



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Irányítástechnika és Informatika Tanszék

Szörfi Jázmin

**N-OLDALÚ BÉZIER FELÜLETEK
ALKALMAZÁSA A SZÁMÍTÓGÉPPEL
SEGÍTETT TERVEZÉSBEN**

KONZULENS

Dr. Várady Tamás

BUDAPEST, 2020

Tartalomjegyzék

Absztrakt	1
Abstract	3
1 Bevezetés	5
1.1 Szabadformájú testek	5
1.2 Kontrollpoliédereken alapuló technikák	5
1.2.1 Rekurzív felosztás	6
1.3 Általánosított Bézier-patchek	7
2 Duális struktúra	9
2.1 A felületgeneráló algoritmus blokkdiagramja.....	10
2.2 Bemenetipoliéder-megkötések	10
2.3 Duális görbék illesztése.....	11
2.3.1 Kontrollpontok meghatározása	11
2.3.2 Határológörbék egyenlete	12
2.4 A GB patch struktúra.....	14
2.4.1 Kontrollpontháló	14
2.4.2 Twist kontrollpontok előállítás.....	15
2.5 A domén meghatározása	16
2.6 Doménkoordináták	16
2.6.1 Wachspress-koordináták	17
2.6.2 Lokális koordináták.....	18
2.6.3 Távolságparaméter	18
2.6.4 Oldalparaméter	19
2.7 Bézier-ribbonok és a felület egyenlete	21
2.7.1 Korrekciós súlyfüggvények.....	21

2.7.2 A GB patch egyenlete	22
3 Topológiatartó struktúra.....	23
3.1 A felületgeneráló algoritmus blokkdiagramja.....	23
3.2 Bemenetipoliéder-megkötések	24
3.3 Határgörbék illesztése	25
3.3.1 Lapkák.....	25
3.3.2 Legjobb lapkasík	26
3.3.3 A görbe kontrollpontjai	28
3.4 A CGB patch struktúra	28
3.4.1 Kontrollpontháló	29
3.5 A domén meghatározása	29
3.6 A felület egyenlete	30
4 Szomszédos felületek sima összekapcsolódása.....	31
4.1 Folytonosságról általánosan	31
4.1.1 Görbék parametrikus folytonossága.....	31
4.1.2 Görbék geometriai folytonossága	31
4.1.3 Felületek parametrikus folytonossága	32
4.1.4 Felületek geometriai folytonossága	32
4.2 Folytonosság vizsgálata általában	32
4.2.1 Érintősík folytonossága (G^1)	32
4.2.2 Vizuális vizsgálat	33
4.3 A közös irányblendtechnika	33
4.4 A folytonosság vizsgálata esetünkben.....	35
4.4.1 Az alkalmazott irányblend	36
4.4.2 Approximatív irányblend	37
4.4.3 Interpoláló irányblend	38

4.4.4 Duális struktúra	38
4.4.5 Topológiatartó struktúra.....	40
5 Tesztrendszer	41
5.1 Poliéderek beolvasása.....	41
5.2 Megjelenítési módok	42
6 Teszteredmények.....	44
6.1 Egyszerű modellek	44
6.1.1 Konkáv lapok felosztása.....	45
6.1.2 Kontrollpoliéder módosítása	47
6.2 Paraméterváltoztatás.....	49
6.3 Irányblend.....	50
6.4 Összehasonlítás rekurzív felosztással készült modellekkel	52
6.5 Művészi modellek	53
7 Összefoglalás és további tervek.....	55
Irodalomjegyzék.....	56
Képforrásjegyzék	58

Absztrakt

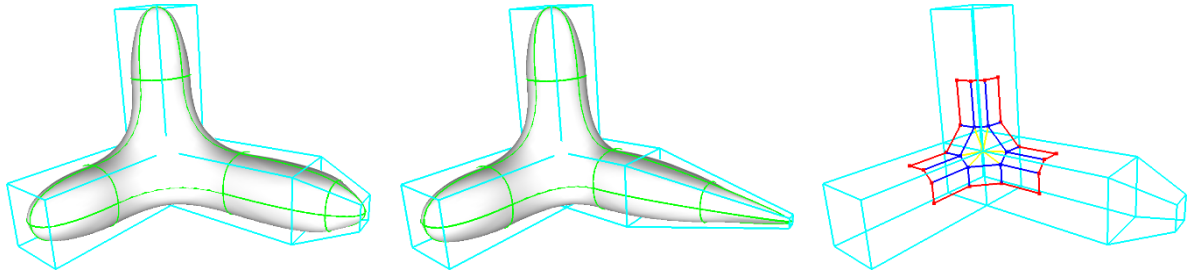
Az általános topológiájú szabadformájú objektumok modellezése a számítógéppel segített tervezés egy fontos területe. Szabadformájú felületeket nem tudunk modellezni egyszerű implicit formában adott felületekkel (síkok, hengerek), meghatározásukhoz paraméteres tenzorszorzat-felületeket szoktak használni. Egy jól ismert módszer, hogy kontrollpoliéderek segítségével indirekt módon hozunk létre komplex szabadformájú objektumokat. Az egyik legelterjedtebb módszer a rekurzív felosztásos eljárások családja, mely hatalmas szakirodalommal rendelkezik a klasszikus Doo–Sabin- és Catmull–Clark-féle felosztástól a legújabb modellezési technikákig[1]. Ezen módszerek egymásba ágyazott poliédersorozatokat generálnak, melyek tartanak egy sima határfelülethez, azaz approximatív reprezentációk.

Dolgozatomban egy alternatív felületreprezentációval foglalkozom, amely explicit módon származtatható a kontrollpoliéderekből; nem approximatív, hanem folytonos reprezentáció, így a felület jellemzőit és a felületi áthatásokat közvetlenül meg lehet határozni. A kontrollpoliéderekből szabadformájú görbehálókat származtatok, ezeket a görbéket interpolálják a felületet alkotó patchek. Két lehetséges algoritmust vizsgáltam: az első esetben a görbeháló topológiája megegyezik a kontrollpoliéderrel, míg a másodikban egy duális gráfot alkot. Mindkét esetben a patchek oldalainak száma függ a kontrollpoliéder lapjainak, illetve egy csúcsába összefutó éleinek számától, azaz nem kizárólag négyoldalú felületeket kapunk.

