

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Relativisztikus jelenségek vizualizációja

TDK dolgozat

Szerző:

Simon Zoltán

Konzulensek:

Dr. Szirmay-Kalos László

Dr. Bokor Nándor

2021

Tartalomjegyzék

KIVONAT.....	4
ABSTRACT	4
BEVEZETÉS ÉS MOTIVÁCIÓ.....	5
ELMÉLETI ALAPOK.....	6
2. 1. NÉHÁNY ALAPFOGALOM	6
2. 2. EINSTEIN-FÉLE POSZTULÁTUMOK (EINSTEIN'S POSTULATES)	7
2. 3. LORENTZ-TÉNYEZŐ (LORENTZ FACTOR)	7
2. 4. IDŐDILATÁCIÓ (TIME DILATION)	7
2. 5. HOSSZKONTRAKCIÓ (LENGTH CONTRACTION)	7
2. 6. LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ (LORENTZ TRANSFORMATION)	8
2. 7. SEBESSÉG LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓJA (LORENTZ TRANSFORMATION OF VELOCITY)	8
2. 8. FÉNYTANI DOPPLER-EFFEKTUS (OPTICAL DOPPLER EFFECT)	9
2. 9. WIGNER-ROTÁCIÓ (WIGNER ROTATION)	10
2. 10. GALILEI-TRANSZFORMÁCIÓ (GALILEAN TRANSFORMATION)	10
2. 11. SEBESSÉG GALILEI-TRANSZFORMÁCIÓJA (GALILEAN TRANSFORMATION OF VELOCITY).....	10
FIZIKAI MODELLEK IMPLEMENTÁCIÓJA.....	11
3. 1. A TÉRIDŐ REPREZENTÁCIÓJA ÉS AZ ABSZOLÚT VONATKOZTATÁSI RENDSZER ÉS NYUGALMI VONATKOZTATÁSI RENDSZER KIFEJEZÉSEK HASZNÁLATA	11
3. 2. MÉRTÉKEGYSÉGEK	11
3. 3. TESTEK REPREZENTÁCIÓJA	11
3. 4. A VILÁGVONALAK TÁROLÁSA	11
3. 5. KÜLÖNBÖZŐ NÉZETEK ÉS MEGJELENÍTÉSI MÓDOK.....	12
3. 6. MEGFIGYELŐ RENDSZEREK KÖZTI VÁLTÁS	12
3. 7. EGYIDEJŰSÉGEN ALAPULÓ MEGJELENÍTÉS	13
3. 8. A FÉNY ÚTJÁT FIGYELEMBE VEVŐ MEGJELENÍTÉS	13
3. 9. VALÓS IDEJŰ MEGJELENÍTÉS CSŐVEZETÉKE	14
3. 9. 1. <i>Világvonal generálás relativisztikus eljárással</i>	14
3. 9. 2. <i>Világvonal generálás klasszikus eljárással</i>	15
3. 9. 3. <i>Metszet keresés</i>	15
3. 9. 4. <i>Megfigyelő váltás</i>	15
3. 9. 5. <i>Kamera transzformáció</i>	15
3. 9. 6. <i>Algoritmus hatékonysága</i>	15
3. 10. FÉNYTANI DOPPLER-EFFEKTUS A GPU-N	15
3. 11. LINEÁRIS INTERPOLÁCIÓ.....	17
3. 12. FUTÁSI SEBESSÉG ELEMZÉSE.....	17
DIAGRAM NÉZET.....	18
4. 1. TECHNIKAI KÉRDÉSEK.....	19
4. 2. KOORDINÁTARENDSZER TRANSZFORMÁCIÓ	19
4. 3. VILÁGVONALAK SZERKESZTÉSE	19
4. 4. A 3D TÉRIDŐ DIAGRAM ELŐNYEI ÉS HÁTRÁNYAI A 2D DIAGRAMMAL SZEMBEN	19
RELATIVISZTIKUS JELENSÉGEK SZEMLÉLTETÉSE	20
5. 1. IKERPARADOXON.....	21
5. 1. 1. <i>Szimuláció szereplői</i>	21
5. 1. 2. <i>Jelenség vizualizációja</i>	21

5. 2.	HOSSZKONTRAKCIÓ.....	22
5. 2. 1.	<i>Szimuláció szereplői</i>	22
5. 2. 2.	<i>Jelenség vizualizációja</i>	22
5. 3.	FÉNYTANI DOPPLER-EFFEKTUS	23
5. 3. 1.	<i>Szimuláció szereplői</i>	23
5. 4.	TESTEK LÁTVÁNYA A FÉNY ÚTJÁT FIGYELEMBEVÉVE	24
5. 4. 1.	<i>Szimuláció szereplői</i>	24
5. 4. 2.	<i>Jelenség vizualizációja</i>	24
5. 5.	WIGNER-ROTÁCIÓ MEGJELENÉSE	25
5. 5. 1.	<i>Szimuláció szereplői</i>	25
5. 5. 2.	<i>Jelenség vizualizációja</i>	25
EREDMÉNYEK ÉRTÉKELÉSE		27
6. 1.	MEGOLDOTT PROBLÉMÁK	27
6. 2.	POTENCIÁLIS FELHASZNÁLHATÓSÁG	27
JÖVŐBEN MEGOLDANDÓ FELADATOK		28
ÁBRÁK JEGYZÉKE		29
IRODALOMJEGYZÉK		30

Kivonat

A speciális relativitáselmélet számtalan olyan jelenséget ír le, amelyek megfigyelésére a mindennapokban nincs lehetőség. Egy átlagembernek nincsenek empirikus tapasztalatai az olyan jelenségekről, mint a hosszkontrakció vagy idődilatáció.

Ezért létrehoztam egy grafikus alkalmazást, amely ezen hatások könnyebb megértését segíti. Modellezi a fénysebességgel összemérhető sebességgel közlekedő testek látványát. Megjeleníti a hosszkontrakciót, idődilatációt, relativisztikus Doppler-effektust és egyéb hatásokat. Figyelembe veszi a fény által a látott objektum és a szemünk közt megtett utat, de lehetőséget ad az egyidejűleg történő események megjelenítésére is. Váltani enged a Lorentz- és Galilei-transzformáció közt, hogy összevethessük Einstein és Newton modelljét. Egy háromdimenziós téridő diagrammal is szolgál, amin pontosabban is elemezhetjük a testek mozgását.

Munkámban áttekintem a szimuláció készítéséhez felhasznált elméleti fizikai modelleket és azok implementációbeli manifesztációját. A szimulátorral megjelenített ábrákon keresztül bemutatok néhány ismertebb relativisztikus jelenséget.

Abstract

Special relativity describes many phenomena, not observable in everyday life. A common man has no empirical experience about effects, such as length contraction and time dilatation.

I created an educational application, which helps to understand these effects. It models vision of objects traveling close to the speed of light. It visualizes length contraction, time dilatation, relativistic Doppler effect and more. It considers the path of light between the object and our eye, but it also presents an opportunity to visualize events happening simultaneously as well. It allows to switch between Lorentz and Galilean transformation, so we can compare Einstein's and Newton's model. It serves with a three-dimensional spacetime diagram, on which we have a chance to further analyze movement of the objects.

In this work I have surveyed all the used theoretical models and their manifestation in implementation. I present a couple of well-known relativistic effects via images rendered by this simulator.

1. fejezet

Bevezetés és motiváció

A relativitáselmélet a modern fizika egyik fontos alappillére, amely lényegesen megváltoztatta a világról alkotott elképzeléseinket. Ma már sok alkalmazási terület létezik, ahol közvetlenül vagy közvetve, de figyelembe kell venni az általa leírt jelenségeket¹. Ennek ellenére a mindennapokban nagyon kevés lehetőség nyílik arra, hogy személyesen is tapasztalatot szerezzünk a világegyetem működésének szélsőséges megnyilvánulásairól. Így mindazok a jelenségek, amelyek csak nagy relatív sebességek mellett válnának érzékelhetővé, azok az átlagember számára rejtve maradnak.

Az általam készített grafikus szoftver szemlélteti a fénysebességhez közeli sebességeknél jelentkező különleges hatásokat. Így könnyebbé teszi az ezeket leíró elmélet megismerését és megértését.

A szoftver készítése során fontos szempont volt, hogy az minél intuitívabb módon biztosítson interakciót a felhasználó és a virtuális világ közt. A szimuláció számos paraméterét futásidőben változtathatóvá tettem. A klasszikus és modern fizikai modell közti különbség hangsúlyosabbá tételének érdekében, lehetőség nyílik a kettő közti valós idejű váltásra. Ennek hatását tovább növeli, hogy a két különböző modellben látott kép között egy rövid animációban folyamatos az átmenet. Ez egy speciális lineáris interpolációt támogató típussal került megvalósításra. A jelenségek további elemzésére a program tartalmaz egy háromdimenziós tér-idő diagramot is. Ezen a szimulációban résztvevő testek világvonalait láthatjuk. A program nagyrészt C++ nyelven íródott, de a fizikai modellek egy része a grafikus processzorra lett implementálva OpenGL Shading Language segítségével a párhuzamos feldolgozás kihasználása érdekében. A szimulált testek világvonalai szerkeszthetőek. A testek adott konfigurációja fájlba menthető és onnan újra beolvasható.

Mindennek elkészítésére az indíttatás Dr. Bokor Nándor Szemléletes relativitáselmélet² című tárgyának, majd később Dr. Szirmay-Kalos László Számítógépes grafika³ című tárgyának hallgatása során kezdett körvonalazódni. Motivált az olyan projektek létezése, mint az MIT Game Lab által fejlesztett OpenRelativity⁴, ami egy nyílt forráskódú eszközcsoomag a Unity videójáték-motorhoz, illetve a Ute Kraus és Corvin Zahn munkáját dicséző Space Time Travel⁵ weboldalon közölt anyagok. Ezeket megismerve fogalmazódott meg bennem az igény, hogy egy sokkal elérhetőbb kompakt alkalmazást kellene készíteni, amely képes előállítani a Space Time Travel lapon elérhető képek és videókon látottakhoz hasonló vizualizációkat, és az OpenRelativity-hez hasonlóan hozzáférhető. Nem igényli viszont egy Unity-hez hasonló keretrendszer ismeretét.

Ebben az dolgozatban ismertetem a szimulált jelenségek fizikai modelljét. Leírom, ezek hogyan jelennek meg a programban. Szó lesz a diagram nézetről. Demonstrálom a szoftver képességeit ismert relativisztikus hatások vizualizációján keresztül. Végül javaslatokat teszek a projekt további fejlesztési irányaira.

¹ Jó példa erre a műholdas helymeghatározás, ahol a műhold időmérését folyamatosan korrigálni kell, hogy a földi készülékek számára helyes helymeghatározást tudjon biztosítani. A speciális és általános relativitáselmélet eredményei nélkül nem lehetne levezetni a szükséges korrekciókat.

² https://physics.bme.hu/BMETE11AX38_kov

³ <https://portal.vik.bme.hu/kepzes/targyak/VIIIAB07/hu/>

⁴ <http://gamelab.mit.edu/research/openrelativity/>

⁵ <https://www.spacetimetravel.org/>

2. fejezet

Elméleti alapok

Ebben a fejezetben áttekintésre kerülnek a szimulátor által használt fizikai modellek. Azért gondolom fontosnak ezek részletesebb ismertetését, mivel központi részét képezik a program működésének. Fontos megjegyezni, hogy kizárólag a speciális relativitáselmélet által magyarázott viselkedést modellezem. Ez azt jelenti, hogy csak sík téridőben vizsgálom a testek mozgását. Ennek görbült téridőre való kiterjesztésének lehetőségét a **Jövőben megoldandó feladatok** című fejezet részletesebben is tárgyalja.

