



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Irányítástechnika és Informatika Tanszék

PET rekonstrukció javítása a fotondetektálás mélységének modellezésével

TDK dolgozat

Készítette:

Varnyú Dóra

Konzulens:

Dr. Szirmay-Kalos László

2020

Tartalomjegyzék

Kivonat	i
Abstract	iii
1. Bevezetés	1
1.1. A PET vizsgálat fizikai folyamata	1
1.2. A rekonstrukció	1
1.3. Javítás a fotonelnyelődés mélységének mérésével	4
1.4. A mélység mérésének módszerei	4
1.5. Problémafelvetés és célkitűzés	6
2. A javasolt rekonstrukciós modell	7
2.1. Direkt módszer	7
2.1.1. Előrevetítés LOR-központú megközelítéssel	10
2.1.2. Visszavetítés voxelközpontú megközelítéssel	11
2.1.3. Egyszerűsítés	14
2.2. Faktorált módszer	14
2.2.1. Az eljárás fázisai	15
2.2.2. Előrevetítés LOR-központú megközelítéssel	17
2.2.3. Visszavetítés voxelközpontú megközelítéssel	18
2.3. Az átszóródási valószínűségek kiszámítása	20
2.4. Geometriai inflálás	23
3. Eredmények	25
4. Összefoglalás	31
Köszönetnyilvánítás	33
Irodalomjegyzék	34

Kivonat

A pozitronemissziós tomográfia (PET) egy nukleáris gyógyászati képalkotó eljárás, amely képes feltárni a belső szervek működését és anyagcserefolyamatait. A PET vizsgálat elején a páciensbe radioaktív izotópokkal jelölt nyomjelzőanyagot fecskendeznek. A nyomjelző a vérkeringés által szétterjed a testben, és felszívódik a szövetekbe, azok anyagcsere-sebességével arányos mértékben. A mérés során a radioaktív izotópok lebomlanak, aminek következtében gamma-sugárzás keletkezik. A PET gép a gamma-fotonokat érzékeli egy detektorkristályokból álló gyűrű segítségével, és az ily módon mért adatok alapján rekonstruálja a nyomjelző páciens testén belüli eloszlását.

A rekonstrukció pontossága javítható, ha mérni tudjuk, hogy a detektorgyűrű kristályain belül milyen mélyen nyelődtek el az egyes fotonok. Ez a *depth of interaction* (DOI) korrekció, amely a modern PET rendszerekben egyre elterjedtebb technika. A legtöbb DOI-alapú rekonstrukciós algoritmus azonban eltekint attól, hogy a fotonok a detektorkristályokon belül még vándorolhatnak, szóródhatnak az elnyelődésük előtt. Ez az egyszerűsítés csökkenti a számítási komplexitást, azonban pontatlanabbá teszi az eredményt. A dolgozatban egy olyan PET rekonstrukciós modellt javasolunk, amely a DOI korrekcióhoz szükséges mélységinformáció beépítésén felül képes hatékonyan kezelni a fotonok detektoron belüli szóródását is.

Abstract

Positron emission tomography (PET) is a nuclear medical imaging technique that can reveal the functioning and metabolic processes of internal organs. At the beginning of a PET examination, a radiolabeled tracer is injected into the patient. The tracer spreads through the bloodstream in the body and is absorbed into the tissues in proportion to their metabolic rate. During the measurement, isotopes in the tracer undergo radioactive decay, resulting in gamma radiation. PET scanners detect gamma photons using a ring of detector crystals and reconstruct the distribution of the radiotracer within the patient's body based on the measured photon hits.

The accuracy of the reconstruction can be improved by measuring the depth of the photons' absorption within the crystals of the detector ring. This is the *depth of interaction* (DOI) correction, a technique that is becoming more common in modern PET systems. However, most DOI-based reconstruction algorithms disregard the fact that photons can scatter within the detector crystals before their absorption. This simplification reduces the computational complexity, but makes the result more inaccurate. In this work, we propose a PET reconstruction model that not only incorporates the depth information required for DOI correction, but can also efficiently handle the scattering of photons within the detector.

1. fejezet

Bevezetés

A pozitronemissziós tomográfia (PET) napjaink egyik legjelentősebb orvosi képalkotó technikája, mellyel betekintést nyerhetünk a belső szervek működésébe és anyagcserefolyamataiba. Segítségével számos betegség, úgy mint a tumor, az epilepszia, az Alzheimer-kór és a Parkinson-kór még a tényleges anatómiai elváltozásokat megelőzően kimutathatók.

1.1. A PET vizsgálat fizikai folyamata

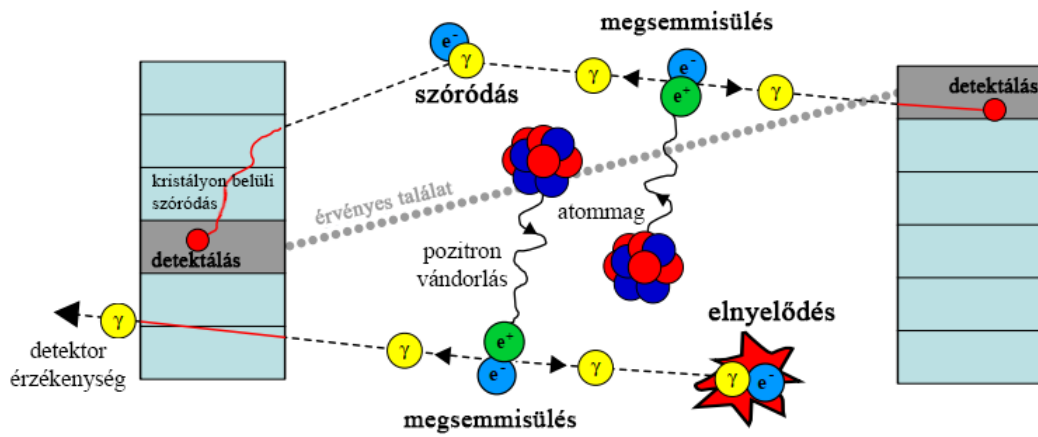
A PET vizsgálat kezdetekor a páciensbe radioaktív nyomjelzőanyagot fecskendeznek, leggyakrabban *18F-fluor-dezoxi-glükózt* (röviden *FDG-t*), amely egy radioaktív fluorizotóppal megjelölt glükózmolekula. A nyomjelző a vérkeringésbe kerülve szétterjed a testben, és felszívódik a szövetekbe, azok anyagcsere sebességével arányos mértékben. A fokozott anyagcserejű szövetek, például az agy, a szívizomzat, vagy a rosszindulatú daganatok több glükózt vesznek fel a vérből, így azokban nagyobb mennyiségű nyomjelző halmozódik fel.

A mérés során a radioaktív izotópok lebomlanak. Bomláskor egy pozitron bocsátódik ki, amely a testben vándorolva rövidesen nekiütközik egy elektronnak (1.1 ábra). Ekkor a két antirészecske totálisan annihilálódik, kibocsátva két, ellentétes irányba haladó γ -fotont. A fotonok a szövetekben szóródhatnak vagy akár el is nyelődhetnek, de jelentős részük a testet elhagyva becsapódik a páciens körül elhelyezkedő detektorgyűrűbe. A gyűrű mátrixszerűen modulokba rendezett szcintillációs kristályokból áll (1.2 ábra). A detektor-kristályokban a fotonok tovább szóródhatnak, vagy akár érzékelés nélkül át is haladhatnak rajtuk. Szerencsés esetben azonban elnyelődnek, ami egy látható fényvillanást idéz elő. A kristályok mögött fotodetektorok érzékelik és alakítják elektromos jelekké ezeket a fényvillanásokat. Egy-egy érzékelt fotonbecsapódást *egyszeri eseménynek* nevezünk.

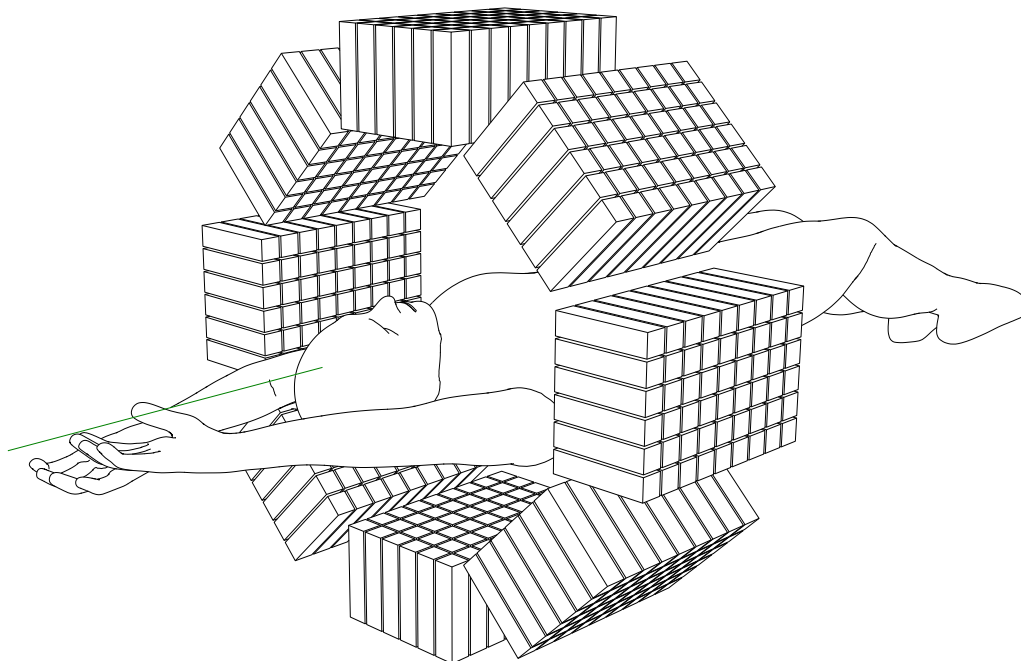
A pozitron-elektron megsemmisüléskor keletkező fotonpár két fotonja két szemközti modulon elhelyezkedő detektorkristályt aktivál, ily módon információt adva arról, hogy az ütközés mely egyenes mentén történt. Ez az egyenes a *válaszvonala* (line of response, LOR). A mérés során *találatot* regisztrálunk, ha két foton egyidőben (legfeljebb pár nanoszekundum különbséggel) és ellentétes oldalon kerül detektálásra. Ekkor eltároljuk az aktivált LOR indexét és az érzékelés pontos idejét. A rekonstrukció feladata ezen találati események listája alapján meghatározni a nyomjelző háromdimenziós térbeli eloszlását.

1.2. A rekonstrukció

A rekonstrukció során a vizsgált tértartományt egy homogén voxelekből álló voxelrácsra osztjuk. A cél meghatározni minden voxelben a nyomjelző sűrűségét. Ehhez egy iteratív eljárást, a *maximum-likelihood expectation-maximization* (ML-EM) [19] algoritmust alkalmazunk. Kezdetben feltesszük, hogy a nyomjelző egyenletesen oszlik el a vizsgált térfogaton



1.1. ábra. A PET vizsgálat során végbemenő fizikai folyamat a nyomjelzőmolekula bomlásától a fotondetektálásig.



1.2. ábra. A páciens körül detektorgyűrű húzódik, amely mátrixszerűen modulokba rendezett scintillációs kristályokból áll.

belül, majd az érzékelt fotonbecsapódások alapján ezt a becslést finomítjuk. A finomítás minden iterációja két fázisból, előrevetítésből és visszavetítésből áll. Előrevetítéskor a detektortalálatok várható számát határozzuk meg a nyomjelző eloszlására állított becslésünk alapján, szimulálva a részecsketranszportot és a végbemenő fizikai folyamatokat. Visszavetítéskor pedig ezt az eloszlásbecslést korrigáljuk a detektortalálatok várt és a ténylegesen kapott számának aránya alapján.

Formálisan leírva a rekonstrukció folyamata a következő. A cél az $x(\vec{v})$ nyomjelzősűrűség-függvény meghatározása, amelyet a következő véges függvénysorozat formában közelítünk:

$$x(\vec{v}) = \sum_{V=1}^{N_{\text{voxel}}} x_V b_V(\vec{v}), \quad (1.1)$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N_{\text{voxel}}})$ a kiszámítandó együtthatók és $b_V(\vec{v})$ ($V = 1, \dots, N_{\text{voxel}}$) az egyes voxelekhez tartozó bázisfüggvények.

Az $x(\vec{v})$ nyomjelzősűrűség és az L LOR-ban érzékelt találatok várható száma, \tilde{y}_L között a $\mathcal{T}(\vec{v} \rightarrow L)$ *szkenner érzékenység* teremti meg a kapcsolatot. A szkenner érzékenység azt írja le, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy egy, a \vec{v} pontban kibocsátott pozitron találatot idéz elő az L LOR-ban. Ennek megfelelően az L LOR várható találatszám:

$$\tilde{y}_L = \int_{\mathcal{V}} x(\vec{v}) \mathcal{T}(\vec{v} \rightarrow L) dv, \quad (1.2)$$

ahol \mathcal{V} a mért térfogat. $x(\vec{v})$ véges függvénysorozat alakját behelyettesítve (1.1 egyenlet):

$$\tilde{y}_L = \sum_{V=1}^{N_{\text{voxel}}} \mathbf{A}_{LV} x_V, \quad (1.3)$$

ahol \mathbf{A} a *rendszermátrix*, melynek \mathbf{A}_{LV} eleme annak a valószínűségét adja meg, hogy egy, a V voxelben kibocsátott pozitron találatot idéz elő az L LOR-ban:

$$\mathbf{A}_{LV} = \int_{\mathcal{V}} b_V(\vec{v}) \mathcal{T}(\vec{v} \rightarrow L) dv. \quad (1.4)$$

A rendszermátrixot előzetes méréssel [17], Monte Carlo becsléssel [18] vagy menet közbeni számolással [13] lehet meghatározni.

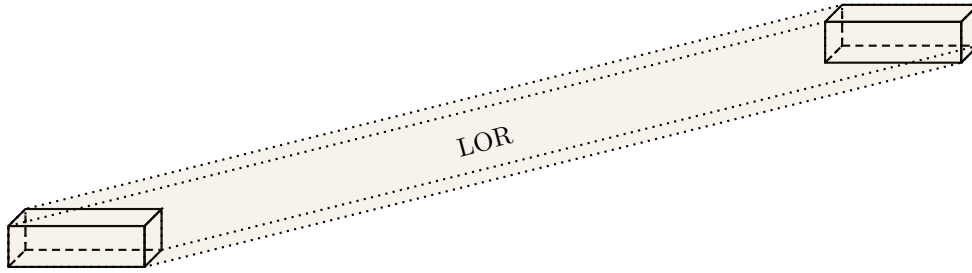
Az ML-EM algoritmus célja meghatározni azt az \mathbf{x} nyomjelzősűrűséget, amely mellett a ténylegesen mért találati adatok, \mathbf{y} valószínűsége a lehető legnagyobb. Feltételezve, hogy az egyes LOR-ok találati eseményei egymástól független, Poisson-eloszlást követő véletlen változók, az eljárás a következő valószínűségi függvényt maximalizálja:

$$\log \mathcal{L} = \sum_{L=1}^{N_{\text{LOR}}} (y_L \log \tilde{y}_L - \tilde{y}_L). \quad (1.5)$$

Az iteratív optimalizáció előrevetítéseket (1.6 egyenlet) és visszavetítéseket (1.7 egyenlet) alternál $n = 1, 2, \dots$ iterációs lépésen át:

$$\tilde{y}_L = \sum_{V=1}^{N_{\text{voxel}}} \mathbf{A}_{LV} x_V^{(n)}, \quad (1.6)$$

$$x_V^{(n+1)} = x_V^{(n)} \cdot \frac{\sum_{L=1}^{N_{\text{LOR}}} \mathbf{A}_{LV} \frac{y_L}{\tilde{y}_L}}{\sum_{L=1}^{N_{\text{LOR}}} \mathbf{A}_{LV}}. \quad (1.7)$$



1.3. ábra. A LOR valójában nem egy egyenes, hanem egy, a kristályok kiterjedésétől és egymással bezárt szögétől függő, csőszerű térfogatrész.

