefore, for modeling realistic layouts (irregular bar cuts, resonators of various shapes), it is worthwhile to perform calculations using approximative techniques, such as the finite element method.

In this contribution the vibroacoustic behavior of the sound bars and resonators of a xylophone are investigated, first independently, and then in a coupled model considering the two-way interactions of these elements. To analyze these effects, point, modal, and nonlinear hammer excitations are all examined as the input of the model. As measurements were already available for the instrument at hand, the simulation results were also compared with the measured data.

My results, can be utilized for virtual prototyping in musical instrument design, and in addition, can also be used for synthesizing xylophone sounds. One can listen to the simulated sound produced by the instrument model excited by arbitrary mallet actions at any position of the sound bars. In my paper it is also shown how the perceived sound is influenced by the changing certain elements of the instrument.

1 Bevezetés

1.1 Motiváció és célkitűzés

A számítógéppel segített tervezés és a szimulációkon alapuló virtuális prototípuskészítés egyre fontosabb szerepet játszanak új hangszermodellek tervezése, optimalizálása során. E módszerek segítséget nyújtanak a precízen behangolt, minőségi termékek hatékony kialakításában és megkönnyítik a sorozatgyártás előkészítését is.

Dolgozatommal egy nagy hangszergyártó cég tervezési folyamatába tudtam bekapcsolódni, mely során egy új xilofon tervezése, szimulálása és gyártásának előkészítése volt a cél. Lehetőségem volt a meglévő tervek és méretek alapján a tervezett hangszert számítógépes módszerekkel modellezni. A szimuláció segített rávilágítani egyes tervezési problémákra, támpontot adott a tervezés javításához, illetve eredményként meg lehet hallgatni a hangszer által lesugárzott hangot is.

A munka során megismerkedtem a rezgésakusztikai numerikus modellezés technikáival, ezeken belül is az akusztikai és mechanikai végeselem-módszerrel. Dolgozatomban bemutatom ezeknek a szimulációs eljárásoknak az alkalmazását, illetve az akusztikai és mechanikai elemek összekapcsolásával a hangszer csatolt fizikai modelljének megalkotását. A fizikai modellezés előnye, hogy közvetlenül megvizsgálható az egyes tervezési (geometriai, anyagjellemző stb.) paraméterek hatása a hangszer viselkedésére.

A stuttgarti Fraunhofer Épületfizikai Kutatóintézet Akusztikai Osztályának köszönhetően rendelkezésre állnak mérések is az általam szimulált hangszerről, így a szimulált eredmények összevethetők voltak a tényleges mérésekkel. A validáció és a szimuláció helyességének belátása után lehetőségem volt a méretek változtatásával finomhangolni is a hangszert.

1.2 A dolgozat felépítése

Dolgozatomban először a xilofon egyes részeivel ismertetem meg az olvasót. Targyalom, milyen problémák merülhetnek fel ezen elemek méretezésénél, illetve milyen kérdésekre érdemes odafigyelni a tervezés során. A második nagyobb fejezetben a modellezés és a szimulációé a főszerep, továbbra is a xilofon egyes moduljait külön-külön tekintve. A fejezet első részében a hanglapok mechanikai modelljét mutatom be,

bevezetve a mechanikai végeselem-módszer mátrixegyenletét. Ezután az akusztikai végeselem-modellt tárgyalom. Végezetül a hanglap és kalapács közötti, illetve a teljes modellben megjelenő rezgésakusztikai kölcsönhatásokat vizsgálom. A modellt bemutató fejezetben szemléltető eredményeket is közlök. Ezzel a teljes csatolt modellel elvégezhető egy már megtervezett hangszer hanglesugárzásának fizikai elvű szimulációja, illetve meghallgatható, hogy milyen hangon fog megszólalni az e tervek alapján legyártott xilofon. Az eredményeket ismertető fejezetben összehasonlítom a modellezés és mérések eredményeit, illetve szimulációk segítségével rámutatok, milyen paraméterek befolyásolják döntően a hangszer lesugárzott hangját. A dolgozatot rövid diszkusszió zárja, a legfontosabb eredmények kiemelésével.

2 A xilofon részei és hangkeltése

A xilofon az ütős hangszerek családjába, az idiofonok csoportjába tartozik, neve a görög xülon (fa) és phóné (hang) szavakból tevődik össze [12]. Olyan hangszerekről van szó, amelyek rugalmas, szilárd testük rezgése révén hoznak létre hangokat. Vannak köztük hangra hangoltak, mint például a xilofon, a vibrafon és a harangjáték, illetve nem hangoltak, például a triangulum, vagy a cintányér. A xilofon egyik legközelebbi rokona a marimba, azonban e két hangszer több jelentős aspektusban különbözik egymástól. Más alakú és működésű rezonátorokkal készítik őket, és a hangolás módjában, technikájában is különböznek. Az újabb hangszerek készülhetnek például kompozit műanyagokból is, köszönhetően az anyagtechnológiai modellezésnek és a precíziós gyártási folyamatnak.



2.1. ábra – A xilofon [20]

Ahhoz, hogy a xilofon működését megértsük, tekintsük egyelőre a részeit külön-külön. Egy xilofon három nagyobb részből áll: a hanglap, a rezonátor és az ütő (vagy kalapács), ami az előző kettőt gerjeszti. A 2.1. ábrán egy manapság használatos, megvásárolható xilofon látható. Megfigyelhetőek a hangszer tetején a hanglapok, amelyből jelen esetben tizenhárom található. A hanglapok a diatonikus (hétfokú) skála szerint vannak behangolva, a hangszer hangterjedelme pedig a C4 (262 Hz) hangtól az A5 (880 Hz) hangig terjed. Megfigyelhető az ábrán további három hanglap is, melyek a F#4, A#4 és F#5 hangokhoz tartoznak. Rendre az F4, H4 és F5 hanglapokat lehet ezekre kicserélni, így változtatható meg a hangszer skálája. A hanglapok alatt található doboz nem pusztán a hanglapok rögzítéséért felelős, hanem belsejében több üreg található, melyek a rezonátorokat képezik. A hangszer mellett látható az azt gerjesztő ütő. A zenész ezeket használja játék közben a hanglapok megszólaltatásához.

2.1 A hanglap

A xilofon egyik fő eleme a hanglap. Egy tipikus xilofon hanglap látható a 2.2. ábrán. A hanglap a hangszer azon része, amelyik a gerjesztés hatására rezgésbe kezd, és ezáltal itt kezdődik el a hang lesugárzása. A hanglapok tervezésénél több tényezőt is figyelembe kell vennünk a tökéletes hangszer elkészítésének érdekében. Ahogyan a 2.2. ábra is mutatja, a hanglap keresztmetszete a hossz mentén változik, mely elengedhetetlen a lap felhangjainak konszonáns frekvenciaarányokra történő hangolásához. Ezzel a kérdéssel a 2.1.2. szakaszban foglalkozom részletesebben. Megfigyelhető emellett a hanglap rögzítéséhez használt furat is. Az apró furat a hangolást nem befolyásolja lényegileg, viszont a nem megfelelő pozícióban történő rögzítés nemkívánatos veszteséggel járhat, ami rontja a hanglap hangminőségét.



2.2. ábra – A xilofon egy hanglapja

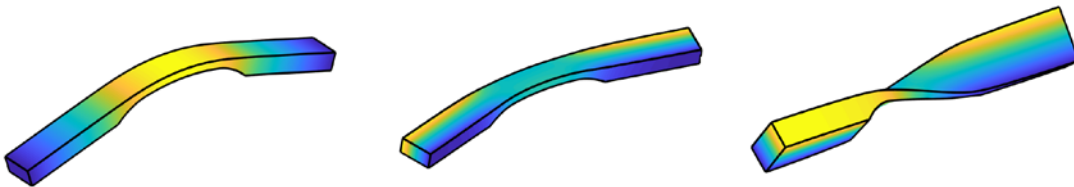
2.1.1 A hanglap anyaga

A xilofon esetében a hanglap anyaga jellemzően fa, ahogyan fent említettem, innen ered a hangszer neve is. Újabban kezdenek elterjedni a szintetikus, műanyag hanglapok is, a 2.1. ábrán "Palisono" nevű, szálás műanyagból készült hanglapok láthatóak a hangszeren. A fa hanglapok a modellezés szempontjából is kihívást jelentenek, ezzel a 3. fejezetben foglalkozom; illetve további problémát okozhat, hogy a faanyag minősége nehezen reprodukálható, az anyagparaméterek szórása jelentős lehet, mivel két ugyanolyan szerkezetű fát is közel lehetetlen találni. Még a gondosan, direkt hangszerkészítéshez válogatott faanyagok (*tone wood*) is jelentősen különbözhetnek egymástól, pl. más-más erezzel rendelkeznek, lehetnek bennük görcsök. Ezek mind-mind megnehezítik a tervezést és a precíz kivitelezést.

2.1.2 A hanglap hangolása

Egy másik érdekes kérdés, hogy ha megütünk – az ütővel való mechanikai kölcsönhatás útján rezgésbe hozunk – egy hanglapot, az mitől fog "jól" szólni, mit kell tenni annak érdekében, hogy az egyes felhangok zeneileg tiszta frekvenciaarányba kerüljenek az alaphanggal. A xilofon hanglapja – mint minden más rezgő tárgy – csak

bizonyos frekvenciákon rezeg szabadrezgésben, ezeket hívjuk sajátfrekvenciáknak, e frekvenciákhoz tartozó jellemző rezgésalakokat pedig módusalakoknak. A hanglap rezgésének tetszőleges időfüggvénye kifejezhető ezen módusok szuperpozíciójaként, természetesen a gerjesztés függvényében. Szabadrezgésben, vagyis esetünkben a rövid hanglap-ütő kölcsönhatás lezajlása után az egyes módusalakok a sajátfrekvenciájukon harmonikus rezgést végeznek, így a sajátfrekvenciák egyúttal meghatározzák a le sugárzott hang jellemző komponenseit is.

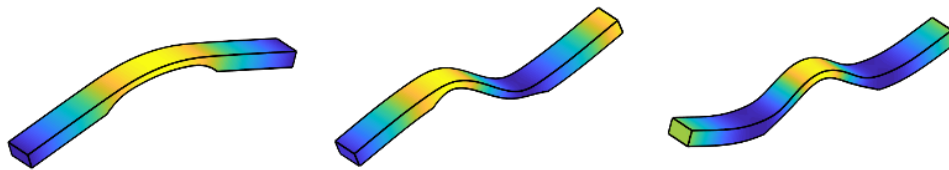


2.3. ábra – Elsőrendű hajlító (vertikális, horizontális) és torziós módusalakok. A színezés a hanglap függőleges irány szerinti kitérését szemlélteti.

A hanglapok esetében a módusalakokhoz többféle mechanikai hullámalak tartozhat, megjelennek a hanglapban terjedő hajlító és longitudinális rezgésalakok is. A megszólaló hang szempontjából a hajlító rezgések a döntő szerep, mivel az ütővel ezek a rezgésalakok gerjeszthetőek. A hajlító rezgésalakok tovább osztályozhatóak: a hanglap longitudinális iránya mentén hajlító vertikális módusokat (2.3. ábra bal oldal), szintén a hosszirány menti horizontális módusokat (2.3. ábra középső diagram), illetve a hanglap hossz tengely menti csavarásával jellemezhető torziós módusokat (2.3. ábra jobb oldal) különböztethetünk meg. A hanglesugárzásban főként a vertikális módusok játszanak szerepet. A torziós módusok lényegesen gyengébben sugároznak el hangteljesítményt, ellenben, az ütős gerjesztés hatására jelentős energiát képesek eldisszipálni, így e módusok gerjesztése a hangszeres játék során kerülendő. Xilofon esetében érdemes az első három vertikális módust (2.4. ábra) 1:4:10 arányra hangolni (a köztük lévő torziósakat pedig tőlük távolabb tartani), így érhető el, hogy szép hangja legyen a gerjesztett hanglapnak, az 1:4 arány ugyanis zeneileg a két tiszta oktáv, míg az 1:10 arány két oktáv és egy tiszta nagyterc hangköznek felel meg. Ezzel a hangolással konszonánsan szólaltatható meg a hanglapokon egy dúr hármashangzat.

A hanglap hangolását például a következő módon is el lehet végezni. Az alapfrekvenciát a hanglap alpméretei adják: szélesség, hosszúság, magasság. Változtatásukkal az alapfrekvencia növelhető, illetve csökkenthető. A következő longitudinális módus hangolása egyszerű méretváltoztatással már nem hangolható,

ugyanis az az alapfrekvenciát is állítaná. Viszont ha bevágásokat ejtünk azokon a pontokon, ahol az első módusnak nullhelyei vannak, akkor azzal ő nem hangolódik csak a nagyobb frekvenciás társai. Ezzel az 1:4 arányt már el is lehet érni. Elméleti síkon az 1:10-es arányt is hasonlóképpen lehet előállítani, ott kell bevágásokat ejteni, ahol az előző két módusnak nullhelye van, ami a valóságban azért kevésbé megoldható, mert az első két módusnak nem ugyanott vannak nullhelyei, ellenben ügyeskedéssel mégis el lehet érni a kívánt arányokat a bevágások alkalmazásával.



2.4. ábra – Első három vertikális módusalak

Gyakorlatban a kis kivágás nehézkes kivitelezése, illetve a külalak és dizájn miatt inkább a 2.2. ábrán látható kivágással készítenek hanglapokat [6]. Esetünkben a hangolóját (a hanglap alján a hossz mentén középre helyezett bemélyedés) két szélé egy hengerre illeszthető, míg a közepe egyenes rész. A későbbi fejezetekben bemutatott szimulációim során is ilyen alakú kivágásokat alkalmaztam.

2.1.3 Méreti megfontolások

Amint a tökéletes hanglap megalkotása és behangolása megtörtént, legegyszerűbb a hanglap arányos zsugorítása, illetve nagyítása lenne, ezzel elő is állna az összes hanglap a megfelelő sajátfrekvencia-arányokkal. Habár ez a megoldás nem rossz, a gyakorlatban mégsem használható, ugyanis túl nagy lenne a méretbeli különbség a legnagyobb és legkisebb hanglap között, ami nagyon megnehezítené a hangszeres játékot. Játéktechnikai megfontolások miatt úgy érdemes a lapokat gyártani, hogy a szélességük és vastagságuk (közel) azonos legyen, és inkább a kivágás kidolgozását kell változtatni a skálán haladva [3]. A kivágás változtatásának eredményeként a vertikális módusok jól behangolhatóak a kívánt 1:4:10, vagy más hangszerek esetén a szintén szokásos 1:3:9 frekvenciaarányokra, ugyanakkor a szélesség és vastagság megtartása miatt a torziós módusok alaphanghoz viszonyított sajátfrekvencia-arányai a skála mentén jelentősen változhatnak [4], ahogy azt a dolgozatban később be is mutatom. Ez szintén kihívást jelent a hanglapok méretezése során.

2.1.4 A hanglap felfüggesztése

A xilofon egy Orff-hangszer, ebből adódik a hanglapok felfüggesztésének módja is. A hanglap alatt, ahol fával érintkezne, filc található a kisebb csillapítás érdekében. A hanglap egyik végén át van fúrva, amibe a hangszer testén lévő pöcök belefürödik, meggátolva a hanglap hosszanti irányú elmozdulását. Ez a lyuk némileg megváltoztatja a hanglap frekvenciáit, de ez a hatás a hangolóvájatok mellett egyrészt elhanyagolható, másrészt ezt a furatot az alapprofiliációhoz tartozó első vertikális módusalak nullhelyénél érdemes elhelyezni, így még kevésbé érzékelhető a hatása. Az oldalirányú elmozdulást a lap másik vége mellett két oldalon található pöcök gátolják meg.

2.2 A rezonátor

A hanglap önmagában nem elég ahhoz, hogy megfelelő teljesítménnyel sugározza le a hangot, mivel a magára hagyott hanglap dipólsugárzóként viselkedik az akusztikai rövidzár jelensége miatt. Ezt a hatást célszerű csökkenteni, vagy teljesen megszüntetni, akár csak a hangszórók esetében azok dobozolásával. Az említett okok miatt van szükség tehát a rezonátorra, ami amellet, hogy megfelelő hangolással erősítőként működik, az akusztikai rövidzár jelenségét hivatott meggátolni. Ütős hangszerek esetében, például a marimbánál éppen ezt a hatást küszöböli ki az ott alkalmazott csőrezonátor. A marimbával ellentétben, a dolgozatban bemutatott xilofonok Helmholtz-rezonátorokkal készülnek.

2.2.1 Helmholtz-rezonátor

A hanglapok alatt található egy nagyobb fa vagy műanyag test, melyben több üreg van kialakítva. Ezen üregek egy-egy nyílással kapcsolódnak a szabad hangtérhez, ahol a hanglapok is elhelyezkednek. Az ilyen módon kialakított üregek Helmholtz-rezonátorként viselkednek. Ennek megfelelően a hangszer ezen része egy bizonyos átviteli függvény szerint erősíti, vagy gyengíti a hozzá érkező, a hanglapok által keltett hullámokat, azok frekvenciájának függvényében. A rezonátor sajátfrekvenciáját az üreg térfogata, a nyílás (effektív) felülete és a nyílás mint „nyak” effektív hosszúsága határozza meg. Utóbbi effektív hossz tartalmazza a nyílt térrel való kölcsönhatásból adódó úgynevezett hossz-korrekciót is.

2.2.2 A rezonátor hangolása

Célszerű úgy hangolni a rezonátort, hogy a legnagyobb erősítése a hozzá tartozó hanglap alapfrekvenciájával essen egybe. A hangolást a térfogat, illetve a lyukméretek változtatásával tudjuk megtenni. A legyártott rezonátor további hangolása nehézkes feladat, tekintve, hogy egy kivágott üregről beszélünk. Ugyanakkor léteznek olyan kialakítások is, ahol a fedlapon a fő lyukon kívül még kisebb fix, vagy eltakarható lyukak is találhatóak, amivel kisebb hangolás még utólag is végezhető. Az utóhangolás lehetősége azért is szükséges, mert a rezonátor sajátfrekvenciája a környezet (pl. hőmérséklet, páratartalom) változásával megváltozhat.