2.1. Néhány alapfogalom

A későbbi bekezdésekben tárgyalt összefüggések megértéséhez szükséges fogalmak:

- **Fénysebesség (Speed of light)** A fény vákuumbeli terjedési sebessége egy univerzális fizikai állandó. Számértéke mérések alapján $c_0 = 299792458 \frac{m}{s}$. Érdekes felfedezés, hogy ez az érték megjelenik a Maxwell-egyenletekből⁶ levezethető hullámegyenlet megoldásában is, mint a hullám terjedési sebessége. Ez is sejteti, hogy a fény sebessége egy nagyon meghatározó mennyiség. A speciális relativitáselmélet egyik alapvetése, hogy a vákuumbeli fénysebességet minden inerciarendszerben azonosnak mérjük.
- **Téridő (Spacetime)** A speciális relativitáselmélet modellje szerint a tér és idő paraméterek nem kezelhetők egymástól függetlenül. Ennek matematikai kifejeződése, hogy egy négydimenziós kontinuumként kapcsoljuk össze a két fogalmat.
- **Esemény (Event)** Egy pont a téridőben.
- **Megfigyelő (Observer)** Ez alatt elsősorban nem egy valós léttel bíró entitásra kell gondolni. Egy vonatkoztatási rendszerről van szó, amelyben térbeli pozíciók és időpillanatok regisztrálhatóak.
- **Nyugalmi vonatkoztatási rendszer (Proper frame)** Egy egyenesvonalú egyenletes mozgást végző objektum nyugalmi rendszere az, amelyben mindig ugyanazt a térbeli pozíciót foglalja el a mérés idejétől függetlenül. Gyorsuló testek esetében pillanatnyi nyugalmi rendszerről lehet beszélni. Ez egy olyan vonatkoztatási rendszer, amely annak az egyenesvonalú egyenletes mozgást végző objektumnak lenne a nyugalmi rendszere, amellyel a gyorsuló test az adott pillanatban azonos sebességgel, azonos irányba mozog.
- **Világvonal (World line)** Egy objektum világvonala az általa megélt események sorozata. Ez egy egydimenziós görbe a négydimenziós téridőben, ami leírja az objektum mindekori pozícióját. A „meredeksége” kifejezi az objektum sebességét. Ez a sebesség nem haladhatja meg a fénysebességet.
- **Egyidejűség (Simultaneity)** Mely eseményeket tekinthetjük egyidejűnek? A kérdés nem triviális. A használt definíciót a következő konstrukcióval lehet leírni: Adott két időmérő berendezés. Jelöljük őket *A*-val és *B*-vel. Ezek térben távol helyezkednek el egymástól. Szeretnénk összehangolni az óráikat. *A* küld egy fényimpulzust *B* felé. *B* regisztrálja, hogy a fényimpulzus elérte, és rögtön vissza is küldi a jelet a küldő felé (Ezt megteheti például egy féligáteresztő tükör segítségével). *A* regisztrálja, amikor visszakapja az impulzust. *A* tudja, mikor indította az impulzust, ismeri a visszavert jel beérkezésének idejét. Feltételezve, hogy a jel oda és vissza azonos sebességgel haladt, azt mondhatjuk, hogy a teljes oda-vissza út időtartamának

⁶ A James Clerk Maxwelltől származó négy egyenlet leírja a mágneses és elektromos tér viselkedését és a kettő kapcsolatát.

felénél ért a jel B -hez. Ha B a jel regisztrálásakor a saját óráját újraindítja, A pedig az impulzus visszatértekor a jel kibocsátása és visszatérése közt eltelt időtartam felére állítja az idejét, akkor a procedúra végeztével sikeresen összehangolták az óráik.

Egyidejűnek az előző eljárás fogalmait használva a jel B -hez érkezésének eseményét és A -val a jel visszatérésére várakozás felénél történő eseményt tekintjük.

2. 2. Einstein-féle posztulátumok (Einstein's postulates)

1. A Természettörvények minden inerciarendszerben ugyanolyan alakúak.
2. Bármilyen fizikai hatás maximum c sebességgel terjedhet.

A c sebesség invarianciáját nem kell külön kimondani, mert ez az első posztulátumnak a következménye. Ha ez nem így volna, akkor fénysebesség mérésével különbséget tudnánk tenni két inerciarendszer között. Ha ezt a két alaptörvényt elfogadjuk, akkor ebből az egész speciális relativitáselmélet felépíthető: minden törvényt igazolható vagy cáfolható.

(Speciális relativitáselmélet, 2013)

2. 3. Lorentz-tényező (Lorentz factor)

A Lorentz-tényező egy γ skalármennyiség, amely kifejezi két egymáshoz képest v sebességgel mozgó megfigyelő által mért bizonyos értékek közti eltérést. Ilyen mért érték lehet az időintervallum két esemény között vagy egy tárgy hossza. A Lorentz-tényező képlettel kifejezve a következő:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ ahol a } c \text{ a vákuumbeli fénysebesség.}$$

A képletből látszik, hogy kis v sebességkülönbségnél 1-hez konvergál. Ezért a relativisztikus jelenségeket csak a fénysebességgel összemérhető sebességgel mozgó objektumokon van esélyünk szabadszemmel megfigyelni.⁷ Szintén látszik, hogy ez egynél nagyobb egyenlő érték. Ennek a hosszkontrakció és idődilatáció magyarázatánál van jelentősége.

2. 4. Idődilatáció (Time dilation)

Az idődilatáció azt a jelenséget foglalja magába, hogy a különböző megfigyelők két adott esemény bekövetkezése közt különböző időintervallumokat mérhetnek. Két egyenesvonalú egyenletes mozgást végző megfigyelő közül az méri az események közt a legkevesebb időt, amely megfigyelő számára a két esemény térben azonos helyen történt a saját nyugalmi rendszerében mérve. A dilatáció tehát az ehhez képesti hosszabb intervallumra utal. Két egymáshoz képest v sebességgel közlekedő test nyugalmi rendszereit vizsgálva:

Amíg F megfigyelő A és B események bekövetkezése közt Δt időt mér, addig a hozzá képest v sebességgel mozgó F' megfigyelő ugyanezen események közt $\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ időt mér, ha az F

mérése szerint az A és B azonos helyen zajlanak.

2. 5. Hosszkontrakció (Length contraction)

A hosszkontrakció azon jelenség neve, hogy egy adott testet egymáshoz képest mozgásban lévő megfigyelők eltérő térbeli kiterjedésűnek regisztrálnak. A leghosszabbnak az a megfigyelő méri a testet, amely szerint a megfigyelt test nyugalomban van. Az így mért hossz a test **nyugalmi hossza**. A hosszeltérés a test és a megfigyelő relatív mozgásának irányában jelentkezik. Két egymáshoz képest

⁷ A szimulátorban $\geq 0,9c$ sebességeknél igazán látványosak a hatások, de már $0,5c$ felett is látszik a különbség a relativitást elhanyagoló és számításba vevő modellek közt.

v sebességgel közlekedő test nyugalmi rendszereit vizsgálva (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az F megfigyelő a nyugalmi hosszt méri.):

Amíg F megfigyelő l hosszúságúnak méri a test hosszát, addig a hozzá képest v sebességgel mozgó F' megfigyelő ugyanezen hosszt $l' = \frac{l}{\gamma} = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ -nek méri.

2. 6. Lorentz-transzformáció (Lorentz transformation)

A Lorentz-transzformáció kapcsolatot teremt két, egymáshoz képest v sebességgel mozgó megfigyelő vonatkoztatási rendszere között. Abban az esetben, ha F és F' megfigyelők közti v relatív sebesség kizárólag x irányú, akkor a transzformációt a következő kifejezések írják le:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

, ahol (x, y, z, t) négyesvektor egy esemény koordinátái F megfigyelő szerint, míg (x', y', z', t') ugyanezen esemény koordinátái F' megfigyelő szerint.

A képletekből látszik, hogy azok a térkoordináta komponensek, amelyek irányában zérus a sebességkülönbség a két rendszer közt, változatlanul lemásolódnak. Másképpen megfogalmazva csak a mozgással párhuzamos komponens változik. Innen jöhet az ötlet, hogy hogyan végezzük el a transzformációt tetszőleges irányú relatív sebesség esetén. A térbeli pozíciót leíró \vec{r} vektort felbonthatjuk a \vec{v} sebességvektorral párhuzamos \vec{r}_{\parallel} és arra merőleges \vec{r}_{\perp} komponensre, amikre igaz, hogy $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$.

Ezt felhasználva a transzformációs képletekben:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}_{\parallel}}{c^2} \right)$$

$$\vec{r}'_{\parallel} = \gamma(\vec{r}_{\parallel} - t\vec{v})$$

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}$$

$$\text{Végül } \vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}.$$

2. 7. Sebesség Lorentz-transzformációja (Lorentz transformation of velocity)

Az előző képletek idő szerinti deriválásával kaphatjuk a sebesség transzformációs képletét.

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \quad \dots \text{a megfigyelt sebesség az } F \text{ és } F' \text{ megfigyelő szerint.}$$

Behelyettesítve a Lorentz-transzformáció képleteit:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d}{dt'} \gamma(\vec{r}_{\parallel} - t\vec{v}) + \frac{d}{dt'} \vec{r}_{\perp}$$

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}_{\parallel}}{c^2} \right)$$

$$\bar{u}' = \frac{d(\gamma(\bar{r}_{\parallel} - t\bar{v}) + \bar{r}_{\perp})}{\gamma \left(dt - \frac{\bar{v} \cdot \bar{r}_{\parallel}}{c^2} \right)}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{c^2}}}$$

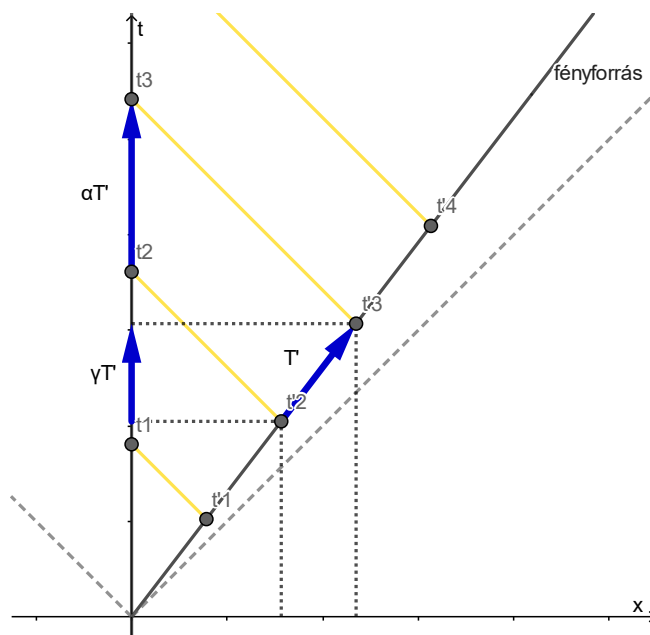
$$\bar{u}' = \frac{d \left(\bar{r}_{\parallel} - t\bar{v} + \bar{r}_{\perp} \sqrt{1 - \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}}{c^2}} \right)}{dt - \frac{\bar{v} \cdot \bar{r}_{\parallel}}{c^2}}$$

...

$$\bar{u}' = \frac{1}{1 - \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{c^2}} \left(\frac{\bar{u}}{\gamma} - \bar{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\bar{u} \cdot \bar{v}) \bar{v} \right)$$

2. 8. Fénytani Doppler-effektus (Optical Doppler effect)

Egy fényforráshoz képest mozgásban lévő megfigyelő eltérő frekvenciájú fényhullámokat észlel, mint amelyeket a forrás kibocsát. Ezt a jelenséget az eltolódás irányától függően vörös- vagy kékeltolódásnak is nevezzük. A jelenség magyarázatát az 1. ábra szemlélteti.



1. Ábra [Fénytani Doppler-effektus tér-idő diagramon]

Távolodó fényforrás esetén a frekvencia transzformációját az alábbi összefüggés írja le⁸:

$$f_{\text{megfigyelt}} = f_{\text{kibocsátott}} \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

A kisebb megfigyelt frekvencia miatt, vöröseltolódás jelentkezik.

⁸ Az ábra jelölése szerint $\alpha = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$

Közeledő fényforrás esetén a sebesség előjelet vált:

$$f_{\text{megfigyelt}} = f_{\text{kibocsátott}} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

A nagyobb megfigyelt frekvencia miatt kéeltolódás jelentkezik.