1.3. Javítás a fotonelnyelődés mélységének mérésével

A detektor hosszúság, tű alakú kristályokból áll. Amikor két szemközti detektorkristály egyidőben aktiválódik, feltételezzük, hogy az érzékelt γ -fotonokat keltő pozitron-elektron összeütközés – ami a nyomjelző jelenlétéről tanúskodik – a két kristály között húzódó térfogatrészben ment végbe. Következésképp a válaszvonal, azaz a LOR valójában nem egy egyenes, hanem egy, a kristályok kiterjedésétől és egymással bezárt szögétől függő, csőszerű térfogatrész (1.3 ábra). Amennyiben mérni tudjuk, hogy a kristályokon belül milyen mélyen nyelődtek el a fotonok (depth of interaction, DOI), a LOR-t alkotó térfogat leszűkül, ezáltal a pozitron-elektron kölcsönhatás helye pontosabban behatárolható.

A mélységet általában elegendő közelítőleg meghatározni. Legegyszerűbb esetben minden detektorkristályt két részre osztunk a mélység dimenzió mentén. Ekkor az eredeti, úgynevezett geometriai LOR-on belül négy pontosabb, logikai LOR jön létre (1.4 ábra).

1.4. A mélység mérésének módszerei

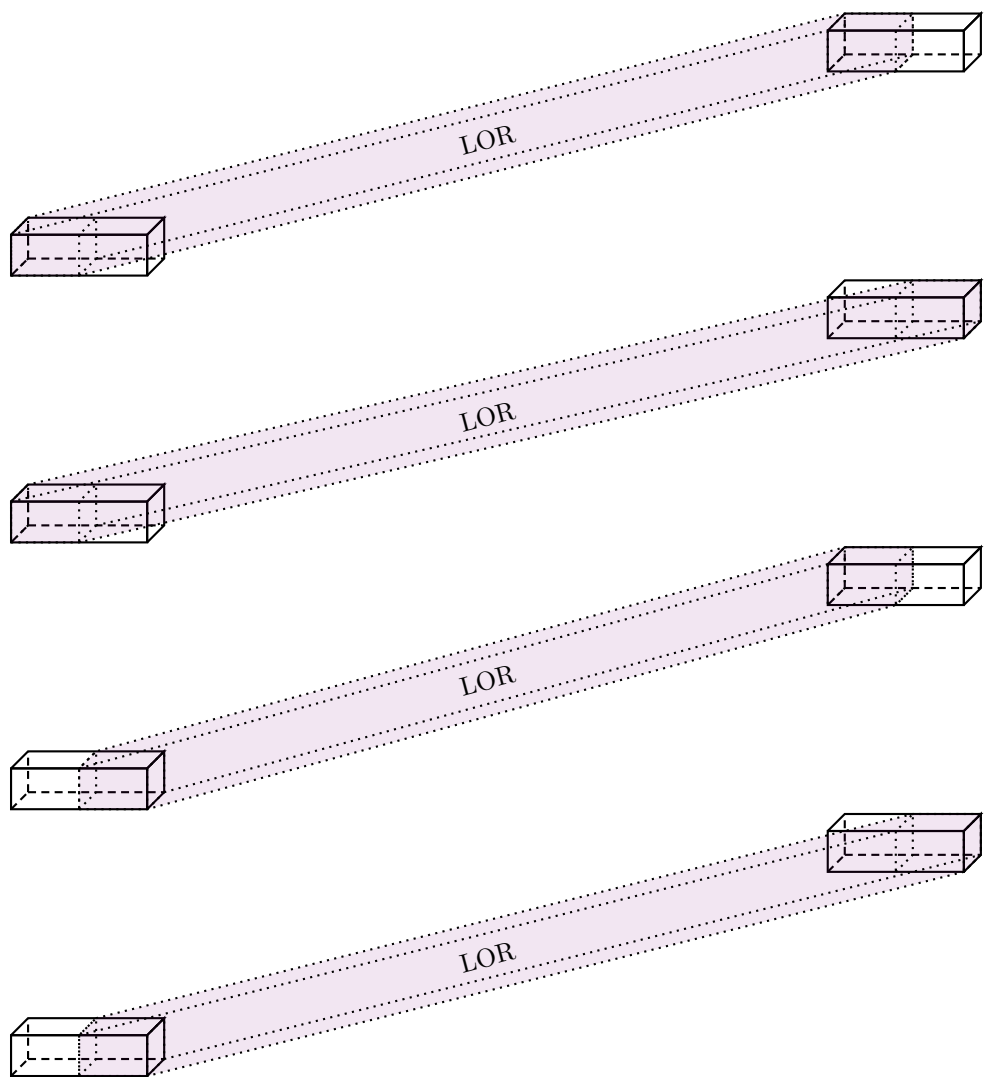
Arról, hogy milyen módszerekkel lehetséges mérni a becsapódás események mélységét, Mohammadi és társai készítettek egy átfogó tanulmányt [15]. Az eszközök között szerepelnek a több kristályrétegből álló detektorok, a kétvégű kiolvasórendszerek, valamint a monolitikus kristályok.

Többrétegű detektorok esetén tartozhat minden kristály minden rétegéhez saját fotodetektor, ez azonban a nagyobb alkatrészsorszám és a komplexebb elektronika miatt költséges eljárás, valamint a belső fotodetektorok az érzékelés érzékenységét is csökkentik.

Speciális strukturális kialakítással megoldható, hogy kristályonként egyetlen fotodetektorral mérjük minden réteg eseményét. Ilyen kialakítás lehet, ha az egyes rétegek különböző szcintillációs bomlási idejű vagy különböző alakú kristályokból készülnek, illetve ha a rétegek egymáshoz képest eltolva (például fél kristály ofsztel) helyezkednek el.

A kétvégű kiolvasórendszerekben a detektorkristályok mindkét végén egy-egy fotodetektor található. Minden szcintillációkor összehasonlítjuk a két oldalon mért jel erősségét, és ezek aránya alapján határozzuk meg a fotonbecsapódás kristályon belüli pozícióját. A módszer egy nagy előnye, hogy nem diszkretizálja rögzített számú rétegekre a kristályokat, hanem folytonos értékkel írja le a mélység koordinátát. Hátránya a megnövekedett alkatrészsorszám és a belső elektronika jelenléte miatti érzékenység-csökkenés.

Monolitikus kristály esetén a detektormodulok több kisebb tűkristályból álló mátrix helyett egyetlen nagy kristályból állnak. A fotodetektorokkal azt mérjük, hogy a szcintillációs fény mekkora területre terjed szét a kristály felületén. A felülettől távolabb történő események fénye nagyobb területre szóródik, mint a közelebbi eseményeké, így a fotonelnyelődés mélysége megállapítható. Ez a módszer is folytonos értékészletű, azonban a



1.4. ábra. A fotonelnyelődés mélységének mérésével a LOR-t alkotó térfogat leszűkül. Amennyiben minden detektorkristályt két részre osztunk a mélység dimenzió mentén, az eredeti, úgynevezett geometriai LOR-on belül négy pontosabb, logikai LOR jön létre.

kristály szélein, különösképpen a sarkokban végbemenő események érzékelése és elhelyezése komoly kihívást jelent a rekonstrukció során.

1.5. Problémafelvetés és célkitűzés

A legtöbb DOI-alapú rekonstrukciós algoritmus nem számol azzal, hogy a fotonok a detektoron belül szóródhatnak, vagyis közel sem biztos, hogy egy foton valóban abban a LOR-ban keletkezett, ahol később érzékelve lett. Ez az egyszerűsítés csökkenti a számítási komplexitást, viszont pontatlanabbá teszi az eredményt.

Ebben a dolgozatban egy olyan PET rekonstrukciós modellt javasolunk, amely a DOI korrekcióhoz szükséges mélységinformáció beépítésén felül képes hatékonyan kezelni a fotonok detektorkristályok közötti átszóródását is. Ezenfelül megoldást nyújtunk a megnövekedett LOR-szám feldolgozása által állított kihívásokra is.

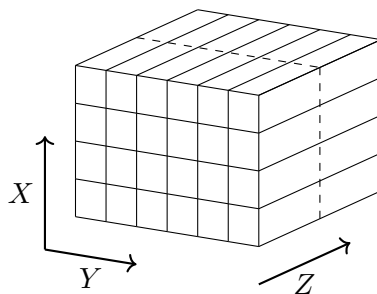
Hatalmas számításiigénye miatt a rekonstrukciót a grafikus feldolgozóegységgel (graphics processing unit, GPU) támogatjuk. A javasolt eljárást az NVIDIA által létrehozott CUDA platformon [3] valósítottuk meg, így módon kihasználva a GPU masszívan párhuzamos architektúráját a számítások gyorsítására.

2. fejezet

A javasolt rekonstrukciós modell

Két módszert javasolunk DOI-alapú PET rekonstrukcióra. Az első, a *direkt módszer* figyelembe veszi a fotontranszportot a mért objektumban és a detektorkristályokban is, azonban eltekint a kristályok közötti átszóródástól. A második, a *faktorált módszer* ez utóbbi jelenséget is képes kezelni. A komplexitás kordában tartása és a teljesítmény növelése érdekében ez az eljárás két fázisra bontja a transzportfolyamatot: az első fázis a mért objektumban történő fotonmozgással foglalkozik egészen a detektorkristályok felületéig, míg a második a kristályok belsejében végbemenő kölcsönhatásokat kezeli.

A javasolt megoldások a 2.1 ábrán látható geometriát feltételezik. A detektorkristályok sík modulokon helyezkednek el, látható felületeik egy 2D rácsot alkotnak. Ezen a rácson az egyes kristályfelületek két egész koordinátával azonosíthatóak ($\mathbf{i} = (X, Y)$). Minden kristályt a mélység dimenzió mentén rétegekre osztunk, így kristálytérfogatrészeket kapunk. A felületindex és a mélységréteg egyértelműen azonosítja a kristálytérfogatrészt, amihez ennél fogva összesen három egész koordinátára van szükség: $\mathbf{D} = (\mathbf{d}, Z) = (X, Y, Z)$, ahol Z a kvantált mélység.

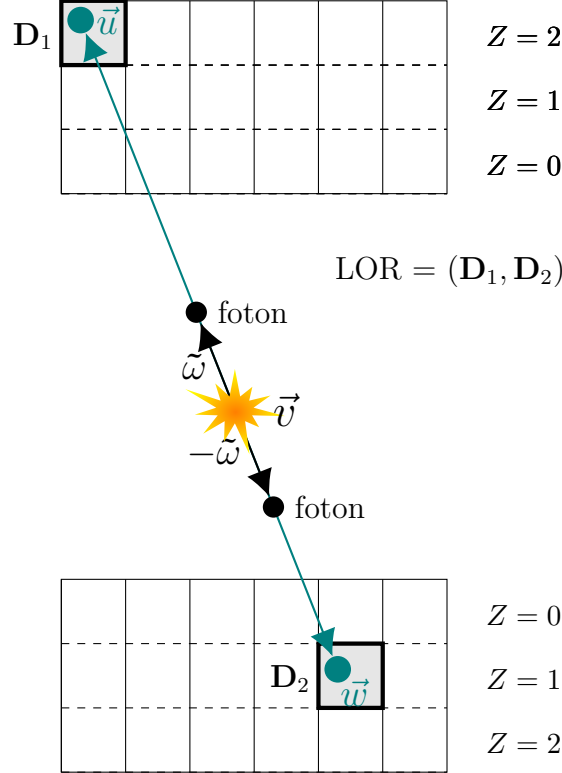


2.1. ábra. Egy modul a detektorgyűrűből. A modulban a szcintillációs kristályok mátrixszerűen elrendezve helyezkednek el, látható felületeik egy 2D rácsot alkotnak. Minden kristályt a mélység dimenzió mentén rétegekre osztunk, így kristálytérfogatrészeket kapunk. Az (X, Y) felületindex és a Z mélység egyértelműen azonosítja a kristálytérfogatrészt a modulon belül.

2.1. Direkt módszer

Vegyük azt az egyszerűsített esetet, amikor eltekintünk a pozitronvándorlástól, az akollinearitástól és a beszóródástól [11, 8, 12]. Ekkor a részecsketranszportot a pozitronannihiláció pontjától a találati esemény regisztrálásáig kell nyomon követnünk.

A vizsgált \mathcal{V} térfogat egy tetszőleges \vec{v} pontjában keletkező fotonpár két fotonja egy véletlenszerű $\vec{\omega}$ és az azzal ellentétes $-\vec{\omega}$ irányba indul el. Ez a pár akkor fog találati



2.2. ábra. A \vec{v} pontban keletkező fotonpár két fotonja az $\vec{\omega}$ és a $-\vec{\omega}$ irányba indul el. A fotonok a detektorokban a haladási egyenesük egy \vec{u} , illetve \vec{w} pontjában nyelődnek el, melyek rendre a \mathbf{D}_1 és \mathbf{D}_2 kristálytérfigatrészekben találhatók, ezáltal az $L = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ LOR-ban fog találati esemény regisztrálódni.

eseményt előidézni egy adott LOR-ban, ha a \vec{v} keletkezési pozíciójuk és az $\vec{\omega}$ haladási irányuk által meghatározott egyenes átmegy a LOR-t alkotó két detektor-kristályon, és a fotonok el is nyelődnek a kristályokban (2.2 ábra). A haladási egyenes a tér bármely irányába ugyanakkora valószínűséggel mutat, így $\vec{\omega}$ egyenletes eloszlással mintavételezhető az egységsugarú félgömbön.

Az $x(\vec{v})$ pozitronsűrűség – amely a pozitronvándorlás figyelmen kívül hagyása miatt az annihilációk sűrűségével egyezik meg – és az L LOR-ban várt találatszám, \tilde{y}_L között a *szkenner érzékenységgel* teremtjük meg a kapcsolatot. A $\mathcal{T}(\vec{v}, \vec{\omega} \rightarrow L)$ szkenner érzékenység azt írja le, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy egy, a \vec{v} pontban keletkezett és az $\vec{\omega}$ irány által kijelölt egyenesen haladó fotonpár találatot idéz elő az L LOR-ban:

$$\tilde{y}_L = \int_{\vec{\omega} \in \Omega_H} \int_{\vec{v} \in \mathcal{V}} \frac{x(\vec{v})}{2\pi} \mathcal{T}(\vec{v}, \vec{\omega} \rightarrow L) d\vec{v} d\vec{\omega}, \quad (2.1)$$

ahol Ω_H az egységsugarú félgömb. Itt kihasználtuk azt a tényt, hogy az $\vec{\omega}$ irány egyenletes eloszlású, így a valószínűségi sűrűsége $1/2\pi$.

Egy adott \vec{v} keletkezési pontú és $\vec{\omega}$ haladási irányú fotonpár a $\vec{v} + \vec{\omega}l$ ($l \in \mathbb{R}$) egyenes mentén idézhet elő találati eseményt. A fotonok akkor érik el ezen egyenes tetszőleges $\vec{v} + \vec{\omega}l_1$ és $\vec{v} + \vec{\omega}l_2$ pontjait ($l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ rögzített), ha egyikük sem szóródik vagy nyelődik el az adott $l \in [0, l_1]$, illetve $[0, l_2]$ távolságon.