Az általam vizsgált elrendezésben a rezonátorok kialakításában hátrányos, hogy egy rezonátorhoz nem egy, hanem több (kettő vagy három) hanglap is tartozik. Ebből adódóan az egyes rezonátoroknak nem csak egy bizonyos frekvenciát kell erősíteniük, hanem egy véges szélességű frekvenciasávot. Amellett, hogy a rezonanciagörbének (a rezonátor átviteli függvényének) még egyhanglapos esetben sem túl kedvező, ha nagyon éles csúcsa van – inkább célszerű kicsit szélesebb kiemelést tervezni a könnyebb hangolhatóság érdekében –, több hanglap esetén már problémát okoz, hogy a szélesebb csúcshoz szükségszerűen kisebb kiemelés (erősítés) tartozik. E két tényező között szükséges a megfelelő egyensúlyt megtalálni.

2.2.3 Nehézségek a rezonátor tervezésénél

A rezonátor tervezéséhez nem elegendő a rezonátort önmagában vizsgálni, mert a rezonátor nyílása elé helyezett hanglap is megváltoztatja a rezonátor sajátfrekvenciáját, az átviteli függvény frekvenciamenetét [6]. A rezonátor nyílása fölött lévő hanglap ugyanis a rezonátor nyílásának egy részét kitakarja, így kisebb felületen érintkezik a rezonátor a külső hangtérrel, ahol a hanglap, mint akadály jelenik meg. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a nyílás előtt elhelyezett akadályok – jelen esetben hanglapok – jelentősen befolyásolják a nyílás sugárzási impedanciáját.

Ugyanúgy problémát jelent, hogy a rezonátorok nyílása a hanglapok geometriájához viszonyítva különböző pozíciókba esik az egyes hanglapok esetén. Például előfordulhat az, hogy egy bizonyos rezonátorhoz tartozó egyik hanglap főmódusának valamely nullhelyének közelében van a nyílás, míg egyik másik hanglap nullhelye távolabb helyezkedik el tőle. Ez nyilvánvalóan problémát okoz, ugyanis kisebb nullhely–nyílás távolság esetén kevésbé tudja a hanglap a rezonátort meggerjeszteni.

2.3 A kalapács

A teljes rendszerből már csak a gerjesztés hiányzik. Ezt az ütő, vagy kalapács szolgáltatja. A kalapács tervezési kérdéseivel nem foglalkoztam részletesen, modellemben az ütőt és a játékos mozdulatát pusztán koncentrált paraméterek jellemzik, melyek közül a kalapács effektív rugómerevsége a fő paraméter. Ez a mérőszám azt mutatja meg, hogy az ütő feje mennyire puha vagy kemény. Amennyiben az ütő feje kemény, akkor a kölcsönhatás jellemző ideje rövidebb, így a gerjesztésben jelentős amplitúdóval lesznek jelen nagyfrekvenciájú komponensek is, melyek a lesugárzott hangban is megjelenhetnek. Ezzel szemben a puha kalapács kisebb amplitúdójú és hosszabb ideig tartó gerjesztést tud produkálni, kisebb vágási frekvenciával. Ennek megfelelően itt a hanglap is jellemzően kisebb frekvenciákon tud gerjesztődni, ami a nagyfrekvenciás komponensek eltűnésével, a hangszín jelentős megváltozásával jár. Utóbbi jelenség a skála magasabb hangjaihoz tartozó hanglapok esetén problémás is lehet. A kalapács kiválasztásánál az jelenti a kihívást tehát, hogy olyat használjunk, ami megfelelően tudja gerjeszteni a legkisebb és a legmagasabb frekvenciájú hanglapot egyaránt. Az ütők paramétereinek kísérleti vizsgálatát részletesebben tárgyalja a [5], vagy a [8] irodalom.

3 Modellezés

Ebben a fejezetben az egyes hangszerelemek szimulációjáról, modellezéséről és a modellalkotás matematikai háttéréről esik szó. Bemutatom az általam felállított modelleket és az ezeken végzett számításaimat, majd az egyes szekciók végén megosztom a szimulált eredményeket és a konklúzióimat.

A fejezet további szakaszaiban a hangszer fő alkotóelemeit külön-külön tárgyalom. Mind a mechanikai, mind az akusztikai hullámterjedés szimulációjához a végelem-módszert alkalmaztam, mely általános módszer parciális differenciálegyenletek peremértékfeladatainak közelítő megoldására. A hanglap és a rezonátor modelljének bemutatása során ezért kitérek a mechanikai és akusztikai végelem eljárásokra is.

3.1 A hanglap modellezése mechanikai végelem-módszerrel

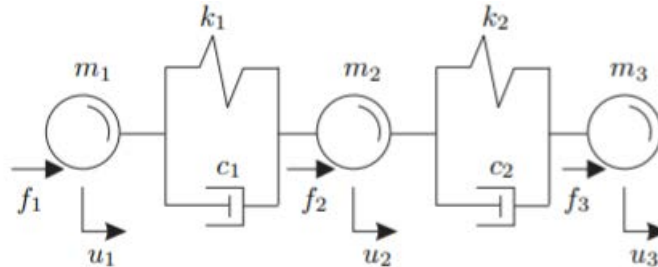
Első lépésben tekintsük pusztán a hanglapot. Feladatunk a geometria kialakítása, az anyagjellemzők megadása és a gerjesztés és egyéb peremfeltételek bevitele után a hanglap elmozdulásainak kiszámítása a hanglapra ható felületi erőeloszlás ismeretében. A számításban a már érintőlegesen említett módusok lehetnek segítségünkre, melyek megfelelő súlyozásával adódik a hely- és időfüggő elmozdulásfüggvény.

A következő szakaszokban bemutatom a mechanikai végelem-módszer alapösszefüggéseit és az ezekből származtatott mátrixegyenletet. Rámutatok a koncentrált paraméteres rendszer állapotváltozós leírásával való analógiára. Ismertetem a hanglapban terjedő mechanikai rezgések leíró egyenleteit egy- és háromdimenziós esetben. Végül a végelem mátrixegyenlet alapján a módusalakok és sajátfrekvenciák számításának módját tárgyalom, és egy példán szemléltetem a válasz számítását a módusok segítségével tetszőleges gerjesztés mellett.

3.1.1 Koncentrált paraméteres rendszer

Mechanikai rendszer esetén a rendszer időfüggő állapotát a tömegpontok elmozdulása (kitérése) és az elmozdulás időbeli változása (a tömegpontok sebessége) határozza meg [11]. Koncentrált paraméteres esetben a tömegpontok – vagy más szóval szabadsági fokok – száma véges, diszkrét pontokba sűrített tömegek és a köztük

kifeszített rugó- és csillapításelemek alkotják a rendszert reprezentáló hálózatot. Feladatunk a mozgásegyenlet felhasználásával meghatározni a rendszer állapotának időfüggvényét ismert gerjesztés mellett. A kapcsolatot az elmozdulás, sebesség, gyorsulás és erő között rendre a merevség, csillapítás és tömeg adja.



3.1. ábra – Háromszabadságfokú koncentrált paraméteres rezgő rendszer

Például ha elképzeljük a 3.1. ábrán szereplő elrendezést, az f_3 erőre felírt egyenlet a következőképpen alakul:

$$k_2[u_3(t) + u_2(t)] + c_2[\dot{u}_3(t) + \dot{u}_2(t)] + m_3\ddot{u}_3(t) = f_3(t). \quad (1)$$

Az egyenletben k a rugómerevség, c a csillapítás, m a tömeg, u az elmozdulás és f az erő. Itt és a továbbiakban a t az idő jele, a változó feletti pont pedig az idő szerinti deriválást jelenti. Hasonló módon a többi (másik két) egyenlet is felírható, majd ezeket összevonhatjuk egy mátrixegyenletté:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2)$$

ahol \mathbf{K} a merevségmátrix, \mathbf{C} a csillapításmátrix, \mathbf{M} pedig a tömegmátrix. A (2) egyenletrendszer frekvenciatartományban:

$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega). \quad (3)$$

Esetünkben ebben az egyenletben a koncentrált paraméterértékekből kiszámíthatóak a mátrixok, az ω körfrekvencia és az \mathbf{f} erő ismertek, az \mathbf{u} elmozdulás pedig ismeretlen, mely a mátrixegyenlet megoldásával adódik. Más esetben lehetne az is kérdés, hogy ismert elmozduláshoz milyen erők tartoznak.

3.1.2 A Navier–Cauchy egyenlet

A xilofon hanglapjának modellezése során koncentrált paraméterek helyett elosztott paraméterekről beszélhetünk, ugyanis a hanglap kitérését a geometrián belül tetszőleges pontban értelmezhetjük. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a hanglapot folytonos mechanikai rendszerként, kontinuumként modellezzük [15]. Ebből kifolyólag a

matematikai háttér kicsit bonyolódik, bár a megoldandó egyenletrendszer alakját tekintve a koncentrált paraméteres esettel azonos eredményre jutunk.

A hanglap mozgását, lineáris, rugalmas deformációt feltételezve a Navier–Cauchy-egyenletek írják le. A mozgásegyenlet folytonos rendszer esetén az alábbi alakot ölti:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (4)$$

ahol ρ az anyag sűrűsége, $\boldsymbol{\sigma}$ pedig a mechanikai feszültség. Ebben az egyenletben ismeretlenek az \mathbf{u} elmozdulásfüggvény és a $\boldsymbol{\sigma}$ feszültségtenzor, melyek az \mathbf{x} tér- (az adott tértartomány fölött) és t időkoordináták folytonos függvényei. Az egyenlet felírásakor feltételeztük azt is, hogy a testre nem hatnak térfogati erők (pl. gravitáció vagy Coriolis-erő). Ezzel a feltételezéssel a továbbiakban is végig élni fogunk. Az ismeretlenek számának csökkentéséhez és a mozgásegyenlet megoldásához szükségünk van további összefüggésekre is.

Az általános Hooke-törvény a feszültségtenzor és a deformáció közötti kapcsolatot adja meg az anyag mechanikai tulajdonságait figyelembe véve:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5)$$

\mathbf{D} az anyagra jellemző merevségtenzor, mely tartalmazza a rugalmassági modulusokat és Poisson-arányokat. A merevségtenzor negyedrendű tenzor, a kettőspont jelölés a tenzorszorzatot jelenti. Az $\boldsymbol{\varepsilon}$ másodrendű tenzor a deformációt jelöli, melyet az alábbi összefüggés definiál:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (6)$$

A (6) egyenlet a deformáció és az elmozdulás viszonyát fejezi ki, így a (4)–(6) egyenleteket egyesítve kaphatunk egy olyan egyenletet, amelyben ismeretlenként már csak az elmozdulás szerepel. E három egyenlet együttes neve Navier–Cauchy egyenlet.

3.1.3 Elosztott paraméteres rendszer egydimenzióban

Egydimenzióban a (6) egyenletnek megfelelően a deformáció egyszerűen $\frac{\partial u}{\partial x}$ alakot ölt. Ezt behelyettesítve a Hooke-törvénybe a (7) egyenlet adódik:

$$\boldsymbol{\sigma} = E \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (7)$$

A merevségtenzor tehát egydimenzióban az E Young-modulussá alakul. A Young-modulus és a feszültség dimenziója felületegységre vett erő, így ezeket a mennyiségeket általában Pa mértékegységben adjuk meg. Ahogy a (6) definícióból is látszik, a deformáció dimenziótlan mennyiség. A továbbiakban, ha behelyettesítjük a (4) csak x koordinátától függő alakjába a (7) összefüggést, és feltételezzük, hogy az anyagjellemző ρ és E paraméterek konstansok, a következő alakot kapjuk:

$$\rho \ddot{u} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (8)$$

A (8) egyenlet tehát az egydimenziós mozgásegyenlet, aminek már csak a diszkretizálása van hátra. A diszkretizálás alatt a végeselem-módszer esetében két műveletet értünk. Először is a vizsgált térrészt véges számú és véges méretű, jellemzően egyszerű alakú (pl. tetraéder, gúla, háromszög alapú hasáb stb.) elemre bontjuk fel. Másrészt az elemek felett úgynevezett alakfüggvényeket veszünk fel, mely alakfüggvények szuperpozíciójával közelítjük a térben folytonos változóink helyfüggését. A szuperpozícióban szereplő lineáris kombináció súlyai lesznek a megoldandó mátrixegyenlet ismeretleni. Ezzel a (9) egyenlet adódik, mely alakilag azonos a koncentrált paraméteres eset (2) egyenletéhez. Egyedül a csillapítás hiányzik, amit a következő részben tárgyalok.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (9)$$

Érdemes még megjegyezni a következőket. A (8) egyenletből a (9) egyenletre való átalakítás során az \mathbf{f} erő az egyenlet gyenge alakjának integrál-átalakításaiból adódik, ezért a (8) egyenletben közvetlenül még nem szerepel. A hanglapra bizonyos elhanyagolásokkal egydimenziós rendszerként is tekinthetnénk, ekkor viszont nem a (8) összefüggésből érdemes kiindulni, hiszen az a hanglap vastagságát nem veszi figyelembe, így a hangkeltés során az elsődlegesen fontos hajlító mechanikai hullámok leírására nem alkalmas. A hajlító rezgések terjedését egydimenzióban térben negyedrendű, időben másodrendű parciális differenciálegyenlet írja le, melyet dolgozatomban nem tárgyalok. Az egydimenziós modell itt pusztán szemléltetésként szerepel, a háromdimenziós leírás előkészítése érdekében.

3.1.4 Csillapítás figyelembe vétele

Az elosztott paraméterű lineáris, rugalmas rendszer csillapítását az η viszkozitás fejezi ki. A viszkózus modell szerint az anyagban a feszültségtenzor nem pusztán a

pillanatnyi deformációtól függ, hanem a deformáció időbeli megváltozásától is. A viszkoelasztikus veszteség a mechanikai alakváltozás hatására keletkező hő és súrlódási veszteségeket írja le. A legegyszerűbb lineáris, viszkoelasztikus modell figyelembevételével a (7) Hooke-törvénybe egy újabb tag kerül be:

$$\boldsymbol{\sigma} = E \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \eta \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \right). \quad (10)$$

Ezt behelyettesítve a megfelelő egyenletekbe, akárcsak a veszteségmentes esetben, diszkrétizálás után a tömeg- és merevségmátrixos tag mellett megjelenik a csillapításmátrix is:

$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (11)$$

Így a koncentrált paraméteres esettel azonos alakú mátrixegyenlet adódott. Természetesen a két egyenlet mögött más-más számítási háttér és gondolatmenet van, mégis a diszkrétizálás és alakfüggvények használatával az általános végeelem mátrixegyenlettel szimulálhatunk a következőkben is. A lineáris, viszkoelasztikus veszteségmodell alkalmazása esetén a \mathbf{C} csillapításmátrix a \mathbf{K} merevségmátrix η -szorosaként adódik, így arányos vagy más néven proporcionális csillapításról beszélhetünk. Ezt a tulajdonságot a módusok számításánál az alábbiakban ki is használjuk.

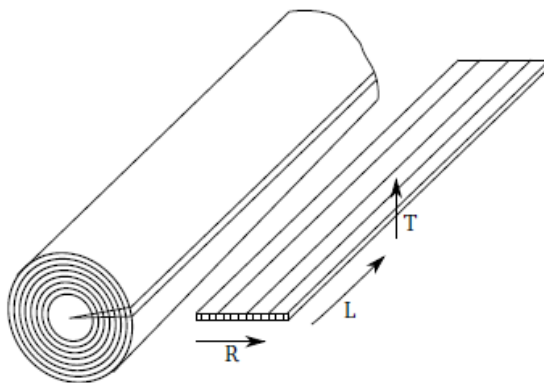
3.1.5 Elosztott paraméteres rendszer háromdimenzióban

Háromdimenziós modell esetén a különbséget az eddigiekhez képest az adja, hogy a deformáció és feszültség viszonyát nem pusztán egy skalár fejezi ki, sőt már maga a feszültség és deformáció sem egy egyszerű skalárok. Térben az egyszerű egydimenziós húzó hatás mellett nyíró erőkkel is számolnunk kell, vagyis az erőhatásnak normális és tangenciális irányú komponensei is vannak. Emellett normális irányú húzófeszültség alkalmazása esetén megfigyelhetjük, hogy míg a feszültség irányában a test nyúlik (a relatív alakváltozás pozitív), addig keresztirányokban a test összehúzódik (a relatív alakváltozás negatív). Ezt a hatást számszerűsítik a ν_{ij} Poisson-számok, ami a j irányban ható húzófeszültség hatására az i irányú relatív összehúzódást fejezik ki. Segítségükkel a relatív alakváltozás kifejezhető, pl. x -irányú komponense a következő formát ölti:

$$\frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{1}{E_x} (\sigma_{xx} - \nu_{xy}\sigma_{yy} - \nu_{xz}\sigma_{zz}). \quad (12)$$

Az y és z komponens hasonló alakban írható, majd ezeket ismét behelyettesítve az eddigi egyenletekbe, és diszkrétizálva azokat, visszkapjuk a már jól ismert mátrixegyenletet.

Dolgozatomban kétféle anyagmodellt használok: izotróp és ortotróp modelleket. Az izotróp anyagmodell sajátossága, hogy az anyagban nincsenek kijelölt irányok, a deformáció mértéke nem függ pl. a húzófeszültség irányától. Ebben az esetben az anyagparaméterek a skalár E Young-modulus és a ν Poisson-szám. Az izotróp modell előnye egyszerűsége, ez az egyszerűsített modell jól közelíti pl. homogén fémek viselkedését. Faanyagok esetében azonban bonyolultabb anyagmodellre van szükség, ugyanis a faanyagok mechanikai viselkedése nagyon eltérő a fa szálirányában és az arra merőleges irányokban. Bár a faanyagok jellemzően nem homogének, viszonylag jó közelítéssel modellezhetők homogén, de ortotróp, irányfüggő viselkedésű anyagként. A faanyagban a szálirányt általában longitudinális (L) iránynak, az évgyűrűk normális irányát radiális (R) iránynak, az évgyűrűk érintőinek irányát pedig tangenciális (T) iránynak (3.2. ábra) szokás nevezni. Az anyagparaméterek száma ekkor az izotróp eset két paraméterével szemben kilencre növekszik: a három irányú Young-modulus, a három független Poisson-szám és három nyíró modulus. Ezeket az anyagparamétereket nem triviális megmérni sem, közelítő értékeiket a [16] adatbázis alapján határoztam meg. Jellemző viszont, hogy az $E_L : E_R$ arány a hangszerek faanyagainál nagyjából 10:1 körüli érték, ami jól indokolja az izotrópnál lényegesen bonyolultabb anyagmodell használatát.