A későbbi pontos implementációhoz fontos megjegyezni, hogy itt a v sebesség a megfigyelő és az objektum közti \vec{v} relatív sebességnek a megfigyelő pozíciójától a megfigyelt objektum felé mutató irányvektorral párhuzamos komponensének hosszát jelenti:

$$v = \frac{\vec{v} \cdot (\vec{r}_{\text{objektum}} - \vec{r}_{\text{megfigyelő}})}{|\vec{r}_{\text{objektum}} - \vec{r}_{\text{megfigyelő}}|}$$

2. 9. Wigner-rotáció (Wigner rotation)

A Lorentz-transzformációnál már láttuk, hogy egyes eseményekhez egymáshoz képest v sebességgel mozgó megfigyelők különböző koordinátákat társítanak. Mi történik, amikor egy adott objektum mozgásállapota megváltozik? Ekkor az objektum nyugalmi rendszere is megváltozik. A sebesség változás előtti és utáni nyugalmi rendszerben más események számítanak egyidejűnek. Így már nem triviális kérdés, hogy az objektumot alkotó pontok melyik időpillanatban váltanak sebességet. Egy jó megközelítést adhat az a modell, amiben az objektum pontjainak sebességváltozása a mozgásállapot változás utáni nyugalmi rendszerben egyidejű események. Ezt úgy is el lehet képzelni, mintha egy másik objektummal való ütközés változtatta volna meg a mozgásállapotot. A másik objektum kezdettől fogva a változás utáni sebességgel közlekedett, és az ütközés pillanatában az objektumunk összes pontját szimultán a saját mozgásállapotába kényszerítette. (Ebben a modellben nem törődünk a dinamika törvényeivel.) Ez egy törést okoz a pontok világvonalaiiban, ami az teljes objektumra nézve egy torzulást jelent, amit a saját nyugalmi rendszerében is észlelhetünk. Összehasonlítva egy végig egyenesvonalú mozgást végző testet és egy másik testet, amely kezdetben más sebességgel mozog, és egy idő után mozgásállapotot vált úgy, hogy utána az első testel azonos irányú azonos sebességű egyenesvonalú egyenletes mozgást végezzen megfigyelhető, hogy a második test végül elfordulva követi az elsőt.

2. 10. Galilei-transzformáció (Galilean transformation)

A klasszikus fizikában a Lorentz-transzformáció megfelelője a Galilei-transzformáció. Amennyiben a két megfigyelő közti sebességkülönbség a fénysebességhez képest elhanyagolható, akkor a Lorentz-transzformáció visszaadja a Galilei-transzformáció eredményét. A transzformáció képletekkel:

$$t' = t$$

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

A Lorentz-transzformációnál is tárgyalt megfontolások alapján kapjuk az általános irányú transzformációt:

$$t' = t$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - t\vec{v}$$

2. 11. Sebesség Galilei-transzformációja (Galilean transformation of velocity)

A newtoni modellben a sebesség megfigyelő rendszerek közti transzformálása triviális feladat:

$$\bar{u}' = \bar{u} - \bar{v}$$

3. fejezet

Fizikai modellek implementációja

Ebben a fejezetben bemutatásra kerül, hogyan alkalmazza a program a korábban bemutatott számítási modelleket. Szó lesz arról, hogy milyen modulokból épülnek fel a program lényegesebb részei, és azok miért indokoltak a fizikai modell tanulmányozása után. A lényegesebb algoritmusok futás idejére nézve becslést is adok.

3. 1. A téridő reprezentációja és az abszolút vonatkoztatási rendszer és nyugalmi vonatkoztatási rendszer kifejezések használata

A forráskódban az **abszolút vonatkoztatási rendszer (absolute frame)** egy megkülönböztetett vonatkoztatási rendszer elnevezése, amely bevezetése lehetővé tette, hogy az egyes testek és események téridő koordinátái egységesen legyenek tárolva. A legtöbb számítás valamilyen módon egyszerűsödik azért, mert az adatokat csak ebben a vonatkoztatási rendszerben kezeli és nem kell átalakítással törődni. Ettől eltérő vonatkoztatási rendszerben adott koordináták sohasem kerülnek tárolásra.

Ennek használata azért indokolt, mert így nem okoz keveredést a különböző sebességgel közlekedő testek nyugalmi rendszereinek kezelése. Ugyanakkor oda kell figyelni, hogy ne felejtjük el a megfelelő átalakításokat elvégezni, hogyha egy másik megfigyelő szemszögéből jelenítjük meg az adatokat.

3. 2. Mértékegységek

Úgy lettek megválasztva a különböző fizikai mennyiségek reprezentációjára használt mértékegységek, hogy azok minél inkább elősegítsék az átláthatóságot a fejlesztés során.

A **hossz** méterben van kifejezve, $l \dots [m]$

Az **idő** mértékegységét úgy választjuk, hogy a vákuumbeli fénysebesség egységnyi legyen⁹. Az idő mértékegysége ilyenkor méter: $t \dots [m]$

A **sebesség** nagysága skalárként a fénysebesség törtrészeként ábrázolódik: $v \dots \rho c \left[\frac{m}{m} \right]$ Ez dimenzió nélküli mennyiség. Tárolásra a sebesség négyesvektor¹⁰ bizonyult előnyösnek, hiszen természetesen a sebesség irányát is szeretnénk ismerni.

3. 3. Testek reprezentációja

A megjelenő testek geometriája hagyományos 3D poligonhálóként szerepel a források közt. Beolvasás után a geometria csúcspontjainak koordinátái kiegészülnek egy negyedik idő komponenssel, ami nullára inicializálódik. Ebben a formában a térkoordináták a test nyugalmi rendszerében értelmezettek.

3. 4. A világvonalak tárolása

A programban megjelenő fizikai testek és megfigyelők mindegyikéhez tartozik egy-egy **világvonal** (world line). Testek esetén ez a test geometriájának középpontjának világvonala. Mivel a test különböző

⁹ Ilyenkor a téridő diagramokon a fény világvonala az idő tengellyel 45°-os szöget zár be.

¹⁰ A szimuláció szempontjából elhanyagolható a négyesvektorok speciális aritmetikája. A jelenlegi változat nem igényli több négyesvektorral való együttes számolást. Elégséges, ha úgy tekintünk erre az adattípusra, mint a világvonal tangens vektorára egy adott eseménynél.

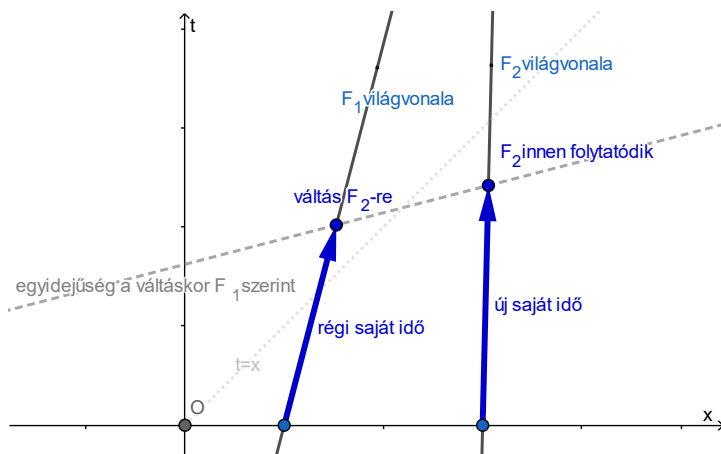
pontjai különböző világvonalakat követnek, ezért ezeket megjelenítéskor kell generálni. Az, hogy egy világvonal tárolódik testenként csökkenti a tárigényt, de növeli a képfrissítésenként végzendő feladatok számát. Egy világvonalban lehetnek törések. Ez úgy valósul meg, hogy a világvonal több esemény egymásutánjaként van tárolva. Két szomszédos esemény közt egyenes világvonalat feltételezünk. A sok pontból álló világvonalak azonban jelentősen lelassíthatják a futást, mivel így az algoritmusoknak végig kell iterálnia az egyes részzakaszokon, hogy a legtöbb részfeladatot elvégezzék. Ennek oka, hogy a korábban bemutatott fizikai összefüggések csak egyenesvonalú egyenletes mozgást feltételezve számolhatóak a közölt egyszerű képletekkel. Például ahhoz, hogy megkapjuk egy objektum életkorát (az abszolút megfigyelő szerinti nulla időpillanatban megélt eseménytől az objektum által mért idő), összegezni kell az egyes rész szakaszokon eltelt időt. Az idődilatációt minden egyes részzakaszra külön kell számolni.

3. 5. Különböző nézetek és megjelenítési módok

A programban különböző nézeti módok közt válthatunk. A két fő nézet típus a valós idejű háromdimenziós és diagram nézet. A valós idejű nézetben a szimulátor úgy viselkedik, mint a legtöbb hagyományos háromdimenziós jelenetet megjelenítő alkalmazás. A kamera az aktuálisan kiválasztott megfigyelő rendszer origójában helyezkedik el. Körül tudunk nézni és a környezetünkben látjuk az objektumokat. Amikor elindítjuk a szimulációt, akkor a testek a világvonaluknak megfelelően mozognak. A másik nézet egy háromdimenziós téridő diagramot mutat. Ebben az összes inicializált objektum és megfigyelő világvonala megjelenik, valamint a kiválasztott megfigyelő aktuális korához tartozó egyidejűségi hipersík vagy fénykúp (beállítástól függően) is kirajzolódik. Választhatunk, hogy a valós idejű megjelenítést használva az egyidejű eseményeket szeretnénk láttatni, vagy a fény útját is figyelembe vennénk. Válthatunk a Lorentz- és Galilei-transzformációk közt. Állíthatjuk, mennyire változtassa meg a Doppler-effektus a látott színeket.

3. 6. Megfigyelő rendszerek közti váltás

A program lehetőséget ad különböző megfigyelők nézete közti dinamikus váltásra. Ebben a szimulációban a megfigyelők nem kötődnek valamilyen fizikai objektumhoz. Egyedül az origóhoz rendelt világvonal tartozik hozzájuk. Amikor a valós idejű módban vizsgáljuk a környezetet, egy idő változó határozza meg, hogy a megfigyelő világvonalának melyik pontján járunk éppen. Ez a változó mindig úgy skálázódik, hogy az aktuálisan kiválasztott rendszerben teljen „helyesen” az idő az idődilatációnak megfelelően. Amikor megfigyelőt váltunk, akkor felmerül a kérdés, hogyan változtassuk meg ezt az idő változót. A jelenlegi változat ezt egyidejűség alapján teszi. Amikor F_1 megfigyelőről F_2 -re váltunk, akkor a program a τ aktuális megfigyelő számára eltelt időt arra az értékre állítja, amit F_2 annál a saját világvonalán lévő eseménynél mért, ami F_1 számára a váltással egyidőben történt. Ezt a következő ábra szemlélteti:



2. Ábra [Megfigyelő váltás]

3. 7. Egyidejűségeen alapuló megjelenítés

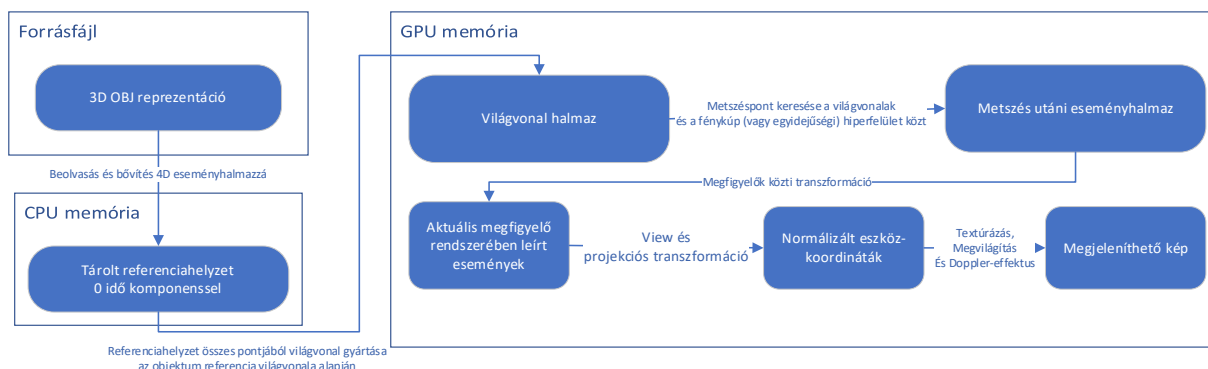
Amikor a valós idejű nézetben meg kell jeleníteni a testeket, akkor az egyik lehetőség az aktuális megfigyelő által egyidejűnek regisztrált események ábrázolása. Az egyidejű események egy háromdimenziós sík hiperfelületet alkotnak a négydimenziós téridőben. Ez a kétdimenziós síkhoz hasonlóan egyszerűen reprezentálható. Leírásához elég egy pont a felületen (esemény) és a felület normálvektora. A pont a felületen az az E esemény lesz, aminél a megfigyelő a hozzá rendelt világvonall mentén a τ sajátidőt méri. A normálvektort a világvonal E eseményénél vett tangenciális négyesvektorából a térkomponensek előjelváltásával kapjuk. Mivel már geometriailag leírtuk az egyidejűség fogalmát, és a különböző világvonalakat is szakaszok egymásutánjaként adtuk meg, könnyű meghatározni ezek metszéspontjait. A világvonalak és egyidejűségi hiperfelület metszéspontjai a megfigyelő szerint egyidejű események.