Jelölje a $\sigma_a(\vec{l})$ abszorpciók hatás keresztmetszetének a valószínűségét, hogy egy adott \vec{l} pontban egy foton egységnyi távolságon belül elnyelődik. Ekkor az elnyelődés valószínűsége a $d\vec{l}$ távolságon $\sigma_a(\vec{l})d\vec{l}$. Ezzel analóg módon megalkotható a $\sigma_s(\vec{l})$ szórás hatáske-

resztmetszet, mely annak a valószínűségét adja meg, hogy a foton egységnyi távolságon belül szóródik.

Az elnyelődés és a szórás a foton kioltó tényezői, azaz megakadályozzák, hogy a foton továbbhaladjon eredeti útján. Ennek megfelelően bevezethető a $\sigma_t(\vec{l})$ kioltási hatáskeresztmetszet, amely az abszorpció és a szórás hatáskeresztmetszet összegeként áll elő. Annak a valószínűsége, hogy egy adott \vec{l} pontban egy foton egység távolságon belül kioltódik $\sigma_t(\vec{l})dl$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a fotonpár két fotonja eljut a $(\vec{v} + \vec{\omega}l_1)$ és $(\vec{v} + \vec{\omega}l_2)$ pontokba:

$$A_{\vec{v},\vec{\omega}}(l_1, l_2) = \exp\left(-\int_{l_1}^{l_2} \sigma_t(\vec{v} + \vec{\omega}l)dl\right). \quad (2.2)$$

Egy foton a dl differenciális lépésben $\sigma_a(\vec{v} + \vec{\omega}l)dl$ valószínűséggel nyelődik el. Amennyiben ez az elnyelődés egy detektorkristályon belül történik, (egyszeri) becsapódási eseményt érzékelünk. Mivel a fotonok egymástól függetlenül nyelődnek el, annak a valószínűsége, hogy a pár két fotonja egyidejűleg a $(\vec{v} + \vec{\omega}l_1)$, illetve a $(\vec{v} + \vec{\omega}l_2)$ pontban nyelődik el, és ezáltal egy érvényes találatot generálnak a pontokhoz tartozó LOR-ban:

$$A_{\vec{v},\vec{\omega}}(l_1, l_2)\sigma_a(\vec{v} + \vec{\omega}l_1)\sigma_a(\vec{v} + \vec{\omega}l_2)dl_1dl_2. \quad (2.3)$$

Csak azokat az eseteket érzékeljük, amikor az elnyelődés a kristályokon belül történik, ennél fogva az abszorpció hatáskeresztmetszet az észlelési pontokon állandó, és megegyezik a detektorkristály abszorpció hatáskeresztmetszetével, σ_{crystal} -lal.

A γ -fotonok egyidejű elnyelődése az elektronika tökéletlensége miatt nem feltétlenül idéz elő találati eseményt. Rendeljünk minden \mathbf{D} kristálytérfigatrészhez egy $\epsilon_{\mathbf{D}}$ *érzékenység* jellemzőt, amely a mérőrendszer által regisztrált egyszeri becsapódások várható számát adja meg, feltéve, hogy egy foton valóban elnyelődik \mathbf{D} -ben:

$$\epsilon_{\mathbf{D}} = E[\text{érzékelte egyszeri becsapódások száma} \mid \text{fotonelnyelődés } \mathbf{D}\text{-ben}]. \quad (2.4)$$

Az érzékenység az adott kristálytérfigatrész sajátos tulajdonságaitól függ, például a γ -érzékenységtől és a kapcsolódó elektronika választától. Pontos értéke közvetlen méréssel határozható meg. Eljárásunk során azt feltételezzük, hogy ez a paraméter minden kristálytérfigatrészhez ismert.

Találatokat az elektronika válaszüzeje miatt is veszíthetünk: egy foton detektálásakor a rendszer a jel teljes feldolgozásáig nem képes újabb becsapódást érzékelni, ez az úgynevezett *holtidő*. A holtidő az aktivitás növelésével egyre nagyobb detektálási veszteséget okoz, következésképp a találatok érzékelési valószínűsége erősen függ az adott modulpár terheltségétől.

Jelölje a δ_{m_1, m_2} holtidő-paraméter annak a valószínűségét, hogy az m_1 és az m_2 modulban érzékelt egyszeri fotonbecsapódások érvényes találatként lesznek regisztrálva:

$$\delta_{m_1, m_2} = \Pr\{\text{találati esemény} \mid \text{egyszeri becsapódás } m_1\text{-ben és } m_2\text{-ben}\}. \quad (2.5)$$

A holtidő-paraméter pontos értéke az események gyakoriságától, ezáltal magától az aktivitástól függ. A gyakorlatban azonban előzetes mérések alapján szokták becsülni, és ezt a modulpáronkénti becslést használják a rekonstrukció során.

Tekintsük az m_1 , illetve m_2 modulban található \mathbf{D}_1 és \mathbf{D}_2 kristálytérfigatrészek által alkotott L LOR-t. Kombináljuk a kristályérzékenységet és a holtidő-paramétert egyetlen, LOR-specifikus érzékenységi paraméterre:

$$\epsilon_L = \epsilon_{\mathbf{D}_1}\epsilon_{\mathbf{D}_2}\delta_{m(\mathbf{D}_1), m(\mathbf{D}_2)}. \quad (2.6)$$

A $\mathcal{T}(\vec{v}, \vec{\omega} \rightarrow L)$ szkener érzékenység meghatározásához ekkor \mathbf{D}_1 és \mathbf{D}_2 összes lehetséges pontpárját figyelembe kell venni:

$$\mathcal{T}(\vec{v}, \vec{\omega} \rightarrow L) = \varepsilon_L \int_{l_1} \int_{l_2} \xi_L A_{\vec{v}, \vec{\omega}}(l_1, l_2) \sigma_{\text{crystal}}^2 dl_1 dl_2, \quad (2.7)$$

ahol ξ_L egy indikátorfüggvény, melynek értéke 1, ha $(\vec{v} + \vec{\omega}l_1) \in \mathbf{D}_1$ és $(\vec{v} + \vec{\omega}l_2) \in \mathbf{D}_2$, egyébként pedig 0. Ezt behelyettesítve a 2.1 egyenletbe az L LOR-ban várható találat-számra a következő összefüggést kapjuk:

$$\tilde{y}_L = \frac{\varepsilon_L \sigma_{\text{crystal}}^2}{2\pi} \int_{\Omega_H} \int_{\mathcal{V}} \int_{l_1} \int_{l_2} x(\vec{v}) \xi_L A_{\vec{v}, \vec{\omega}}(l_1, l_2) dl_1 dl_2 dv d\omega, \quad (2.8)$$

mely integrál kiszámítása az ML-EM rekonstrukciós algoritmus előrevetítés fázisa.

2.1.1. Előrevetítés LOR-központú megközelítéssel

Az előrevetítés (2.8 integrál) – a tomográf rekonstrukció más lépéseihez hasonlóan – jelentős számítási erőforrásokat igényel, emiatt a GPU masszívan párhuzamos architektúráján végezzük el. Az írási ütközések elkerülése érdekében az egyes számítási szálakat az egyes LOR-okhoz rendeljük, azaz minden párhuzamos szál egy-egy számára kijelölt LOR várható találat-számát határozza meg. Amennyiben az integrált közvetlenül a bemutatott képlet alapján számoljuk ki, vagyis elsődlegesen a lehetséges \vec{v} kezdőpontokat és ω irányokat mintavételezzük, a legtöbb minta esetén a kijelölt haladási egyenes nem fogja metszeni a vizsgált LOR-t alkotó detektorkristályokat, ezáltal a minta hozzájárulása a találat-számhoz nulla lesz. Következésképpen a minták nagy része feleslegesen terheli a számítási erőforrásokat és növeli a rekonstrukció futásidejét. Ezt a problémát úgy oldjuk meg, hogy új integrálási változókra térünk át: a LOR-t alkotó két kristálytérfogatrész pontjait mintavételezzük elsődlegesen, így minden LOR-hoz külön integrandust kapunk. Ezt hívjuk LOR-központú megközelítésnek.

Eddig a \vec{v} kezdőpont és az $\vec{\omega}$ irány segítségével jelöltünk ki egy haladási egyenest, amely meghatározta a detektoron belüli lehetséges \vec{u} és \vec{w} érzékelési pontokat. Ez azonban fordítva is lehetséges: a \vec{u} és \vec{w} érzékelési pontokból meghatározhatjuk azokat a \vec{v} kezdőpontokat és $\vec{\omega}$ irányokat, amelyekből a fotonok érkezhettek. A kezdőpont a két érzékelési pont közti szakaszon helyezkedhet el, vagyis $\vec{v}(l) = \vec{u} + (\vec{w} - \vec{u})l$ ($l \in \mathbb{R}^+$), az ω irány pedig \vec{u} -ből \vec{w} -be mutat. Az integrálási változók cseréjének Jacobi-determinánsa:

$$J_L(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{d\omega dv dl_1 dl_2}{dl dw du} = \frac{1}{|\vec{u} - \vec{w}|^2}. \quad (2.9)$$

A változócsere végrehajtva a várható találat-szám egy hármass integrálként fejezhető ki a LOR-t alkotó \mathbf{D}_1 és \mathbf{D}_2 kristálytérfogatrészek, valamint a bennük kijelölt \vec{u} és \vec{w} pontokat összekötő szakasz felett:

$$\tilde{y}_L = \frac{\varepsilon_L \sigma_{\text{crystal}}^2}{2\pi} \int_{\mathbf{D}_1} \int_{\mathbf{D}_2} \frac{X(\vec{u}, \vec{w}) \cdot A(\vec{u}, \vec{w})}{|\vec{u} - \vec{w}|^2} dw du, \quad (2.10)$$

ahol X az annihilációsűrűség vonalintegrálja, A pedig a csillapítási tényező:

$$X(\vec{u}, \vec{w}) = \int_0^1 x(\vec{v}(l)) dl, \quad (2.11)$$

$$A(\vec{u}, \vec{w}) = \exp\left(-\int_0^1 \sigma_t(\vec{v}(l)) dl\right). \quad (2.12)$$

Mivel az integrálási tartomány megegyezik az L LOR-hoz tartozó kristálytérfogatrészekkel, a ξ_L indikátorfüggvény értéke minden minta esetén 1.

A 2.10 integrál kiszámítását Monte Carlo szimulációval [22, 24, 23] végezzük. A kristálytérfogatrész-pár feletti integrált N_{ray} diszkrét vonalmintával közelítjük, vagyis (\vec{u}_i, \vec{w}_i) pontpárokat jelölünk ki a LOR-t alkotó két kristálytérfogatrészben. Az \vec{u}_i és \vec{w}_i végpontok mintavételezése egymástól függetlenül, a $|\mathbf{D}_1|$, illetve $|\mathbf{D}_2|$ méretű térfogatrészeken belül egyenletes eloszlással történik, így valószínűségi sűrűségfüggvényük

$$p(\vec{u}) = \frac{1}{|\mathbf{D}_1|}, \quad p(\vec{w}) = \frac{1}{|\mathbf{D}_2|}.$$

Az annihilációsűrűség, illetve a csillapítás vonalintegrálját *ray marchinggal* közelítjük: minden (\vec{u}_i, \vec{w}_i) szakaszon egy véletlenszerű ofszettről indulva N_{march} egyenlő távolságú $\vec{v}_i(l_j)$ mintaponton számoljuk ki az integrálok pontos értékét. A Δl_i lépésméret a szakaszhossz és N_{march} hányadosaként áll elő, a véletlenszerű induló ofszet pedig egyenletes eloszlású a $[0, \Delta l_i]$ tartományon. Ezeknek megfelelően az integrálközelítő összeg:

$$\tilde{y}_L \approx \frac{\varepsilon_L \sigma_{\text{crystal}}^2 |\mathbf{D}_1| |\mathbf{D}_2|}{2\pi N_{\text{ray}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{ray}}} \frac{X_i A_i}{|\vec{u}_i - \vec{w}_i|^2}, \quad (2.13)$$

ahol

$$X_i \approx \sum_{j=1}^{N_{\text{march}}} x(\vec{v}_i(l_j)) \Delta l_i, \quad (2.14)$$

$$A_i \approx \exp\left(-\sum_{j=1}^{N_{\text{march}}} \sigma_t(\vec{v}_i(l_j)) \Delta l_i\right). \quad (2.15)$$

Vegyük észre, hogy amikor a $\vec{v}_i(l) = \vec{u}_i + (\vec{w}_i - \vec{u}_i)l$ mintapont valamelyik detektor-kristályon belül van, akkor az $x(\vec{v}_i(l))$ annihilációsűrűség nulla (hiszen pozitronkibocsátás csak a mért objektumon belül történik), és az abszorpció hatáskeresztmetszet megegyezik a detektorkristály abszorpció hatáskeresztmetszetével ($\sigma_a(\vec{v}_i(l)) = \sigma_{\text{crystal}}$). A vonalintegrálok ezen szakaszokra vonatkozó részeit kiemelhetjük az integrálközelítő összegből, és a ray marchingot indíthatjuk közvetlenül a vizsgált térfogat széleitől. Az (\vec{u}_i, \vec{w}_i) szakasznak a detektorkristályokba eső hosszát $c_i^{(1)}$ -el, illetve $c_i^{(2)}$ -el jelölve a kapott csillapítási tényező:

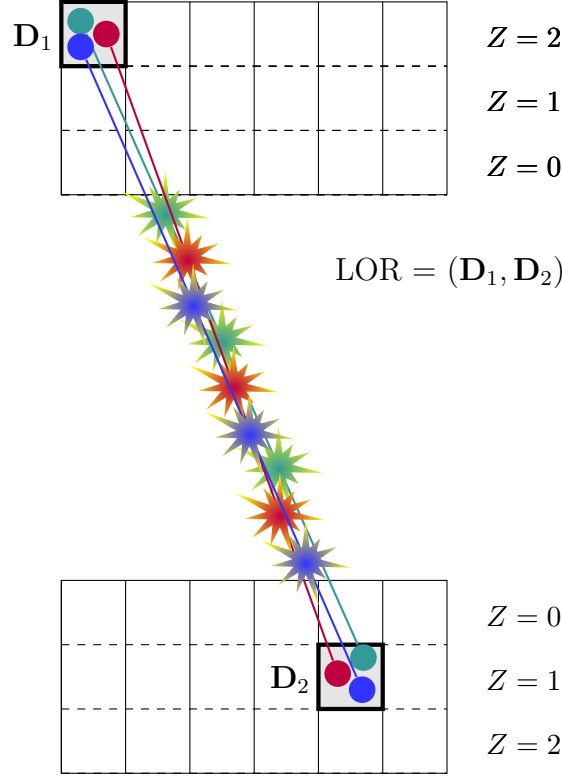
$$A_i \approx \exp\left(-\left(c_i^{(1)} + c_i^{(2)}\right) \sigma_{\text{crystal}} - \sum_{j=1}^{N_{\text{march}}} \sigma_t(\vec{v}_i(l_j)) \Delta l_i\right). \quad (2.16)$$

A LOR-központú előrevetítés sematikus modellje a 2.3 ábrán látható.

2.1.2. Visszavetés voxelközpontú megközelítéssel

A 2.8 integrál úgy is átírható, hogy a kibocsátás voxelét és az egyik kristálytérfogatrészt mintavételezzük elsődlegesen. Ezt hívjuk voxelközpontú megközelítésnek, melynek a visszavetés során van nagy jelentősége, az \mathbf{A}_{LV} rendszermátrixelemek számolásakor.