3.2. ábra – Ortotróp falemezek longitudinális, radiális és transzverzális irányainak definíciója [10]

3.1.6 Módusok számítása

A végeelem-módszer (3) vagy (11) alakú mátrixegyenletét többféleképpen is meg lehet oldani. Egyik megoldási módja a modális leírás használata. A modális leírás több szempontból is hatékony eszköz a rendszer válaszáinak meghatározására. Egyrészt a módusalakok lineárisan függetlenek, így bármely rezgésalak megadható a módusalakok

egyértelműen kiszámítható lineáris szuperpozíciójaként. Másrészt, a rendszermátrixok matematikai tulajdonságainak (\mathbf{K} szimmetrikus, pozitív szemidefinit, \mathbf{M} szimmetrikus, pozitív definit) köszönhetően a módusalakok ortogonálisak, így a módusalakok koordináta-rendszerében a részesedési tényezők (modális koordináták) csatolatlanok, így egymástól függetlenül kiszámíthatók. Végül, a módusalakokhoz tartozó sajátfrekvenciák meghatározzák a szabadrezgés során az egyes módusalakokhoz tartozó rezgés frekvenciáját. Így könnyen meghatározható, hogy például a hanglap rezgése során mely módusok fognak a hallható tartományban rezegni és melyeket lehet a hanglesugárzás frekvenciatartományát tekintve elhanyagolni. A modális bázis alkalmazásával illetve az utóbbi elhanyagolással jelentősen csökkenthető a megoldandó egyenletrendszer mérete.

A modális bázisba történő áttéréshez először ki kell számítani a rendszer sajátfrekvenciáit és a hozzájuk tartozó módusalakokat, majd ezeket a gerjesztésnek megfelelően súlyozva a válasz már könnyedén meghatározható. Első lépésben zérus gerjesztést és csillapítatlan rendszert feltételezünk és a frekvenciatartományban írjuk fel egyenletünket. Ekkor a (3) egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\varphi} = 0. \quad (13)$$

A (13) egyenlet egy általánosított sajátérték feladat, melyben ω a sajátfrekvenciákat jelöli (a sajátértékek ω^2 -ként adódnak), $\boldsymbol{\varphi}$ pedig a sajátvektorokat. Ezt úgy tudjuk értelmezni, hogy az eredeti geometria tetszőleges gerjesztéssel elindítva, majd további gerjesztés nélkül magára hagyva (szabadrezgésben) az ω körfrekvenciákon $\boldsymbol{\varphi}$ alakokban tud rezegni. Ahogy a következő szakaszban bemutatom, a különböző rezgésalakok súlyozása (részesedési tényezője vagy modális koordinátája) a gerjesztéstől függ.

3.1.7 Modális szuperpozíció alkalmazása

A rendszer elmozdulásválasza tetszőleges gerjesztésre a módusalakok és a hozzájuk tartozó részesedési tényezők segítségével adható meg:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N q_i \boldsymbol{\Phi}_i, \quad (14)$$

ahol a q_i a $\boldsymbol{\Phi}_i$ módusalak részesedési tényezője, N pedig a módusok száma. A megoldásban az elmozdulásválasz időfüggését a részesedési tényezők időfüggése írja le, a helyfüggést pedig a módusalakok határozzák meg. Az egyenlőség helyett korlátozott frekvenciatartományon érdemes redukált modális bázist alkalmazni, például esetemben

feleslegesek a 20 kHz alatti (azaz a hallható tartományban történő) számításához az a fölötti módusok, elegendő a Rubin-kritériumnak megfelelően 30 kHz frekvenciáig figyelembe venni őket, így csökkentve a megoldandó egyenletrendszer méretét és a szimuláció számításigényét. A (14) összefüggés segítségével felírható a csillapítás nélküli mátrixegyenlet:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (15)$$

ahol Φ jelöli a módusalakokat a mátrix oszlopaiba rendezve. Ezt az egyenletet Φ^T -tal beszorozva a következő alakot kapjuk:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} - \omega^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f}. \quad (16)$$

Ebben az egyenletben a baloldalon diagonális mátrixokat kapunk, így (16)-ban egymástól független egyenletek szerepelnek. Ezt átrendezve bármelyik q_i modális koordináta kiszámítható a következő összefüggéssel:

$$q_i = \frac{\Phi_i^T \mathbf{f}}{\omega_i^2 - \omega^2}, \quad (17)$$

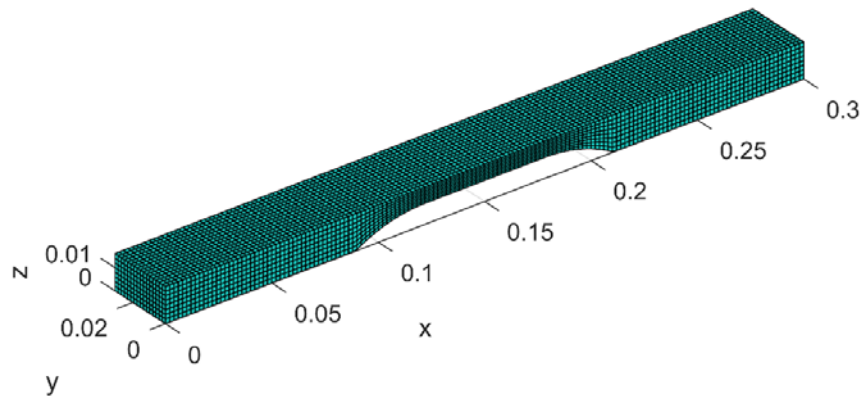
ahol ω_i a Φ_i módusalakhoz tartozó sajátfrekvencia, ω pedig a vizsgált frekvencia. Az összefüggésben kihasználtuk, hogy a módusalakok a tömegmátrixra ortonormáltak, vagyis $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$ egységmátrix. A (17) formula alapján látszik, hogy ha ismertek a sajátfrekvenciák és a hozzájuk tartozó módusalakok, akkor tetszőleges gerjesztés esetén számíthatóak a súlyok és segítségével (14) alapján a válasz is.

Ahogy a 3.1.4. szakaszban említettem, a viszkoelasztikus csillapításmodell arányos csillapításhoz vezet. Arányos csillapítás esetén a \mathbf{C} csillapításmátrix $\mathbf{C} = a\mathbf{K} + b\mathbf{M}$ alakban írható fel, és a csillapítással a (16) összefüggésben megjelenő $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ mátrix szintén diagonális lesz. A csillapítás hatására a sajátfrekvenciákhoz $\xi_i = \frac{1}{2} \left(a\omega_i + \frac{b}{\omega_i} \right)$ csillapítási tényező fog tartozni, szabadrezgés esetén pedig ennek megfelelően exponenciális burkolóval lecsengő harmonikus függvények lesznek a modális koordináták.

3.1.8 A hanglapmodell

A hanglap tényleges geometriáját geometriai transzformációval alakítottam ki meglévő, valós xilofon hanglap méretek alapján. Első lépésben felvettem egy téglatest alapot, amit felosztottam sok kisebb részre (a végelemeknek megfelelően), majd

bizonyos elemeket eltoltam és deformáltam a hangolóváját méreteinek megfelelően, így kialakítva a 3.3. ábrán látható kivágást is tartalmazó hanglapot. Az általam vizsgált hangszer esetében a hanglapok magassága 16 mm, szélességük 31 mm, hosszuk viszont eltérő, 24 és 32 cm között változik. A kivágás hossza és annak magassága (körülbelül az eredeti magasság fele) is különbözik, viszont a kivágás szélén lévő kör átmérője (125 mm) megegyezik.

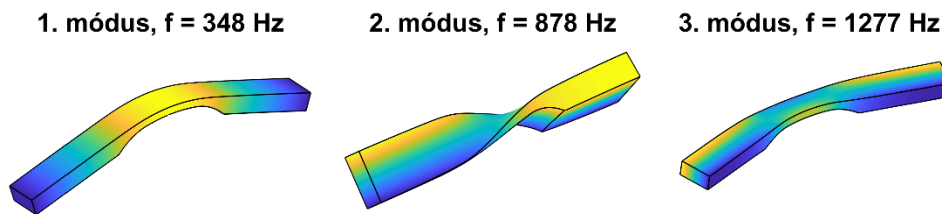


3.3. ábra – Egy hanglap a megfelelő kivágással. (A tengelyek skálázása méterben adott.)

A hanglapot szimuláció előtt még fel kellett ruháznom az anyagjellemzőkkel is, mint például a már említett Poisson-számok és Young-modulusok, ezzel a lépéssel lesz a pusztán geometriai hálóból végeelem modell. A modellt Matlab környezetben alkottam meg, itt ugyanis rendelkezésemre állt a tanszéki fejlesztésű végeelem könyvtár (toolbox), mely beépített függvényeket tartalmaz például egyszerű geometriák hálózására, illetve a rendszermátrixok összeállítására. A számításhoz használt fontosabb függvényeket a következőkben említeni fogom, a függvények nevét dőlt betűvel írva.

A tömeg- és merevségmátrix az *elastic_mk* függvény segítségével számíthatók, a sajátfrekvenciák és módusalakok pedig a Matlab beépített sajátérték-feladatot megoldó *eigs* függvényével adódtak. A 3.4. ábrán megfigyelhető az F4 hang első három sajátfrekvenciájához tartozó módusalak. Ahogy ez az ábrán is látszik, az első módus a számunkra legfontosabb vertikális módus, amit egy torziós, majd egy horizontális rezgésalak követ. Érdekes még megjegyezni, hogy mivel a mechanikai rendszert befogási kényszerek (alátámasztás vagy merev rögzítés) nélkül vizsgáljuk, a móduselemezés során megkapjuk a test úgynevezett merevtestmódusait is, melyekhez mind a zérus sajátfrekvencia tartozik, a módusalakok pedig a három térkoordináta szerinti merev testként való elmozdulások és a három tengely körüli, szintén merev testként való elfordulások lineáris szuperpozíciójaként adódnak. Mivel a merevtestmódusok a

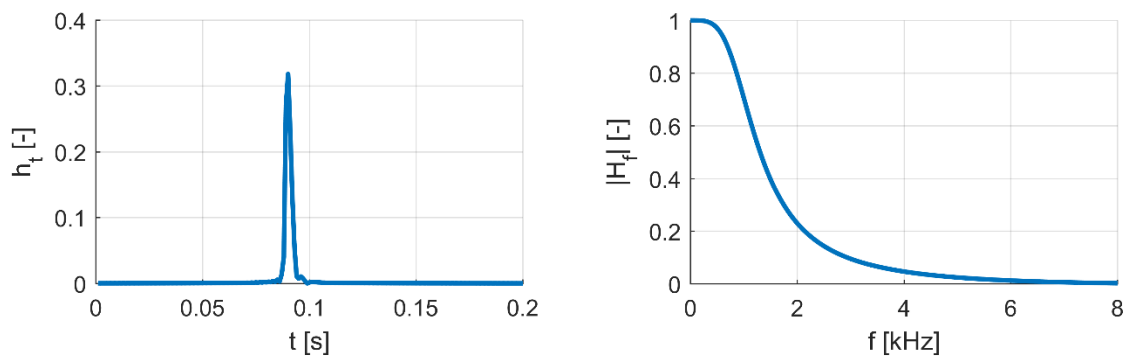
hanglesugárzás szempontjából jelentéktelenek, a hangszeres játék során pedig a hanglap alátámasztása meggátolja kialakulásukat, a továbbiakban ezekkel nem foglalkozom.



3.4. ábra – Az F4 hanglap első három sajátfrekvenciája és módusalakja

3.1.9 Válasz számítása impulzusszerű gerjesztés esetén

Szemléltetésként tekintünk azt az egyszerűsített esetet, amikor a hanglap gerjesztése egy tetszőleges pontban ható időben pillanatszerű, frekvenciatartományban pedig egységnyi spektrumú erőeloszlás. A valóságos gerjesztést jobban modellezhetjük, ha az ideális impulzus helyett annak egy aluláteresztő szűrőn átengedett verziójával gerjesztjük a hanglapot. Egy ilyen impulzust mutat a 3.5. ábra az idő- és frekvenciatartományban.

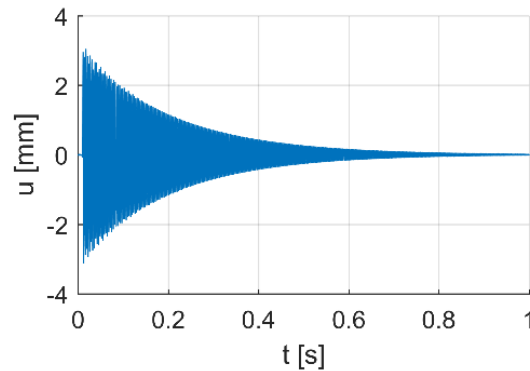


3.5. ábra – A pontgerjesztés idő-, és átviteli függvénye

A fenti gerjesztéshez tartozó részesedési tényezőket (q_i súlyokat) a frekvenciatartományban számítottam ki, melyet aztán a Matlab *ifft* függvényével transzformáltam vissza időtartományba. Így tehát a már meglévő módusalakkal és a most kiszámított modális koordinátákkal már tetszőleges pontban számítható a fentebb leírt gerjesztés által keltett elmozdulás. A módszer előnye, hogy a gerjesztés megváltoztatása esetén csak a részesedési tényezőket kell újra kiértékelni.

A bemutatott számítási lépések elvégzésével ismertté vált az elmozdulás a geometria bármely pontjában bármely gerjesztés utáni időpillanatban. Ha kiválasztunk egy tetszőleges pontot és ott rögzítjük a kitérésértékeket a gerjesztés után, a 3.6. ábrához

hasonló időfüggvényt kaphatunk. A hanglap egy pontjában az elmozdulás időfüggvénye akár hangként is meghallgatható. Ez a hang, habár az akusztikai lesugárzást nem tartalmazza, jellegében már nagyon hasonlít a xilofon hangjához.



3.6. ábra – z irányú elmozdulás időfüggése

A mechanikai végelem-módszer és a modális leírás segítségével tetszőleges gerjesztésre ki tudjuk számítani a hanglap rezgését. A továbbiakban látni fogjuk, hogyan vizsgálható a hanglap az időtartományban is a módusok segítségével, illetve azt is, hogy a hanglap elmozdulása hogyan fogja tovább gerjeszteni az őt körülvevő hangteret és az ebben elhelyezkedő akusztikai rezonátort.

3.2 A rezonátor modellezése akusztikai végelem-módszerrel

A rezonátor, ahogy ez már szóba is került, két fontos feladatot lát el a hangszeres játék során. Egyrészt az akusztikai rövidzárát szünteti meg, ami az önmagában rezgő hanglap körül alakul ki, illetve a hanglap által keltett hangnyomáshullámok egy részét felerősíti, azok frekvenciájától függően. Ebben az alfejezetben a hangszer e részéről lesz szó, először csak önmagában, később a hanglapokkal együtt vizsgálom viselkedését, különböző gerjesztések esetén.

3.2.1 Az akusztikai végelem-módszer mátrixegyenlete

A hullámegyenlet a klasszikus mechanikában és elektrodinamikában egy olyan idő- és térkoordinátában is másodrendű parciális differenciálegyenlet, amely leírja a hullám terjedését az anyagon (közvetítő közegen) keresztül. Jelen esetben (időben harmonikus függvényeket feltételezve) a hullámegyenlet a Helmholtz-egyenletre egyszerűsödik:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad (18)$$

ahol k a hullámszám, p pedig a hangnyomás.

A Helmholtz-egyenlet mellett az akusztikai végelem-módszer levezetésében az Euler-egyenletet használjuk fel az alábbi alakban:

$$\nabla p + j\omega\rho_0\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (19)$$

ahol ω a körfrekvencia, ρ_0 a közeg egyensúlyi (átlagos) sűrűsége, \mathbf{v} pedig a részecskesebesség. A (19) egyenlőség a teljes hangtérben fennáll, viszont a peremeken kiemelt jelentőséggel bír, ugyanis ott esetenként ismert a részecskesebesség (például ismert a hanglap rezgésebbessége), így az Euler-egyenletet a peremfeltételek megadásához használhatjuk.

A peremfeltételekről az eddigieknél részletesebben is érdemes szót ejteni az akusztikai rendszer esetében. A hanglapokkal ellentétben, a rezonátor szimulációjánál nem zárt, véges térrészt vizsgálunk, hanem a rezonátor a nyílt térrel van kapcsolatban a nyílásán keresztül. Mivel a végelem-módszer számításához véges sok elemre kell felbontanunk a teret, így a végtelen tartomány modellezése külön kihívást jelent. A nyílt problémák megoldásához többféle közelítő módszer is ismert [18], ezek közül az úgynevezett végtelen elem módszert alkalmazom a továbbiakban. A végtelen elemek a hagyományos háromdimenziós végelemekhez hasonlóan viselkednek, azzal a különbséggel, hogy geometriai vetítéssel az egyik dimenzió mentén valóban végtelen a kiterjedésük. Abban az irányban, melyben az elemek mérete végtelen, az elemen belül az alakfüggvények a geometriai csillapítást és az adott hullámszámmal történő oszcillációt tökéletesen leírják [1][2]. Így a véges térrész peremére a végtelen elemeket illesztve reflexiómentes peremfeltételt kapunk, ami a nyílt tér viselkedését közelíti. A közelítés pontosságát egy fokszám paraméterrel lehet befolyásolni, mely azt adja meg, hogy a végtelen irányban hány szabadságfokkal írjuk le az oszcilláló alakfüggvényt. A végtelen elemeket esetünkben az akusztikai számítási tartomány peremének egy része mentén helyezük el, ezzel modellezve azt, hogy a rezonátor szabad térbe vagy féltérbe sugároz, ahonnan nem érkeznek visszaverődő hullámok.