3. 8. A fény útját figyelembe vevő megjelenítés

A fénynek időbe telik, hogy a látott objektumtól elérjen a megfigyelő szeméhez. Egy bizonyos távolságon túlról a fénynek még nem volt ideje a szembe érni. Azon események összességét, amelyek a megfigyelő számára egy adott pillanatban láthatóak a téridőben egy háromdimenziós hiperfelület határolja. Ezt a hiperfelületet lehet a kúp palást egy négydimenziós térbeli megfelelőjének tekinteni, mert a nézőponttól távolodva egyre régebbi eseményeket látunk. A kúp tengelye az időtengellyel esik egybe. Az alkotói olyan fénysugár világvonalak, amelyek a csúcst alkotó eseménynél érnek a vizsgáló szeméhez. Egy kúp és egy egyenes metszését egy másodfokú egyenlet megoldásával számíthatjuk ki. Oda kell figyelni, hogy az egyenlet két gyöke közül azt válasszuk, amely múltbeli eseményt reprezentál. Jó hír viszont, hogy ha egyébként nem engedjük, hogy egy világvonal meredeksége túllépje a fény világvonalának meredekségét, akkor mindig lesz valós megoldás. Ez könnyen belátható, ha megfontoljuk, hogy ilyen feltételek mellett egy egyenes sem tud olyan szögben haladni, hogy a kúp palástja valahol „utol ne érje”. A Lorentz-transzformációt használva tetszőleges megfigyelő számára a kúp palástja nem változik, mivel a fénysebességet minden megfigyelő azonosnak méri. Galilei-transzformációt alkalmazva már nem egyértelmű, hogy egy adott megfigyelő számára hogyan változnak a kúp alkotói. A program az egyszerűbb műveletvégzés céljából Galilei-transzformáció alkalmazásakor úgy tekinti, hogy a kúp az abszolút megfigyelő számára egybeesik a Lorentz-transzformációnál is használt kúppal. Ez előnyös, mivel a metszést végző algoritmus egyébként is az abszolút rendszerben számol, és így használhatja ugyanazokat a képleteket, mint a Lorentz-transzformáció esetén.

3. 9. Valós idejű megjelenítés csővezetéke

Korábban szóesett a megjelenítendő objektumok inicializálásáról. Most a térbeli megjelenítéshez szükséges további lépések kerülnek ismertetésre. A következő ábra sematikus ismerteti az egyes lépéseket:



3. Ábra [Valós idejű megjelenítés folyamata]

Az ábrából látszik, hogy a legtöbb munka a grafikus processzorra hárul. Az adatok GPU-ra töltése után a csúcspont árnyaló első feladata, hogy világvonalat gyártson az objektum összes csúcspontjához. Ez teszi lehetővé, hogy egy adott test megjelenése megfelelően torzuljon a nyugalmi rendszerében megfigyelhető alakjához képest. Eltérések vannak a klasszikus és relativisztikus modell szerinti világvonal generálásban.

3. 9. 1. Világvonal generálás relativisztikus eljárással

A referencia helyzetben ábrázolt csúcspontok világvonallá bővítésének első lépése, hogy egy kezdő eseményt generálunk a világvonal számára. Azt a konvenciót követjük, hogy ez a kezdőesemény az abszolút megfigyelő számára nulla idő koordinátával kell, hogy rendelkezzen. Itt emlékezzünk vissza, hogy a referencia helyzetben már nullára inicializáltuk a csúcsok idő koordinátáját! A referencia csúcsok hely koordinátái a test nyugalmi rendszerében értelmezettek. Abban az esetben, ha a test referencia világvonala az abszolút nulla idő értéknél nem nulla sebességgel (idő tengellyel párhuzamos), a test nyugalmi rendszerében és abszolút rendszerben eltérnek a hely koordináták. Az eltérés mértékét a hosszkontrakció képlete írja le. Ennek alkalmazása után előállt a $\overline{offset} = (x_{abs}, y_{abs}, z_{abs}, 0)$ alakú abszolút rendszerben értelmezett kezdő esemény. Fontos, hogy a program a későbbiekben nem zárja ki, hogy egy megjelenítendő esemény az abszolút rendszerben a kezdő eseménynél korábban történjen. Ez mindössze a további generálás kezdő eseménye, és a program az ezt megelőző világvonalat a következő szakasszal párhuzamos, negatív végtelenbe tartó geodetikus világvonallal feltételezi.

A csúcsokhoz rendelt világvonalak a test referencia világvonala alapján generálódnak. Amennyiben figyelmen kívül hagyjuk, hogy egy sebességváltás esetén a különböző világvonalak az abszolút rendszerben nem azonos idő koordinátával rendelkező eseményeknél törnek meg, a referencia világvonal \overline{offset} eltolásával kaphatjuk az egyes csúcsok világvonalát.¹¹ Ezzel szemben realiztikusabb megközelítés, ha a korábbi fejezetben leírt módon a következő szakasz nyugalmi rendszerében történnek egyszerre a törések. Az algoritmus végig követi a referencia világvonalat és az egyes szakaszok végpontjához egyidejűségi hipersíkot generál. Ezzel a síkkal metszi a generálás alatt álló világvonal utolsó félegyenesét, amely a referencia világvonal aktuális szakaszával párhuzamos. Így megszületik a generált világvonal aktuális szakaszának vég eseménye, ami egyben a következő szakasz kezdő

¹¹ A fejlesztés során először így működött a program. Továbbra is lehetőség van futásidőben váltani erre a kevésbé realiztikus eljárásra.

eseménye is. A referencia világvonal utolsó tárolt eseménye után a program az utolsó szakasszal párhuzamos, pozitív végtelenbe tartó geodetikus világvonalat feltételez. (Hasonlóan, mint a kezdő esemény előtt.)

3. 9. 2. Világvonal generálás klasszikus eljárással

A kezdő esemény generálásakor nem kell figyelembe venni a hosszkontrakciót. Mindössze a referencia csúcshoz a referencia világvonal kezdő eseményével való eltolásáról van szó. Mivel a klasszikus modell szerint az idő abszolút, ezért sebességváltáskor nem kell figyelni arra, hogy egy test különböző csúcsai az abszolút megfigyelő szerint nem egyszerre váltanak sebességet. Alkalmazhatjuk a már korábban említett egyszerű eljárást, amikor az új világvonalat a referencia világvonal eltolásával kapjuk.

3. 9. 3. Metszet keresés

Miután kész a csúcs világvonala előállítunk egy hiperfelületet, amellyel metszve a világvonalat megkapjuk a megjelenítendő eseményt az abszolút megfigyelő koordináta rendszerében. Észrevehető, hogy nincs szükség arra, hogy ezt a metszést a teljes világvonal generálása után végezzük el, hiszen annak menetén újra végig kellene itérálni a világvonal kis szakaszain. Ésszerű tehát, hogy az egyes szakaszok metszetét a generálásuk után rögtön kiszámítsuk.

3. 9. 4. Megfigyelő váltás

Miután előállt a kimetszett esemény, át kell transzformálni azt az aktuálisan kiválasztott megfigyelő rendszerbe. Ez történhet Lorentz- vagy Galilei-transzformációval. Ez után az idő koordináta elhagyásával megkapjuk a megjelenítendő virtuális világ koordinátarendszerében a kirajzolandó csúcs 3D pozícióját.

3. 9. 5. Kamera transzformáció

A csúcspont árnyaló utolsó feladata, hogy a kapott vektoron alkalmazza a nézet és projekciós transzformációt, amely egy mátrixszal való szorzást jelent. Így előáll a normalizált eszközkoordináta-rendszerbeli pont, amelyet továbbítunk a pixel árnyalónak. Fontos észrevenni, hogy itt más, gyakori transzformációs csővezetékekkel ellentétben a nézet és projekciós transzformációkkal együtt mátrixszorzás formájában nem alkalmazunk skálázó, forgató és eltoló transzformációt. Skálázásra és forgatásra a csúcshoz tartozó világvonal kezdő eseményének előállítása előtt lenne lehetőség. Az eltolást a referencia világvonal kezdő eseménye és a korábban leírt teljes eljárás együtt adja.

3. 9. 6. Algoritmus hatékonysága

A műveletek lépésszáma a testek csúcspontszámának és a referenciavilágvonal felbontásának is lineáris függvénye: $O(\text{csúcsszám} \cdot \text{világvonal_felbontás})$. Ez azonban lehet lassú, ha azt is figyelembe vesszük, hogy ezt a számítást valós időben minden testre másodpercenként minimum ~ 25 -ször¹² el kell végezni, és részletes geometriájú, összetett világvonalú testekkel dolgozunk. Ha az ebből fakadó teljesítményvesztés zavaróvá válna, lehetőség van további optimalizálás implementációjára. Egy lehetséges megoldás, hogy a memória költség rontása mellett egyes testek minden csúcspontjához rendelt világvonalat eltárolunk. (Ez csak nagyon korlátozottan alkalmazható módszer.) Másik lehetőség, hogy egy nulladik lépésben megpróbáljuk megállapítani, szükséges-e többet számolni. Erre jó heurisztika lehet, hogy figyelmen kívül hagyjuk a hátunk mögött levő objektumokat. Még egy javaslat, hogy ha az abszolút megfigyelő az aktuális megfigyelő, akkor egyszerűsített számításokkal is dolgozhatunk.

3. 10. Fénytani Doppler-effektus a GPU-n

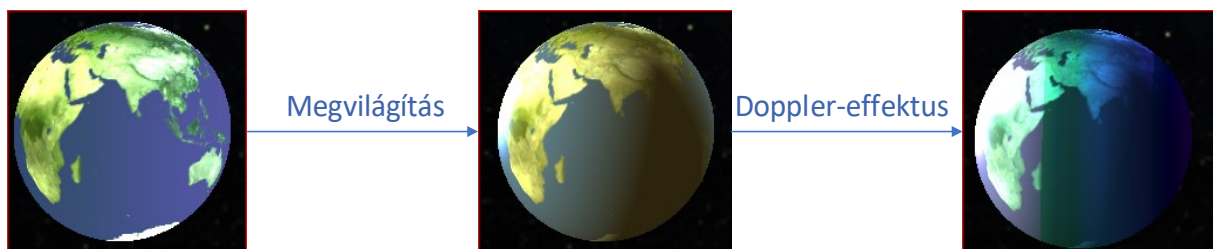
A GPU pixel árnyaló programja megkapta az ábrázolandó csúcs normalizált eszközkoordináta-rendszerbeli pozíciója és egyéb csúcsokra vonatkozó adatok poligonok csúcsai közt interpolált

¹² Körülbelül ez a legkisebb kép frissítési ráta, amelynél még folyamatosnak érzékeljük a megjelenített mozgást.

változatát. Most elkezdheti számolni a megjelenítendő képpont színét. Ennek első két lépése a testhez társított textúrában tárolt szín kiolvasása és a megvilágítás kalkulációja. Ezekkel bővebben nem foglalkozunk. Ezt az árnyékolt textúrát látjuk a test nyugalmi rendszeréből. Ha a test mozog a megfigyelőhöz képest, akkor vörös- vagy kékeltolódás tapasztalható. A Doppler-effektus mértékének kiszámolásához szükségünk van a test és megfigyelő relatív sebességére. Ezt a korábban leírt csúcspont árnyaló kiegészítésével valósíthatjuk meg. Amikor a program megtalálja a metszéspontot egy csúcs világvonala és az aktuális metsző hiperfelület közt, eltárolja a világvonal metszéspontban értelmezett sebesség négyesvektorát. A megfigyelő váltáskor ezt is átalakítja az aktuális rendszerbeli megfelelőjére a 2. 7-os vagy 2. 11-es alfejezetben ismertetett transzformáció alkalmazásával. Ez az implementáció a színeltolódás mértékét kifejező koefficiens is a csúcspontárnyalóban számolja. A pixel árnyaló egy interpolált együtthatóval dolgozik.