Voxelközpontú megközelítés esetén a \vec{v} annihilációs pont és az \vec{u} elnyelődési pont határozza meg az \vec{w} irányt és a \vec{w} másik lehetséges elnyelődési pontot, amely a \vec{v} és \vec{u} által alkotott egyenesnek a másik kristálytérfogatrészen belüli szakaszán helyezkedhet el. Az



2.3. ábra. Előrevetítés a direkt módszerrel. A LOR-t alkotó \mathbf{D}_1 és \mathbf{D}_2 kristálytérfogatrészekben N_{ray} véletlen pontpár kerül kijelölésre, melyeket összekötő szakaszok mentén a vizsgált térfogaton belül N_{march} pontban összegezzük az annihilációsűrűséget, hogy megkapjuk a LOR-ban várható találatok számát.

integrálási változók cseréjének Jacobi-determinánusa:

$$J_V(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{d\omega dl_1}{du} = \frac{1}{|\vec{u} - \vec{v}|^2}. \quad (2.17)$$

Írjuk át a 2.8 egyenletet úgy, hogy a V voxel \mathcal{V}_V térfogatába eső pontok aktivitása 1, máshol pedig 0. Ekkor a rendszermátrix \mathbf{A}_{LV} elemét kapjuk meg:

$$\mathbf{A}_{LV} = \frac{\varepsilon_L \sigma_{\text{crystal}}^2}{2\pi} \int_{\Omega_H} \int_{\mathcal{V}_V} \int_{l_1} \int_{l_2} \xi_L A_{\vec{v}, \vec{\omega}}(l_1, l_2) dl_1 dl_2 dv d\omega \quad (2.18)$$

$$= \frac{\varepsilon_L \sigma_{\text{crystal}}^2}{2\pi} \int_{\mathbf{D}_1} \int_{\mathcal{V}_V} \int_{l_2} \frac{\xi_L A_{\vec{u}, \vec{\omega}_{\vec{u} \rightarrow \vec{v}}}(0, l_2)}{|\vec{u} - \vec{v}|^2} dl_2 dv du \quad (2.19)$$

A \vec{v} kibocsátási pontot egyenletes mintavételezzük a V voxel térfogatán belül, így valószínűségi sűrűségfüggvénye $1/|\mathcal{V}_V|$. Hasonlóképpen, az \vec{u} elnyelődési pontot is egyenletesen mintavételezzük a \mathbf{D}_1 kristálytérfogatrészben, valószínűségi sűrűségfüggvénye tehát $1/|\mathbf{D}_1|$. Ennek megfelelően a Monte Carlo becslő:

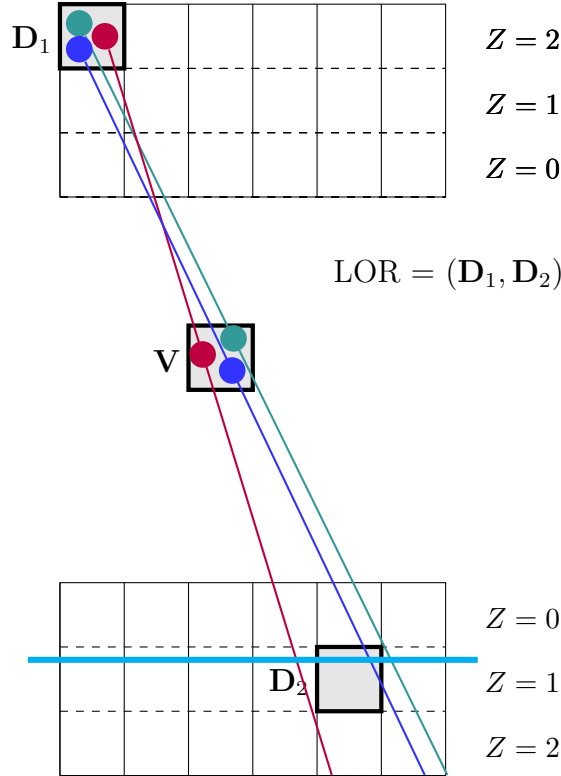
$$\mathbf{A}_{LV} \approx \frac{\varepsilon_L \sigma_{\text{crystal}}^2 |\mathcal{V}_V| |\mathbf{D}_1|}{2\pi N_{\text{sample}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sample}}} \int_{l_2} \frac{\xi_L A_{\vec{u}_i, \vec{\omega}_{\vec{u}_i \rightarrow \vec{v}}}(0, l_2)}{|\vec{u}_i - \vec{v}|^2} dl_2. \quad (2.20)$$

A csillapítási tényező vonalintegrálját egyetlen mintával becsüljük, melyhez a LOR másik, \vec{w}_i elnyelődési pontját úgy kapjuk meg, hogy a (\vec{u}_i, \vec{v}_i) által meghatározott egyenesnek a másik, \mathbf{D}_2 kristálytérfogatrészen belüli szakaszának a középpontját vesszük. Legyen ennek a szakasznak a hossza $\Delta l_{\mathbf{D}_2, i}$. Ekkor a Monte Carlo becslő:

$$\mathbf{A}_{LV} \approx \frac{\varepsilon_L \sigma_{\text{crystal}}^2 |\mathcal{V}_V| |\mathbf{D}_1|}{2\pi N_{\text{sample}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sample}}} \frac{A_i \Delta l_{\mathbf{D}_2, i}}{|\vec{u}_i - \vec{v}_i|^2}. \quad (2.21)$$

A $\Delta l_{\mathbf{D}_2, i}$ hossz minden mintára történő kiszámítása meglehetősen időigényes, ennél fogva a rendszermátrix becslőjét tovább véletlenszerűsítjük: egy, a kristály térfogatán belüli, a detektorfelülettel párhuzamos síkot mintavételezünk egyenletes eloszlással. Egy minta akkor járul hozzá az \mathbf{A}_{LV} rendszermátrixelemhez, ha a haladási egyenes elmetszi ezt a véletlen síkot az adott kristálytérfogatrészen belül.

A voxelközponú visszavetítés sematikus modellje a 2.4 ábrán látható.



2.4. ábra. Visszavetítés a direkt módszerrel. Célunk az \mathbf{A}_{LV} rendszermátrixelem kiszámítása, mely a V voxel és az $L = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ LOR közötti összefüggést írja le. A \mathbf{D}_1 kristálytérfogatrészből és a V voxelből N_{sample} véletlen pontpár kerül kijelölésre. Egy minta akkor járul hozzá \mathbf{A}_{LV} értékéhez, ha a pontpár által meghatározott egyenes elmetszi egy, a \mathbf{D}_2 mélységteregében véletlenszerűen kijelölt, a detektorfelülettel párhuzamos síkot, méghozzá \mathbf{D}_2 térfogatán belül. Az ábrán az egyetlen ilyen minta a sötétkék színnel jelölt pontpár.

2.1.3. Egyszerűsítés

Az iteratív ML-EM rekonstrukciós algoritmus a következőképpen határozza meg a V voxel új aktivitásértékét (1.7 egyenlet):

$$x_V^{(n+1)} = x_V^{(n)} \cdot \frac{\sum_{L=1}^{N_{\text{LOR}}} \mathbf{A}_{LV} \frac{y_L}{\tilde{y}_L}}{\sum_{L=1}^{N_{\text{LOR}}} \mathbf{A}_{LV}}.$$

A számítás képletében megjelenik az $\mathbf{A}_{LV}/\tilde{y}_L$ hányados, melynek számlálójában és nevezőjében több tényező is megegyezik, így azok kiejtik egymást. Összevetve \tilde{y}_L LOR-központú becslőjét (2.13 egyenlet) \mathbf{A}_{LV} voxelközpontú becslőjével (2.21 egyenlet) észrevehetjük, hogy a hányadosukban minden konstans kiesik. Továbbá megállapíthatjuk azt is, hogy egy LOR két kristálytérfigatrészét összekötő sugarak A_i csillapítási tényezői mindig nagyon hasonlóak, ennél fogva ezek is kihúzhatóak.

Ezeket az egyszerűsítéseket végrehajtva az $\mathbf{A}_{LV}/\tilde{y}_L$ hányados kicserélhető a $\mathbf{A}_{LV}^*/\tilde{y}_L^*$ hányadosra, ahol \mathbf{A}_{LV}^* az egyszerűsített rendszermatrix:

$$\mathbf{A}_{LV}^* = \frac{|\mathcal{V}_V|}{N_{\text{sample}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sample}}} \frac{\Delta l_{\mathbf{D}_2, i}}{|\vec{u}_i - \vec{v}_i|^2}, \quad (2.22)$$

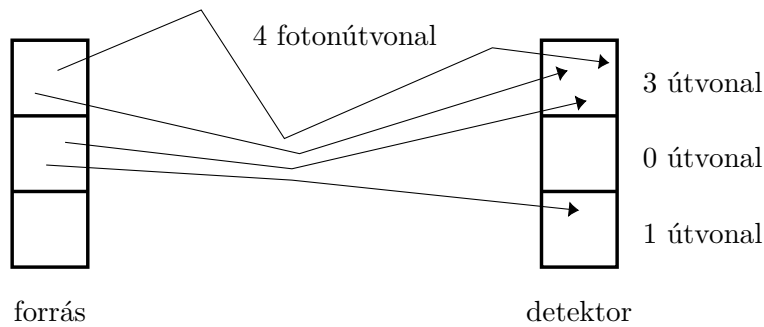
és \tilde{y}_L^* az egyszerűsített előrevetítés eredménye:

$$\tilde{y}_L^* \approx \frac{|\mathbf{D}_1|}{N_{\text{ray}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{ray}}} \frac{X_i}{|\vec{u}_i - \vec{w}_i|^2}. \quad (2.23)$$

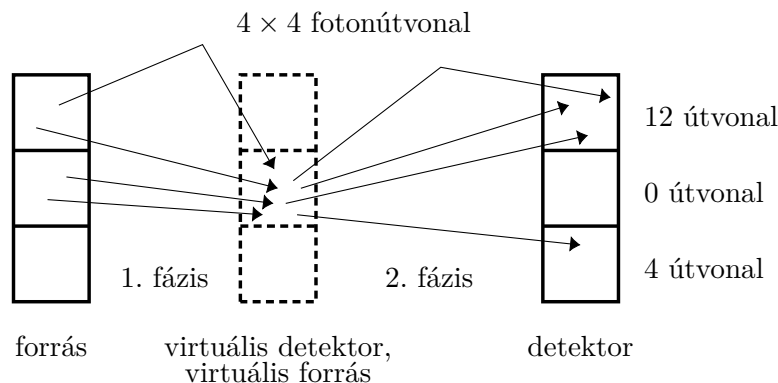
2.2. Faktorált módszer

A faktorálás bevezetése előtt tekintsük át még egyszer, hogy a hagyományos modellben hogyan történik az előrevetítés, avagy a részecsketranszport fizikai folyamatának szimulálása a várható detektortalálatok meghatározása érdekében.

Mivel a sugárforrásnak és a detektoroknak is háromdimenziós kiterjedésük van, és bennük bárhol végbemehet szórás, így a lehetséges találatok egy nagydimenziós integrállal számíthatóak ki a forráspontok, a detektálási pontok és tetszőleges számú szórásipont fölött. Az ilyen nagydimenziós integrálok mintavételezéssel, véletlenszerűen kijelölt fotonútvonalak nyomon követésével közelíthetők (2.5 ábra). Minél több útvonalat számolunk ki, annál nagyobb szimulációs pontosságot kapunk.



2.5. ábra. Az emissziós tomográfia koncepcionális modellje. A várható detektortalálatok kiszámításához véletlenszerűen kijelölt fotonútvonalakat követünk nyomon a forráspontokból a detektorokig.



2.6. ábra. A faktorálás koncepcionális modellje. A részecsketranszport folyamatát fázisokra bontjuk virtuális detektorok bevezetésével. Elsőként a fotonokat a forrásponttól a virtuális detektorokig követjük nyomon, majd a virtuális detektorok forrásokká válnak, és a második fázis belőlük indulva szimulálja a részecsketranszportot a valódi detektorokig.

A *faktorálás* [26] lényege a részecsketranszport folyamatának fázisokra bontása virtuális detektorok bevezetésével (2.6 ábra). Elsőként ezeknek a virtuális detektoroknak a várható találat számát számoljuk ki a forráspontokból indulva. Ezt követően a virtuális detektorok forrásokká válnak, és megismételjük az előbbi algoritmust belőlük indulva, a valódi detektorokig. Ennek a megközelítésnek az előnyei a következők:

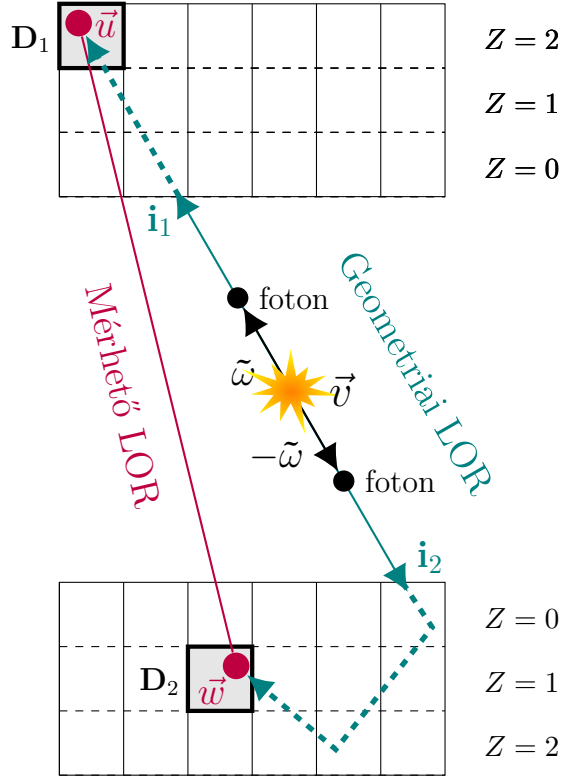
- Mivel egy virtuális detektorban végződő útvonalminta a következő fázisban az összes innen kezdődő útvonalminta által folytatásra kerül, összességében sokkal több útvonalmintát kapunk, ezáltal az eredmény jelentősen pontosabb lesz. Vegyük észre, hogy a 2.5 ábra 4 útvonalmintájából a faktorálásnak köszönhetően $4 \times 4 = 16$ útvonalminta lesz (2.6 ábra).
- Az egyes útvonalminták követése a GPU-n, párhuzamosan futó számítási szálakon történik, ahol a szálak nem kommunikálnak egymással. A szimuláció fázisokra bontása esetén azonban a későbbi fázisok felhasználhatják a korábbi fázisok eredményeit, így a redundáns számítások kiküszöbölhetőek.
- Egyetlen fázis kiszámítása sokkal egyszerűbb lehet a teljes transzportfolyamaténál, ezáltal eltávolítható minden olyan feltételes elágazás, amely csökkentené a GPU-kód hatékonyságát.

A faktorálás hátránya, hogy a virtuális detektorok a folytonos teret véges számú részre osztják, emiatt ha túl kevés van belőlük, diszkrétizálási hiba lép fel.