A szakirodalomban fellelhető klasszikus parametrikus felületreprezentációk négyoldalú doménnel és szabályos rácsba rendezett kontrollstruktúrával dolgoznak. Ezzel szemben a kutatásomban egy speciális felületkonstrukciót, az általánosított Bézier-patchet[2] használtam, amely n -oldalú poligonális domént és n -oldalú kontrollstruktúrát használ. Algoritmusokat fejlesztettem ki a fenti modellezési technikák megvalósítására; első lépésben görbehálót hozunk létre a kontrollpoliéder alapján, biztosítva a közös érintősíkokat a csúcsokban, majd szabályozzuk a görbe teltségét. Ezután meghatározzuk az n -oldalú felület belső kontrollpontjait úgy, hogy az oldalak mentén végig biztosítva legyen a közös érintősík, és ezáltal a folytonosság. Ehhez a twist kontrollpontok megfelelő beállítása szükséges, melynek technikai megoldása az ún. irányblend alkalmazása.

Az algoritmus működésének igazolására egy 3D-s programot fejlesztettem ki, amely egy adott kontrollpoliéder alapján előállítja a Bézier-patchek kontrollpontjait oly módon, hogy

azok simán összekapcsolódva egy komplex felületet alkossanak. Lehetőség van a konstrukció alapját képező geometriai jellemzők megjelenítésére. Különböző grafikus felületminőség-indikátorokkal lehet követni a kontrollpoliéder interaktív módosításával történő felületváltozásokat.



1. ábra Kontrollpoliéder alapján készült felületek és egy felületelem kontrollpontjai

Abstract

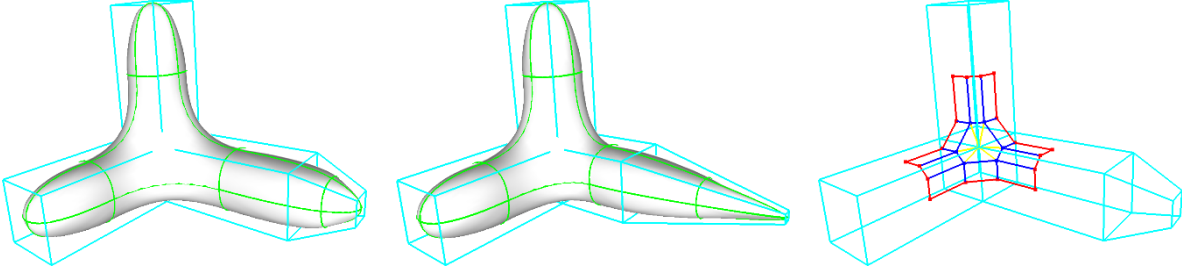
The modelling of general topology free-form objects is an important field of computer aided design. Free-form surfaces cannot be modelled with surfaces given by simple implicit formulae (such as planes or cylinders), and usually simple parametric tensor-product surfaces are used. A well-known method to indirectly define a complex free-form object is to use control polyhedra. One of the most popular approach is recursive subdivision. This methods have been deeply studied, see the classic Doo-Sabin and Catmull-Clark subdivisions and the newest modelling techniques[1]. A nested sequence of polyhedra is generated, which converge to a smooth limit surface, and thus approximations are produced.

The topic of this project is to develop an alternative surface representation, that can explicitly be derived from a control polyhedron. It is not an approximation, but a continuous representation, therefore the features and interferences of the surfaces can be computed directly. Free-form curve networks are derived from the control polyhedron, these boundary curves will be interpolated by the patches of the final surface. I examined two possible algorithms, in the first case the topology of the curve network is the same as the control polyhedron, while in the second it forms a dual graph. In both cases the number of sides of the patches is determined by the faces of the control polyhedron or the number of the edges that meet at the vertices. This means that we have to deal with non-four-sided surfaces as well.

The classic parametric surface representations in the literature work with four-sided domains and control structures arranged into a regular grid. In contrast, my work is based on a special surface construction: the generalized Bézier-patch[2], which uses an n -sided polygonal domain and an n -sided control structure. I have developed models for the implementation of the aforementioned algorithms. The first step is creating a curve network based on the control polyhedron, ensuring that there are common tangent planes at the vertices, then controlling the fullness of the curves. Next, we calculate the internal control points of the n -sided surface in a way that tangent plane continuity is guaranteed along the common boundary curves. An adequate setting of the twist control points is needed, for which the technical solution is the so-called direction blending.

To demonstrate the algorithm, I have developed a 3D program, which based a control polyhedron produces the control points of the Bézier patches in a way that they form a smoothly connected complex surface. The program can visualize the geometric features that make up the

construction. Different graphic surface quality indicators can be used to follow the changes of the surface that can be achieved by interactively modifying the control polyhedron.



1. figure Surfaces based on control polyhedra and the controlpoints of a single patch

1 Bevezetés

A 3D számítógépes geometriai eljárások segítségével létrehozott digitális modelleket számos területen alkalmazzák: formatervezésben, mérnöki számítások végrehajtásában, grafikus megjelenítésben, gyártásban és szimulációban, valamint az orvostudományban és a szórakoztatóiparban. A 3D-s objektumok három osztályát különböztetjük meg: (i) a természetből származó, (ii) a művészek által létrehozott és (iii) a mérnökök által tervezett objektumokat. Az utolsó osztály esetén a fő követelmény ugyan a funkcionalitás, de emellett esztétikai igények is fellépnek.



1.1. ábra Természetes objektum(1)



1.2. ábra Művészi objektum(1)



1.3. ábra Mérnöki objektum(1)

1.1 Szabadformájú testek

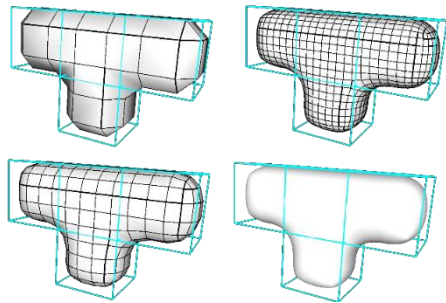
Az ún. szabadformájú testek olyan nem szabályos felületek által határolt testek, amelyeket nem tudunk könnyen leírni egyszerű implicit felületekkel (síkok, hengerek, kúpok), definiálásukhoz számos változó és kényszeregyenlet szükséges. Bármely fenti kategóriába tartozó objektum leírása során szükségünk lehet szabadformájú testek alkalmazására: például minden fogsor egyedi, nem írható le egy általános képlettel. Olyan testek létrehozásához, amiket szépnek, esztétikusnak vagy épp formatervezettnek látunk, elengedhetetlenek a szabadformájú felületek. Végezetül mérnöki alkalmazásokban is szükség lehet speciális kényszereknek eleget tevő szabadformájú felületekre.