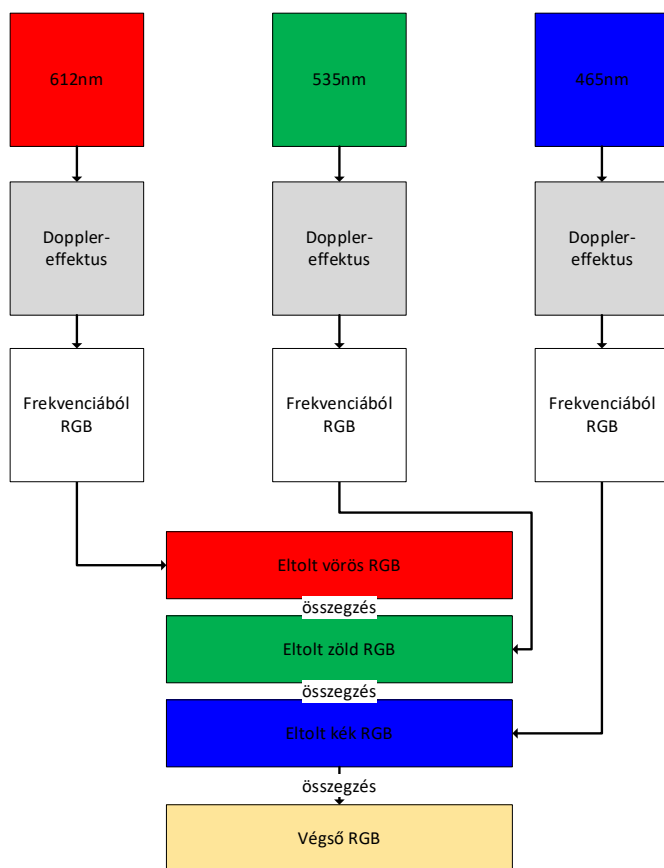
A Doppler-effektus hullám frekvenciájáról tesz állítást. A program azonban a színeket RGB formátumban tárolja. A kérdés tehát az, hogyan képezhetjük vörös, zöld és kék komponens intenzitásával adott polikromatikus fény látványának monokromatikus megfelelőjét. Továbbá, hogyan alakíthatjuk vissza a Doppler-effektus applikálása után kapott monokromatikus fény frekvenciáját látványban azonos három komponenses polikromatikus formára. Az első kérdésre a válasz az, hogy nem lehet minden RGB színnek egyértelműen megfeleltetni egy frekvenciát. Gond például a szürkeárnyalatok ilyen megfeleltetése. A probléma kiküszöbölésére egy heurisztikus megoldást alkalmaztam. Ha a képernyő vörös, zöld és kék színeinek hullámhosszát egyesével alávetem a Doppler-effektusnak, majd a kapott értékeket egy frekvenciáról RGB színkódra konvertáló eljárással¹³ átalakítom és az eredeti RGB komponensekkel súlyozva összegzem, akkor egy jó közelítő megoldást kapok.

Az egyes lépések:



4. Ábra [Pixel árnyalás lépései vizuálisan]

¹³ A frekvenciáról RGB színkódra alakító heurisztikus eljárás Earl F. Glynn-től származik. Az eredeti forráskód már nem hozzáférhető az interneten.



5. Ábra [RGB formátumban adott színekre alkalmazott Doppler-effektus]

3. 11. Lineáris interpoláció

Amikor váltunk az egyes szimulációs módok közt, akkor a megjelölt objektumok nem ugrásszerűen kerülnek az új pozíciójukba. A régi és új állapot közt lineáris interpoláció biztosítja a folyamatosságot. Ennek kivitelezéséért egy **InterpolationControl** nevű paraméteres osztály felel. Ennek példányai különböző beállítási lehetőségek pillanatnyi értékét, az előző értékét és egy interpoláló változót tárolnak. Amikor az aktuális érték megváltozik, akkor az előző és aktuális érték összehasonlításából kideríthető, hogy az megváltozott. Ilyenkor a kontroll objektum az interpolációs változót 0-tól 1-ig növeli. Amikor elérte az 1-et, az előző értéket az aktuálisra frissíti. Ez azt jelenti, hogy az új állapot már teljesen beállt és az átmeneti animáció lezajlott. Az osztály rendelkezik egy függvénnyel, amely paramétereiben két szélsőértéket kap, valamint két beállítási értéket, amelyek az egyik vagy másik szélsőérték használatát írják elő. Azt, hogy a két érték közül a kontroll objektum melyiket adja vissza, vagy adott esetben a két érték közötti interpolált értéket kapjuk, az határozza meg, hogy váltottunk-e állapotot és ha igen, akkor befejeződött-e már az átmenet.

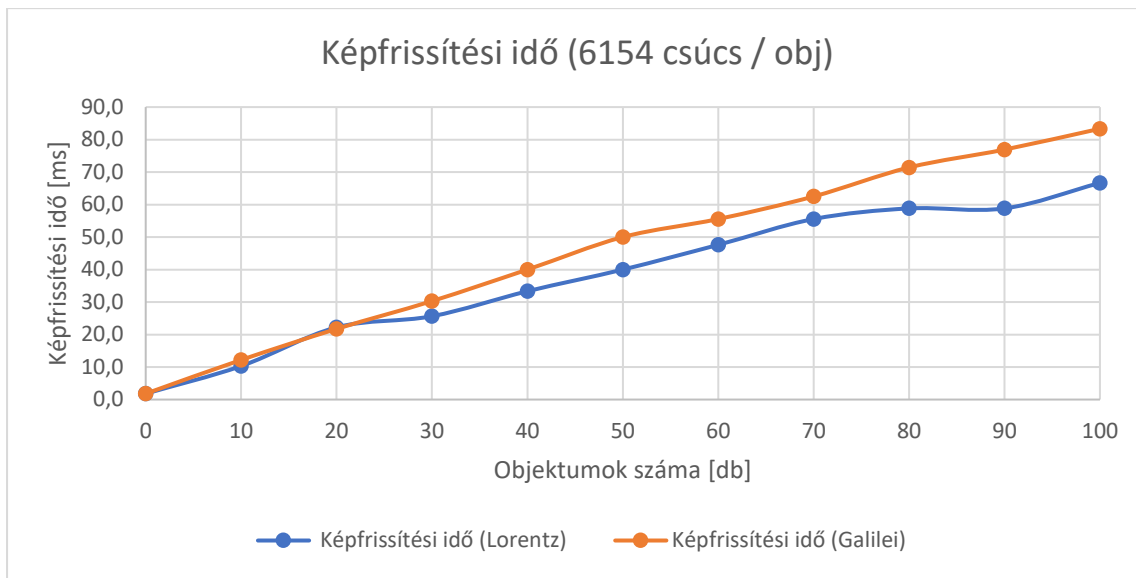
3. 12. Futási sebesség elemzése

Ebben az alfejezetben a program gyorsaságát vizsgálom. A futási sebességet másodpercenként megjelenített képkockák számában **FPS** adom meg. A méréseket különböző objektumszám és különböző szimulációs beállítások mellett végeztem 6154 csúcú objektumokat ábrázolva. A mért adatok:

Objektumok száma	FPS (Lorentz)	Képfrejtési idő (Lorentz)	FPS (Galilei)	Képfrejtési idő (Galilei)
0	550	1,8182	550	1,8182
10	97	10,3093	82	12,1951

20	45	22,2222	46	21,7391
30	39	25,6410	33	30,3030
40	30	33,3333	25	40,0000
50	25	40,0000	20	50,0000
60	21	47,6190	18	55,5556
70	18	55,5556	16	62,5000
80	17	58,8235	14	71,4286
90	17	58,8235	13	76,9231
100	15	66,6667	12	83,3333

6. Ábra [Futási sebesség táblázatban]



7. Ábra [Képfirítési idő grafikonon]

A mérések alapján egy képkocka megjelenítéséhez szükséges idő az objektumok mennyiségének közelítőleg lineáris függvénye. A meredekség $\sim 1 \frac{[ms]}{[db]}$.

4. fejezet

Diagram nézet

A program egyik lényeges funkciója, hogy meg tudja jeleníteni a világvonalakat egy háromdimenziós téríró diagramon. Ez két tér koordináta és egy idő koordináta megjelenítésére alkalmas. A legszemléletesebb, ha az idő a függőleges tengely. A jelenlegi implementáció az x és y térkoordinátákat és t idő koordinátát jeleníti meg. A világvonalakon kívül megjelenít egy fénykúpot (vagy hipersíkot), amely a kiválasztott megfigyelő aktuális életeseményéhez tartozik. Jelöli a világvonalak és ezen hiperfelület metszéspontját egy-egy csomópont, „világvonalra fűzött gyöngy” formájában¹⁴. Ebben a nézetben is lehetőség van az transzformáció típusok közti váltásra és megfigyelő váltásra. A felhasználó kiválaszthat a kurzorral egy-egy világvonalat, ami mentén megjelenik a világvonalhoz tartozó objektum neve és kora. A kor itt is az abszolút megfigyelő által nulla időpillanatban mért események alkotta hipersík és az objektum világvonalának metszéspontjától kezdve az objektum által mért idő a jelenlegi megfigyelő által megfigyelt világvonal eseményig.

¹⁴ Mivel a csomópontok kis gömbök, amelyek keresztülmennek a megjelenítési csővezeték megvilágítás lépésén is, ezért gyöngyökre hasonlítanak. Innen a fantázianév.

4. 1. Technikai kérdések

A kódban a megjeleníthető objektumoknak egy diagram megjelenítést támogató függvénnyel is kell rendelkezni. A megjelenített adatok nagyrészt szerencsére nem kell külön tárolni. Egy világvonal megjelenítésekor használható ugyanaz az eseménylista, amit korábban az objektum csomópontjaihoz tartozó világvonal generálása során használtunk. A GPU árnyalói diagram nézetben sokkal inkább hasonlítanak egy hagyományos 3D grafikus programban használatos árnyalókra. Itt már a modell méretezését, forgatását és eltolását is egy mátrix szorzással valósítjuk meg. Ez azért felel meg, mert itt nincs szükség objektumonként nagyszámú relativisztikus transzformáció végzésére. A diagramon egy objektumot pontszerűnek tekintünk. Csak az objektum referencia világvonalával számolunk.

4. 2. Koordinátarendszer transzformáció

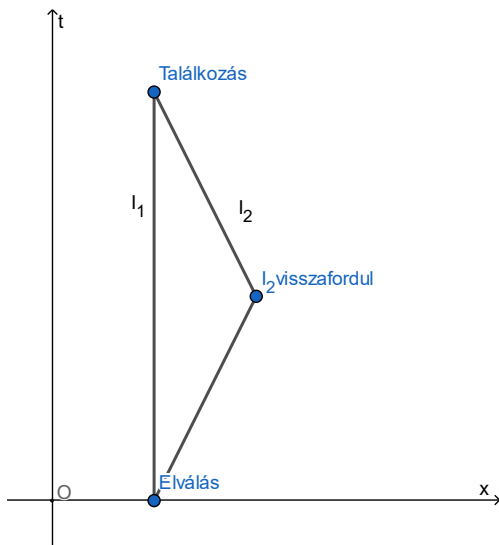
A diagram nézet képes váltani az egyes megfigyelők nyugalmi koordinátarendszerei közt. Ilyenkor a világvonalak az adott rendszerben észlelhető módon jelennek meg. Lehetőség van arra is, hogy az aktuálisan kiválasztott megfigyelőtől függetlenül mindig az abszolút megfigyelő rendszert jelenítsük meg. Ilyenkor érdekes részlet, hogy amennyiben egyidejűségi hipersíkot használunk az objektumok világvonalának metszésére, akkor az aktuálisan kiválasztott megfigyelőtől függő mértékben a hipersík ferdén jelenik meg. Ez tükrözi azt, ahogyan az abszolút megfigyelő nem ért egyet a kiválasztott megfigyelővel az egyidejű eseményekről. További érdekesség, hogy amikor Galilei-transzformációt alkalmazva megengedjük, hogy a koordinátarendszer az aktuális megfigyelő saját koordinátarendszere legyen, akkor a kúp eltolva, ferdén látszik. Ez azt szemlélteti, hogy ebben a modellben a fénysebesség az abszolút rendszerben egyezik az ismert vákuumbeli fénysebességgel. Az abszolút megfigyelőhöz képest nem zérus sebességű utazó eltérőnek méri a fény sebességét a mérés irányától függően. Abból az irányból, amerre a megfigyelő mozog gyorsabban száguld felé a fény. Amerről érkezik, lassabban éri őt utol a fény.