A geometriai diszkretizáció és az alakfüggvények felhasználása után a mechanikaihoz hasonló akusztikai végelem mátrixegyenlet adódik:

$$(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{p} = -j\omega\mathbf{A}\mathbf{v}. \quad (20)$$

A jobboldalon megjelenő \mathbf{A} mátrix a felületen értelmezett alakfüggvények felhasználásával adódik, ez kapcsolja össze a felületen diszkretizált részecskesebességet

a hangnyomás felületi szabadságfokaival. A mechanikai rendszerhez képest különbséget jelent a gerjesztés és a keresett megoldás értelmezése: mechanikai esetben a fellépő erőket vagy erőeloszlást tekintettük a rendszer gerjesztésének és az elmozdulást kerestük, mint válasz, ezzel szemben az akusztikai modellben a peremen vett normális irányú részecskesebességgel gerjesztünk, és a nyomásteret keressük. Szintén különbséget jelent, hogy míg a mechanikai esetben arányos csillapítással számolhattunk, addig az akusztikai rendszerben a \mathbf{C} csillapításmátrix a végtelen elemek geometriájából adódik és az adódó mátrix nem arányos a \mathbf{K} és \mathbf{M} mátrixokkal.

3.2.2 Fali viszkózus veszteség számítása

Az előző pontban úgy tekintettünk a modellre, mintha a levegőt határoló falak közvetlen környezetében is nemzérus tangenciális irányú sebességgel mozognának a részecskék. Ez természetesen nem igaz, a realisztikus modellben és a valóságban közvetlenül a fal mellett a közeg viszkozitása miatt zérus a sebesség, attól távolodva pedig egy vékony határrétegben a részecskesebesség nagysága folyamatosan exponenciálisan nő. A fali veszteség figyelembe vételéhez olyan formalizmust használhatunk, mely a viszkózus veszteséget a falon megadott admittancia peremfeltétellé alakítja át [7]. A végelem egyenletrendszerbe ezt a peremfeltételt az \mathbf{Y} admittanciamátrix segítségével tudjuk beépíteni, melynek Y elemeit az alábbi módon tudjuk számítani [17]:

$$Y = \frac{v_n}{p} = \frac{1}{\rho_0 c} \sqrt{jk l_v \left[(1 - \xi^2) + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\text{Pr}}} \right]}, \quad \xi = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{v}|}, \quad l_v = \frac{\mu}{\rho_0 c}. \quad (21)$$

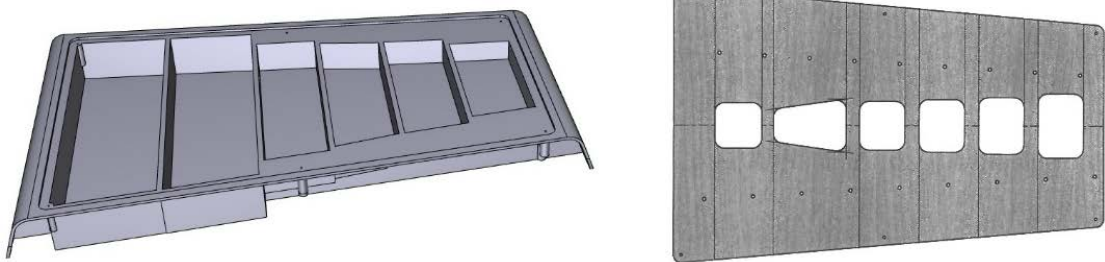
(21) egyenletben a ξ a részecskesebesség-vektor és a fal bezárt szögét jellemzi, l_v a viszkózus skálahossz, γ az adiabatikus kitevő, Pr a Prandtl-szám, μ a közeg dinamikus viszkozitása. Az így adódó admittanciamátrix diagonális és csak a fali peremekhez tartozó csomópontokban van nemzérus értéke. Amint a (21) összefüggésből látható, az akusztikai admittancia a normális irányú részecskesebesség és a hangnyomás közötti összefüggést írja le.

Az \mathbf{Y} mátrix kiszámítása után, azt be lehet illeszteni a már jól ismert (20) mátrixegyenletbe, melyben, várakozásunknak megfelelően, a fali veszteséget leíró tag további csillapításként jelenik meg. Így a következő kiegészített, fali veszteséget is figyelembe vevő mátrixegyenletet kapjuk:

$$[\mathbf{K} + j\omega(\mathbf{C} + \mathbf{AY}) - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{p} = -j\omega\mathbf{Av}. \quad (22)$$

Annak ellenére, hogy a különbség az eredeti (20) egyenlethez képest pusztán az \mathbf{AY} tag, a (22) egyenlet megoldása korántsem olyan egyszerű, mint amilyennek látszik, ugyanis ahhoz, hogy ki tudjuk számítani az \mathbf{Y} mátrixot szükség van a \mathbf{p} nyomástérre, és fordítva. Ezt az ellentmondást úgy lehet feloldani, ha az egyenletrendszert több iterációban oldjuk meg. Első lépésben vesszük a (20), \mathbf{Y} nélküli mátrixegyenletet és megoldjuk. Ezzel adódik egy \mathbf{p} nyomástér, aminek segítségével számolunk egy \mathbf{Y} mátrixot, amit ezúttal már fel tudunk használni a (22) egyenlet megoldásánál. Ekkor egy pontosabb, korrigált nyomásteret kapunk, amit ismét be tudunk helyettesíteni \mathbf{Y} képletébe. Ezt az iterációt tetszőlegesen sok lépésen át lehet folytatni, lépésről lépésre pontosítva a megoldást, ám a gyakorlat azt mutatja, hogy 2–3 iteráció után a nyomástér már nem változik számottevően, a korrekciók relatív nagyságrendje eléri a számítógépes számábrázolás kerekítési pontosságát.

3.2.3 A rezonátormodell

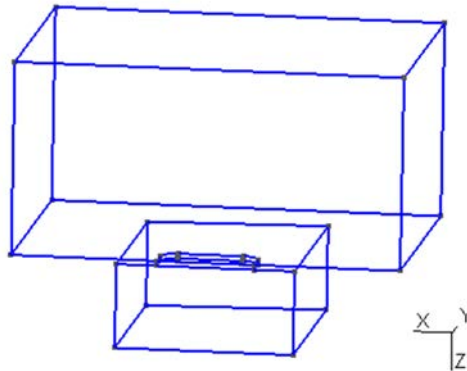


3.7. ábra – Az általam szimulált rezonátorok teste és fedlapja

A rezonátorok, ahogy azt a 2.2. fejezetben is említettem, egy fa, vagy műanyag testben kialakított vájatok. Az 3.7. ábrán láthatóak az általam szimulált rezonátorok. A bal oldalon megfigyelhető a rezonátor teste, amiben elhelyezkednek a vájatok, erre kerül a jobb oldalon található fedlap. Ezek együttese alakítja ki a rezonátorüregeket. A lapon minden rezonátorhoz tartozik egy lyuk, amin keresztül lehet gerjeszteni az egyes rezonátorokat. A fedlap fölött találhatóak a már tárgyalt hanglapok, első lépésben azonban a hanglap nélküli esetet tekintjük.

Az elkészítendő geometria nem csak a rezonátor által körülhatárolt trapéz alapú hasázból áll, hanem tartalmazza a lyuk által körülhatárolt lekerekített téglalap alapú hasábot is, sőt a lyukat körülvevő szabad térnek egy bizonyos részét is. Azért szükséges ezeket az elemeket is belevenni a teljes geometriába, mert nem egy véges test szimulációját végezzük, hanem egy részben határok közé zárt, de ugyanakkor a szabad

térben lévő levegő viselkedését vizsgáljuk. A rezonátor szimulációjához szükséges geometria tehát meglehetősen szabálytalan alakú, így a modellt célszerűbb valamely erre specializálódott programban létrehozni. A rezonátorok végeelem-modelljének elkészítéséhez a Gmsh programot [13][14] használtam. Ebben először pontokat jelöltem ki, majd azok összekötésével alakultak ki a szimulált teret határoló élek, sík- és görbült felületek és végül a végelemekkel behálózott térfogat.

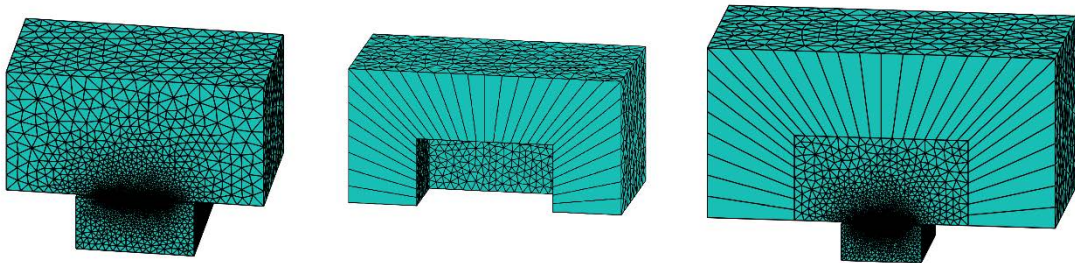


3.8. ábra – Egy rezonátormodell geometriája a Gmsh programban

A 3.8. ábrán az általam modellezett egyik rezonátor látható. Megfigyelhető maga a rezonátor rész az ábra alsó részén. A felül található nagyobb téglatest a rezonátort körülvevő végtelen akusztikai térnek egy része. E térrész méreteinek megválasztásánál figyelni kell arra, hogy egy bizonyos térfogat alatt kevésbé megfigyelhetőek a sugárzás vizsgálандó paraméterei, ellenben a túl nagy térfogat pedig a szükséges számítási kapacitást növeli meg. Szembeötlő az is, hogy a teljes rezonátornak csak a fele szerepel az ábrán. Mivel a vizsgált modell szimmetrikus, így elég esetben csak a szimmetriasík egyik oldalát vizsgálni, ugyanis a másik oldalra is hasonló eredmény adódna, így pedig azonos térbeli felbontás mellett feleannyi elemre van szükség. A szimmetriasíkon zérus részecskesebesség peremfeltétel vehető fel, amennyiben a gerjesztés is az adott síkra szimmetrikus.

Ezután, akárcsak a mechanikai esetben, a tér felosztása, vagyis a geometriai háló elkészítése következett. Ehhez tetraéder elemeket használtam. Az elemek méretének megválasztásánál azt érdemes szem előtt tartani, hogy egy hullámhosszra legalább hat elem essen, az elem élhosszát tekintve. Ugyanakkor itt is érdemes figyelni a számítási kapacitásra is, ugyanis az elemméret csökkenésével az elemszám és így a mátrixok mérete is nő.

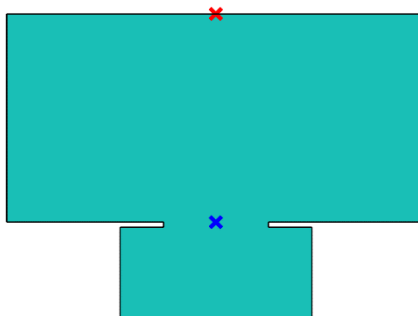
A geometriai hálót (mesh-t) ezután beolvastam a Matlab függvénykönyvtár formátumába (3.9. ábra bal oldal) és a szimuláció további részeit már a Matlab modellen végeztem. A teljes modell ezzel még nincs készen, ugyanis eddig még csak egy véges tér szerepel a geometriában. A végtelen elemek kialakítása az egyik utolsó lépés. Ezt a térrészt a rezonátor felett elhelyezkedő téglatest lapjainak kijelölésével és az ezeket alkotó háromszöglapok vetítésével lehet megadni. Az így kialakított végtelen elemek a 3.9. ábra középső diagramján láthatók, a teljes, végtelen elemekkel kiegészített modell pedig a 3.9. ábra jobb oldalán található. Az ábrázolásban a végtelen elemek is véges méretűként vannak megjelenítve, viszont az ábrán jól látható a vetítéssel kijelölt, végtelennek tekintett irány. Ezután már csak az anyagjellemzőket kell megadni, ami az akusztikai esetben a ρ_0 átlagos sűrűség és a c hangsebesség.



3.9. ábra – A behálózott mesh, a vetített végtelen elemek és a teljes modell Matlab-ban

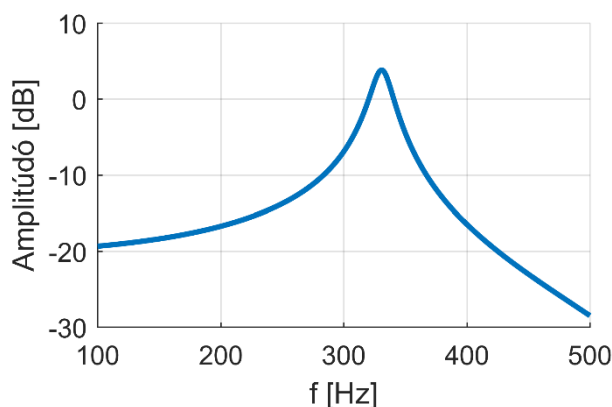
3.2.4 Rezonanciafrekvencia vizsgálata

A teljes modellel már számíthatók a szükséges **M**, **K** és **C** mátrixok, így a (20)-ból már csak a **p** és **v** vektorok ismeretlenek. A rezonanciafrekvencia vizsgálata során egységnyi pontgerjesztést alkalmaztam, a rezonátor fölötti legtávolabbi véges és végtelen elem határon lévő pontban (3.10. ábra piros kereszt). Ebben a pontban a nyomás tehát egységnyi, minden más pontban a nyomás ismeretlen. A pontszerű gerjesztés egy úgynevezett passzív mérés idealizált modellje, melynél a rezonátorokat nem a hanglap, hanem egy külső hangforrás (hangszóró) gerjeszti. A rendszerre úgy tekintettem, hogy a falak végtelen merevek, így a **v** vektor nullvektor. Ezzel már (20) tetszőleges frekvenciákra megoldható, akár mátrixműveletekkel, akár a már ismert móduselemzéssel is. Én az előbbit alkalmaztam. Mivel rendelkezésemre álltak mért eredmények, így a vizsgált frekvenciatartományt a mért rezonanciafrekvenciák bizonyos környezetére választottam.



3.10. ábra – A gerjesztett (piros kereszt) és a vizsgált (kék kereszt) pont

A (20) egyenlet megoldásával tehát előáll a teljes nyomástér a vizsgált tartományon. Az átviteli függvény ábrázolásához e pontok közül célszerű egyet kiválasztani és abban a pontban megfigyelni az erősítést a frekvencia függvényében.



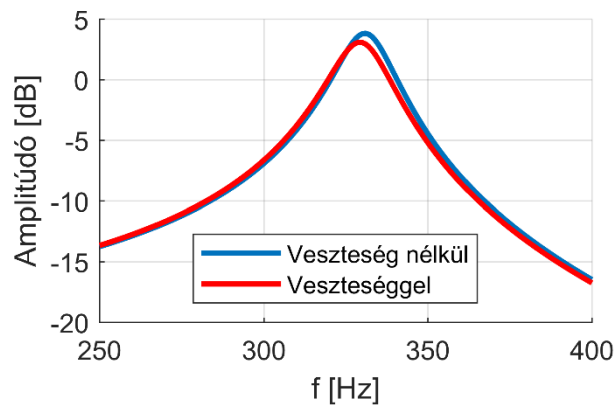
3.11. ábra – A legnagyobb rezonátor frekvenciamenete

A 3.11. ábrán a legalacsonyabb hangmagasságú hanglaphoz tartozó rezonátor frekvenciamente látható. A vizsgált pont közvetlenül a nyílás fölött található közepen (3.10. ábra kék kereszt). Megfigyelhető, hogy a rezonátor kiemeléssel rendelkezik 330 Hz körül, a hozzá tartozó hanglapok (C4, D4) alapfrekvenciái pedig 261 Hz és 293 Hz. Ez még nem jelentene önmagában jól behangolt rezonátort, de a továbbiakban látni fogjuk, milyen fontos hatásokat nem vettünk még figyelembe az eddigi modellel. Szintén jól látható az ábrán, hogy a rezonancia csúcs véges magasságú és szélességű, amit a sugárzási veszteség magyaráz.

3.2.5 Viszkózus veszteség szimulációja

A 3.12. ábrán a fali, viszkózus veszteség hatása figyelhető meg. Látszik, hogy a fali veszteség figyelembe vételével kissé alacsonyabb frekvenciákra tolódik a kiemelt tartomány, illetve a csúcs amplitúdója kissé lecsökken. Fontos megjegyezni, hogy az

ábrán a különbséget csupán a falis veszteség adja, a sugárzási veszteséget mindkét modell tartalmazza.

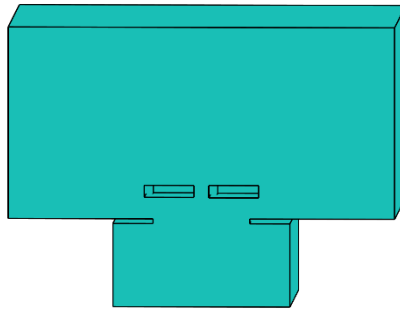


3.12. ábra – A legnagyobb rezonátor frekvenciamenete korrekcióval és nélküle

A falis veszteségnek az ábra szerint túl nagy hatása nincs. Ez a fajta veszteség a rezonátorhoz tartozó lyuk kerületével, míg a sugárzási veszteség a lyuk területével van összefüggésben. Mivel modellemben a lyuk relatív terület / kerület aránya viszonylag nagy, így a sugárzási veszteségnek van nagyobb, domináns hatása. A többi rezonátor esetében sem várhatunk mást, ugyanis a sugárzási impedancia a frekvencia függvényében négyzetesen nő, így nagyobb frekvencián még inkább annak lesz nagyobb hatása. Újabb rezonátorkialakításoknál, ahol egy rezonátorhoz egy hanglap tartozik, a lyuk mérete lényegesen kisebb, mint az eddig tárgyalt modellben. Ennek köszönhetően ott a viszkózus veszteségre sokkal inkább érdemes odafigyelni. A továbbiakban a fenti rezonátoroknál az említett okok miatt a falis veszteséget nem veszem figyelembe.