1.2 Kontrollpoliédereken alapuló technikák

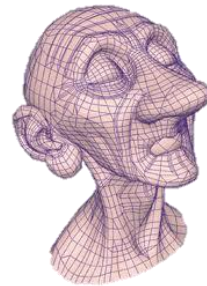
Az ilyen komplex geometriai modellek tervezésének egy jól ismert módszere a kontrollpoliéderek alkalmazása, amelyek indirekt módon határozzák meg a végső felületet. A kontrollpoliéderekből különböző matematikai modellek alkalmazásával lehet eljutni különböző sima, szépen ívelő szabadformájú objektumokig.

1.2.1 Rekurzív felosztás

Az egyik legelterjedtebb módszer a kontrollpoliéderek rekurzív felosztásán alapul. Ekkor egy poliédersorozat jön létre, amely egyre finomabb felosztásának köszönhetően egy sima határfelülethez tart, azaz ezek approximatív reprezentációk. Ez az eljárás népszerű a formatervezésében, az animációs ipar pedig teljes egészében erre épül. A következőkben röviden áttekintem a két klasszikus módszert, majd bemutatom az általam használt módszert.



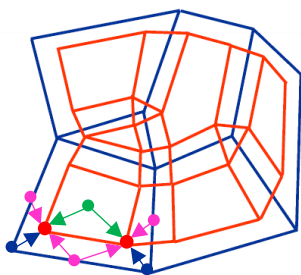
1.4. ábra Rekurzív felosztás során keletkező poliéderek



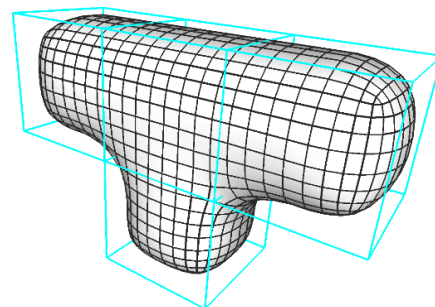
1.5. ábra Rekurzív felosztással készült arc(2)

1.2.1.1 Doo–Sabin-féle rekurzív felosztás

A Doo–Sabin-féle rekurzív felosztás[3] egy n -oldalú lapból egy zsugorított n -oldalú lapot képez, aminek csúcspontjait az eredeti csúcspontok lineáris kombinációjaként kapjuk. Egy k vegyértékű csúcstól egy k -oldalú lap keletkezik (a csúcshoz legközelebb eső új csúcsokból), az élekből pedig négyoldalú lapok jönnek létre.



1.6. ábra Doo–Sabin első iteráció(2)



1.7. ábra 3 iterációs Doo–Sabin felület

Az i -edik iterációban az első iterációnak megfelelő felosztást végezzük el, de nem a kontrollpoliédereken, hanem az $(i - 1)$ -edik iteráció során kapott felületen.

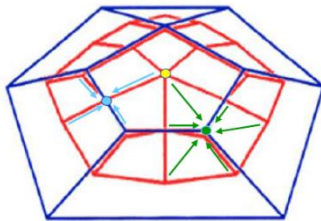
1.2.1.2 Catmull–Clark-féle rekurzív felosztás

A Catmull–Clark-féle rekurzív felosztásban[4] minden iterációban az előző iterációban kapott felület lapjaihoz, éleihez és csúcsaihoz rendelünk új pontokat. Az első iterációban ez az „előző” felület a kontrollpoliéder. A j -edik laphoz tartozó csúcs (lap-csúcs) az i -edik iterációban a j -edik lap középpontja: f_j^{i+1} . A j -edik élhez tartozó csúcs (él-csúcs) az i -edik iterációban az él végpontjainak és a szomszédos lapcsúcsoknak az átlaga: e_j^{i+1} . A j -edik csúcsához tartozó csúcs (csúcs-csúcs) az i -edik iterációban a csúcsot körbevevő n darab lap-csúcs, n darab élcsúcs és a csúcs súlyozott átlaga:

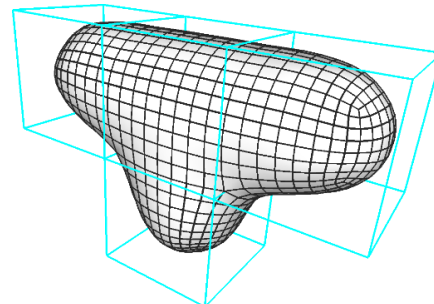
$$v_j^{i+1} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f_k^{i+1} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n e_k^{i+1} + \frac{n-3}{n} v_j^i. \quad 1.1$$

Az új lapokat egy csúcs-csúcs, az ide befutó élek közül a két szomszédoshoz tartozó él-csúcsok, és az ahhoz a laphoz tartozó lapcsúcsa adja, amelyiken mindkét él rajta van:

$$f^{i+1} \rightarrow e^{i+1} \rightarrow v^{i+1} \rightarrow e^{i+1}. \quad 1.2$$



1.8. ábra Catmull–Clark első iteráció(2)



1.9. ábra 3 iterációs Catmull–Clark felület

Így az első iteráció után a felület összes lapja négyoldalú lesz.

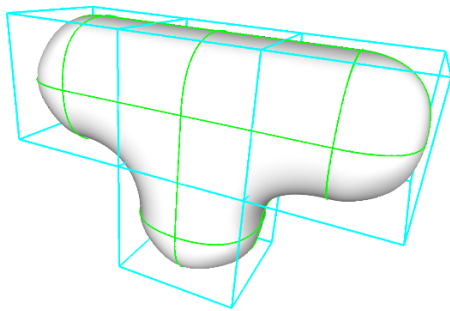
1.3 Általánosított Bézier-patchek

Dolgozatomban nem rekurzív módszerekkel foglalkozom, hanem egy kontrollpoliéderből explicit módon származtatott felületreprezentációval. Ily módon nem approximatív, hanem folytonos reprezentációt kapunk, ami lehetőséget ad a felület jellemzők és a felületi áthatások közvetlen meghatározására.