4. 3. Világvonalak szerkesztése

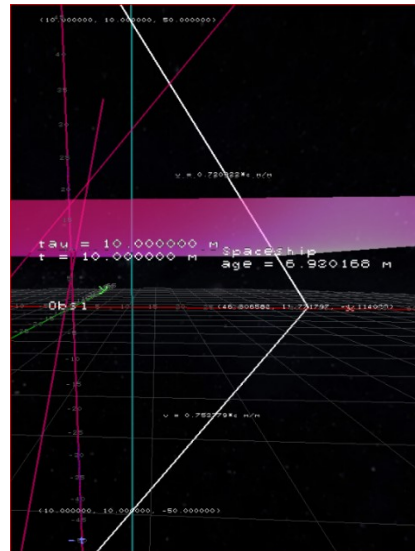
A program lehetőséget ad, a betöltött világvonalak módosítására. Miután editáló módba váltottunk megfoghatjuk az egérkurzorral az egyes világvonalakat és arrébb húzhatjuk azokat. Ilyenkor csak az abszolút megfigyelő koordináta rendszerét használhatjuk az egyszerűség kedvéért. Különböző típusú világvonalakat különböztet meg a program. Ez azt határozza meg, hogy a világvonalon milyen editálási lehetőségeink vannak. A legegyszerűbb a geodetikus világvonal, amely sík téridőben mindig egyenes. Megfogva változtathatjuk a dőlésszögét (sebességét). Rendelkezik egy olyan eseménnyel, amit megfogva az abszolút megfigyelő szerinti nulla időkoordinátájú síkban tolhatjuk el a világvonalat. Ettől több lehetőséget nyújt az összetett világvonal, amelyen törést is létre lehet hozni.

4. 4. A 3D téridő diagram előnyei és hátrányai a 2D diagrammal szemben

Egy téridő diagram számos jelenség megértését elő tudja segíteni. Erről bővebben a következő fejezetben lesz szó. Most vessük össze egy 2D diagram és 3D diagram nyújtotta lehetőségeket. Egy 2D téridő diagram jól szemlélteti az egy térdimenzióval leírható jelenségeket. Ilyenkor előnye, hogy nem válnak nehezen áttekinthetővé a történések. A következő példa az ikerparadoxon szemlélteti. Ez a jelenség bővebben is meg lesz magyarázva a következő fejezetben.



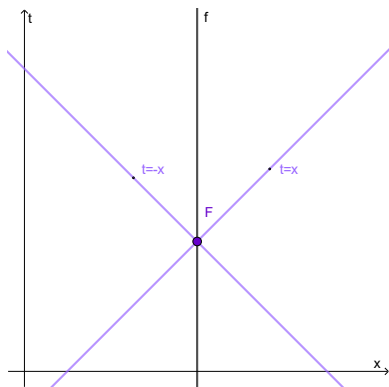
8. Ábra [Ikerparadoxon szemléltetése 2D tér-idő diagramon]



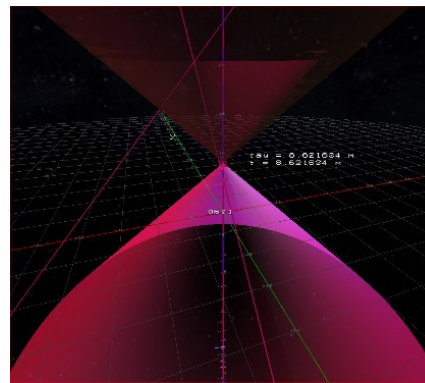
9. Ábra [Ikerparadoxon szemléltetése 3D tér-idő diagramon]

Érezhetően az egyszerűbb jelenségek szemléltetése könnyebb síkban ábrázolva. A 3D megjelenítés előnye sokkal inkább a bonyolultabb, 2 térkoordinátát igénybe vevő jelenségeknél mutatkozik meg.

Vizsgáljuk meg az adott időpontban megfigyelhető eseményeket a fény útját figyelembevéve. 2D-s diagramon az időtengellyel 45° szöget bezáró egyeneseket látunk. 3D megjelenítéssel már egy kúpfelület figyelhető meg:



10. Ábra [Eseményhorizont a 2D tér-idő diagramon]



11. Ábra [Eseményhorizont a 3D tér-idő diagramon]

5. fejezet

Relativisztikus jelenségek szemléltetése

Ebben a fejezetben a szimulátorral készített ábrákon keresztül kerülnek szemléltetésre ismertebb relativisztikus jelenségek. Egy-egy jelenség rövid magyarázata után hagyományos 2D diagramok és a szimulátorral készült képernyőképek összevetése következik. Ismertetésre kerül, hogy egy adott szemléltetés milyen inicializáló lépéseket kíván. Azaz, milyen paraméterek tartoznak egy-egy objektumhoz.

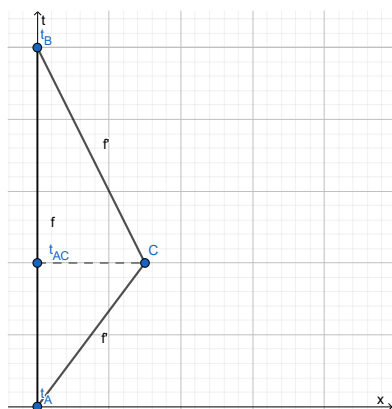
5. 1. Ikerparadoxon

Ikerparadoxonnak nevezzük azt az elsőre ellentmondásosnak tűnő szituációt, amikor egy ikerpár egyik tagja ($I_{utazó}$) elhagyva párját nagy sebességgel elutazik egy távoli helyszínre, miközben párja ($I_{maradó}$) a kiindulási helyen marad. Ezután a távoli helyről ismét csak nagy sebességgel visszatér a testvéréhez. Amikor újra találkoznak, azt tapasztalják, hogy az utazó iker kevesebbet öregedett, mint aki otthon maradt. A tapasztaltak az idődilatáció megnyilvánulásai. A látszólagos ellentmondást az az érvelés sugallja, hogy ha az utazó nyugalmi rendszeréből vizsgáljuk a történeteket, akkor úgy tűnhet, mintha $I_{maradó}$ mozgott volna. Így azt kellene kapnunk, hogy $I_{utazó}$ öregedett kevesebbet. A paradoxon feloldása, hogyha észrevesszük, hogy ez az idődilatáció helytelen alkalmazása, és a két szemszög nem szimmetrikus. Az idődilatációról korábban elmondottak csak egy adott mozgásállapot mellett érvényesülnek. A helyzet tisztább átlátását segíti, ha a sík téridő metrikus egyenletét vizsgáljuk:

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Ebből könnyen belátható a háromszög-egyenlőtlenség Minkowski-térben értelmezett megfelelője.

Vegyük a következő konfigurációt. Szeretnénk összehasonlítani a τ_{AB} és $\tau_{AC} + \tau_{CB}$ időintervallumokat.



12. Ábra [Maximális öregedés]

Állítás:

$$\tau_{AB} > \tau_{AC} + \tau_{CB}$$

Bizonyítás:

$$\tau_{AC} + \tau_{CB} = \sqrt{(t_C - t_A)^2 - (x_C - x_A)^2} + \sqrt{(t_B - t_C)^2 - (x_B - x_C)^2}$$

$$< (t_C - t_A) + (t_B - t_C) = t_B - t_A$$

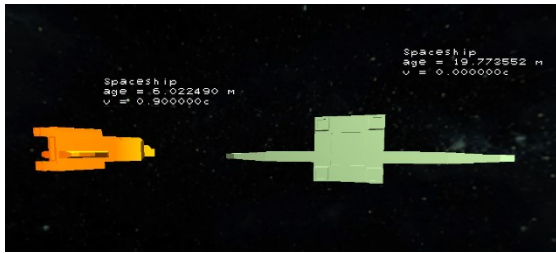
Tehát a két iker közül az öregedik a legtöbbet két esemény közt, akinek a két esemény közt nem változott a mozgásállapota.

5. 1. 1. Szimuláció szereplői

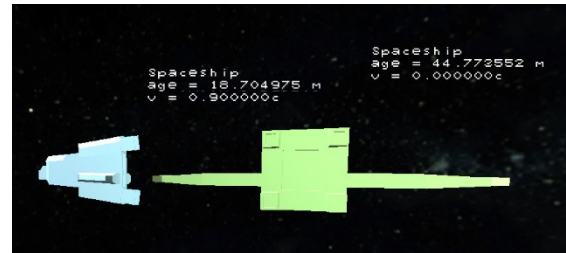
Az ikerparadoxon szimulálásához két világvonagra van szükség, amelyeknek közös a kiindulási pontja és van még egy közös találkozási pontja. Ezen kívül az egyik világvonagnak a szimulátor abszolút vonatkoztatási rendszerében végig zérus sebességűnek kell lennie. A másik világvonal egy törést tartalmaz, ahol visszafordul az utazó.

5. 1. 2. Jelenség vizualizációja

Valós idejű 3D megjelenítéssel:

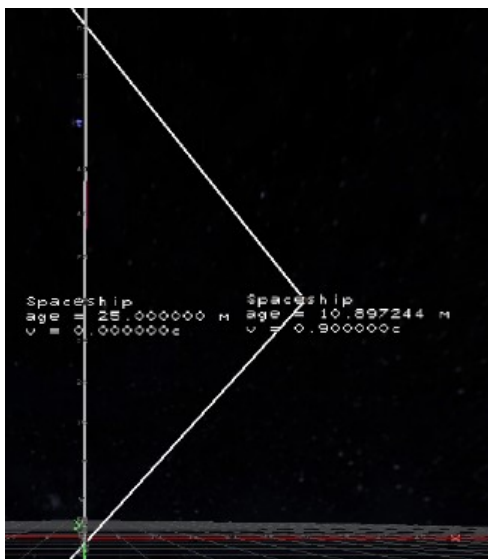


13. Ábra [Távolodó iker valós időben]



14. Ábra [Közelítő iker valós időben]

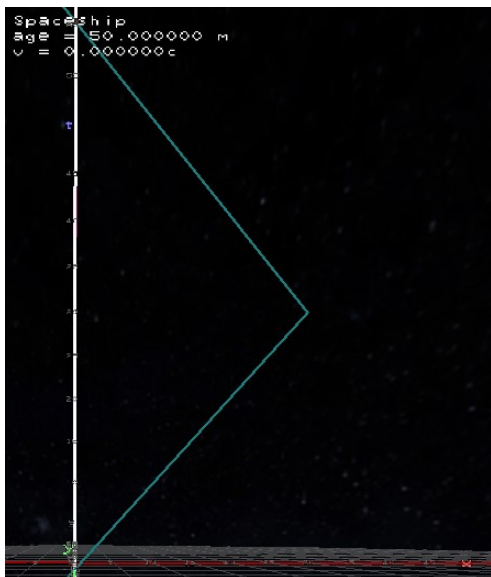
Diagram nézetben:



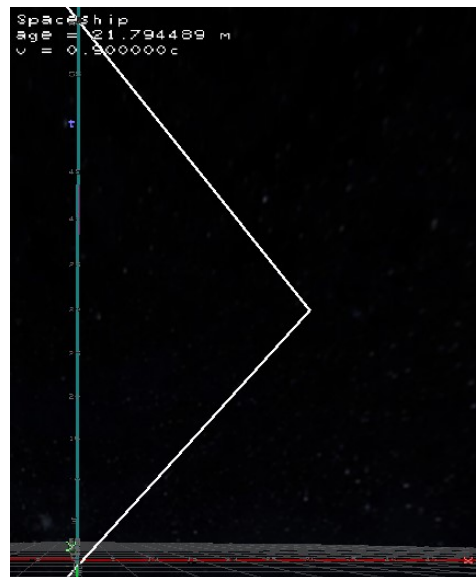
15. Ábra [Az utazó iker eléri úticélját és visszafordul]

Amikor az utazó iker visszaér a kiindulási helyére, akkor az életkora:

$$\begin{aligned}
 age_{\text{utazó}} &= \\
 &= \left(\frac{age_{\text{maradó}}}{2} \frac{1}{\gamma} \right)_{\text{odaút}} + \left(\frac{age_{\text{maradó}}}{2} \frac{1}{\gamma} \right)_{\text{visszaút}} = \\
 &= age_{\text{maradó}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 50 \sqrt{1 - 0,9^2} \approx \\
 &\approx 21,7945 \text{ m}
 \end{aligned}$$



16. Ábra [Az otthon maradt iker kora az újra találkozáskor]



17. Ábra [Az utazó iker kora az újra találkozáskor]

5. 2. Hosszkontrakció

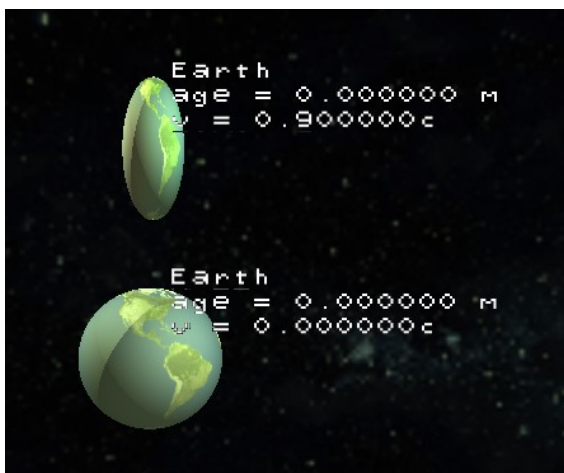
Ez a jelenség a 2. fejezetben ismertetésre került.