2.2.1. Az eljárás fázisai

Faktorált eljárásunkban a részecsketranszportot két fázisra bontjuk:

1. A *geometriai fázis* a fotonpárokat az kibocsátási pontjuktól a detektorok felületéig követi. A kibocsátási pontok annihilációs sűrűségéből kiszámolja a várható találat számot az eltalált kristályfelületek által meghatározott, úgynevezett *geometriai LOR*-okban. Amennyiben a két foton a detektorfelület \mathbf{i}_1 és \mathbf{i}_2 pontjába csapódott be, úgy a geometriai LOR $G = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ lesz, és ennek $\tilde{y}_G^{\text{geom}}$ várható találat száma kerül kiszámításra.
2. A *detektorválasz fázis* szimulál minden, a detektorkristályokban történő jelenséget, beleértve a kristályok közötti átszóródást, az elnyelődést, valamint a kristályok és az



2.7. ábra. Faktorált szimuláció. A \vec{v} annihilációs pontban született fotonok a detektorba az $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ felületi pontokon lépnek be, majd a $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ kristálytérfogatrészekben nyelődnek el, ezáltal kerülnek detektálásra. A geometriai LOR-t az $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ felületi pontok, míg a mérhető LOR-t a $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ kristálytérfogatrészek alkotják. Az ábrán az \mathbf{i}_2 felületi pontba érkező foton kétszer is szóródik a detektoron belül az elnyelődése előtt.

elektronika érzékenységét. A két elnyelődési pont egy úgynevezett *mérhető LOR*-t határoz meg ($L = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$), melynek \tilde{y}_L várható találat számát kell kiszámítani.

A detektorválasz fázist két további alfázisra osztjuk: külön kezeljük a részecsketranszportot a fotonok detektorba való belépésétől az elnyelődésükig, illetve az elnyelődéstől a találati eseményeket regisztráló elektronika kimenetéig. Az első alfázis a LOR beesési szögétől, míg a második a két kristálytól és az általuk meghatározott modulpártól függ.

Az első alfázisban feltételezzük, hogy a detektorok homogének, azaz ugyanolyan paraméterekkel rendelkeznek. Ekkor a fotontranszport szimulációja lényegében egy képszűrő egyszerűsödik. A szűrés bemenete – két pont a kristályok felületén, ahol a fotonok belépnek a detektorba – négydimenziós, míg kimenete – a fotonok két elnyelődési pontja az érintett kristálytérfogatrészekben – hatdimenziós. Az ilyen magasabb dimenzióknál különösen nagy problémát okoz a nagy szűrőkernel által okozott számítási komplexitásbeli ugrás, emiatt az eljárásunk során Monte Carlo közelítést alkalmazunk.

A szórás következtében a fotonok nem feltétlenül abban a detektorkristályban nyelődnek el, ahová eredetileg beléptek (2.7 ábra). A $p_{\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{D}}(\theta, \phi)$ *átszóródási valószínűség* annak a valószínűségét adja meg, hogy egy foton a $\mathbf{D} = (\mathbf{d}, Z)$ kristálytérfogatrészben nyelődik el, feltéve, hogy a kristály felületére az \mathbf{i} pontban, a θ és ϕ szögek által meghatározott irányból érkezett. (A θ , úgynevezett azimut szög az érkezési iránynak a detektormodul síkjára vett merőleges vetületének a szöge, míg a ϕ hajlásszög a detektormodul normálvektorával bezárt szög.) Mivel a detektorkristályokat homogénnek feltételezzük, az átszóródási valószínűség csak az \mathbf{i} és a \mathbf{d} kristályfelületek közti eltolástól ($\mathbf{t} = \mathbf{d} - \mathbf{i}$), valamint az elnyelődés

Z mélységétől függ:

$$p_{\mathbf{i} \rightarrow (\mathbf{d}, Z)}(\theta, \phi) = \Pr \{ \mathbf{d} - \mathbf{i}, Z | \theta, \phi \}. \quad (2.24)$$

Feltehető, hogy a kristályok mérete kicsi a detektormodulok távolságához képest. Ekkor a (θ, ϕ) irány konstans azoknál a detektoroknál, amelyek \mathbf{d} közelében vannak, és ahol $p_{\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{D}}$ nem elhanyagolható.

Egy adott mélységréteghez tartozó kristálytérfogatrészek átszóródási valószínűségeinek összege a réteg *érzékelési valószínűsége*, amely annak az esélyét adja meg, hogy a foton ebben a rétegben nyelődik el:

$$\nu(Z, \theta, \phi) = \Pr \{ Z | \theta, \phi \} = \sum_{\mathbf{t}} \Pr \{ \mathbf{t}, Z | \theta, \phi \}. \quad (2.25)$$

Az összes réteg érzékelési valószínűségét összeadva megkapjuk a detektormodul teljes érzékelési valószínűségét, vagyis annak az esélyét, hogy a foton nem hagyja el a modul elnyelődés nélkül:

$$\nu(\theta, \phi) = \sum_Z \nu(Z, \theta, \phi) = \sum_Z \sum_{\mathbf{t}} \Pr \{ \mathbf{t}, Z | \theta, \phi \}. \quad (2.26)$$

A vetítések során a részecsketranszportot rétegenként szimuláljuk, amihez a réteg *átszóródási valószínűségi térképére* van szükségünk:

$$\Pr \{ \mathbf{d} - \mathbf{i} | Z, \theta, \phi \} = \frac{p_{\mathbf{i} \rightarrow (\mathbf{d}, Z)}(\theta, \phi)}{\nu(Z, \theta, \phi)}. \quad (2.27)$$

2.2.2. Előrevetítés LOR-központú megközelítéssel

Tekintsünk egy $L = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ mérhető LOR-t, melynek végpontjai rendre az m_1 és m_2 detektormodulokon találhatóak. A direkt módszerhez hasonlóan a kristályérzékenységeket és a holtidő paramétert egyetlen, LOR-specifikus érzékenységsparaméterben kombináljuk (2.6 egyenlet):

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{\mathbf{D}_1} \varepsilon_{\mathbf{D}_2} \delta_{m(\mathbf{D}_1), m(\mathbf{D}_2)}.$$

Vonjuk össze hasonlóan a LOR két végének átszóródási valószínűségeit egyetlen átszóródási valószínűséggé, amely a $G = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ geometriai LOR és az $L = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ mérhető LOR között teremt meg a kapcsolatot:

$$p_{G \rightarrow L} = p_{\mathbf{i}_1 \rightarrow \mathbf{D}_1}(\theta_1, \phi_1) p_{\mathbf{i}_2 \rightarrow \mathbf{D}_2}(\theta_2, \phi_2). \quad (2.28)$$

Vegyük észre, hogy a $\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2$ szögek a detektormodulok orientációján felül az \mathbf{i}_1 és \mathbf{i}_2 belépő felületi pontoktól is függenek. Azonban ha a két részecske nem szóródik túl sok kristályon keresztül, a két felületi pont iránya jól közelíthető a két elnyelő kristálytérfogatrész, \mathbf{D}_1 és \mathbf{D}_2 irányával. Ekkor az L mérhető LOR-ban várható találatok száma egy konvolúciószerű kifejezéssel kapható meg:

$$\tilde{y}_L = \varepsilon_L \sum_{\mathbf{i}_1} \sum_{\mathbf{i}_2} \tilde{y}_G^{\text{geom}} p_{G \rightarrow L}. \quad (2.29)$$

A konvolúciót Monte Carlo közelítéssel számítjuk ki, M véletlen mintát véve a mérhető és a geometriai LOR-ok kristályfelületei közti eltolásból. Minden minta egy $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ eltolásvektorpárból áll, ahol $\mathbf{t}_1 = \mathbf{d}_1 - \mathbf{i}_1$ és $\mathbf{t}_2 = \mathbf{d}_2 - \mathbf{i}_2$. A becslő a következő:

$$\tilde{y}_L \approx \frac{\varepsilon_L}{M} \cdot \sum_{s=1}^M \frac{\tilde{y}_{G(s)}^{\text{geom}} \cdot p_{G(s) \rightarrow L}}{p_s}, \quad (2.30)$$

ahol $G(s) = (\mathbf{d}_1 - \mathbf{t}_1(s), \mathbf{d}_2 - \mathbf{t}_2(s))$ és p_s az s minta valószínűsége.

A fontossági mintavételezés elvének megfelelően a minták valószínűsége arányos a két elnyelődés mélységéretegéhez tartozó két átszóródási valószínűségi térképpel:

$$p_s(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \Pr \{ \mathbf{t}_1 | Z_1, \theta_1, \phi_1 \} \Pr \{ \mathbf{t}_2 | Z_2, \theta_2, \phi_2 \} \quad (2.31)$$

$$= \frac{P(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \rightarrow (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)}{\nu(Z_1, \theta_1, \phi_1) \cdot \nu(Z_2, \theta_2, \phi_2)} \quad (2.32)$$

$$= \frac{p_{G \rightarrow L}}{\nu(Z_1, \theta_1, \phi_1) \cdot \nu(Z_2, \theta_2, \phi_2)}. \quad (2.33)$$

Ezt behelyettesítve a 2.30 egyenletbe a végső becslő:

$$\tilde{y}_L \approx \frac{\varepsilon_L \nu(Z_1, \theta_1, \phi_1) \cdot \nu(Z_2, \theta_2, \phi_2)}{M} \cdot \sum_{s=1}^M \tilde{y}_{G(s)}^{\text{geom}}. \quad (2.34)$$

Összefoglalva, a módszer a következőképpen működik: először végrehajtunk egy geometriai vetítést, amely az $\tilde{y}_G^{\text{geom}}$ geometriai találatsszámot határozza meg. Ezt követően a négydimenziós LOR-térkép minden (Z_1, Z_2) mélységéreteg-kombinációja külön szűrésre kerül. Minden számítási szál egy-egy L mérhető LOR \tilde{y}_L találatsszámát számolja ki, a geometriai LOR-ok mintavételezésével és ezek hozzájárulásainak összegzésével.

2.2.3. Visszavetítés voxelközpontú megközelítéssel

A faktorizált eljárásunkban egy L LOR-hoz és V voxelhez tartozó rendszermátrixelem az alábbi módon áll elő:

$$\mathbf{A}_{L,V} = \varepsilon_L \sum_{\mathbf{i}_1} \sum_{\mathbf{i}_2} \mathbf{A}_{G,V}^{\text{geom}} p_{G \rightarrow L}, \quad (2.35)$$

ahol \mathbf{A}^{geom} a geometriai hatásokat és a csillapítást szimuláló rendszermátrix.

Tekintsük először a visszavetítés képletének (1.7 egyenlet) számlálóját, és helyettesítsük be a faktorizált rendszermátrix kibontását (2.35 egyenlet):

$$\sum_L \mathbf{A}_{L,V} \cdot \frac{y_L}{\tilde{y}_L} = \sum_{\mathbf{D}_1} \sum_{\mathbf{D}_2} \sum_{\mathbf{i}_1} \sum_{\mathbf{i}_2} \mathbf{A}_{G,V}^{\text{geom}} \cdot p_{G \rightarrow L} \cdot \varepsilon_L \cdot \frac{y_L}{\tilde{y}_L} \quad (2.36)$$

$$= \sum_{\mathbf{i}_1} \sum_{\mathbf{i}_2} \mathbf{A}_{G,V}^{\text{geom}} \cdot \sum_{\mathbf{D}_1} \sum_{\mathbf{D}_2} p_{G \rightarrow L} \cdot \varepsilon_L \cdot \frac{y_L}{\tilde{y}_L}. \quad (2.37)$$

Vegyük észre, hogy ahelyett, hogy a mérhető LOR-ok hányadosát, $r_L = y_L/\tilde{y}_L$ -t használnánk a visszavetítéshez, mint a detektormodell nélküli esetben, most először egy konvolúciószerű műveletet hajtunk végre ezekkel a hányadosokkal, amelyből megkapjuk a geometriai LOR-ok hányadosát:

$$r_G = \sum_{\mathbf{D}_1} \sum_{\mathbf{D}_2} p_{G \rightarrow L} \cdot \varepsilon_L \cdot \frac{y_L}{\tilde{y}_L}. \quad (2.38)$$

r_G értékét Monte Carlo szimulációval közelítjük, M mintát véve a mérhető LOR-okból:

$$r_G \approx \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \frac{p_{G \rightarrow L(s)} \cdot \varepsilon_{L(s)} \cdot \frac{y_{L(s)}}{\tilde{y}_{L(s)}}}{p_s}, \quad (2.39)$$

ahol p_s az $L(s) = (\mathbf{D}_1(s), \mathbf{D}_2(s))$ minta valószínűsége.

Ahhoz, hogy az $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ felületekből megkapjuk a $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ kristálytérfogatrészeket, az eltolást és a mélységet az átszóródási valószínűséggel arányosan mintavételezzük:

$$p_s(\mathbf{t}_1, Z_1, \mathbf{t}_2, Z_2) = \frac{\Pr\{\mathbf{t}_1, Z_1|\theta_1, \phi_1\} \Pr\{\mathbf{t}_2, Z_2|\theta_2, \phi_2\}}{\nu(\theta_1, \phi_1) \cdot \nu(\theta_2, \phi_2)}. \quad (2.40)$$

Ennek megfelelően a konvolúció becslője:

$$r_G \approx \frac{\nu(\theta_1, \phi_1) \cdot \nu(\theta_2, \phi_2)}{M} \sum_{s=1}^M \varepsilon_{L(s)} \cdot \frac{y_{L(s)}}{\tilde{y}_{L(s)}}, \quad (2.41)$$

melyet behelyettesítve a visszavetítés képletének számlálójába a következőt kapjuk:

$$\sum_L \mathbf{A}_{L,V} \cdot \frac{y_L}{\tilde{y}_L} \approx \sum_{\mathbf{i}_1} \sum_{\mathbf{i}_2} \mathbf{A}_{G,V}^{\text{geom}} \cdot \frac{\nu(\theta_1, \phi_1) \cdot \nu(\theta_2, \phi_2)}{M} \sum_{s=1}^M \varepsilon_{L(s)} \cdot \frac{y_{L(s)}}{\tilde{y}_{L(s)}}. \quad (2.42)$$

A visszavetítés nevezője egy ezzel analóg LOR-szűréssel kapható meg, y_L/\tilde{y}_L helyére 1-et helyettesítve:

$$\sum_L \mathbf{A}_{L,V} \approx \sum_{\mathbf{i}_1} \sum_{\mathbf{i}_2} \mathbf{A}_{G,V}^{\text{geom}} \cdot \frac{\nu(\theta_1, \phi_1) \cdot \nu(\theta_2, \phi_2)}{M} \sum_{s=1}^M \varepsilon_{L(s)}. \quad (2.43)$$

Alternatív megoldásként lehetőség van arra is, hogy az összeget rétegpárok szerint szétválasszuk, minden rétegpárt Monte Carlo szimulációval kiértékeljünk, majd összeadjuk az eredményeket. A szétválasztás a következő:

$$r_G = \sum_{Z_1} \sum_{Z_2} \sum_{\mathbf{d}_1} \sum_{\mathbf{d}_2} p_{G \rightarrow L} \cdot \varepsilon_L \cdot \frac{y_L}{\tilde{y}_L}.$$

A Z_1, Z_2 rétegpárhoz tartozó rész kiértékelése Monte Carlo közelítéssel:

$$r_{G,Z_1,Z_2} = \sum_{\mathbf{d}_1} \sum_{\mathbf{d}_2} p_{G \rightarrow L} \cdot \varepsilon_L \cdot \frac{y_L}{\tilde{y}_L} \approx \frac{1}{M} \sum_{s=1}^M \frac{p_{G \rightarrow L(s)} \cdot \varepsilon_{L(s)} \cdot \frac{y_{L(s)}}{\tilde{y}_{L(s)}}}{p_s}. \quad (2.44)$$

Fontosság szerinti mintavételezést alkalmazva a p_s mintaválasztási valószínűsége a réteg átszóródási valószínűségi térképével tesszük arányossá:

$$\begin{aligned} p_s(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= \Pr\{\mathbf{t}_1|Z_1, \theta_1, \phi_1\} \Pr\{\mathbf{t}_2|Z_2, \theta_2, \phi_2\} \\ &= \frac{p(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \rightarrow (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)}{\nu(Z_1, \theta_1, \phi_1) \cdot \nu(Z_2, \theta_2, \phi_2)}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ezt behelyettesítve a 2.44 egyenletbe:

$$r_{G,Z_1,Z_2} \approx \frac{\nu(Z_1, \theta_1, \phi_1) \cdot \nu(Z_2, \theta_2, \phi_2)}{M} \sum_{s=1}^M \varepsilon_{L(s)} \cdot \frac{y_{L(s)}}{\tilde{y}_{L(s)}}. \quad (2.46)$$

Vegyük észre, hogy \tilde{y}_L becslőjében (2.34 egyenlet) szintén megjelenik a $\nu(Z_1, \theta_1, \phi_1) \cdot \nu(Z_2, \theta_2, \phi_2)/M$ tényező, amellyel így egyszerűsíthetünk:

$$r_{G,Z_1,Z_2} \approx \sum_{s=1}^M \varepsilon_{L(s)} \cdot \frac{y_{L(s)}}{\tilde{y}_{L(s)}^*}, \quad (2.47)$$

ahol

$$\tilde{y}_L^* \approx \varepsilon_L \cdot \sum_{s=1}^M \tilde{y}_{G(s)}^{\text{geom}}. \quad (2.48)$$

Ezáltal a visszavetítés számlálójának végső formája:

$$\sum_L \mathbf{A}_{L,V} \cdot \frac{y_L}{\tilde{y}_L} \approx \sum_{\mathbf{i}_1} \sum_{\mathbf{i}_2} \mathbf{A}_{G,V}^{\text{geom}} \cdot \sum_{Z_1} \sum_{Z_2} r_{G,Z_1,Z_2}. \quad (2.49)$$

2.3. Az átszóródási valószínűségek kiszámítása

Az alábbi fejezetben bemutatásra kerül a detektormodellben használt átszóródási valószínűség kiszámításának módja, illetve néhány konkrét szimulációs eredmény.