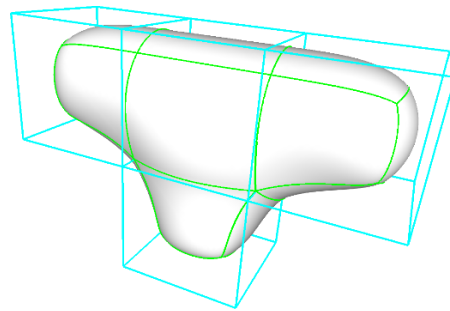
A kontrollpoliéderből egy szabadformájú görbehálót származtatok, mely meghatározza a felületet alkotó egyes felületdarabok (patchek) határait, egy adott patchet határgörbéinek interpolációjával kaphatunk meg. A határgörbék származtatására gyakorlatilag bármilyen

szabályrendszer kitalálhatunk, azonban, ha „jó” minőségű felületet szeretnénk kapni, a származtatásnak eleget kell tennie különböző követelményeknek. A patchek hézagmentes illeszkedéséhez a szomszédos patchek határpontjainak meg kell egyezniük. Az éles határátmenetek elkerüléséhez a határmenti normálvektorok egyezőségét kell biztosítani.

A görbeháló származtatásának két lehetséges algoritmusát vizsgáltam: az első esetben a kontrollpoliéderrel duális topológiát alkot a görbeháló, a másodikban megtartja annak topológiáját.



1.10. ábra Duális struktúrával kapott határgörbék és felület



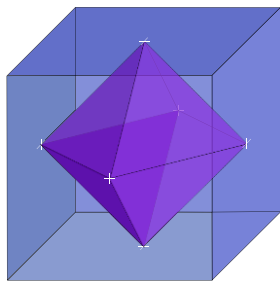
1.11. ábra Topológiatartó struktúrával kapott határgörbék és felület

A patchek oldalainak száma függ a kontrollpoliéder egy csúcsába összefutó élek számától, illetve a lapjainak oldalszámától, azaz nem kizárólag négyoldalú felületdarabokból áll össze a felület. A szakirodalomban fellelhető klasszikus parametrikus felületreprezentációk négyoldalú doménnel és szabályos rácsba rendezett kontrollstruktúrával dolgoznak. Ismert, hogy összetett szabadformájú testeket kizárólag négyoldalú felületekkel is lehet modellezni: a négyoldalú patcheket visszavágjuk (trimmelés), hogy ily módon illeszkedjenek a kívánt határgörbékre. De ez a megoldás nehézkes, mind a határgörbék pontos interpolációja, mind a sima kapcsolódás biztosítása vonatkozásában, ezért preferáljuk a pontos kapcsolódást biztosító n -oldalú felületreprezentációk használatát.

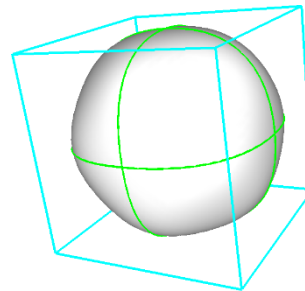
Kutatásomban az általánosított Bézier-patcheket[2] használtam, amely n -oldalú poligonális domént és n -oldalú kontrollstruktúrát használ. Ezen módszer másik előnye, hogy létezik kiterjesztése konkáv felületekre, és ez által csökkenteni lehet a kontrollpoliéder tervezésére vonatkozó korlátozásokat.

2 Duális struktúra

Ebben a fejezetben a duális topológián alapuló felületgeneráló algoritmust mutatom be. Egy poliéder duálisa egy olyan poliéder, melynek minden csúcsa megfeleltethető az eredeti poliéder egy lapjának, minden lapja pedig az eredeti egy csúcsának, minden éle pedig az őt keresztező eredeti élnek. A duális éleit fogjuk megfeleltetni a határgörbéknek, a lapjait pedig egy-egy patchnek.



2.1. ábra Kocka és annak duálisa(3)



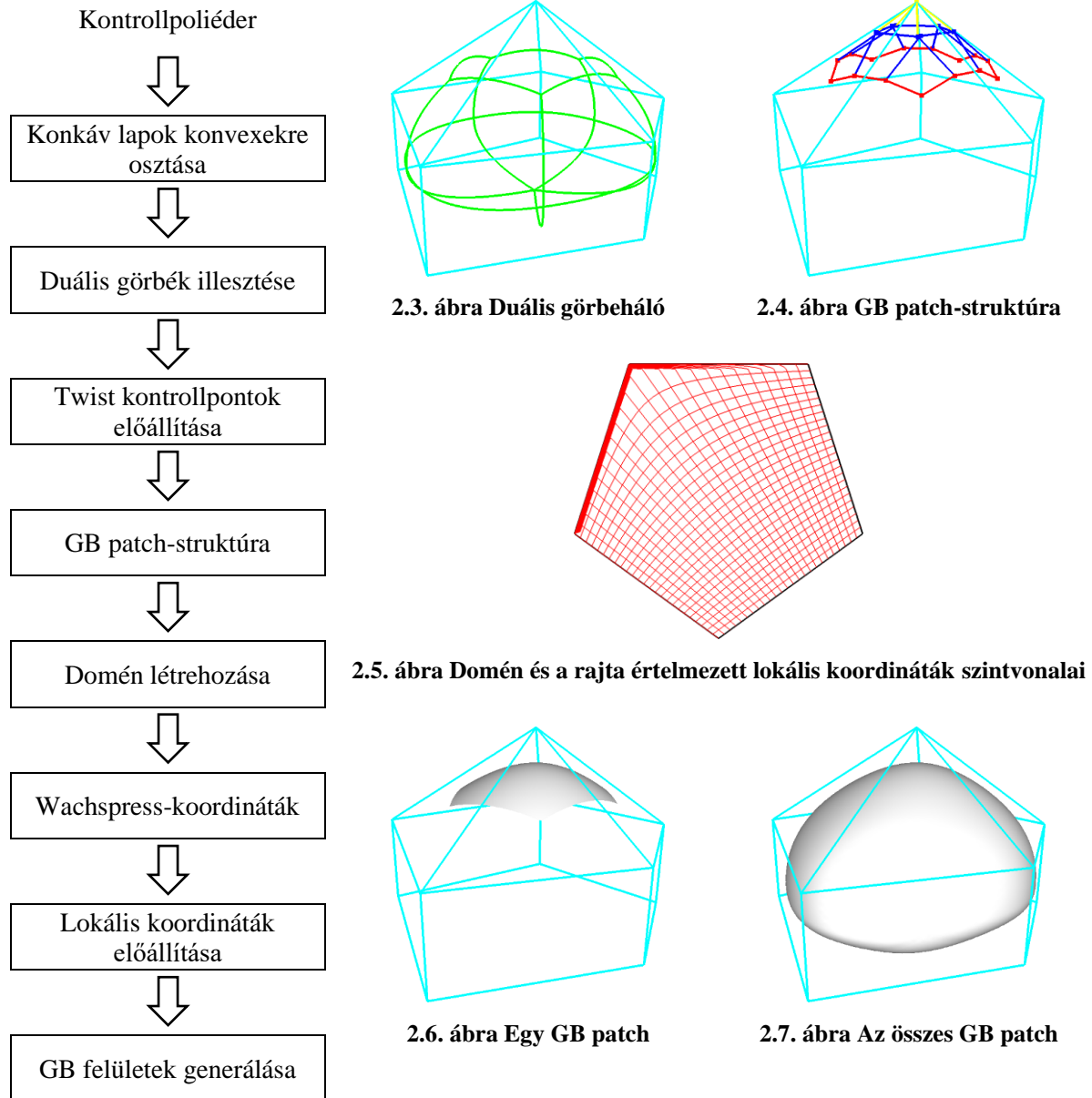
2.2. ábra Kocka duális görbehálója és az így kapott felület