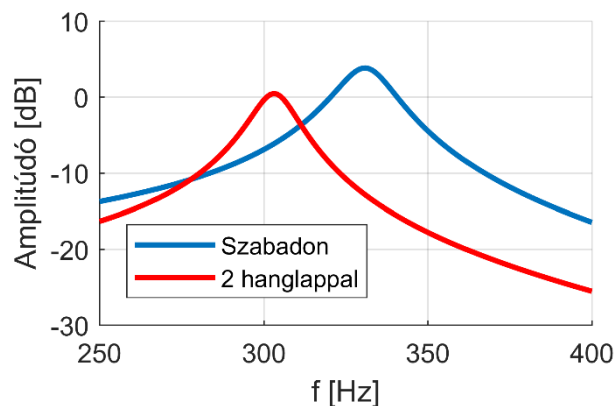
3.2.6 Hanglap hatása a rezonátorra

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a rezonátor nem csak egyedül van a térben, hanem már megjelennek a hanglapok is. A következő modellben szerepel a rezonátor és két hanglap, de a hanglapok csak merev testként szerepelnek, a térnek két „kivágásaként” jelennek meg. Az ennek megfelelő geometria a 3.13. ábrán látható.



3.13. ábra – A rezonátor két hanglappal

Az ezután következő lépések teljes mértékben megegyeznek a 3.2.3. és 3.2.4. szakaszokban taglalt lépésekkel, tehát a végtelen elemek vetítése, anyagjellemzők megadása, illetve a (20) egyenlet megoldása következik. A gerjesztés ebben az esetben is egységnyi pontgerjesztés, ugyanolyan módon mint a hanglap nélküli esetben a 3.10. ábrának megfelelően.



3.14. ábra – A legnagyobb rezonátor frekvenciamenete 2 hanglappal és nélkülük

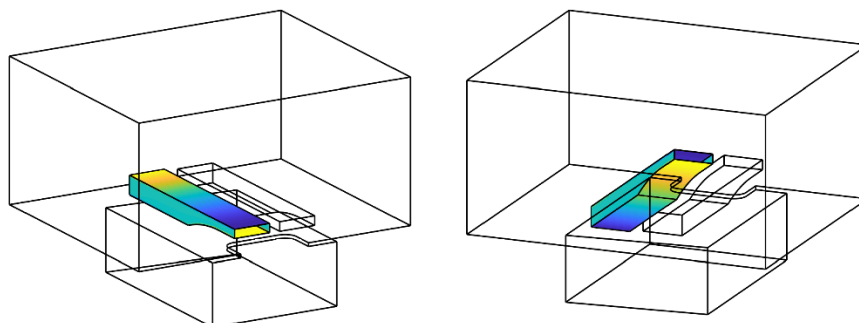
A 3.14. ábrán jól látható a 2 hanglap hatása. Ahogy azt korábban is említettem, a hanglapok a rezonátor szája előtt akadályként jelennek meg, emiatt jelentősen csökkentik a rezonanciafrekvenciát. Ez a hatás esetünkben jó, ugyanis ezzel kissé 300 Hz fölé kerül a rezonátor sajátfrekvenciája, jóval közelebb a C4 és D4 hanglapok frekvenciájához, mint a 3.2.4. fejezetben.

3.2.7 Rezonátor hatása a hanglapra

Az előbbi szakaszokban a rezonátor szempontjából vizsgáltuk meg a hanglap hatását a rezonanciafrekvencia változásán keresztül. Fordítsuk meg az eddigi helyzetet és vizsgáljuk meg a 3.2.6. szakaszban tárgyalt elrendezést fordított szemszögből is. Először tekintsünk pusztán egy hanglapot, és vizsgáljuk meg, milyen akusztikai teret sugároz maga köré, majd végezzük el ugyanezt a vizsgálatot a 2 hanglapos rezonátormodellel is.

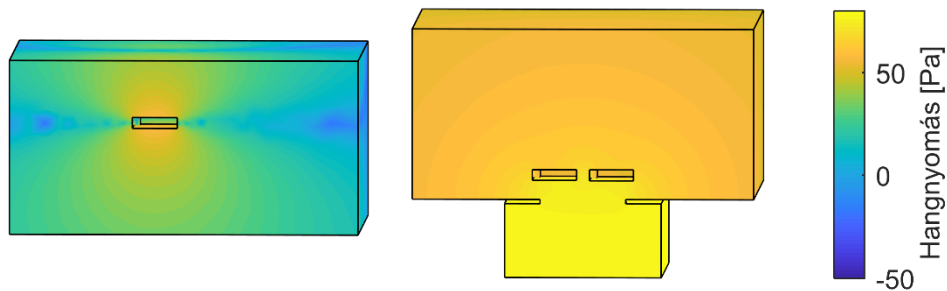
A különbség a gerjesztés módjában van, ugyanis ezekhez a vizsgálatokhoz már nem pontgerjesztést használtam, hanem módusgerjesztést. Ezt a hanglaphoz tartozó legelső hajlító (vertikális) módussal tettem meg, ugyanis ennek van a legnagyobb hatása a környezetre, a hangkeltés során is ez a rezgésalak sugározza el a legtöbb energiát.

Az akusztikai hálón a gerjesztés megadása több lépésből áll. Elegendő a módusalakot a hanglap felületén venni, ugyanis a szabad térrel csak az van kapcsolatban. Első lépésként a hanglap geometriai hálóját pontosan rá kell pozícionálni a külső teret leíró akusztikai háló geometriájára, melyhez forgatásokat, eltolásokat kell alkalmazni. Ezt követően, mivel a módusalakot leírásához használt mechanikai végeelem háló felülete téglalapokra, míg a hangtér akusztikai hálójának felülete háromszögekre van osztva különböző elemméretekkel, a hálók közötti megfelelő interpolációról is gondoskodnunk kell. Esetünkben, a mechanikai elmozdulást kell meghatároznunk az akusztikai háló peremén, így az akusztikai háló peremén elhelyezkedő pontjait meg kell keresnünk a mechanikai hálóban és minden egyes pont esetében azt a téglalapelemet kell tekintenünk, amelyikbe a keresett pont esik. A téglalapon belül az alakfüggvények adják meg a mechanikai elmozdulást, így ezek felhasználásával a téglalap négy sarokpontjához tartozó elmozdulásokat súlyozva adódik a keresett pontban az elmozdulás. Ez az elmozdulás a frekvencia ismeretében átszámítható normális irányú sebességre, amit az akusztikai modellben részecske sebesség peremfeltételként írunk elő. A probléma megoldásához immáron a teljes (20) egyenletet tudjuk használni, ahol a \mathbf{v} vektorban szerepelnek a módusalakból számított normális irányú sebességek a hanglap felületén. A \mathbf{p} vektor az eddigi esetekkel ellentétben teljesen ismeretlen, a megoldást továbbra is ez fogja szolgáltatni.



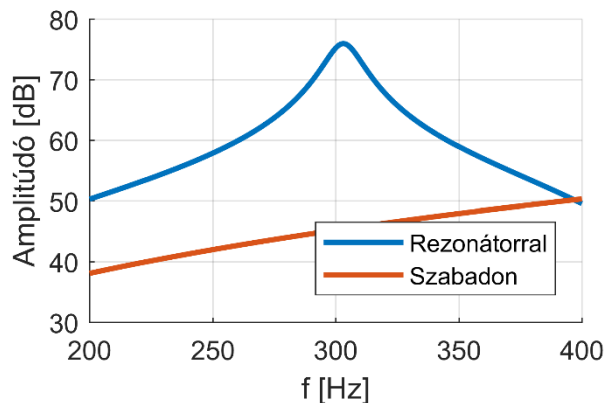
3.15. ábra – Módus a modellbe illesztve felül-, illetve alulnézetből. Az ábra színezése a módusalaknak megfelelő normális irányú rezgése sebességet mutatja relatív skálán

A 3.15. ábrán a már bepozícionált, 2.3. ábra bal oldali diagramján láthatóhoz hasonló vertikálisan hajlított módusalak látható a két hanglapos rezonátoros modellben. A bal oldali diagramon felülről, míg a jobb oldalin alulról. A színezés a normális irányú elmozdulást és rezgésebbséget jelzi, a sárga pozitív irányba, a kék a negatívba, míg a zöld nullát jelent. Az ábrán megfigyelhető, hogy a hanglap alján és tetején pont egymástól különböző színű részek találhatók, ugyanis a hanglap hajlító rezgése esetén az egyik oldali normális irány elmozdulás értéke pont a másik oldali érték ellentettje lesz. Ezen felül a hanglap bal oldalán lévő zöld területből azt is látjuk, hogy ténylegesen vertikális módussal van dolgunk, hiszen a zöld rész azt jelzi, hogy a hanglapnak nincs oldalirányú kitérése. Ezután a (20) egyenletet megoldva a 3.16. ábrán található nyomástervek alakulnak ki.



3.16. ábra – A módusgerjesztéssel kialakult nyomáster rezonátor nélküli és rezonátoros esetben

A 3.16. ábra bal oldalán az önmagában gerjesztett hanglap esete látható. Szépen látszik, ahogy a hanglap dipólusugárzóként viselkedik. Ez az a tulajdonság, amit a rezonátor megszüntet, ahogy azt a 3.16. ábra jobb oldala mutatja. Megfigyelhető az is, hogy a rezonátorban az oda érkező hullámok felerősödnek, míg a hanglaptól a szabad tér felé haladva a nyomás egyre jobban a nulla felé tart.



3.17. ábra – Hanglap lesugárzott frekvenciamenete rezonátorral és nélküle

A 3.17. ábra a rezonátoros, illetve anélküli frekvenciamenetet mutatja, továbbra is a 3.10. ábrán megjelölt pontban. Az ábrán szembetűnik a rezonátor hatása: egy bizonyos frekvenciasávot kiemel, így a két görbe közötti különbség jelenti a rezonátorral elérhető nyereséget, mely a rezonanciafrekvencia környékén a 30 dB-t is meghaladja. Ezt a mennyiséget beillesztési nyereségnek (*insertion gain*) is szokás nevezni. A kapott eredmények teljes mértékben megfelelnek várakozásainknak.

3.3 A kalapácsütés

A teljes hangszermodellből már csak a kalapácsütés szimulálása van hátra. A gerjesztés pontszerűségét továbbra is feltételezzük, de ezen kívül több tényező is megváltozik. A valós kalapácsütés nem pillanatszerű, időben véges tartója van és a kölcsönhatás ideje alatt sajnos a modális szuperpozíció nem alkalmazható az eddigiekkel azonos módon. Ennek oka, hogy a hanglappal érintkező ütő feje nemlineáris rugóként viselkedik. A következő bekezdésekben ezt modellt mutatom be részletesen, elsősorban a [8] és [9] irodalmak alapján.

3.3.1 A kalapács alapegyenletei

A kalapács-hanglap kölcsönhatását két gömb rugalmas ütközésével lehet modellezni. Ezen két gömb közti kölcsönhatást a Hertz-törvény (23) írja le.

$$\delta_M = \left[f^2 D^2 \left(\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_M} \right) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (23)$$

ahol δ_M a kalapács fejének összenyomódása, f a kalapács és hanglap között fellépő erő, D a kalapács anyagjellemzőiből adódó konstans, r_B a hanglap, míg r_M a kalapácsfej mint gömb sugara. A hanglap, mint gömb sugara tekinthető végtelen nagyságúnak, így (23) kissé egyszerűsödik

$$f = \frac{\sqrt{r_M}}{D} \delta_M^{\frac{3}{2}}. \quad (24)$$

A (24) egyenlet a kalapácsütés esetén fellépő erő és a kalapács összenyomódása közötti összefüggést írja le, ami a lineáris rúgóra felírt $f = Ku$ alakú egyenlettel annyiban különbözik, hogy az elmozdulás típusú mennyiség a $\frac{3}{2}$ -edik hatványon szerepel. Ebből látszik, hogy a kalapácsra a kölcsönhatás közben ható erő a kalapácsfej és a hanglap elmozdulásának nemlineáris függvénye. A későbbi szimulációban pont ez a tulajdonság

az, ami a nehézséget fogja jelenteni. Az egyenletekben szereplő M alsó index a kalapácsra vagy más néven ütőre (*mallet*) utal.

A kalapácsfejben tárolt energiára újabb egyenlet írható, mely az energia megmaradását fejezi ki abban a koordináta-rendszerben, melyben a kontaktus ideje alatt a két test eredő tömegközéppontja nyugalomban van:

$$\mu \left(\frac{d\delta_M}{dt} \right)^2 + \frac{4}{5} K \delta_M^{\frac{5}{2}} = \mu v_0^2, \quad (25)$$

ahol μ a kalapács és a vele kölcsönhatásban lévő test tömegének keresztszorzata, K (merevségi együttható) a (24)-ben szereplő $\frac{\sqrt{r_M}}{D}$ konstanssal egyenlő, v_0 pedig a kalapács kezdősebessége. A kalapácsfej maximális összenyomódása ebből pedig:

$$\delta_{M,max} = \left(\frac{5\mu}{4K} \right)^{\frac{2}{5}} v_0^{\frac{4}{5}}. \quad (26)$$

A kölcsönhatás alatt a kalapács összenyomódásának időbeli függvénye szimmetrikus, így az idő kiszámításához elég kétszer venni a maximális összenyomódásig eltelt időt. A harmadik lényeges egyenlet ezt adja meg:

$$\tau = 2 \int_0^{\delta_{M,max}} \frac{d\delta_M}{\eta \frac{d\delta_M}{dt}}, \quad (27)$$

ahol a nevezőben lévő időbeli derivált (25) átrendezésével számolható. Ez az összefüggés azért lényeges, mert a kölcsönhatási idő mérhető a legkönnyebben az eddig felsorolt jellemzők közül. A τ és a v_0 kezdeti sebesség ismeretében pedig már számítható (27) alapján az összenyomódás, (24) alapján pedig az erő időfüggvénye. A következő fejezetben bemutatott szimulációk esetében a kalapácsfej mechanikai paramétereit a szakirodalomban található, a fenti összefüggésekből mérések segítségével meghatározott értékek [5] és [8] alapján állítottam be.

3.3.2 A kalapács mozgásegyenlete

A kalapács mozgásgörbéjének kiszámításához az erő (24) egyenletéből indulunk ki. Ha kölcsönhatásról beszélünk, (24) természetesen csak akkor igaz, amikor a kalapács feje és az azzal kölcsönhatásban lévő test érintkezik. Így (24) a következőképpen alakul:

$$f = \begin{cases} 0 & \text{ha } u < 0 \\ Ku^{\frac{3}{2}} & \text{ha } u > 0 \end{cases}, \quad (28)$$

ahol az $u = 0$ pontban kezdődik el a kölcsönhatás. Ezt a jól ismert

$$f = m \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (29)$$

egyenlet egészíti ki, ahol m a kalapács tömege, $\frac{d^2 u}{dt^2} = a$ pedig a gyorsulása. A két egyenlet egyenlővé tételével egy másodrendű differenciálegyenlet adódik, aminek egyértelmű megoldásához két kezdeti feltétel szükséges:

$$u(t = 0) = u_0, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = v_0, \quad (30)$$

azaz a kezdeti feltételek a kalapács kezdeti pozíciója és sebessége.

Innentől kezdve lépésenként tudjuk számítani a kalapács összes szükséges paraméterét, amelyek a mozgását leírják. Kezdetben ismerjük a pozícióját és sebességét, amelyekből (28) alapján adódik a rá ható erő, végül (29) alapján a gyorsulás. A következő iterációban a pozíciót és a sebességet becsülni tudjuk (31) szerint:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + v^{(n)} \Delta t + \frac{1}{2} a^{(n)} \Delta t^2, \quad v^{(n+1)} = v^{(n)} + a^{(n)} \Delta t. \quad (31)$$

Az egyenletben a zárójelben lévő kitevők az időindexet jelölik.

3.3.3 A hanglap és a kalapács kölcsönhatása

A kölcsönhatás számítása az akusztikai és mechanikai esetben is tárgyalt mátrixegyenlet megoldásával történik. Mivel a kalapács mozgásegyenlete időtartományban adott, így a mátrixegyenlet megoldásánál is térjünk át időtartományra. Ezzel, ha a csillapítástól egyelőre eltekintünk, a következő egyenlet adódik:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{A}\mathbf{f}. \quad (32)$$

A (32) egyenlet egyik időlépéses megoldási módja az úgynevezett Newmark-séma [19]. Ez a séma a kalapács esetén használt lépésről lépésre történő (31) alakú megoldáshoz hasonlít, viszont implicit formában közelíti a deriváltakat, ami jó stabilitási tulajdonságokhoz vezet. A megoldáshoz a séma ismertnek tekint három kezdeti feltételt: a hanglap kezdeti pozícióját, sebességét és gyorsulását. Ezzel a gerjesztő erő ismeretében, (32) a kezdeti pillanatra meg is van oldva, a kérdést a következő időpontban lévő helyzet adja:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{A}\mathbf{f}^{(n+1)}. \quad (33)$$

(33)-ban az erőt egyelőre ismertnek tekintjük, az elmozdulás és a gyorsulás következő időpillanatbeli értékei pedig az ismeretlenek. Az egyenlet átalakításához az elmozdulásra becslést (másodfokú Taylor-sor közelítést) alkalmazunk:

$$\mathbf{u}^{(n+1)} \approx \mathbf{u}^{(n)} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}^{(n)}. \quad (34)$$

A (34) egyenletben jobb oldalán szereplő sebesség és gyorsulás értékekre pontosabb becslést kaphatunk, ha azokat a centrális differenciaséma alapján az éppen aktuális és a következő időpillanatbeli értékek átlagának (35) segítségével becsüljük:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(n+\frac{1}{2})} \approx \frac{\dot{\mathbf{u}}^{(n)}}{2} + \frac{\dot{\mathbf{u}}^{(n+1)}}{2}, \quad \ddot{\mathbf{u}}^{(n+\frac{1}{2})} \approx \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}}{2} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)}}{2}. \quad (35)$$

Ekkor a (33) egyenletbe helyettesítve még mindig szerepel többféle jövőbeli ismeretlen érték is, ezt újabb becsléssel tudjuk kiküszöbölni:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(n+1)} \approx \dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \Delta t \left[\frac{\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}}{2} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)}}{2} \right]. \quad (36)$$

Így már behelyettesíthetünk, először (36)-ot (35)-be, ezt (34)-be, majd végül az egészet (33)-ba, a következőt kapjuk:

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K} \right) \ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)} + \mathbf{K} \left[\mathbf{u}^{(n)} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{\mathbf{u}}^{(n)} \right] = \mathbf{A} \mathbf{f}^{(n+1)}. \quad (37)$$

(37) egyenletet átrendezve a gyorsulás következő időpillanatbeli értékét már egyszerűen tudjuk számítani:

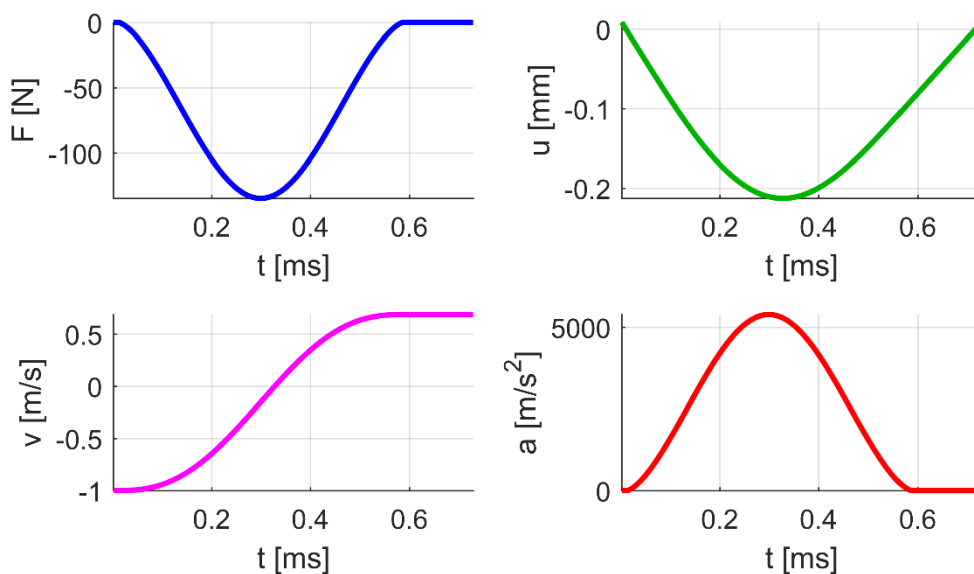
$$\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \left[\mathbf{M} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K} \right]^{-1} \left[\mathbf{A} \mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K} \left(\mathbf{u}^{(n)} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{\mathbf{u}}^{(n)} \right) \right]. \quad (38)$$

Ezután a sebesség következő értéke (36)-ból, az elmozdulásé (34)-(35)-ből számítható.