400-511 keV energiatartományba eső γ -fotonok esetén három fő kölcsönhatási módot kell figyelembe venni a detektorkristályokban [4]:

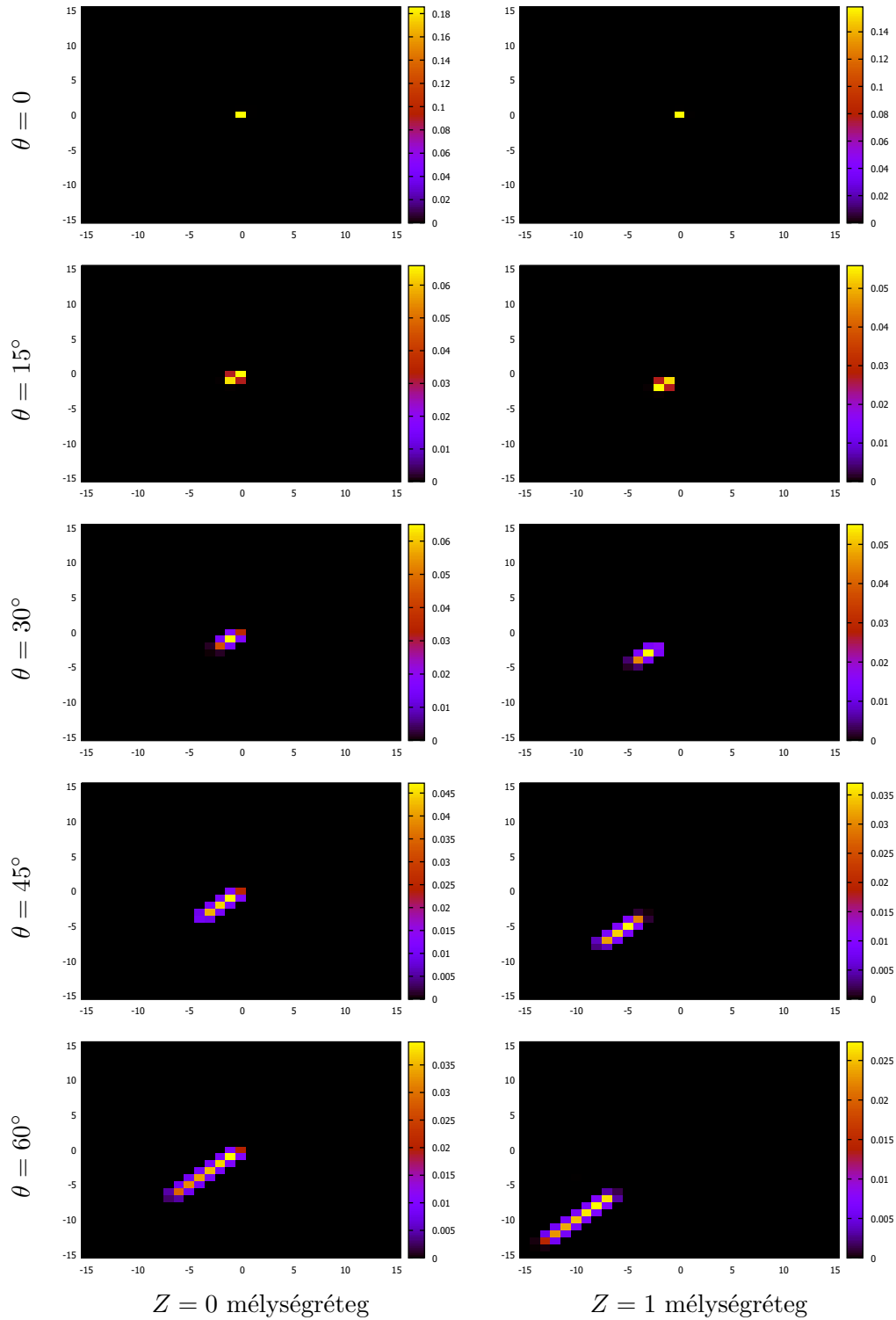
- a fényelektromos hatást, másnéven fotoeffektust,
- a Compton-szórást, másnéven inkoherens szórást,
- illetve a Rayleigh-szórást, másnéven koherens szórást.

511 keV energiaszinten a fotoeffektus hatáskeresztmetszete $\sigma_a = 37.4^{-1} \text{ mm}^{-1}$, a Compton-szórásé $\sigma_{is} = 19.1^{-1} \text{ mm}^{-1}$, míg a Rayleigh-szórásé $\sigma_{cs} = 214^{-1} \text{ mm}^{-1}$ [1]. A fotoeffektus hatáskeresztmetszete fordítottan arányos a fotonok energiájának 2,5-edik hatványával, a Rayleigh-szórás keresztmetszete pedig az 1,9-edik hatványával [4], így ezen kölcsönhatások esélye csaknem megduplázódik, ha Compton-szórás következik be, és a foton energiája 511 keV-ről 400 keV-re csökken. A Klein-Nishina formulának [16] megfelelően az energiacsökkenéskor a Compton-szórás hatáskeresztmetszete is növekedik, de csak kevesebb, mint 10%-al.

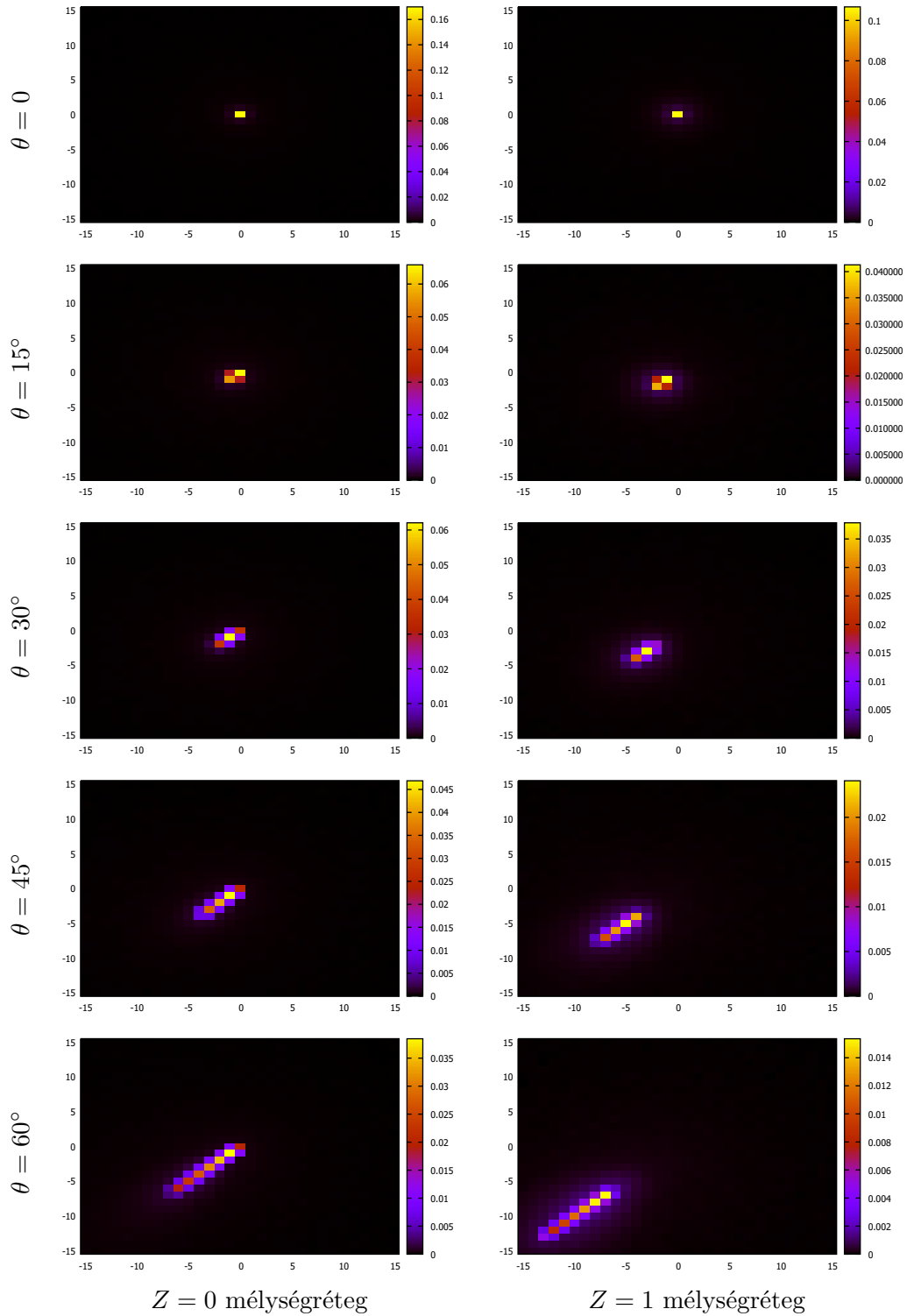
A pozitron-elektron annihilációkor keletkező, 511 keV energiájú fotonok esetében a Compton-szórás esélye körülbelül kétszer akkora, mint a fényelektromos hatása [4]. Ebben az energiatartományban azonban – amikor a Compton-törvény szerinti energiacsökkenés kicsi – a Compton-szórásnak erős előre-szóró jellege van [2], ezáltal az esetek nagy részében sem a foton energiáját, sem az irányát nem változtatja meg, azaz a hatása nem számottevő. Ezzel ellentétben a Rayleigh-szórás nagyobb mértékben módosítja a fotonok irányát, ez a jelenség az oka a nagy detektortartományba való szétszóródásuknak.

Emlékezzünk vissza, hogy a direkt módszer (2.1 fejezet) figyelmen kívül hagyja a detektoron belüli szórást, csak a fényelektromos hatással számol. A faktorált módszer (2.2 fejezet) azonban olyan előre kiszámított átszóródási valószínűségeket használ a fotonútvonalak követéséhez, amelyek magukba foglalják a szórást is. A 2.8 ábra az átszóródási valószínűségeket ábrázolja csak a fényelektromos hatást szimulálva (direkt módszer), míg a 2.9 ábrán látható átszóródási valószínűségek számításakor a Compton- és a Rayleigh-szórást is figyelembe vettük (faktorált módszer). A 2.1 táblázat mutatja az érzékelési valószínűségeket, azaz az összes kristály átszóródási valószínűségeinek az összegét különböző θ azimut szögek esetén, rögzített $\phi = 45^\circ$ hajlásszög mellett. A szimulációk során 400–600 keV energiaablakot feltételeztünk, vagyis a 400 keV alá eső energiájú fotonokat figyelmen kívül hagytuk.

Az ezen átszóródási térképek szerinti mintavételezést előre kiszámított táblázatokkal támogatjuk. Elsőként adott irányokból a detektorfelületen egyenletesen eloszlású mintapontokba fotonok érkezését szimuláljuk, melynek alapján meghatározzuk az egyes mélységrétegek érzékelési valószínűségi térképeit. A valószínűségek birtokában eltolásvektor-készleteket generálunk, amelyek mindössze néhány mintából állnak, de együttes eloszlásuk a lehető legközelebb van a szimulált eloszláshoz [6, 9, 25, 27].



2.8. ábra. A direkt módszer által használt $p_{\mathbf{i} \rightarrow (\mathbf{d}, Z)}(\theta, \phi)$ átszóródási valószínűségek. Az ábrák közepén \mathbf{i} van. A szimulációk $\phi = 45^\circ$ beállítással, és két mélységrétegre osztott, $1.12 \times 1.12 \times 13$ mm-es LYSO kristályok feltételezésével készültek. A modell csak a fényelektromos hatást veszi figyelembe, a szórástól eltekint.



2.9. ábra. A faktorált módszer által használt $p_{\mathbf{i} \rightarrow (\mathbf{d}, Z)}(\theta, \phi)$ átszóródási valószínűségek. Az ábrák közepén \mathbf{i} van. A szimulációk $\phi = 45^\circ$ beállítással, és két mélységrétegre osztott, $1.12 \times 1.12 \times 13$ mm-es LYSO kristályok feltételezésével készültek. A modell a fényelektromos hatás mellett a Compton- és Rayleigh-szórással is számol.

θ	0°	15°	30°	45°	60°
Direkt	0.274	0.284	0.310	0.364	0.473
Faktorált	0.289	0.298	0.329	0.396	0.512

2.1. táblázat. A direkt és a faktorált módszerek által használt ν érzékelési valószínűségek különböző θ beesési hajlásszögekre, rögzített $\phi = 45^\circ$ beesési azimut szög mellett. A direkt módszer csak a fényelektromos hatással számol, míg a faktorált módszer a Compton- és a Rayleigh-szórást is figyelembe veszi.

2.4. Geometriai inflálás

A bemutatott detektormodellben a kiszámolt átszóródási valószínűségekkel mint szűrővel szűrést hajtunk végre a LOR találatszámokon (2.29 egyenlet). Azonban mivel a LOR-ok száma milliós nagyságrendben mozog (3. fejezet), ez a művelet igen költséges. Egy egyszerűsítésként szolgálhat, ha szűrés helyett a detektorkristályokat logikailag kintebb toljuk, hogy a belső felületük oda essen, ahol a legnagyobb a fotonok elnyelődésének a valószínűsége. Ennek pontos értéke a Lambert–Beer törvény [20] alapján számolható ki, 511 keV energiájú fotonok esetén megközelítőleg a kristály mélységének a felénél van. (Két mélységréteg esetén a negyedénél, mivel mindkét réteg felszíne kintebb tolódik.) Ezt geometriai inflálásnak hívjuk, és egy erős becslésként szolgál a valós detektormodellre, ellenben nem igényel többlétszámítást.