A felületet patchenként határozom meg, majd az így kapott patchekből állítom össze a teljes felületet. A duális topológia miatt ez azzal egyenértékű, hogy a kontrollpoliéder egy-egy csúcsához tartozó patchet határozom meg.

2.1 A felületgeneráló algoritmus blokkdiagramja

Az algoritmust először egészében áttekintve mutatom be annak blokkdiagramjával, majd a következő fejezetekben kifejtem annak lépéseit.

Az algoritmus blokkdiagramja képekkel illusztrálva



2.2 Bemenetipoliéder-megkötések

Az algoritmus bemenete egy kontrollpoliéder, melynek segítségével szeretnénk meghatározni egy szabadformájú testet. A használt algoritmus konkáv lapokra nem alkalmazható, ezért előfeldolgozásként el kell távolítani a nem konvex lapokat. Ezt a konkáv lapok konvex lapokra való bontásával valósítottam meg, egyelőre manuálisan. Egy ilyen

felosztás nem egyértelmű, ráadásul egy adott kontrollpoliéder különböző felosztásaihoz különböző felületek fognak generálódni, erre példák láthatóak a 6. fejezetben.

2.3 Duális görbék illesztése

Egy adott C_C kontrollpoliéder csúcshoz tartozó patch határgörbéit a csúcspan találkozó lapközepponok összekötésével kapjuk (megfelelően a duális szemléletnek). Ezen összekötést harmadfokú Bézier-görbékkel végeztem el, ehhez meg kell határozni a görbét meghatározó kontrollponokokat, majd meg kell adni az egyenletet, ami meghatározza a görbe ponjtait a kontrollponok alapján.

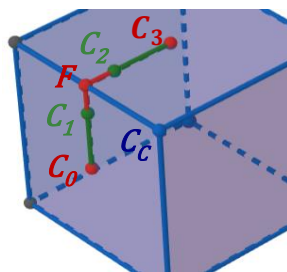
2.3.1 Kontrollponok meghatározása

Egy harmadfokú Bézier-görbe 4 kontrollponnal (C_0, C_1, C_2, C_3) rendelkezik. A két végponot (C_0, C_3) a szomszédos lapközepponok adják, a j -edik lap közepponjtját csúcspanak (P_i^j) súlyozott átlagaként kapjuk:

$$C_0 = \frac{\sum_i P_i^j}{n}. \quad 2.1$$

A belső határkontrollponok (C_1, C_2) a lapközepponok (C_0, C_3) és a határgörbét keresztező él felezőponjtjának (F) konvex kombinációjaként kapjuk. Mivel a Bézier-görbe induló tangensének irányát és nagyságát az első 2 kontrollponja határozza meg, így a görbe telítettséget állíthatjuk a konvex kombináció súlyainak változtatásával. Ha κ a lapközepponthoz tartozó súly, a kontrollponok az alábbi képlet szerint kapjuk:

$$C_1 = \kappa C_0 + (1 - \kappa)F \quad C_2 = \kappa C_1 + (1 - \kappa)F \quad 2.2$$



2.8. ábra Kontrollponok két lap határán, $\kappa = \frac{1}{3}$ (*)

2.3.2 Határológörbék egyenlete

Egy n -edfokú Bézier-görbét $(n + 1)$ kontrollpont $(\mathbf{C}_0, \dots, \mathbf{C}_n)$ és egy $t \in [0; 1]$ paraméter segítségével adhatunk meg. A t paraméterértékhez tartozó görbepont a kontrollpontok egy lineáris kombinációja, ahol a súlyok a Bernstein-függvények t -nél felvett értékei.

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{C}_i B_i^n(t) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 2.3$$

ahol \mathbf{C}_i az i -edik kontrollpont, $B_i^n(t)$ pedig a hozzátartozó súly, vagyis az i -edik n -ed fokú Bernstein-függvény.

2.3.2.1 Bernstein-függvény

A k -adik n -ed fokú Bernstein-függvény definíció szerint a következő:

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad 2.4$$

ahol $\binom{n}{k}$ a binomiális együttható, mely a következőképp számolható:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad 2.5$$

A Bernstein-függvény minden t paraméterértékre nem negatív értéket vesz fel.

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{\underbrace{i!(n-i)!}_{>0}} \underbrace{(1-t)^{n-i}}_{\geq 0} \underbrace{t^i}_{\geq 0} \geq 0 \quad n \in \mathbb{Z}^+; i = 0, \dots, n; 0 \leq t \leq 1 \quad 2.6$$

Ha összegezzük egy adott t paraméterértékre az n -ed fokú Bernstein-polinomokat, akkor 1-et kapunk (a binomiális tétel alapján).

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = ((1-t) + t)^n = 1 \quad 2.7$$

2.3.2.2 Bézier-görbe tulajdonságai

Tehát a kontrollpontokhoz rendelt súlyok nem negatívak, és összegük 1, így a kontrollpontok egy konvex kombinációját kapjuk, vagyis a Bézier-görbék affin invariánsak. Azaz ugyanazt a görbét kapjuk, ha előbb a kontrollpontokon hajtunk végre affin transzformációkat, majd kiszámoljuk a görbét, mintha először a görbe pontjait számolnánk ki, majd annak pontjaira alkalmaznánk az affin transzformációkat.