A (33) egyenlet teljes megoldásához már csak a gerjesztés számítása hiányzik. Itt fontos megjegyezni, hogy ebben az alfejezetben szereplő elmozdulások a hanglapra, míg az előző 3.3.2. alfejezetben lévők a kalapácsra vonatkoznak. Ezúttal mind a kettőről szó lesz, így jelöljük őket rendre u_b -vel és u_h -val, ahol az indexek a *bar*, illetve *hammer* szavakra utalnak. A kalapács által a hanglapra kifejtett erő számításához (28)-hoz hasonló kifejezést tudunk felírni annyi különbséggel, hogy nem csak a kalapács helyzetétől függ az erő, hanem a kalapács és hanglap egymáshoz képesti elhelyezkedésétől:

$$f_k = \begin{cases} -K|u_{b_k} - u_h|^2 & \text{ha } u_h < u_{b_k}. \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (39)$$

A (39) egyenlethez fontos megjegyezni, hogy mivel egy pontban koncentrálódik a kalapácsütés hatása, így az \mathbf{f} vektor majdnem teljesen nullvektor, kivéve a k -adik elemét, ahol a kölcsönhatás zajlik. Ez az oka annak, hogy az egyenletben egy k index is szerepel a hanglap elmozdulásvektoránál és az erőnél. A (39) összefüggés alapján tehát az erő pillanatnyi értéke (és a kalapács minden más paramétere) becsülhető, a következő elmozdulás és sebesség pedig a már kifejtett (31) alapján adódik. Az így kiszámolt kalapács tulajdonságokat a 3.18. ábra mutatja.



3.18. ábra – A kalapács elmozdulása, sebessége, gyorsulása, és a rá ható erő időfüggvénye a kölcsönhatás alatt

Az ábrán megfigyelhető, hogy az erő szimmetrikus az idő függvényében, az elmozdulás azonban nem, vagyis nem tiszta szinuszcörbe adja meg a kölcsönhatás során az elmozdulást. Lineáris rugó esetében az elmozdulás időfüggvénye egy szinuszjel fél periódusaként adódna. A sebességfüggvényen is szépen látszik, hogy a kalapács sebessége a kölcsönhatás végén nem a kezdeti sebesség ellentettje lesz, hanem annál kevesebb. Ez várható is volt, ugyanis a kalapács némi energiát átad a hanglapnak. A gyorsulás esetében meglepő lehet a $5000 \frac{m}{s^2}$ -es maximum érték, de egy rövid kalapácsütő kölcsönhatás esetén bizony előállhat ilyen magas érték is [8].

3.3.4 Módusok használata a válasz számításához

Akárcsak az önmagában álló hanglap esetében, a kölcsönhatás alatt is számolhatunk a módusok segítségével. Ennek előnye, hogy az eddig leírt, időlépésről időlépésre megoldandó nagyméretű végeelem egyenletrendszer egyenleteinek számát redukálhatjuk, így eredményül kisebb számítási igényhez és gyorsabb megoldáshoz juthatunk.

A sajátfrekvenciákat és módusalakokat a már ismertetett módon, a 3.1.6. szakasz alapján tudjuk számítani. A megoldás menetében a fentiekhez képest a különbség abból adódik, hogy ezúttal nem hagyjuk magára a rendszerünket, és a rendszer állapotától függ a gerjesztő erő is a (39) összefüggés szerint. Így a gerjesztés időtartama alatt minden időlépésben újra kell számítanunk a modális koordinátákat, nem feltételezhetünk harmonikus időfüggést.

Ahogy az már ismert, az elmozdulás felírható a módusalakok és a hozzájuk tartozó súlyok szorzataként (14). A \mathbf{q} modális koordinátákat tartalmazó vektort pedig az elmozdulásvektort a módusalakokra vetítve kapjuk:

$$\Phi^T \mathbf{u} = \mathbf{q}, \quad (40)$$

ahol kihasználtuk a módusok ortonormáltságát. (40) idő szerinti deriváltja:

$$\Phi^T \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}. \quad (41)$$

Mindkét egyenlet bal oldala ismert, ezek alapján a súlyok és deriváltjaik számíthatóak. Így, ha az elmozdulásokat a fenti időlépéses módszerrel a kölcsönhatás ideje alatt kiszámítjuk, abból a modális koordináták és időbeli deriváltjaik is közvetlenül adódnak. A kölcsönhatás ideje után pedig szabadrezgést végez a hanglap, tehát a modális koordináták harmonikus függvények lesznek:

$$q_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i). \quad (42)$$

(42) idő szerinti deriváltja:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = -\omega_i A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (43)$$

Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy (42) és (43) egyenletekre csak a $t = 0$ időpontban van szükségünk, ha a zérus időpontot a kalapáccsal való kölcsönhatás befejeződésénél vesszük fel, így (44) és (45) adódik belőlük.

$$q_i(0) = A_i \cos(\varphi_i) \quad (44)$$

$$\frac{dq_i(0)}{dt} = -\omega_i A_i \sin(\varphi_i) \quad (45)$$

(44) és (45) egy egyenletrendszer alkotnak, ahol két ismeretlen van az A_i és a φ_i , vagyis az i -edik súly amplitúdója és fázisa. Ezek ismeretében már minden időpillanatban számíthatóak a modális koordináták is a kölcsönhatás lezajlása után.

3.3.5 Csillapítás figyelembe vétele

Csillapítás nélkül, az elmozdulást a (14) szerint módusalakok és modális koordináták segítségével kifejezve a mátrixegyenlet így alakul:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi \mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (46)$$

(46)-ot Φ^T -tal beszorozva (47) adódik:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} - \omega^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f}. \quad (47)$$

Mivel $\Phi^T \mathbf{K} \Phi$ diagonális és a $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$ szorzat egységmátrixot ad, így (47) egyenletrendszer egymástól független egyenletekből áll. Ha bevesszük a \mathbf{C} csillapításmátrixot is, (48)-at kapjuk.

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} + j\omega \Phi^T \mathbf{C} \Phi \mathbf{q} - \omega^2 \Phi^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (48)$$

Általános esetben a $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ szorzat nem diagonális, így az egyenletek függetlensége sérül és a számítási igény jelentősen megnő. Az általam szimulált rendszerben szerencsére arányos csillapítás jelenik meg, vagyis a csillapításmátrix felírható a másik két mátrix lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{C} = \frac{\gamma_B}{\rho} \mathbf{M} + \eta \mathbf{K}. \quad (49)$$

Az η a viszkoelasztikus csillapításból adódó konstans, aminek értéke nagyjából 10^{-8} s és 10^{-6} s közé tehető, míg γ_B a hanglapra ható légtérheléssel áll kapcsolatban, értéke pedig általában 10 s^{-1} és 100 s^{-1} között mozog. Ezzel tehát a (48)-ban szereplő egyenletek függetlensége továbbra is fennáll, így külön-külön is megoldhatóak, vagyis a számítási igény nem növekszik a csillapítás nélküli modellhez képest.

3.3.6 Csillapítás alkalmazása a módusokon

A csillapítás figyelembevételével az alapvető változást az adja, hogy a módusalakok súlyai nem egyszerűen harmonikus függvényekkel írhatóak le, hanem azok exponenciális függvény szerint csillapodnak, illetve frekvenciájuk eltolódik. Ennek megfelelően (42) csillapított formában:

$$q_i(t) = A_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \cos(\omega_i^* t + \varphi_i), \quad (50)$$

ahol az időállandó:

$$\tau_i = \frac{1}{\omega_i \xi_i}, \quad (51)$$

a csillapított sajátfrekvencia:

$$\omega_i^* = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad (52)$$

és a csillapítási tényező:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\eta \omega_i + \frac{\gamma_B}{\omega_i} \right). \quad (53)$$

(50) alapján a $t = 0$ pontban (44) adódik ismét, az időbeli deriváltra ellenben ez nem igaz, az új egyenletrendszer a következő:

$$q_i(0) = A_i \cos(\varphi_i), \quad (54)$$

$$\frac{dq_i(0)}{dt} = -\frac{1}{\tau_i} A_i \cos \varphi_i - \omega_i^* A_i \sin(\varphi_i). \quad (55)$$

(54)-ben és (55)-ben ismét csak az amplitúdó és a fázis szerepel ismeretlenként, ami már megoldható. Ehhez a következőt érdemes alkalmazni. Nevezzük el az $A_i \cos(\varphi_i)$ szorzatot c -nek, az $A_i \sin(\varphi_i)$ szorzatot s -nek. Így (54)–(55) átírható mátrixalakba:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\tau_i} & -\omega_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i(0) \\ \frac{dq_i(0)}{dt} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

(56)-ből c és s egyszerűen számolható, és ezzel együtt az amplitúdó és a fázis is:

$$A_i = \sqrt{c^2 + s^2} \quad (57)$$

$$\varphi_i = \tan^{-1} \left(\frac{s}{c} \right) \quad (58)$$

3.3.7 Teljes csatolt modell

Az eddigi rendszerhez már csak az akusztikai modellt kell hozzácsatolni, amivel már a teljes hangszer szimulációja megvalósítható. Ehhez a két rendszer közötti egymásra hatást kell biztosítani. Az akusztikai rendszer válasza, a nyomás hat erőként a mechanikai rendszerre, míg visszafele a hanglap rezgése sebessége meghatározza az akusztikai részecskék normális irányú sebességét, mint gerjesztés. Ezt a kapcsolatot az (59)–(60) egyenletrendszer írja le.

$$(\mathbf{K}_m + j\omega\mathbf{C}_m - \omega^2\mathbf{M}_m)\mathbf{u} = \mathbf{F}_m(\mathbf{f} + \mathbf{A}_m\mathbf{p}) \quad (59)$$

$$(\mathbf{K}_a + j\omega\mathbf{C}_a - \omega^2\mathbf{M}_a)\mathbf{p} = -j\omega\mathbf{F}_a(\mathbf{A}_a j\omega\mathbf{u}) \quad (60)$$

Az egyenletekben az m index a mechanikai, a pedig az akusztikai rendszerre utal. Az \mathbf{A}_m és \mathbf{A}_a mátrixok a mechanikai elemek csúcspontjait vetítik az akusztikai elemekre és fordítva. Emellett a mátrixok figyelembe veszik az adott koordinátákhoz tartozó normális irányt, mivel mind a nyomás, mind a rezgése sebesség csak a normális irányban fejt ki hatást. Az \mathbf{F} mátrixok a felületi elosztott hatások skálázása miatt szerepelnek. Az egyenleteket átrendezve a következő mátrixegyenletet kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\mathbf{F}_m\mathbf{A}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_a\mathbf{A}_a & \mathbf{M}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m\mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (61)$$

(61)-ből látszik, hogy a csatolt modell a már megszokott végelem mátrixegyenlet formába írható (62) megfeleltetésekkel, ahol \mathbf{g} a gerjesztés és az \mathbf{x} állapot a válasz.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & -\mathbf{F}_m\mathbf{A}_m \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_a \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_a \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_a\mathbf{A}_a & \mathbf{M}_a \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m\mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (62)$$

A csatolt rendszer megoldása egyszerűen a (61) időlépéses megoldásával adódhatna, de a csatolt mátrixok az eddigieknél jóval nagyobb méretűek, így a számítási idő jelentősen megnövekedne. Adja magát a modális megoldás használata.

A módusalakokat és skálázási tényezőket már az eddigi részekben kiszámoltuk külön az akusztikai és külön a mechanikai modellre. Utolsó lépésben ezeket bele kell írni a már megkapott mátrixegyenletbe, így tehát (61)-et írjuk át a következő alakba:

$$\mathbf{K}'\mathbf{q} + j\omega\mathbf{C}'\mathbf{q} - \omega^2\mathbf{M}'\mathbf{q} = \mathbf{g}', \quad (63)$$

ahol a (64)–(68) megfeleltetéseket lehet alkalmazni:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \Phi_m^T \mathbf{K}_m \Phi_m & -\Phi_m^T \mathbf{F}_m \mathbf{A}_m \Phi_a \\ \mathbf{0} & \Phi_a^T \mathbf{K}_a \Phi_a \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \Phi_m^T \mathbf{C}_m \Phi_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_a^T \mathbf{C}_a \Phi_a \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} \Phi_m^T \mathbf{M}_m \Phi_m & \mathbf{0} \\ \Phi_a^T \mathbf{F}_a \mathbf{A}_a \Phi_m & \Phi_a^T \mathbf{M}_a \Phi_a \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \mathbf{q}_a \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \Phi_m^T \mathbf{F}_m \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Így a (63) egyenlet a (61)-gyel analóg módon használható az időlépéses sémával való megoldásra. Míg a (61)-ben több százezer szabadságfokú a rendszer, addig a (63) esetében az ismeretlenek száma százas nagyságrendű az általam vizsgált elrendezésekben.

4 Eredmények

A tényleges eredmények bemutatása előtt érdemes megjegyezni, hogy az általam szimulált modell kis mértékben ideálisnak tekinthető, a valóság pontos mását modellezni közel lehetetlen. Elég megfigyelni például a 4.1. ábrán látható hanglapokat.



4.1. ábra – A szimulált és mért hanglapok

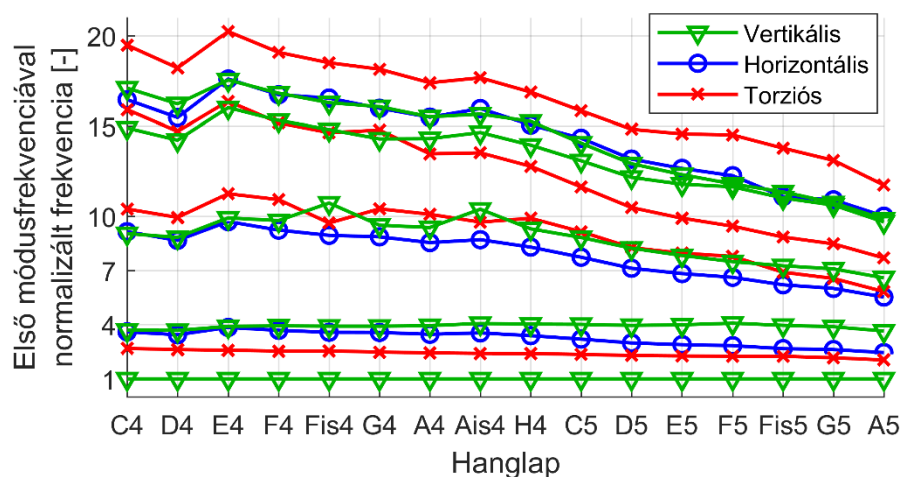
Látszik, a hanglapok bevágásánál is, hogy csekély az esélye két ugyanolyan elkészítésének. A hangolóvájat kialakítása kézi eszközökkel történik, amivel óhatatlanul belekerül némi pontatlanság a hangszerbe. Különbözhetnek a hanglapok a szálirányban is, amelynek néhány fokos megváltozása is nagy eltéréseket tud okozni. Ezen felül, ha a hanglapok színének eltérését is észrevesszük, akár anyagtulajdonságbeli különbségekre is következtethetünk.

Ez természetesen nem csak a hanglapokra igaz. Ugyanúgy gyártási bizonytalanságok jellemzik a rezonátort is, aminek a már említett hangolási nehézségei is tudnak problémákat okozni. A kalapács esetében pedig a pontszerű hatás természetesen nem teljesen realiztikus, de ez a közelítés elég jól modellezi a tényleges kalapácsgerjesztést.

A fenti nehézségektől függetlenül a szimulációval még mindig javítható a hangszer kialakítása, illetve a gyártási folyamat hatékonysága. Ebben a fejezetben a szimulációs és ellenőrzési lehetőségeket tárgyalom.