Gyakran előnyös lehet az is, ha a részecsketranszportot csak az előrevetítés során szimuláljuk pontosan, és a visszavetítés során egyszerűsített rendszermátrixot használunk [28, 7, 10]. Ez az esetünkben azt jelenti, hogy az előrevetítésnél LOR-szűrést alkalmazunk, visszavetítésnél pedig geometriai inflálást.

3. fejezet

Eredmények

A javasolt módszereket a Derenzo matematikai fantomon [5] (3.1 ábra) tanulmányoztuk. A fantomot $120 \times 120 \times 172$ voxel felbontásban rekonstruáltuk, 200 iteráción keresztül.

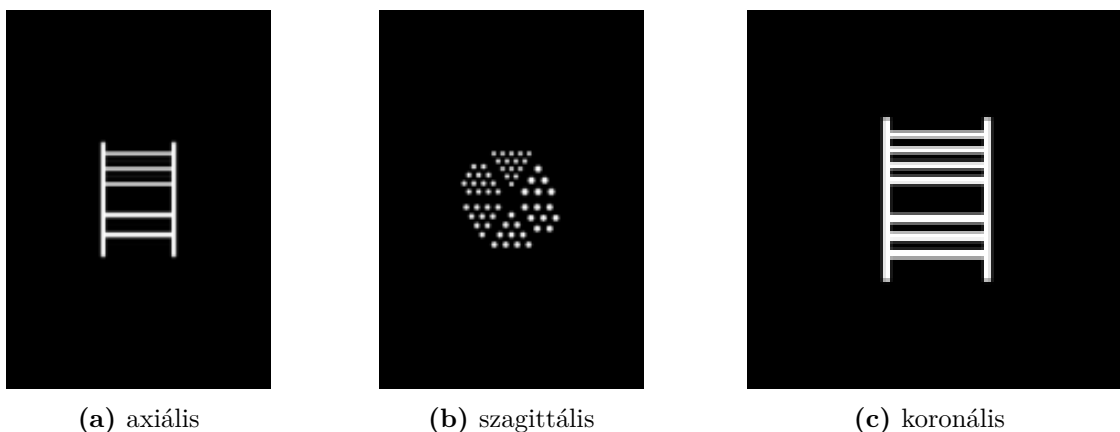
Méréseink során a Mediso Medical Imaging Systems [14] *NanoPET/CT 122* rendszerét [21] modelleztük. A NanoPET/CT 122 szkennelvényben a detektorgyűrű 12 modulból áll. Rekonstrukcióink során 1:3 koincidenziát használtunk, azaz minden modul a gyűrű három szemközti moduljával alkotott LOR-okat, ezáltal összesen $(12 \times 3)/2 = 18$ modulpárral dolgoztunk. A modulokban 81×39 darab, $1.12 \times 1.12 \times 13$ mm méretű LYSO detektorkristály található, melyeket két mélységrétegre osztottunk. Ennélfogva a teljes rendszerben a LOR-ok száma $18 \times (81 \times 39 \times 2)^2 = 718\,508\,232$ volt.

A pontosság leírására a *keresztkorrelációs hibát* (cross-correlation error, CC error) használtuk. Adott $\mathbf{s}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ vektorok CC hibája a következő:

$$Error_{cc}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = 100 \cdot \left(1 - \left| \frac{C_{1,2}}{\sqrt{C_{1,1} \cdot C_{2,2}}} \right| \right),$$

$$C_{1,1} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{s}_i - \bar{\mathbf{s}})^2, \quad C_{2,2} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}})^2, \quad C_{1,2} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{s}_i - \bar{\mathbf{s}})(\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}),$$

ahol $\bar{\mathbf{s}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{s}_i$ és $\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$.



(a) axiális

(b) szagittális

(c) koronális

3.1. ábra. A Derenzo fantom tengelymetszetei

A vizsgált 10 rekonstrukciós beállítás a következő volt:

- LOR-szűrés az előrevetítésben és a visszavetítésben is
 - a szórás elhanyagolása a LOR-szűrés során
 - * DOI nélküli rekonstrukció (1 mélységréteg)
 - * DOI rekonstrukció (2 mélységréteg)
 - számolás a szórással is a LOR-szűrés során
 - * DOI nélküli rekonstrukció (1 mélységréteg)
 - * DOI rekonstrukció (2 mélységréteg)
- LOR-szűrés az előrevetítésben és geometriai inflálás a visszavetítésben
 - a szórás elhanyagolása a LOR-szűrés során
 - * DOI nélküli rekonstrukció (1 mélységréteg)
 - * DOI rekonstrukció (2 mélységréteg)
 - számolás a szórással is a LOR-szűrés során
 - * DOI nélküli rekonstrukció (1 mélységréteg)
 - * DOI rekonstrukció (2 mélységréteg)
- geometriai inflálás az előrevetítésben és a visszavetítésben is
 - DOI nélküli rekonstrukció (1 mélységréteg)
 - DOI rekonstrukció (2 mélységréteg)

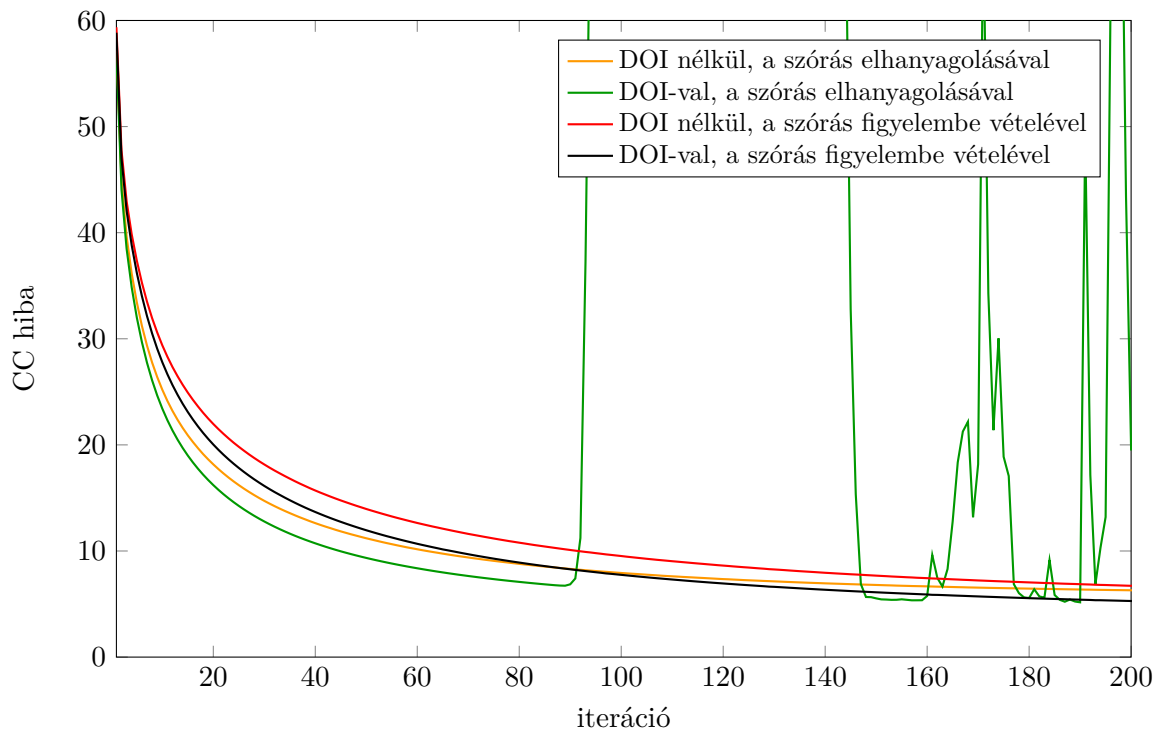
A CC hibagörbék a 3.2–3.4 ábrák mutatják, míg a rekonstrukciók kimenetei a 3.6–3.8 ábrákon láthatók.

A kapott hibagörbék alapján megállapítható, hogy a szórás figyelmen kívül hagyása hibát hoz a rekonstrukcióba. Ez a hiba szétkenyedhet a teljes térfogaton, vagy néhány voxelben is koncentrálódhat. Az előbbi esetén a hibagörbe arányosan magasabb lesz a teljes rekonstrukció során, míg az utóbbi esetben a nagy aktivitású voxelek a CC hiba kiugró megnövekedését okozzák. Ez utóbbi a méréseink során a DOI (2 mélységrétegű) rekonstrukciókra volt jellemző: a 80. iteráció körül a szórást elhanyagoló DOI rekonstrukciók CC hibái elszálltak (3.2 és 3.3 ábrák). Ennek oka, hogy a szórás figyelmen kívül hagyása által okozott hiba kiugróan magas aktivitású voxelek formájában materializálódott (3.5 ábra).

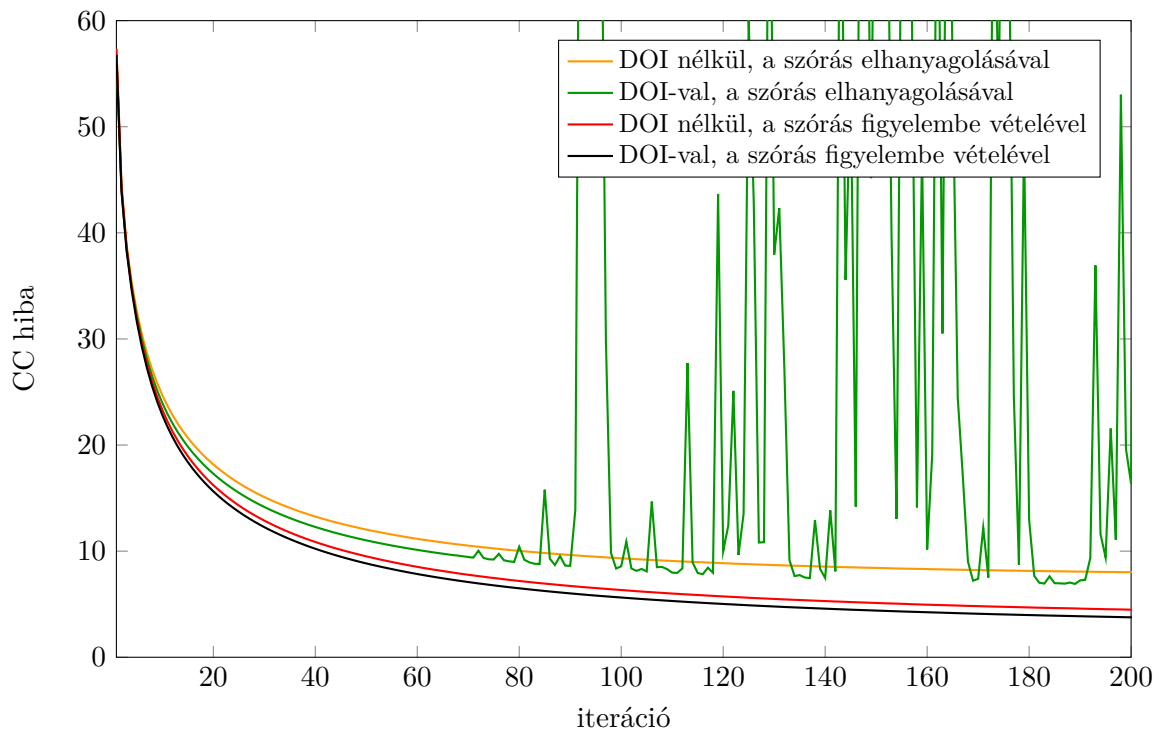
Ha az előrevetítésben és a visszavetítésben is LOR-szűrést alkalmazunk (3.2 ábra), megfigyelhető, hogy a rekonstrukció elején a szórással nem számoló modellek kezdetben jobban teljesítenek (kisebb hibát eredményeznek), mint a szórással is számoló változatok. Ennek az az oka, hogy a szórás figyelmen kívül hagyásával a rendszermátrix kis értékű elemeit kinullázzuk, ezáltal annak szinguláris értékei nőnek, tehát a konvergencia gyorsabb lesz, viszont nem a valós eredményhez fog tartani.

Ha a visszavetítésben LOR-szűrés helyett geometriai inflálást alkalmazunk (3.3 ábra), a szórás nélküli modellek már a rekonstrukció elején is rosszabb eredményt adnak, mint a szórást figyelembe vevők. Az inflálás általi egyszerűsítés tehát felerősítette annak hatását, hogy rossz megoldáshoz konvergálunk, ha nem számolunk a szórással. Amennyiben viszont számolunk a szórással, az inflálás a visszavetítésben éppen, hogy előnyösnek bizonyul: mind a DOI nélküli, mind a DOI-s rekonstrukció alacsonyabb hibáig jut el (4.48, illetve 3.76), mint amikor LOR-szűrést alkalmazunk a visszavetítésben is (6.71, illetve 5.28 CC hiba).

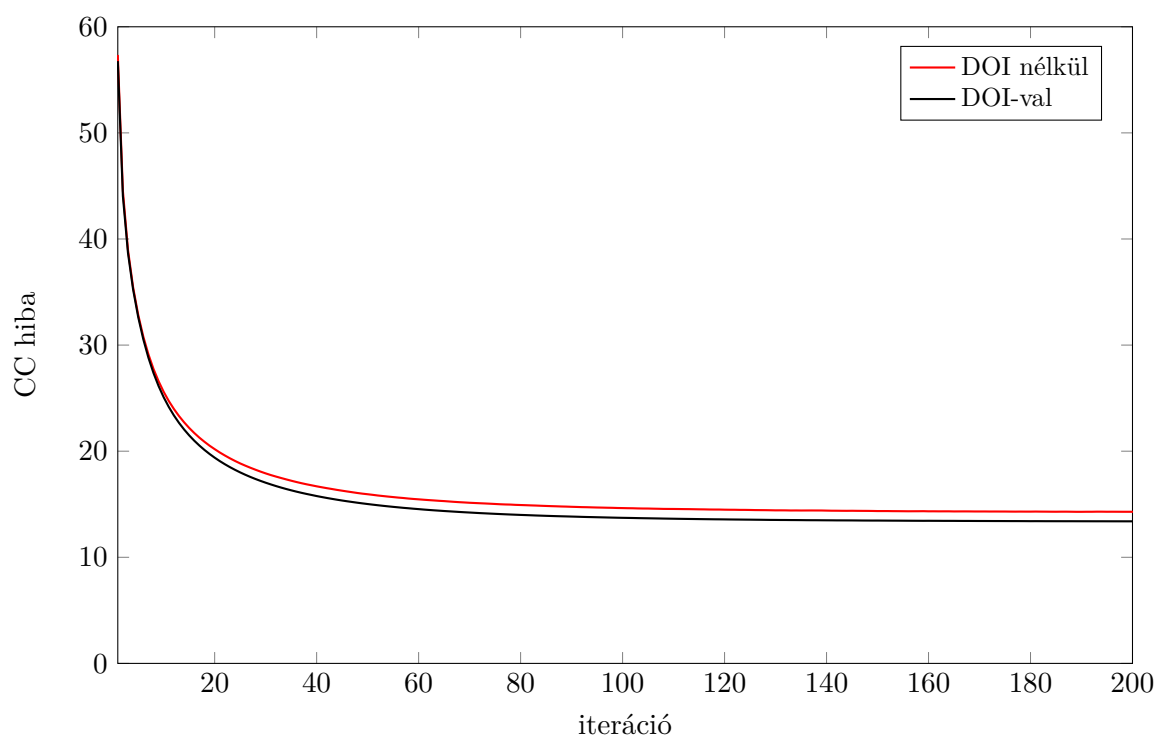
A legrosszabb eredményt akkor kapjuk, ha az előre- és a visszavetítésben is geometriai inflálást alkalmazunk, aminek oka, hogy az inflálás csupán egy erős becslés a valós detektormodellre, a gyorsabb végrehajtás és egyszerűbb implementáció javára a kimenet pontosságából veszítünk.