A Bézier-görbe approximációs görbe, azaz csak közelíti, nem érinti a kontrollpontokat (ellentétben mondjuk a Lagrange-interpolációval). A $t = 0$ és $t = 1$, az összsúly -azaz 1 - az egyik szélső kontrollpontba esik, míg a többi pont súlya 0.

$$r(0) = \underbrace{C_0 \binom{n}{0} \underbrace{(1-0)^{n-0}}_1 \underbrace{0^0}_1}_{1} + \dots + \underbrace{C_i \binom{n}{i} (1-0)^{n-i} \underbrace{0^i}_0}_{0} + \dots = C_0 \quad 2.8$$

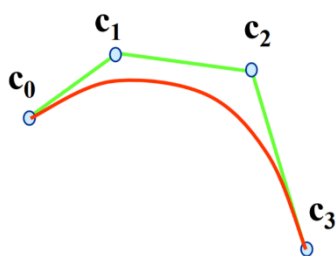
$$r(1) = \dots + \underbrace{C_i \binom{n}{i} \underbrace{(1-1)^{n-i}}_0 1^i}_{0} + \dots + \underbrace{C_n \binom{n}{n} \underbrace{(1-1)^{n-n}}_{0^0} \underbrace{1^n}_1}_{1} = C_n \quad 2.9$$

Így a görbe kezdő és végpontja megegyezik az első, illetve utolsó kontrollponttal, a többi pontban pedig a kontrollpontok konvex burkán belül található.

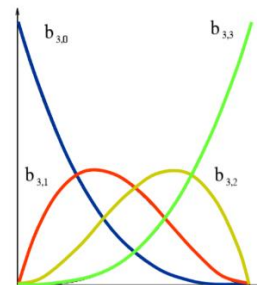
2.3.2.3 A harmadfokú Bézier-görbe

Munkám során harmadfokú Bézier-görbével ($n = 3$) dolgoztam (melyhez a már fent meghatározott 4 kontrollpont tartozik), ennek alakja 2.3 egyenlet alapján:

$$r(t) = C_0(1-t)^3 + C_1 3(1-t)^2 t + C_2 3(1-t)t^2 + C_3 t^3. \quad 2.10$$



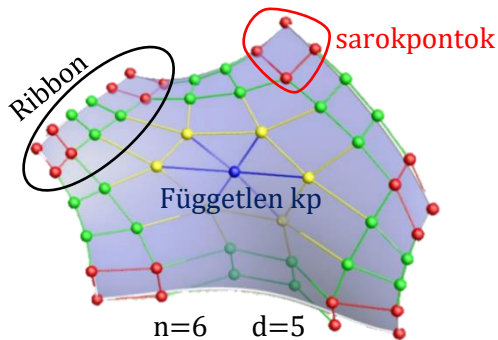
2.9. ábra Kontrollpontok és görbe(4)



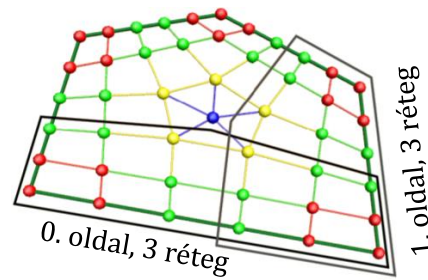
2.10. ábra A harmadfokú Bézier-görbe súlyfüggvényei(4)

2.4 A GB patch struktúra

A Generalized Bézier patch (GB patch) egy általános n -oldalú felületkonstrukció, ahol n nem szükségszerűen 4. Minden patchhez egy összefüggő kontrollpontháló tartozik, melynek fokszáma $d \geq 3$, azaz minden oldalhoz $d + 1$ kontrollpontból álló kontrollpontosorok tartoznak. A rétegek (layerek) az oldalakhoz tartozó kontrollpontosorok, melyek száma a következőképp határozható meg: $l = \lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor$, mivel $(d + 1)$ kontrollpont van egy sorban, és egy réteg maximum a kontrollpontosorok feléig nyúlhat be. Az oldalakhoz tartozó első két kontrollpontosort Bézier-ribbonnak nevezzük. A háléhoz tartozik egy középső kontrollpont, ami független a ribbonoktól, pozíciójának változtatásával befolyásolhatjuk a patch közepének teltségét.



2.11. ábra GB patch kontrollpontjai(5)



2.12. ábra GB patch oldalak és rétegek(5)

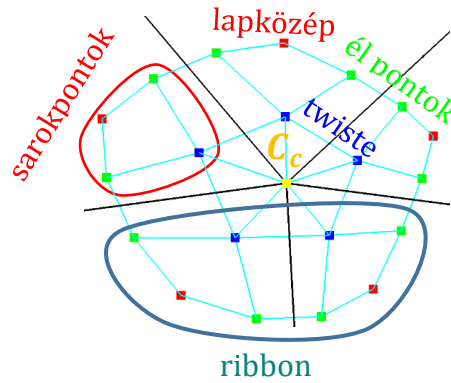
A kontrollpontstruktúra jelentése:

- sarokkontrollpontok (pirosak): az i -edik és az $(i + 1)$ -edik oldalhoz is tartoznak
- ribbon kontrollpontok (zöldek): csak az i -edik oldalhoz tartoznak
- belső kontrollpontok (sárgák): fokszámemeléssel keletkeznek
- középső kontrollpont (kék): csak a felület belsejére hat

2.4.1 Kontrollpontháló

A kontrollháló egy oldalához 2 réteg tartozik harmadfokú Bézier-felület esetén, melyből az elsőt a már bemutatott határgörbe-kontrollpontok adják. A 2. sor szélső kontrollpontjait a közös külső sarokpontok adják, azaz meghatározottak a szomszédos oldalak határgörbepontjai által. A 2. sorhoz még oldalanként 2-2 kontrollpont hiányzik, az ún. twist kontrollpontok, amik meghatározzák a felület befelé irányuló görbületét.

Helyes megválasztásukkal biztosítani lehet a szomszédos patchek közti folytonos átmenetet, erre bővebben a 4. fejezetben térünk ki. A független kontrollháló-középpontra egy természetes választás – a duális topológiából adódóan – a patchez tartozó kontrollpoliéder-csúcs (C_c).