5. 2. 1. Szimuláció szereplői

Szükség van egy megfigyelőre és egy hozzá képest nagy sebességgel mozgó testre. Legyen a relatív sebesség $v = 0,9c$. Annak érdekében, hogy legyen viszonyítási alapunk elhelyezhetünk egy a megfigyelő számára álló testet is, amely nyugalomban azonos a mozgó testtel. A legegyszerűbb, ha egyidejűségeen alapuló megjelenítési módban a 3D valós idejű nézetben vizsgálunk objektumokat.

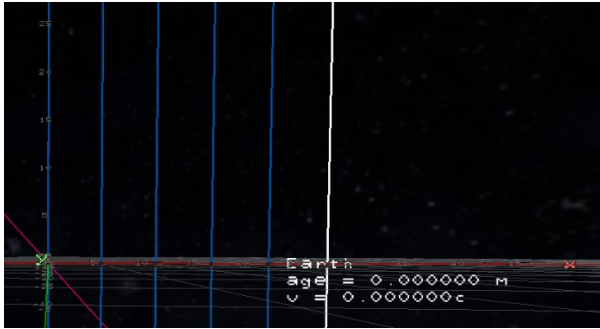
5. 2. 2. Jelenség vizualizációja

Valós idejű 3D megjelenítéssel:

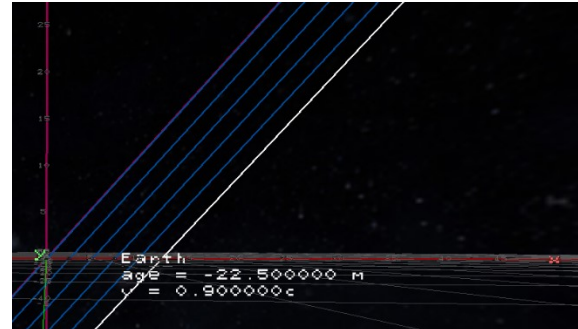


18. Ábra [Hosszkontrakció 0,9c sebességnél]

Diagram nézetben (több világvonal közti távolság összehasonlítása): Diagram nézetben nem jelenik meg egy test hosszkontrakciója, hiszen egy objektumot csak egy világvonal reprezentál. Ellenben, ha több test együttesét vizsgáljuk, akkor megfigyelhető, hogy az egyes megfigyelők között váltva a világvonalak különböző távolságban jelennek meg egymáshoz képest annak megfelelően, hogy a testek milyen sebességgel mozognak a megfigyelőhöz képest.



19. Ábra [Párhuzamos világvonalak nyugalomban]



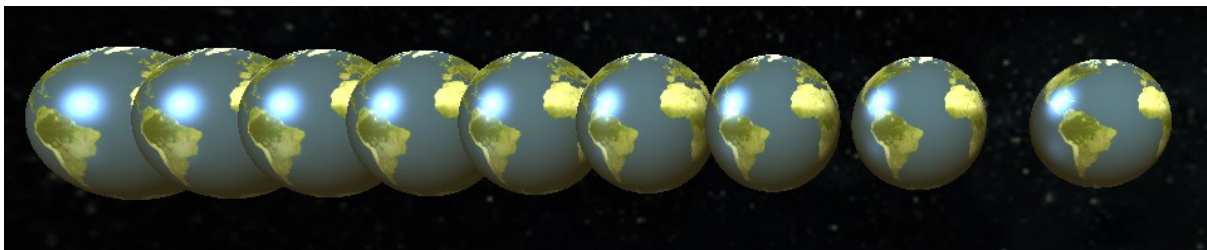
20. Ábra [Párhuzamos világvonalak 0,9c sebességgel]

5. 3. Fénytani Doppler-effektus

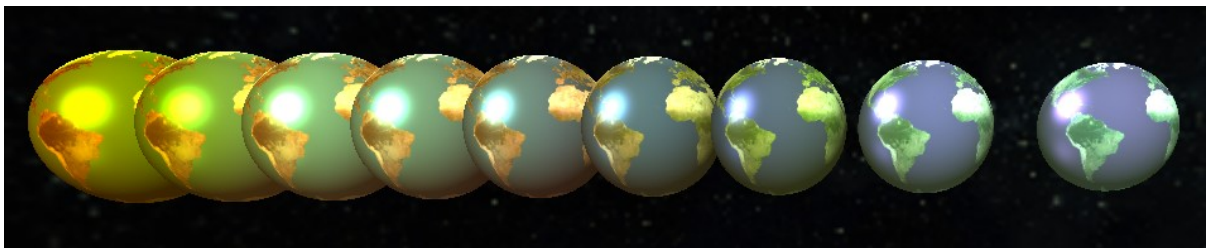
A vörös- és kékeltolódást a 3D valós idejű nézetben tudjuk megfigyelni. A programban a Doppler-hatás mértékét változtathatjuk. Három előre definiált mérték szerepel a lehetőségek közt. Ezek a reális mértékű, enyhe és kikapcsolt. Az enyhe beállítás úgy lett megválasztva, hogy az esetek nagyrésztében az érzékelt hullámhossz látható tartományba essen.

5. 3. 1. Szimuláció szereplői

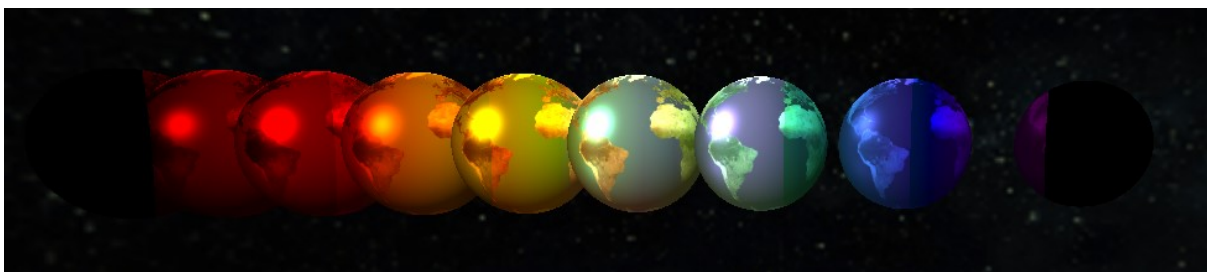
Föld gömb objektumok hosszú sorát jeleníttem meg, hogy látványosabb legyen a színátmenet.



21. Ábra [Vizualizáció kikapcsolt Doppler-hatás esetén]



22. Ábra [Vizualizáció enyhe mértékű Doppler-hatás esetén]



23. Ábra [Vizualizáció reális mértékű Doppler-hatás esetén]

5. 4. Testek látványa a fény útját figyelembevéve

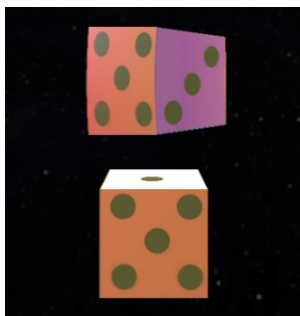
Mivel a fénynek időbe telik, hogy a szemünkhöz érjen, ezért a távolabb elhelyezkedő objektumoknak csak múltbeli képét láthatjuk. A helyzet összetettebb, amikor egy test mozgásban van a megfigyelő személyhez képest. A test különböző pontjai nem azonos távolságban vannak a megfigyelő személyhez képest így a test egyidejűleg látott pontjai a test mozgásának különböző fázisaiban látszanak. A közelebb lévő pontok már előrébb tartanak a pályájukon, mint a távolabbiak. Ez a hosszkontrakcióval együttesen azt eredményezi, hogy a mozgó testet a mozgás irányába befordulva látjuk. Szintén érdekesen deformált látványa van nagy kiterjedésű testeknek, amikor azok a szemlélő felé mozognak. Ezeket a jelenségeket a klasszikus fizikai modell is magyarázza azzal a különbséggel, hogy ott nem kompenzál a hosszkontrakció. Az objektum közvetlenül előttünk lévő pontjairól a fénynek rövid utat kell megtennie, míg a test két távol eső széléről tovább utazik felénk az információ. Így az oldalra eső részokról mindig egy korábbi állapotot látunk, ahol még távolabb volt tőlünk a test. Látványban így a test közvetlenül előttünk lévő része felénk nyúlik, a szélső pontok pedig hátra hajolnak.

5. 4. 1. Szimuláció szereplői

Szemléltetésre a dobókocka tökéletes jelölt, mivel jól elkülönülnek az egyes oldalai. Így látványosabb a befordulás. Két kockát hozok létre. A felső a megfigyelő rendszerünkben $0,75c$ sebességgel elhalad előttünk. Az alsó nyugalomban van. A Lorentz- és Galilei-transzformáció eredményét összevetve észrevehető, hogy a Galilei-transzformáció eredményeként a kocka mozgásirányban megnyúlva látszik.

5. 4. 2. Jelenség vizualizációja

Elfordulva látszó dobókocka:



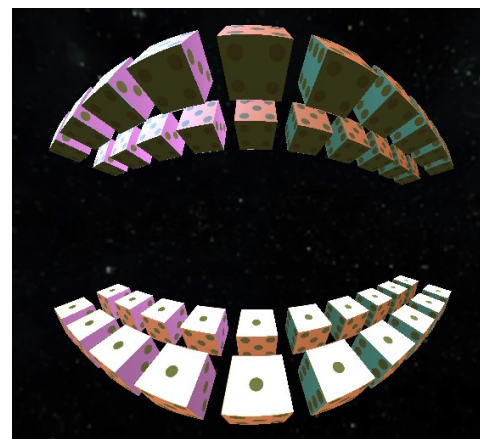
24. Ábra [Megfigyelőhöz képest $0,75c$ sebességgel mozgó és alatta álló dobókocka látványa Lorentz-transzformációval]



25. Ábra [Megfigyelőhöz képest $0,75c$ sebességgel mozgó és alatta álló dobókocka látványa Galilei-transzformációval]



26. Ábra [Távoli $0,9c$ sebességgel közeledő dobókockák sorai]



27. Ábra [Közeli $0,9c$ sebességgel közeledő dobókockák sorai]

5. 5. Wigner-rotáció megjelenése

Az Elméleti alapok című fejezetben tárgyalt jelenség megjelenítésére következzen néhány példa:

5. 5. 1. Szimuláció szereplői

A szemléltetéshez az űrhajó modellt választottam. Ezen jól megfigyelhető az elfordulás. A korábbi esetekhez hasonlóan két objektumot jelenít meg. Az egyik az abszolút megfigyelő rendszerben $0,9c$ sebességgel mozog. A másik kezdetben szintén $0,9c$ sebességgel mozog az abszolút megfigyelő rendszerben, csak pont merőleges irányban a másik test mozgására. Amikor a két test egymás fölé ér, akkor a második test átveszi az első test mozgásállapotát. Az átmenetet az új nyugalmi rendszerében érzékeljük egyidejűnek. Az eseményeket egy olyan megfigyelő rendszerből jelenítjük meg, amelyben az első (végig egyenesvonalú egyenletes mozgást végző) test nyugalomban van. A két merőleges $0,9c$ sebességű mozgás eredménye, hogy amíg a második test nem veszi át az első test sebességét, addig azt $0,9818c$ sebességgel látjuk közeledni. Most az egyidejűségen alapuló megjelenítést használtam. Így felismerhető, hogy miután a test átvette a másik test sebességét, ugyanolyan elfordult alakot tart meg, mint amilyenek a hosszkontrakció hatására érzékelhettük, noha már a nyugalmi rendszeréből szemléljük.