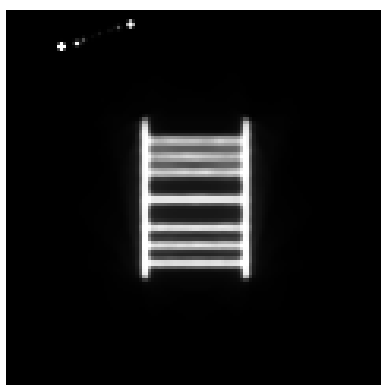
3.2. ábra. A rekonstrukciók CC hibagörbéi, az előrevetítésben és a visszavetítésben is LOR-szűrést alkalmazva.



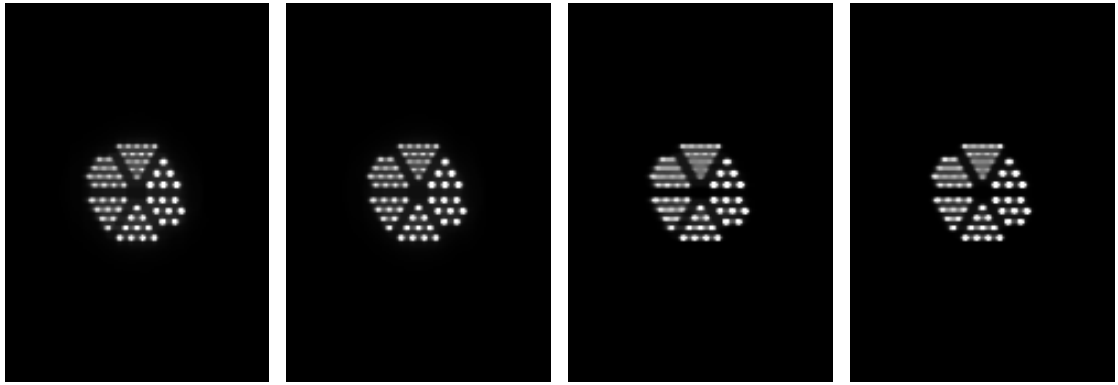
3.3. ábra. A rekonstrukciók CC hibagörbéi, az előrevetítésben LOR-szűrést, a visszavetítésben geometriai inflálást alkalmazva.



3.4. ábra. A rekonstrukciók CC hibagörbéi, az előrevetítésben és a visszavetítésben is geometriai inflálást alkalmazva.



3.5. ábra. DOI rekonstrukciók esetén a szórás figyelmen kívül hagyása a LOR-szűrés során kiugróan magas aktivitású voxeleket okozott.



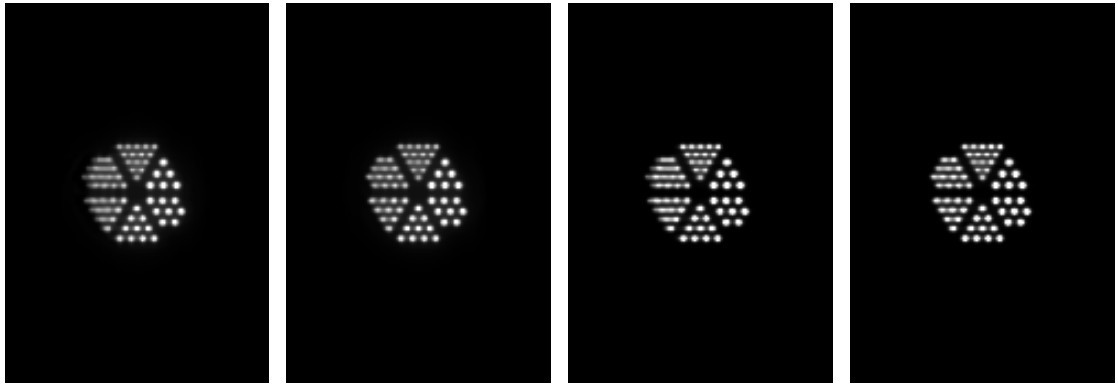
(a) DOI nélkül, a szórás elhanyagolásával

(b) DOI-val, a szórás elhanyagolásával

(c) DOI nélkül, a szórás figyelembe vételével

(d) DOI-val, a szórás figyelembe vételével

3.6. ábra. A rekonstrukciók kimenetei, az előrevetítésben és a visszavetítésben is LOR-szűrést alkalmazva.



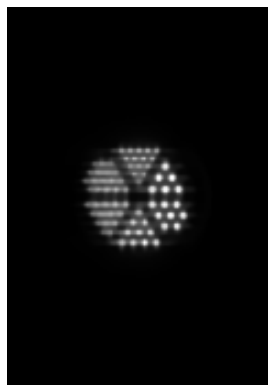
(a) DOI nélkül, a szórás elhanyagolásával

(b) DOI-val, a szórás elhanyagolásával

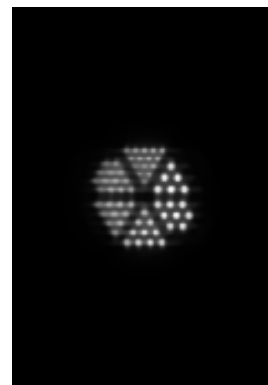
(c) DOI nélkül, a szórás figyelembe vételével

(d) DOI-val, a szórás figyelembe vételével

3.7. ábra. A rekonstrukciók kimenetei, az előrevetítésben LOR-szűrést, a visszavetítésben geometriai inflálást alkalmazva.



(a) DOI nélkül



(b) DOI-val

3.8. ábra. A rekonstrukciók kimenetei, az előrevetítésben és a visszavetítésben is geometriai inflálást alkalmazva.

4. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban egy olyan DOI-alapú PET rekonstrukciós séma került bemutatásra, amely képes a detektorkristályok közötti átszóródást is modellezni, ezáltal javítva a detektorban végbemenő folyamatok szimulációjának pontosságát.

Eljárásunk két fázisra bontja a fotontranszportot: az első fázis a mért objektumban történő fotonmozgással foglalkozik egészen a detektorkristályok felületéig, míg a második a kristályok belsejében végbemenő kölcsönhatásokat, úgymint a fényelektromos hatást, a Compton-szórást és a Rayleigh-szórást kezeli. Az első fázis a kristályfelületepárok által alkotott, geometriai LOR-okkal dolgozik, míg a második fázis a DOI kristálytérfigatrészek által alkotott, mérhető LOR-okkal. A kettő között az átszóródási valószínűség írja le a kapcsolatot, melyet szimulációval lehet meghatározni.

A javasolt eljárást a Derenzo fantomon tanulmányoztuk, a NanoPET/CT 122 szkennert modellezve. Összesen 10 rekonstrukciós beállítást vizsgáltunk, melyek között szerepeltek DOI-s és DOI nélküli, szórást figyelembe vevő és azt elhanyagoló, illetve LOR-szűrést vagy ahelyett egyszerű geometriai inflálást alkalmazó mérések.

A detektorkristályok közti átszóródás figyelembe vétele minden esetben javított a rekonstrukció pontosságán. A legjobb eredményt az általunk javasolt, szórást figyelembe vevő DOI eljárás adta, az előrevetítésben LOR-szűrést, a visszavetítésben geometriai inflálást alkalmazva.

Köszönetnyilvánítás

A TDK dolgozatban ismertetett eredmények a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Kar Balatonfüredi Hallgatói Kutatócsoport szakmai közössége keretében jöttek létre a régió gazdasági fejlődésének elősegítése érdekében. Az eredmények létrehozása során figyelembe vettük a balatonfüredi központú Rendszertudományi Innovációs Klaszter által megfogalmazott célkitűzéseket, valamint a párhuzamosan megvalósuló EFOP 4.2.1-16-2017-00021 pályázat támogatásával elnyert „BME Balatonfüredi Tudáscentrum” térségfejlesztési terveit.

A kutatás az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg (EFOP-3.6.2-16-2017-00013, Innovatív Informatikai és Infokommunikációs Megoldásokat Megalapozó Tematikus Kutatási Együtműködések).



Irodalomjegyzék

- [1] M.J. Berger–J.H. Hubbell–Stephen Seltzer–J. Chang–J.S. Coursey–R. Sukumar–D.S. Zucker: Xcom: Photon cross sections database. *NIST Standard Reference Database*, 8. évf. (2009. 01), 87–3597. p.
- [2] Arthur Compton: A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements. *Physical Review (Series I)*, 21. évf. (1923), 483–502. p. ISSN 0031-899X,1536-6065. URL <http://doi.org/10.1103/physrev.21.483>.
- [3] CUDA Zone | NVIDIA Developer. <https://developer.nvidia.com/cuda-zone>. Elérés dátuma: 2019. október 28.
- [4] C.M. DAVISSON: INTERACTION OF γ -RADIATION WITH MATTER. In *Alpha-, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy*. 1968, Elsevier, 37–78. p. URL <https://doi.org/10.1016%2Fb978-0-7204-0083-0.50007-9>.
- [5] S. E. Derenzo–T. F. Budinger–J. L. Cahoon–R. H. Huesman–H. G. Jackson: High Resolution Computed Tomography of Positron Emitters. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 24. évf. (1977) 1. sz., 544–558. p.
- [6] T. Kollig–A. Keller: Efficient illumination by high dynamic range images. In *Eurographics Symposium on Rendering, 2003* (konferenciaanyag). 2003, 45–51. p.
- [7] Nam-Yong Lee–Yong Choi: Theoretical Investigation on an Unmatched Backprojector for Iterative Reconstruction in Emission Computed Tomography. *Journal of the Korean Physical Society*, 59. évf. (2011) 2. sz., 367–375. p.
- [8] M. Magdics–et al.: Performance Evaluation of Scatter Modeling of the GPU-based „Tera-Tomo” 3D PET Reconstruction. In *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging* (konferenciaanyag). 2011, 4086–4088. p.
- [9] M. Magdics–L. Szirmay-Kalos: Crystal Scattering Simulation for PET on the GPU. In *Eurographics 2011, Short paper* (konferenciaanyag). 2011.
- [10] M. Magdics–L. Szirmay-Kalos–B. Tóth–A. Penzov: Analysis and Control of the Accuracy and Convergence of the ML-EM Iteration. *LECTURE NOTES IN COMPUTER SCIENCE*, 8353. évf. (2014), 147–154. p.
- [11] M. Magdics–L. Szirmay-Kalos–B. Tóth–Á. Csenedesi–A. Penzov: Scatter estimation for PET reconstruction. In *Proceedings of the 7th international conference on Numerical methods and applications, NMA’10 konferenciasorozat*. Berlin, Heidelberg, 2011, Springer-Verlag, 77–86. p. ISBN 978-3-642-18465-9. URL <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1945690.1945700>. 10 p.
- [12] M. Magdics–L. Szirmay-Kalos–B. Tóth–T. Umenhoffer: Fast positron range calculation in heterogeneous media for 3D PET reconstruction. In *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record (NSS/MIC)* (konferenciaanyag). 2012.

- [13] Milán Magdics: *GPU-based particle transport for PET reconstruction*. PhD értekezés (Informatikai Tudományok Doktori Iskola). 2014. 9.
URL <http://hdl.handle.net/10890/1344>.
- [14] Mediso Medical Imaging Systems. URL <http://mediso.hu/>. Elérés dátuma: 2020. október 19.
- [15] I Mohammadi–I F C Castro–P M M Correia–A L M Silva–J F C A Veloso: Minimization of parallax error in positron emission tomography using depth of interaction capable detectors: methods and apparatus. *Biomedical Physics & Engineering Express*, 5. évf. (2019. oct) 6. sz., 062001. p.
URL <https://doi.org/10.1088%2F2057-1976%2F6a1b>.
- [16] O. Klein; T. Nishina: Über die streuung von strahlung durch freie elektronen nach der neuen relativistischen quantendynamik von dirac. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 52. évf. (1929), 853–868. p. ISSN 0939-7922,1431-5831.
URL <http://doi.org/10.1007/bf01366453>.
- [17] F.; Michel C.; Casey M. Panin, V.Y.; Kehren: Fully 3-d pet reconstruction with system matrix derived from point source measurements. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25. évf. (2006), 907–921. p. ISSN 0278-0062,1558-254X.
URL <http://doi.org/10.1109/tmi.2006.876171>.
- [18] B.; Dietz M.; Pogl M.; Stamatakis A.; McElroy D.P.; Ziegler S.I. Rafecas, M.; Mosler: Use of a monte carlo-based probability matrix for 3-d iterative reconstruction of madpet-ii data. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 51. évf. (2004), 2597–2605. p. ISSN 0018-9499,1558-1578. URL <http://doi.org/10.1109/tns.2004.834827>.
- [19] L. A. Shepp–Y. Vardi: Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1. évf. (1982. Oct) 2. sz., 113–122. p.
- [20] D. F. Swinehart: The Beer-Lambert Law. *Journal of Chemical Education*, 39. évf. (1962) 7. sz., 333. p. URL <https://doi.org/10.1021/ed039p333>.
- [21] Istvan Szanda–Jane Mackewn–Gergely Patay–Peter Major–Kavitha Sunassee–Gregory E. Mullen–Gabor Nemeth–York Haemisch–Philip J. Blower–Paul K. Marsden: National electrical manufacturers association nu-4 performance evaluation of the pet component of the nanopet/ct preclinical pet/ct scanner. *Journal of Nuclear Medicine*, 52. évf. (2011) 11. sz., 1741–1747. p.
URL <http://jnm.snmjournals.org/content/52/11/1741.abstract>.
- [22] L. Szirmay-Kalos: *Monte-Carlo Methods in Global Illumination — Photo-realistic Rendering with Randomization*. Saarbrücken, 2008, VDM, Verlag Dr. Müller.
- [23] L. Szirmay-Kalos–M. Magdics–B. Tóth: Multiple importance sampling for PET. *IEEE Trans Med Imaging*, 33. évf. (2014) 4. sz., 970–978. p.
- [24] L. Szirmay-Kalos–M. Magdics–B. Tóth–T. Bükki: Averaging and Metropolis iterations for positron emission tomography. *IEEE Trans Med Imaging*, 32. évf. (2013) 3. sz., 589–600. p.
- [25] L. Szirmay-Kalos–L. Szécsi: Deterministic importance sampling with error diffusion. *Computer Graphics Forum*, 28. évf. (2009) 4. sz., 1056–1064. p.

- [26] László Szirmay-Kalos – Ágota Kacsó – Milán Magdics – Balázs Tóth: Dynamic pet reconstruction on the gpu. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering and Computer Science*, 62. évf. (2018) 4. sz., 134–143. p.
URL <https://pp.bme.hu/eecs/article/view/11739>.
- [27] László Szirmay-Kalos – László Szécsi – Anton Penzov: Importance sampling with Floyd-Steinberg halftoning. In *Eurographics 09, Short papers* (konferenciaanyag). 2009.
- [28] G. Zeng – G. Gullberg: Unmatched projector/backprojector pairs in an iterative reconstruction algorithm. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19. évf. (2000) 5. sz., 548–555. p.