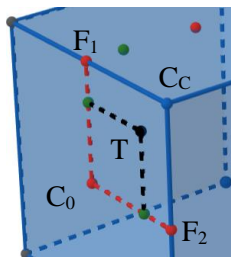
2.13. ábra GB kontrollháló és a független középpont ($n = 5, d = 3$)

A Bézier-felület (a Bézier-görbéhez hasonlóan) a kontrollháló konvex burkán belül képez felületet. Mivel a duális konstrukcióban minden kontrollpont a kontrollpoliéder valamely lapjára illeszkedik, így a végső felület a kontrollpoliéder konvex burkán belül marad.

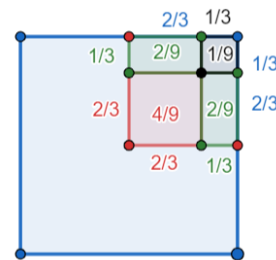
2.4.2 Twist kontrollpontok előállítása

Első közelítésben (más megközelítések a 4. fejezetben) a twist kontrollpontokat a lapközéppont, az élfelezők és a középponti csúcs konvex kombinációja adja.

$$T = \kappa^2 C_0 + \kappa(1 - \kappa)F_1 + \kappa(1 - \kappa)F_2 + (1 - \kappa)^2 C_c \quad 2.11$$



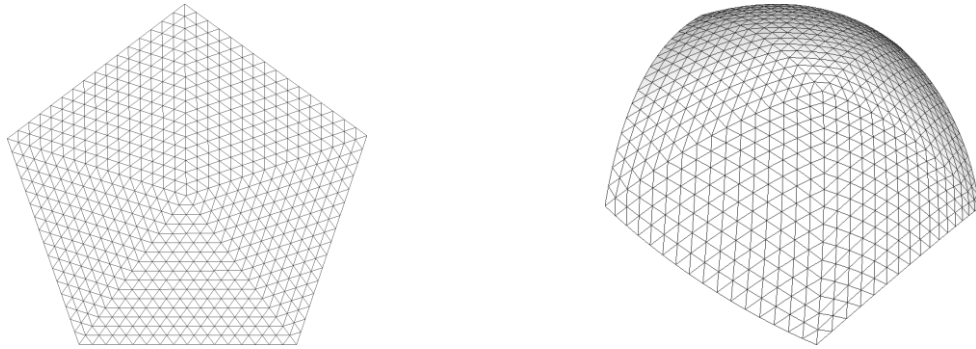
2.14. ábra Twist kontrollpont meghatározása, $\kappa = \frac{1}{3}$ (*)



2.15. ábra Konvex kombináció súlyainak szemléltetése, $\kappa = \frac{1}{3}$ (*)

2.5 A domén meghatározása

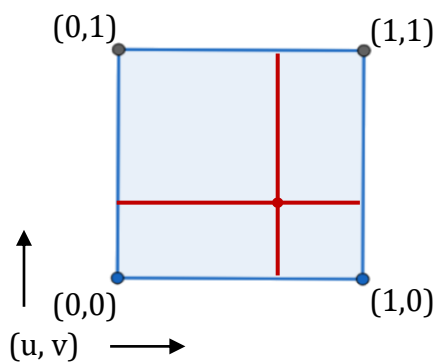
Minden GB patchhez tartozik egy síkbeli n -oldalú domén poligon. A domén tetszőleges pontja egy 3 dimenziós felületpontra képződik le a doménon értelmezett lokális koordináták és a Bernstein-polinomok segítségével.



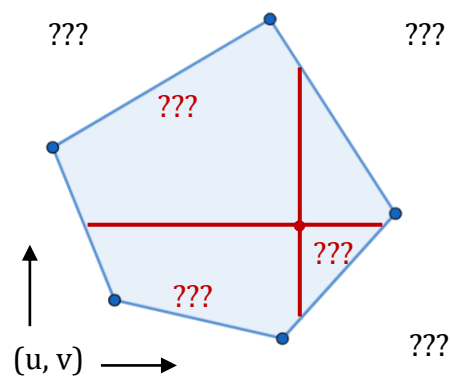
2.16. ábra A 2D domén és az abból kapott 3D felület

2.6 Doménkoordináták

A klasszikus négyoldalú felületekhez tartozó négyoldalú doméneket könnyű felparaméterezni egy vízszintes és egy függőleges paraméterrel. Ez a paraméterezés olyan természetes, hogy talán el se gondoljuk a jelentésén. A célunk a felületet annak határaiból interpolálni, azaz minden doménpontnál arra vagyunk kíváncsiak, hogy az egyes oldalak milyen súllyal befolyásolják az adott pontot. Erre n oldal esetén a hagyományos koordinátázás nem lesz alkalmas.



2.17. ábra Négyoldalú domén, egyértelmű paraméterezés



2.18. ábra Ötoldalú domén, nem egyértelmű paraméterezés

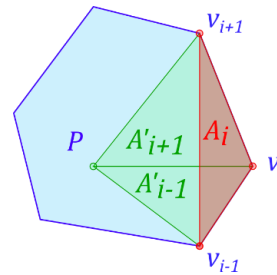
2.6.1 Wachspress-koordináták

A Wachspress-koordináták[5] általánosítják a baricentrikus koordinátákat tetszőleges konvex poligonra. Ezek segítségével egy n -oldalú poligon minden belső pontja megadható a poligon csúcsainak súlyozott kombinációjaként. A \mathbf{v}_i csúcshoz tartozó súly a következő:

$$\lambda_i(\mathbf{P}) = \frac{A(\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})}{A(\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{P})A(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{P})} \quad 2.12$$

ahol $A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ jelöli a $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ pontok által meghatározott háromszög előjeles területét; és $\mathbf{q}_k = (x_k, y_k)$.

$$A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) := \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \quad 2.13$$



2.19. ábra Wachspress-koordináta számítása

Minden koordináta pozitív:

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad 2.14$$

A súlyok összege 1:

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1. \quad 2.15$$

Az eredeti koordináták egyértelműen visszaállíthatók belőlük, ehhez a koordinátákkal súlyozott konvex kombinációját kell vennünk a csúcsoknak.