4.1 hanglapok modellezése

Ahogy azt láttuk, a hanglapokkal kapcsolatos legfontosabb adatok, azok sajátfrekvenciái és az azon a frekvencián létrejövő módus alakja. A 4.2. ábra éppen ezeket mutatja az általam szimulált hanglapok esetében.



4.2. ábra – A hanglapok normalizált sajátfrekvenciái

Az ábrán vízszintes tengelyen a hanglapok szerepelnek, míg a függőlegesen az adott hanglap sajátfrekvenciái láthatóak a hanglap alapprofrendenciájával normalizálva. Megfigyelhető, a már említett hangolásnál fontos 1:4:10 arány. Az alapprofrendencia négyszeresénél szépen látszik a majdnem teljesen egyenes grafikon, ezekre a frekvenciákra többé-kevésbé sikerült behangolni a lapokat. Ugyanígy a tízszeres alapprofrendencia körül is látható egy vertikális módusgörbe, viszont ez már a nagyfrekvenciás hanglapoknál jelentősen eltér az ideális értéktől.

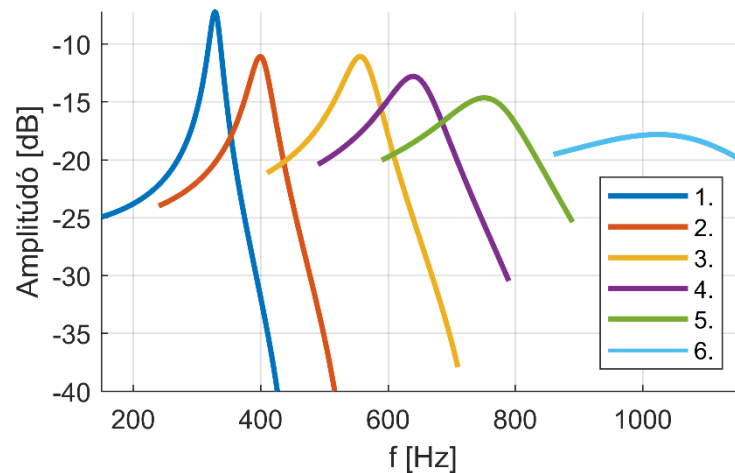
Hanglap	Mért frekvenciák [Hz]			$\frac{E}{E_0}$	Szimulált frekvenciák [Hz]		
	f_1	f_2	f_3		f_1	f_2	f_3
C4	264	1048	2656	0.680	264.39	972.92	2390.40
D4	296	1176	2788	0.690	296.67	1089.21	2571.89
E4	324	1320	3196	0.995	323.91	1260.01	3144.66
F4	349	1400	3376	0.950	349.61	1372.40	3413.89
F#4	369	1480	3376	1.000	369.97	1448.66	3543.46
G4	392	1570	3530	1.000	392.32	1530.10	3729.87
A4	440	1762	3876	1.060	439.53	1730.90	4121.33
A#4	464	1864	4104	1.150	464.39	1882.14	4507.42
H4	496	1976	4216	1.160	496.48	1992.71	4601.00
C5	520	2096	4304	0.995	520.18	2082.81	4583.02
D5	584	2300	4368	0.950	583.63	2302.50	4803.26
E5	659	2523	4733	1.020	658.67	2621.47	5238.59
F5	705	2755	5176	0.980	705.18	2869.42	5483.32
F#5	742	2816	4984	0.945	741.40	2928.49	5381.65
G5	784	2985	5360	0.892	783.94	3034.20	5547.49
A5	880	3168	5308	0.840	880.35	3200.31	5794.05

1. táblázat – Mért, illetve szimulált vertikális frekvenciák

Ahhoz, hogy a 4.2. ábra adatait validáljuk, hasonlítsuk össze az általam szimulált hanglap vertikális módusfrekvenciáit ugyanezen módusok mérési frekvenciákkal. Ezt az 1. táblázat mutatja. Azzal a problémával kerültem szembe, hogy az adott hanglapméretek és a [16] adatbázisban található Young-modulusok és Poisson tényezők alapján a frekvenciák nem mutattak egyezést. Ebből kifolyólag, mivel a méretek mérése egyértelmű, a Young-modulus változtatásával az alapfrekvenciát (ami egy vertikális módus) sikerült a mért adatokhoz hangolni. A táblázat $\frac{E}{E_0}$ oszlopa a behangolt és az eredeti longitudinális irányú Young-modulus arányát mutatja. Sok esetben jó egyezést adott az eredeti érték is, a legmélyebb és a legmagasabb hanglapok esetében azonban számottevő eltérések adódtak. Ez is az anyagparaméterek bizonytalanságára világít rá. Az anyagparaméter behangolása után a másik két, alapfrekvenciához képest névlegesen 1:4 és 1:10 arányú sajátfrekvenciák nem mutattak tökéletes egyezést a mérésekkel, ezeket az eltéréseket tekinthetjük a modell hibájának.

4.2 Rezonátorok sajátfrekvenciái

Akárcsak a hanglapok esetében, a rezonátorok szimulációját is összevethetjük a mérésekből származó adatokkal. A 3.2.4. fejezetben részletezett módon, ha az összes rezonátort megvizsgáljuk a 4.3. ábrán látható frekvenciamenetek adódnak.



4.3. ábra – A szimulált rezonátorok frekvenciamenetei

A 4.3. ábra balról jobbra ábrázolja az átviteli függvényeket a legnagyobb rezonátortól a legkisebbig. Láthatjuk, hogy a nagyobb frekvenciás rezonátoroknak arányaiban kisebb a kiemelésük, jobban elkennek. Ez a kialakítással és a kis méretekkel magyarázható. Érdeemes megfigyelni a második rezonátorhoz tartozó görbét, ugyanis a

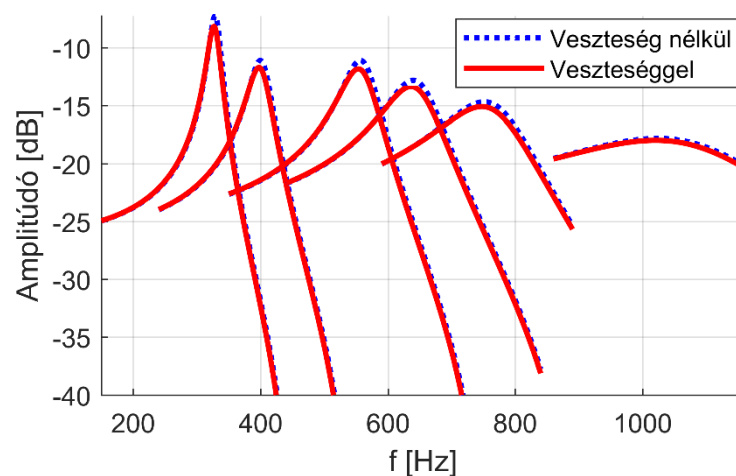
csúcának az amplitúdója a két mellette lévő görbe alatt van. Ez azt jelenti, hogy a rezonátor esetében nagyobb a sugárzási veszteség. Ez azzal magyarázható, hogy ehhez a rezonátorhoz nem kettő, hanem három hanglap tartozik, így hozzá szélesebb és ezzel együtt alacsonyabb amplitúdócsúcsú frekvenciamenet tartozik.

Rezonátor száma	Jósági tényező [-]	Szimulált frekvencia [Hz]	Mért frekvencia [Hz]
1	18.22	328	305.5
2	11.08	399	386.5
3	9.75	556	559.0
4	7.03	640	641.5
5	5.11	751	740.5
6	3.41	1024	1007.5

2. táblázat – A rezonátorok mért és szimulált paramétereit

A szimuláció eredményeit számokban a 2. táblázat mutatja. A jósági tényezők a 4.3. ábra alapján várhatóan alakul, nagyfrekvenciás rezonátoroknál jóval kisebb értéket mutat, mint a kisfrekvenciásoknál. A táblázat lehetőséget ad arra, hogy a szimulált frekvenciákat összehasonlítsuk a mérési eredményekből származó frekvenciaértékekkel. Ahogy látszik, ezek nagyon jó egyezést mutatnak, a 4. rezonátor esetében az eltérés csupán 1.5 Hz, míg a legnagyobb relatív eltérés 5% körüli az első rezonátor esetében

Következő lépésben tekintsük a fal viszkózus veszteséget figyelembe vevő modellt. Ekkor a 3.2.5. alfejezetben tárgyaltaknak megfelelően azt várjuk, hogy a rezonanciafrekvencia kissé megváltozik. A 4.4. ábrán éppen ezt láthatjuk.



4.4. ábra – A szimulált rezonátorok frekvenciamenetei fal viszkózus veszteséggel és anélkül

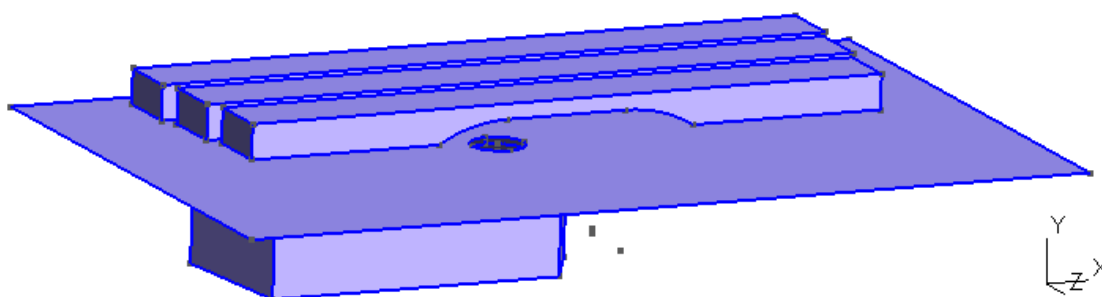
Megfigyelhető, hogy az eltérés nem számottevő a már említett okokból. A várakozásainknak a számszerű adatok is megfelelőek, ezt a 3. táblázat mutatja.

Rezonátor száma	Eredeti jós. tény. [-]	Veszteséges jós. tény. [-]	Eredeti frekvencia [Hz]	Veszteséges frekvencia [Hz]
1	18.22	16.35	328	327
2	11.08	10.45	399	397
3	9.75	8.78	556	553
4	7.03	6.49	640	636
5	5.11	4.79	751	748
6	3.41	3.40	1024	1020

3. táblázat – Rezonátorparaméterek alakulása viszkózus veszteség esetén

4.3 A teljes modell összefüggései

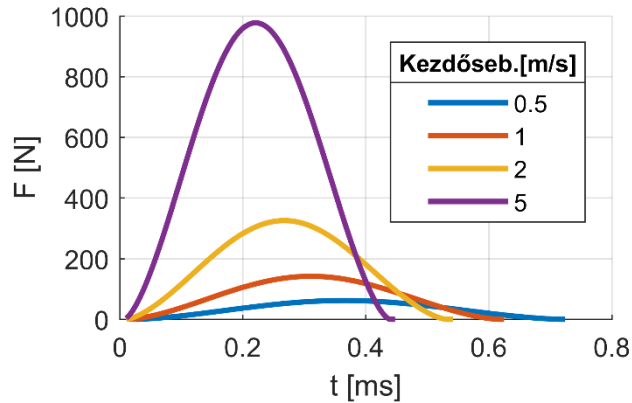
Ahogy eddig láthattuk, ha több hanglap tartozik egy rezonátorhoz, akkor a rezonátor hangolása nehézkes, mert nem csak egy bizonyos hanglap hanglesugárzására van kihatással. Ezen okból kifolyólag a teljes modell összefüggéseinek feltárásához egy olyan modellt szimulálok és mutatok be, ahol minden hanglaphoz tartozik rezonátor. Ezen hangszer egy rezonátora a 4.5. ábrán látható. Az ábrán csak három hanglap látszik, hogy látható legyen az új kialakítású rezonátor nyílása, de a szimulációban öt hanglap vett részt, melyek közül a középső alatt helyezkedik el a lyuk és a rezonátor, illetve a kalapács is ezt a hanglapot gerjesztette. Ezt a modellt szimuláltam a 3.3.7. szakaszban bemutatott teljes csatolt rendszer segítségével.



4.5. ábra – Újabb xilofon modell, hanglapokkal és az egyik hanglaphoz tartozó rezonátorral

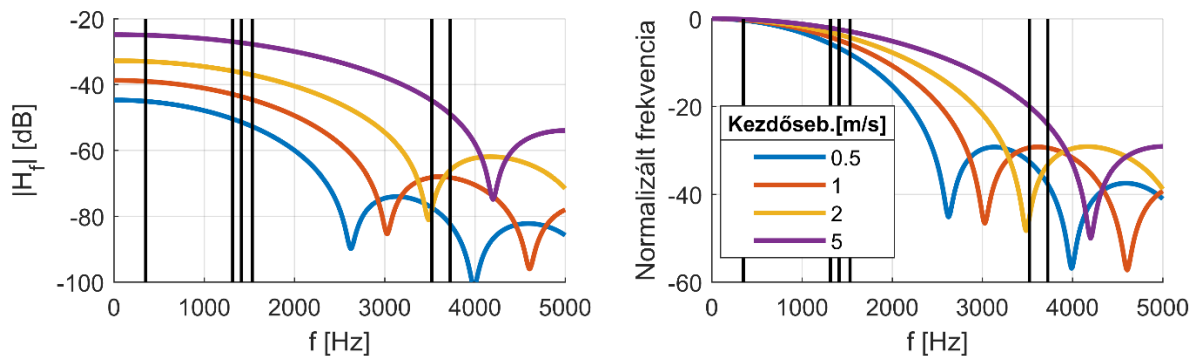
4.3.1 Kezdősebesség és az erő kapcsolata

Adott teljes modell esetén a gerjesztést tudjuk változtatni, mint paraméter. Figyeljük meg, mi történik, ha a kalapács kezdősebességét változtatjuk. A 4.6. ábra a kölcsönhatás alatt fellépő erőfüggvényt mutatja több különböző kezdősebesség esetén.



4.6. ábra – A gerjesztő erő időfüggvényei különböző kalapács kezdősebességek esetén

Az ábrán az látszik, hogy minél nagyobb a kezdősebesség, annál nagyobb a fellépő erő maximuma, ahogy ez várható is. A kölcsönhatás ideje pedig a kezdősebesség növelésével csökken a nemlineáris rugóhatás miatt. Persze a gyorsabb lefutású függvény spektrumában nagyobb frekvenciás komponensek is megjelennek. A 4.7. ábra bal oldalán az előző négy időtartománybeli erőfüggvény látható a frekvenciatartományban.

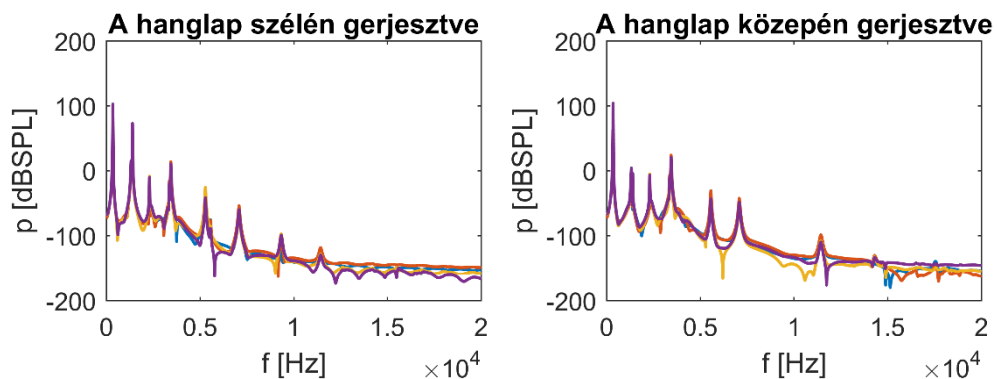


4.7. ábra – A gerjesztő erő spektrumai (bal) és normalizált spektrumai (jobb) különböző kalapács kezdősebesség esetén

A függőleges fekete egyenesek a hanglap módusfrekvenciáit jelölik. Ezen az ábrarészen megfigyelhető, hogy különböző kezdősebességű gerjesztés esetén az egyes módusok különböző mértékben gerjesztődnek. Például a 3500 Hz körüli, harmadik vertikális módus a lassú, $0.5 \frac{m}{s}$ -os görbénél a módus a vágási frekvencián kívül esik, míg a gyorsabb $5 \frac{m}{s}$ -os esetben még bőven azon belül esik. Ez például a nagyobb frekvenciájú hanglapok gerjesztésénél okozhat problémát, ugyanis azonos hangzáshoz a magasabb hanglapok esetén merevebb kalapácsra lenne szükség. A 4.7. ábra jobb oldalán ugyanez a diagram látható, csak a nulla frekvenciához tartozó érték szerint normalizálva. Ebből szépen látszik az egyes kezdősebességek közti vágási frekvenciakülönbség, illetve a módusok gerjesztésének relatív szintjei is.

4.3.2 Ütési pozíció változtatása

A gerjesztés nagyságán kívül annak pozícióját is tudjuk változtatni a hangkeltés során. Érdeemes megfigyelni, hogy mi történik például abban az esetben, ha a hanglapot a hosszúirányú közepén találjuk el. Ekkor az első módus maximumhelyét, viszont a második vertikális módus nullhelyét gerjesztjük. Ekkor az utóbbi módust, illetve az összes többi, amelynek nullhelye a hanglap közepén helyezkedik el, nem tudjuk rezgésbe hozni. Figyeljük meg a 4.8. ábrát.

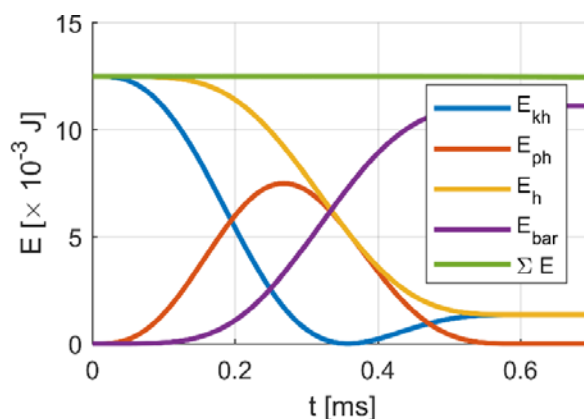


4.8. ábra – Különböző pozíciókban megütött hanglap által lesugárzott hang spektrumai

Az ábrán kétféle pozíciójú gerjesztés által létrehozott spektrumot látunk, a lesugárzott hangnyomásszint ábrázolásával. A bal oldalon a szélén, míg a jobb oldalon a közepén üti meg a kalapács a hanglapot. A spektrumon szereplő négy szín, négy különböző vizsgálati pontot jelent a szimulált térben. Szépen látszik az ábrán, hogy például a második csúcs jóval kisebb amplitúdójú közepén gerjesztve, mint szélén. Ez igazolja is várakozásainkat. Ugyanez megfigyelhető a 10 kHz környékén elhelyezkedő vertikális módus esetében is, viszont itt teljesen eltűnik a csúcs a jobb oldali esetben.