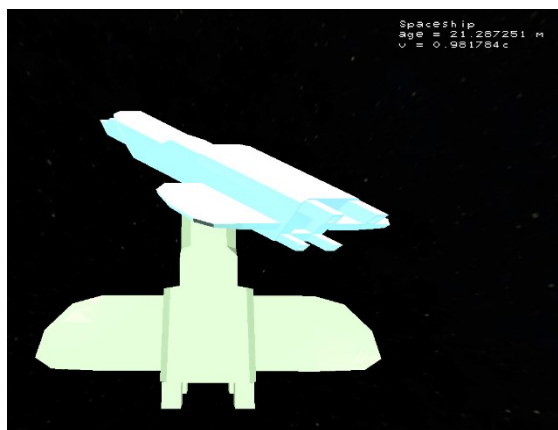
5. 5. 2. Jelenség vizualizációja



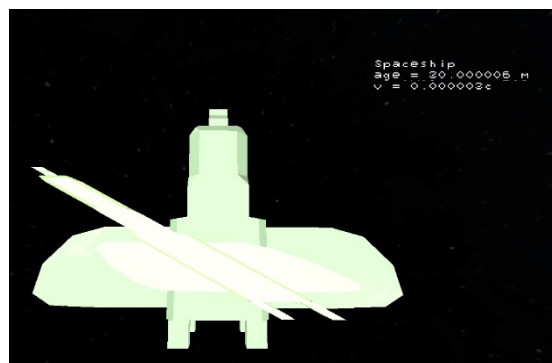
28. Ábra [Az űrhajók, miközben az egyik gyorsan közeledik a másikhoz]



29. Ábra [Az űrhajók a sebességük összegegyeztetése után]



30. Ábra [Az űrhajók, miközben az egyik gyorsan közeledik a másikhoz felülnézetből]



31. Ábra [Az űrhajók a sebességük összegegyeztetése után felülnézetből]

6. fejezet

Eredmények értékelése

6. 1. Megoldott problémák

Sikerült a speciális relativitáselmélet modelljével összhangban álló fizikai szimulátor létrehozása. Saját algoritmusokat konstruáltam a problémák megoldására. Számos paraméterezési lehetőséget biztosítottam a felhasználóknak.

A szimulátor sikeresen birkózott meg ~6000 csúcspontú objektumok ~40 elemű csoportjainak megjelenítésével. A megjelenítendő objektumok számának további növelése viszont a rendelkezésre álló hardveren már jól észrevehető képfresszési idő növekedést okozott.

Sok speciális relativitáselmélet által leírt jelenség demonstrációjára alkalmasnak bizonyult a program. Az implementált algoritmusok lehetővé teszik, hogy összetettebb világvonalakat is reprezentáljunk. Mindezt valós időben tehetjük. A program interaktív jellege számos lehetőséget nyújtott a különböző hatásokkal való kísérletezésre.

6. 2. Potenciális felhasználhatóság

Elképzeléseim szerint a szimulátor jól alkalmazható oktatási célokra. Ismeretterjesztő szerepet tölthet be laikus érdeklődők számára. Felsőoktatásban jó támogatást nyújthat az elméleti alapok elsajátításához. Elképzeltető, hogy az oktató az előadásába integrálja a programmal készült ábrák bemutatását. Előre összeállított virtuális világ esetén a program futtatásával is demonstrálhatja a jelenségeket. Ahhoz, hogy ezt a célt igazán betölthesse, szükség van rá, hogy további kényelmi funkciókkal bővüljön az alkalmazás. Ezekről a következő fejezetben írok bővebben.

A fény útját figyelembe vevő megjelenítés és a Doppler-effektus nagyon különleges látványt biztosít. Jó példa erre a 27. Ábra. Az így keletkező jelenetek esztétikai értéke lehetővé teszi, hogy ezeket tudomány-népszerűsítésre használjuk. Lehetségesnek tartom, hogy a négydimenziós tér idő használata és a grafikus processzoron implementált rendhagyó megjelenítési technika valamilyen videójáték alapjait is képezze. Hasonló próbálkozás a bevezetőben említett OpenRelativity felhasználásával készült A Slower Speed of Light¹⁵című rövid játék, ahol a begyűjtendő gömbök megszerzésével egyre kisebb lesz a fénysebesség. Ennek hatására karakterünk mozgása egyre nagyobb mértékben idézi elő a különböző relativisztikus effektusokat. Persze nincs rá feltétlenül szükség, hogy ennyire intenzíven és célzottan használjuk az egyes hatásokat. Már egy-egy rövidebb szekció érdekesebbé tételére is igazán hasznos lehet a rendhagyó torzítások használata.

¹⁵ <http://gamelab.mit.edu/games/a-slower-speed-of-light/>

7. fejezet

Jövőben megoldandó feladatok

A projekt még számtalan fejlesztési lehetőséget rejt. Fontos lenne a felhasználói felület intuitívabbá tétele. Ennek legfőbb módja egy ablakos keretrendszert biztosítása lenne. Jelenleg a beállításokról szóló információk és különböző fizikai értékek csak a virtuális világban megjelenített feliratokon keresztül olvashatóak le. Ezeket egy hagyományos ablakos rendszerben rendezettebben lehetne kezelni. Az egyes megjelenítési módok közti váltás jelenleg billentyűzetre kiosztott rövidítésekkel tehető meg. Ergonomikusabb lenne erre dedikált menüelemeket is biztosítani. A fájlba mentés és olvasás jelenleg egy-egy billentyűzet kombináció lenyomásával, majd a megjelenő szövegbeviteli sorba való fájlnev begépelésével történik. Erre kényelmesebb lehetőséget biztosítana egy dedikált fájl nyitó és mentési útvonal választó dialógusablak.

Hasznos lenne a diagram nézet világvonal szerkesztő módjában többféle lehetőség biztosítása a világvonalak testreszabásának. Az egérrel történő mozgatás mellett kívánatos lenne, ha számszerűen is meg lehetne adni az egyes értékeket.

Eddig nem kerültek említésre a forgó mozgást végző testek. Ezek megjelenítése további kihívásokat tartogat. A feladat megoldása szükségessé teszi a grafikus processzoron futó csúcspont árnyaló kibővítését.

A megvilágítás a mostani implementációban egy naiv megközelítést alkalmaz, ahol nem vevődnek figyelembe a fény útját érő relativisztikus hatások. A megvilágítás inkább csak a többi jelenség demonstrációjának élvezhetőbbé tételét szolgálja. A nagyobb realiztikusság eléréséhez szükséges lenne a fényszóró hatás modellezése. Ez annak a jelenségnek az elnevezése, hogy a megfigyelőhöz képest nagy sebességgel mozgó testből kiinduló fénysugarak a test mozgási irányába eltolódva érnek a megfigyelő személyhez. Ennek következménye, hogy a közeledő objektumokat fényesebbnek látjuk, mint a távolodókat.

A program jelenleg csak sík téridőt szimulál. Az általános téridő lehet görbült, ahol a görbületet a testek tömege határozza meg. Ennek elméletét szintén Albert Einstein dolgozta ki, és általános relativitáselméletként vált ismertté. A geodetikus világvonalakról alkotott eddigi képünk az általános elméletben pontosításra szorul: Az a világvonal tekinthető geodetikusnak, amelynek az érintővektorát a világvonal mentén párhuzamosan eltolva az mindvégig a világvonal érintővektora marad. Ez a világvonal görbült téridőben a jelenlegi koordináta rendszert alkalmazva nem lesz mindig kifejezhető a t koordináta lineáris függvényeként. A jelenlegi világvonal reprezentációt mégis felhasználhatjuk görbült téridőbeli világvonalak tárolására. A görbét közelíthetjük egyenes szakaszok sorozatával. Az összetett világvonalaknál alkalmazott algoritmus jó kiindulási alap lehet a görbült téridő megjelenítéséhez. Általános esetben be kellene vezetni valamilyen sugárkövető eljárást, hogy a gravitációs lencsét is szemléltetni lehessen. Ez az a jelenség, amikor egy nagy tömegű test körül a fény útja elhajlik. Ilyenkor beláthatunk a test mögé.

Ábrák jegyzéke

1. Ábra [Fénytani Doppler-effektus tér-idő diagramon]	9
2. Ábra [Megfigyelő váltás].....	13
3. Ábra [Valós idejű megjelenítés folyamata]	14
4. Ábra [Pixel árnyalás lépései vizuálisan].....	16
5. Ábra [RGB formátumban adott színekre alkalmazott Doppler-effektus].....	17
6. Ábra [Futási sebesség táblázatban]	18
7. Ábra [Képfriessítési idő grafikonon]	18
8. Ábra [Ikerparadoxon szemléltetése 2D tér-idő diagramon]	20
9. Ábra [Ikerparadoxon szemléltetése 3D tér-idő diagramon]	20
10. Ábra [Eseményhorizont a 2D tér-idő diagramon].....	20
11. Ábra [Eseményhorizont a 3D tér-idő diagramon].....	20
12. Ábra [Maximális öregedés].....	21
13. Ábra [Távolodó iker valós időben]	22
14. Ábra [Közelítő iker valós időben]	22
15. Ábra [Az utazó iker eléri úticélját és visszafordul]	22
16. Ábra [Az otthon maradt iker kora az újra találkozáskor]	22
17. Ábra [Az utazó iker kora az újra találkozáskor].....	22
18. Ábra [Hosszkontrakció $0,9c$ sebességnél].....	22
19. Ábra [Párhuzamos világvonalak nyugalomban]	23
20. Ábra [Párhuzamos világvonalak $0,9c$ sebességgel]	23
21. Ábra [Vizualizáció kikapcsolt Doppler-hatás esetén]	23
22. Ábra [Vizualizáció enyhe mértékű Doppler-hatás esetén].....	23
23. Ábra [Vizualizáció reális mértékű Doppler-hatás esetén].....	23
24. Ábra [Megfigyelőhöz képest $0,75c$ sebességgel mozgó és alatta álló dobókocka látványa Lorentz-transzformációval].....	24
25. Ábra [Megfigyelőhöz képest $0,75c$ sebességgel mozgó és alatta álló dobókocka látványa Galilei-transzformációval].....	24
26. Ábra [Távoli $0,9c$ sebességgel közeledő dobókockák sorai].....	24
27. Ábra [Közeli $0,9c$ sebességgel közeledő dobókockák sorai].....	24
28. Ábra [Az úrhajók, miközben az egyik gyorsan közeledik a másikhoz]	25
29. Ábra [Az úrhajók a sebességük összeegyeztetése után].....	25
30. Ábra [Az úrhajók, miközben az egyik gyorsan közeledik a másikhoz felülnézetből]	25
31. Ábra [Az úrhajók a sebességük összeegyeztetése után felülnézetből]	25

Irodalomjegyzék

Bais, S. (2007). *Very Special Relativity: An Illustrated Guide*. Harvard University Press.

Bokor, N. (2013). *Szemléletes relativitáselmélet - szabadon választható tantárgy*. Forrás:

<https://fizipedia.bme.hu/>:

https://fizipedia.bme.hu/index.php/Szeml%C3%A9letes_relavit%C3%A1selm%C3%A9let_-_szabadon_v%C3%A1laszthat%C3%B3_tant%C3%A1rgy

Kraus, U., & Zahn, C. (n.d.). Retrieved from Space Time Travel: <https://www.spacetimetravel.org/>

Péter, T. (2011). A SZÍNES NYOMTATÁS ELMÉLETI ALAPJAI. In T. Péter, *Digitális szövegfeldolgozás*.

Sherin, Z. W., Cheu, R., Tan, P., & Kortemeyer, G. (2016). Visualizing relativity: The OpenRelativity project. *American Journal of Physics*.

Speciális relativitáselmélet. (2013. december 19). Forrás: <https://fizipedia.bme.hu/>:

https://fizipedia.bme.hu/index.php/Speci%C3%A1lis_relavit%C3%A1selm%C3%A9let

Wheeler, J. A., & Taylor, E. F. (2005). *Téridőfizika*. (I. Abonyi, Ford.) Budapest: Typotex.