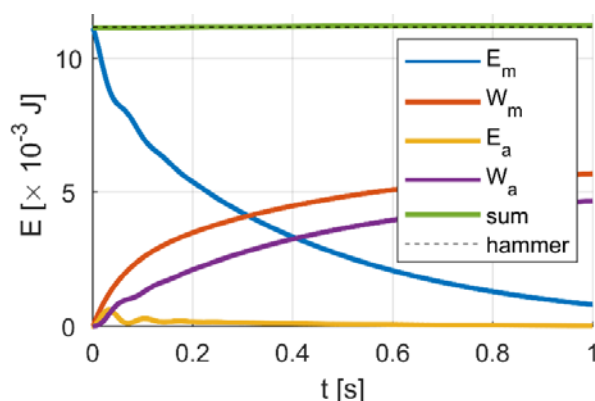
4.3.3 A rendszer energiája

Érdekes a szimulációt az energia oldaláról is megvizsgálni. Beszélhetünk az egyes részeknek (kalapács, hanglap és rezonátor) külön-külön energiaszintjéről, az energia-megmaradás törvényéből adódóan azonban az összes energiának (vagyis az egyes alrendszerek energiaszintjei összegének) konstansnak kell lennie. A szimulációt, ahogy eddig is tettük, két részre tudjuk osztani: kölcsönhatás és szabad rezgés. A 4.9. ábra a kölcsönhatás alatt fellépő energiaviszonyokat ábrázolja.



4.9. ábra – Energiagörbék a kölcsönhatás alatt

A sárga görbe jelöli a kalapács összes energiáját. Ennek egy része helyzeti (kék görbe), a maradék pedig potenciális (piros görbe). A lila görbe a hanglap, míg a zöld a rendszer összes energiáját ábrázolja. A kezdő pillanatban megfigyelhető, hogy csak a kalapácsnak van energiája, ami kinetikus energia. Ez természetesen a kalapács kezdősebességének köszönhető. Ezt követően a kinetikus energia csökkenni kezd a potenciális energia javára, a kalapács feje elkezd összenyomódni, ugyanakkor a kalapács összenergiája is csökken, amit a hanglap vesz át és elkezd rezegni. Ezután van egy pont, amikor a fej teljesen összenyomódik, ez a piros görbe maximuma. Érdekesség, hogy a kalapács sebessége nem ezen a ponton nulla, tehát itt még a hanglap felé mozog. Ez annak köszönhető, hogy ekkor a hanglapnak már van némi elmozdulása. Ezután bekövetkezik a kalapácsfej sebességének zérusra lassulása (kék görbe minimuma), majd elindul visszafelé, elkezd visszanyerni kinetikus energiájának egy részét. Az ábra jobb szélén látszik, hogy végül minden energia állandó értékre áll be a kölcsönhatás végén. Összességében elmondható, hogy a kalapács kezdeti energiájának töredékét megtartja, nagyobb részét a kölcsönhatás alatt átadja a hanglapnak.

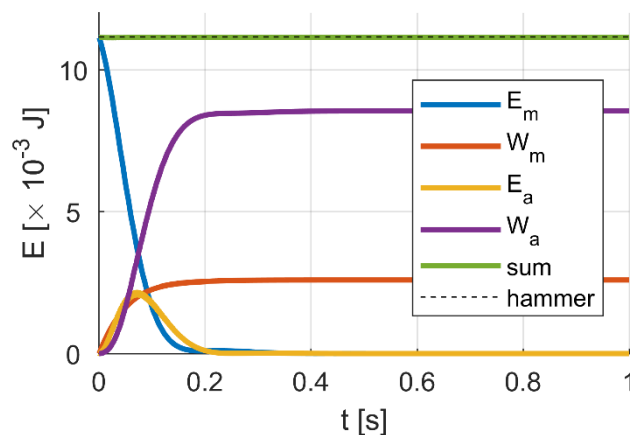


4.10. ábra – Energiagörbék a kölcsönhatás után

A 4.10. ábra a kölcsönhatás utáni energiaviszonyokat ábrázolja. A szaggatott vonal mutatja a kalapács által a rendszerbe juttatott energiát, ez az, aminek a mechanikai és akusztikai rendszeren belül is kell maradnia. Ez teljesül is, amit a zöld görbe (a két rendszer összes energiája) ábrázol. Ezekon kívül a mechanikai (hanglap) és az akusztikai (rezonátor) rendszer tárol energiát. Az ábra bal szélén, a $t = 0$ időpontban csak a hanglapnak van energiája (kék görbe), ami fokozatosan csökken. Ez részben akusztikai energiaként (sárga görbe) van ezután jelen, de inkább a veszteségek emésztik fel. Kétfajta veszteségről beszélhetünk: egyik a mechanikai (piros görbe), ez például a hanglap részecskéi közti súrlódásból (viszkoelasztikus veszteség) adódik, a másik pedig az akusztikai (lila görbe), ami a lesugárzott hang energiájával ekvivalens. Ezeknek a görbéknek a lefutása lényegesen megváltozik a hanglap és a rezonátor egymáshoz képesti hangolásának függvényében. Ezt vizsgálom a következő alfejezetben.

4.3.4 Rezonátor hangolásának hatása

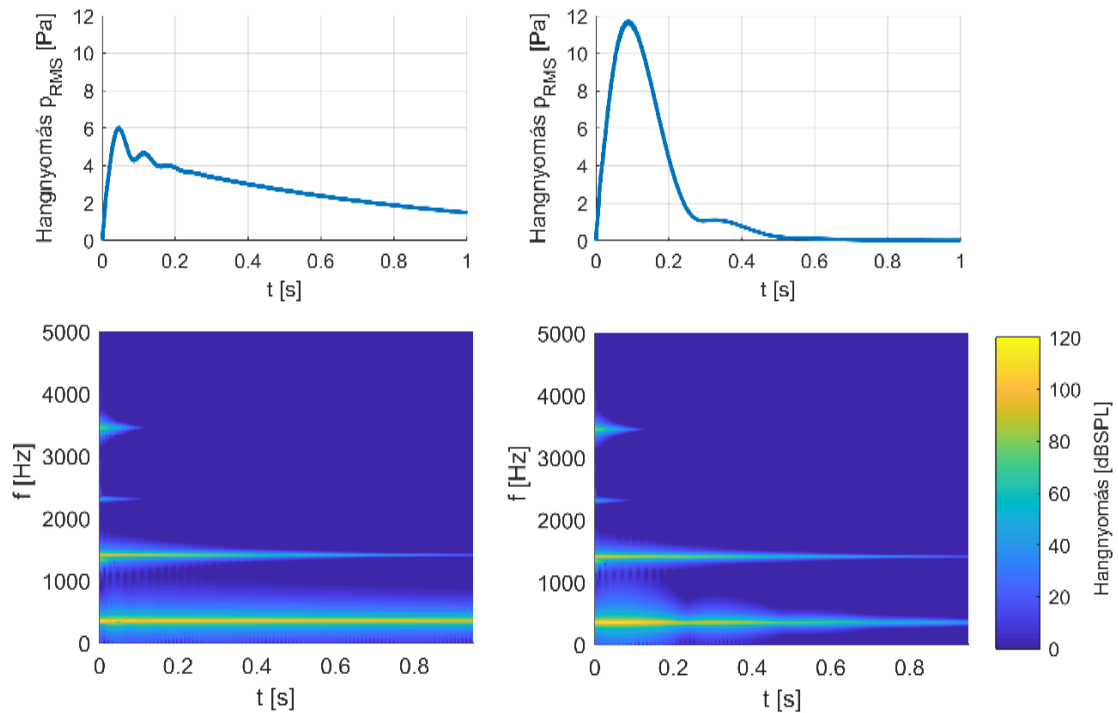
Annak a konstrukciónak, melyben egy rezonátorhoz egy hanglap tartozik, nyilvánvaló előnye, hogy jóval könnyebb a rezonátort a hanglaphoz hangolni. Persze felmerül a kérdés, hogy van-e értelme pont a hanglap alaphangfrekvenciájára hangolni.



4.11. ábra – Energiagörbék a kölcsönhatás után, behangolt rezonátor esetén

A 4.11. ábra egy hanglaphoz hangolt rezonátor esetén mutatja a rendszer energiagörbéit. A modell elrendezése és paraméterei teljesen megegyeznek a 4.10. ábra által ábrázolt modellel. Egyedül a rezonátor magassága változott meg, amivel a hangolást lehet elérni. A két ábra közötti különbség nagyon jól szemlélteti azt, hogy behangolt esetben sokkal gyorsabban tudja a hanglap leadni az energiáját, tehát sokkal gyorsabban tudja a hangot lesugározni. Ezt a kék és a lila görbék meredeksége mutatja. Emellett az is lényeges számunkra, hogy a lila görbe, azaz az akusztikai veszteség jóval magasabb, tehát

jóval nagyobb a lesugárzott hangenergia, mint a behangolatlan esetben. A 4.12. ábrán látható időfüggvényeken és spektrogramokon is megfigyelhető, hogy a rezonátor behangolása magasabb lesugárzott hangnyomásszintet és gyorsabb lecsengést is eredményez. Utóbbi főleg az alulfrekvenciához tartozó, 350 Hz-nél megfigyelhető spektrumvonalon látható. Mindkét jellemző kívánatos a hangszeres játék esetén.



4.12. ábra – Hangolatlan (bal) és behangolt (jobb) rezonátor által keltett hangnyomásszint időfüggvénye (felül) és spektrogramja (alul)

5 Összefoglalás

Dolgozatomban egy xilofon modellezéséhez szükséges részegységek elméleti hátterét és szimulációjának módját tárgyaltam. Foglalkoztam a hanglap esetén alkalmazható mechanikai és a rezonátornál használható akusztikai végeselem-módszerrel. Vizsgáltam a hangszer elemeit külön-külön, illetve az összekapcsolt, teljes, csatolt rendszert egyben is. A Gmsh hálógeneráló szoftver és saját Matlab szkriptek segítségével alkottam egy modellt, amivel tetszőleges elrendezésű, általános xilofon rezgésakusztikai viselkedése vizsgálható valósághű geometriákon.

Szimulációm segítségével megfigyelhetőek a hanglapok sajátfrekvenciái és módusalakjai, amelyek az anyagparaméterek megfelelő megválasztásával, vagy a hangolóját geometriájának alakításával finomhangolhatóak. Vizsgáltam a rezonátorok frekvenciagörbéjét, illetve azok változását a fali viszkózus veszteség hatására. Megállapítottam, hogy az általam vizsgált geometria esetén a fali veszteség hatása másodlagos. Foglalkoztam azzal az esettel, amikor két hanglap mint akadály helyezkedik el a rezonátor fölött, majd kitértem arra is, milyen hatással van a rezonátor a hanglap hanglesugárzására. Megmutattam, hogy szimulációimban, a várakozásainknak megfelelően, a rezonátor megszünteti az akusztikai rövidzár jelenségét és a rezonanciafrekvencia környékén jelentős lesugárzási nyereséget biztosít. A szimulációk eredményeit már meglévő mérési adatokkal hasonlítottam össze. A tapasztalt jó egyezés bizonyítja modellem helyes működését.

Ezt követően a kalapácsütés szimulációjára tértem át, amit időlépéses módszerrel oldottam meg. A csatolt rendszer számításánál a Newmark-sémát alkalmaztam a kalapács-hanglap kölcsönhatás alatt, majd a gerjesztés befejeztével a magára hagyott hanglap által lesugárzott hang modális szuperpozícióval adódott. Végül a megfigyelési pontokban ismertté vált a hangnyomás, ami a virtuális xilofon prototípus által megszólaltatott, meghallgatható lesugárzott hang.

Dolgozatom utolsó részében egyes paraméterek változtatásának hatását vizsgáltam. Milyen hatása van a fellépő erőre a kalapács kezdősebességének, illetve hogyan reagálnak a módusok, különböző pozíciójú gerjesztésekre. Legvégül foglalkoztam a rendszer energiagörbéivel, és azok megváltozásával a rezonátor behangolásának hatására. Megmutattam, hogy az időlépéses séma alkalmazásával a

rendszer összes energiája állandó marad, ami a kiválasztott módszer helyes működését és megvalósítását igazolja. Fontos eredménynek tartom, hogy modellem jól reprodukálja a rezonátor viselkedését, a jól behangolt rezonátor a lesugárzott hangnyomásszintet jelentősen növeli, ugyanakkor a lecsengési időt számottevően csökkenti. Ez a gyakorlatban is megfigyelhető hatás csak a hanglap és rezonátor közötti kétirányú kölcsönhatás figyelembe vételével modellezhető. Tudomásom szerint a korábbi modellek csak egyirányú hatással számoltak.

Az eredményeim és a validációk alapján bebizonyosodott, hogy az általam felállított modell helyesen működik. Szimulációm felhasználható valódi hangszerek tervezése során, segítségével készíthető virtuális prototípus a hangszerről, ami segíthet az egyes paraméterek finomhangolásában a xilofon gyártási folyamatainak előkészítése során. A modell alkalmas a fizikai alapú hangszintézisre is.

Irodalomjegyzék

- [1] R. J. Astley, G. J. Macaulay, J.-P. Coyette, L. Cremers. Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering: Part I. Formulation in the frequency domain. *Journal of the Acoustical Society of America* **103**, pp. 49–63. (1998) DOI: [10.1121/1.421106](https://doi.org/10.1121/1.421106)
- [2] R. J. Astley, J.-P. Coyette, L. Cremers. Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering: Part II. Formulation in the time domain. *Journal of the Acoustical Society of America* **103**, pp. 64–72. (1998) DOI: [10.1121/1.421107](https://doi.org/10.1121/1.421107)
- [3] D. Beaton, G. P. Scavone. *Measurement based comparison of marimba bar modal behaviour*. ISMA2019 – International Symposium on Music Acoustics. Detmold, Germany, pp. 72–77. (2019)
- [4] D. Beaton, G. P. Scavone. *Optimization of marimba bar geometry by 3D finite element analysis*. ISMA2019 – International Symposium on Music Acoustics. Detmold, Germany, pp. 402–407. (2019)
- [5] I. Bork. *Measuring the acoustical properties of mallets*. *Applied Acoustics* **30** (2–3), pp. 207–218. (1990) DOI: [10.1016/0003-682X\(90\)90044-U](https://doi.org/10.1016/0003-682X(90)90044-U)
- [6] I. Bork. *Practical tuning of xylophone bars and resonators*. *Applied Acoustics* **46** (1), pp. 103–127. (1995) DOI: [10.1016/0003-682X\(95\)93953-F](https://doi.org/10.1016/0003-682X(95)93953-F)
- [7] R. Bossart, N. Joly, and M. Bruneau. *Hybrid numerical and analytical solutions for acoustic boundary problems in thermo-viscous fluids*. *Journal of Sound and Vibration* **263**, pp. 69–84 (2003). DOI: [10.1016/S0022-460X\(02\)01098-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01098-2)
- [8] A. Chaigne, V. Doutaut. *Numerical simulations of xylophones. I. Time-domain modeling of the vibrating bars*. *Journal of the Acoustical Society of America* **101**(1), pp. 539–557. (1997) DOI: [10.1121/1.418117](https://doi.org/10.1121/1.418117)
- [9] V. Doutaut, D. Matignon, A. Chaigne. *Numerical simulations of xylophones. II. Time-domain modeling of the resonator and of the radiated sound pressure*. *Journal of the Acoustical Society of America* **104** (3), pp. 1633–1647. (1998) DOI: [10.1121/1.424376](https://doi.org/10.1121/1.424376)
- [10] Fiala Péter: *A hangszerek fizikája – jegyzet*, <http://last.hit.bme.hu/sites/default/files/documents/hangfiz.pdf> (Utolsó hozzáférés: 2019. október 27.)
- [11] Fiala Péter: *Móduselemzés – mérési leírás* <http://last.hit.bme.hu/sites/default/files/documents/modus.pdf> (Utolsó hozzáférés: 2019. október 27.)
- [12] N. H. Fletcher, T. D. Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer, New York, második kiadás. (1998) 19. fejezet, pp. 623–648

- [13] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, **79** (11), pp. 1309–1331 (2009), DOI: [10.1002/nme.2579](https://doi.org/10.1002/nme.2579)
- [14] Gmsh. Online: <http://gmsh.info/> (Utolsó hozzáférés: 2019. október 27.)
- [15] F. Irgens. *Continuum mechanics*. Springer, Berlin. (2008)
- [16] Forest Products Laboratory. *Wood handbook: Wood as an engineering material*. 5. fejezet: D. E. Kretschmann. Mechanical properties of wood. pp. 5-1 – 5-46. (2010). Online: https://www.fpl.fs.fed.us/documnts/fplgtr/fpl_gtr190.pdf
- [17] A. Lefebvre, G. P. Scavone, and J. Kergomard. *External tonehole interactions in woodwind instruments*. Acta Acustica united with Acustica, **99** (6), pp. 975–985 (2013) . DOI: [10.3813/AAA.918676](https://doi.org/10.3813/AAA.918676)
- [18] S. Marburg, B. Nolte. Computational acoustics of noise propagation in fluids – Finite and boundary element methods. Part II FEM: External Problems. Springer, Berlin. (2008) pp. 145–251.
- [19] N. M. Newmark. *A method of computation for structural dynamics*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, **85**, pp. 67–94 (1959)
- [20] Sonor Orff SKX 100 xilofono soprano <https://www.bax-shop.it/percussioni-melodiche/sonor-orff-skx-100-xilofono-soprano> (Utolsó hozzáférés: 2019. október 27.)