$$(u, v) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \quad 2.16$$

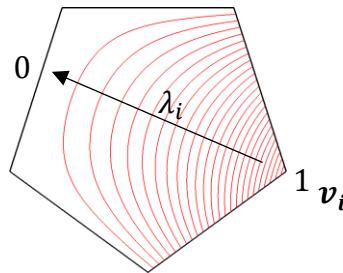
Az i -edik koordináta (\mathbf{v}_i súlya) \mathbf{v}_i -ben 1, míg a többi csúcsban 0, a közbenső pontokban pedig folytonos a leképezés.

$$\lambda_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{Kronecker} - \text{delta}) \quad 2.17$$

Ahogy a P pont távolodik a v_i csúcstól, úgy csökken a λ_i koordináta értéke és a v_i csúcs egyre kevésbé vesz részt a P pont meghatározásában.

$$\text{Ha } P \in e \text{ és } v_i \notin e \rightarrow \lambda_i(P) = 0, \quad 2.18$$

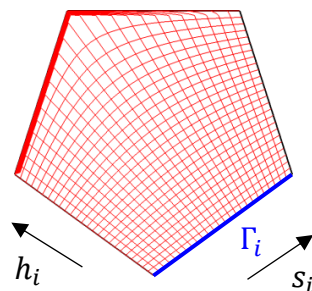
mivel a távoli oldalakon teljes mértékben az oldal két végpontja határozza meg a pont elhelyezkedését.



2.20. ábra λ_i szintvonalak

2.6.2 Lokális koordináták

Az Wachspress-koordináták segítségével már ki tudjuk fejezni a domén pontjait annak csúcaival. Ezek segítségével definiálunk egy oldal- (s_i) és egy távolság- (h_i) paramétert, ami már nem csúcsenként, hanem oldalként értelmezett, ezek oldalként egyfajta koordinátarácsként hálózák be a domént.



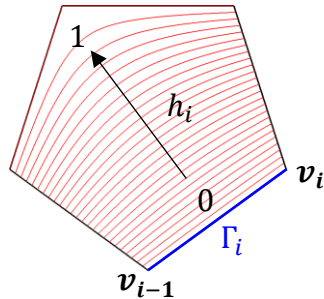
2.21. ábra Γ_i oldalhoz tartozó lokális koordinátarács

2.6.3 Távolságparaméter

A távolságparaméter (h_i) azt hivatott kifejezni, hogy a doménpont milyen messze található az i -edik oldaltól, azaz az oldal két csúcsa milyen súllyal játszik szerepet a doménpont meghatározásában az összsúlyhoz – ami ugye 1 – képest. Ez képlettel kifejezve:

$$h_i = 1 - \lambda_{i-1} - \lambda_i. \quad 2.19$$

A h_i értéke az i -edik oldalon 0, mivel ekkor minden súly az él két végpontja közt oszlik meg (minimális a pont távolsága az oldaltól). A távoli oldalakon ($\Gamma_j : j \neq i - 1, i, i + 1$) h_i értéke 1, mivel egyetlen súly sem esik az él két végpontjára (maximális a pont távolsága az oldaltól).



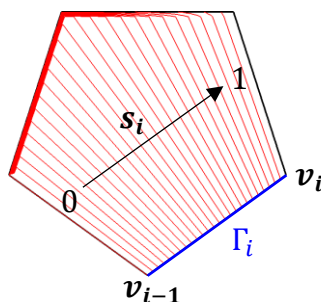
2.22. ábra h_i szintvonalak

2.6.4 Oldalparaméter

Az oldalparaméter (s_i) a doménpont elhelyezkedésének arányát adja meg az oldal 2 végpontjához képest, úgyis mondhatnánk, mennyire esik a doménpont inkább az egyik csúcs felé:

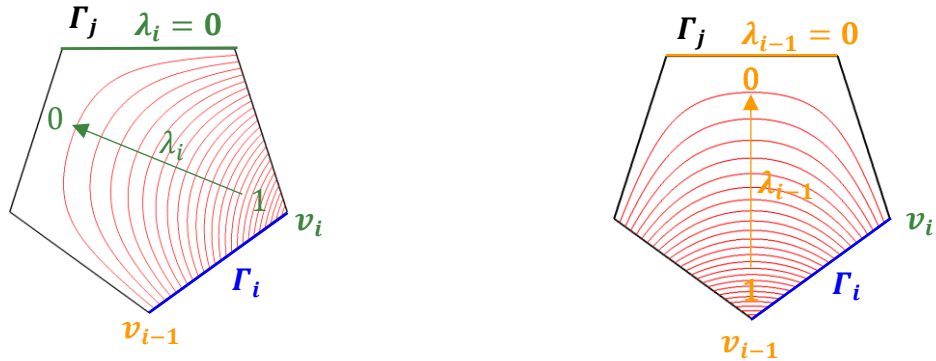
$$s_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1} + \lambda_i}. \quad 2.20$$

Az i -edik oldalon lineárisan növekszik $0 \rightarrow 1$ között, ahogy a v_{i-1} csúcsból a v_i csúcsba kerülnek a súlyok. Minden olyan doménpont esetén, ahol a Wachspress-súlyok aránya megegyezik egymással, egy egyenest kapunk, amin s_i konstans.



2.23. ábra s_i szintvonalak

A távoli oldalakon (Γ_j , ahol $j \neq i - 1, i, i + 1$) az s_i nem értelmezhető a 2.20 képlet alapján, mivel $\lambda_i = \lambda_{i-1} = 0$ a Γ_j oldalon (Γ_j -re eső doménpont esetén csak λ_{j-1} és λ_j lehet nem 0), így nullával kéne osztanunk.



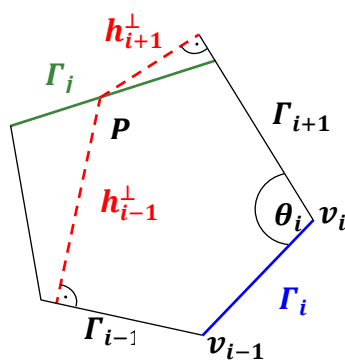
$$s_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1} + \lambda_i} = \frac{0}{0 + 0} = ?$$

2.24. ábra s_i nem értelmezhető a távoli oldalakon

A távoli oldalakra alkalmazandó képlet a következő:

$$s_i(\mathbf{P}) = \frac{\sin(\theta_i) h_{i-1}^\perp}{\sin(\theta_i) h_{i-1}^\perp + \sin(\theta_i) h_{i+1}^\perp}, \quad 2.21$$

ahol h_i^\perp a P pont Γ_i oldaltól vett merőleges távolsága, θ_i pedig a domén poligon v_i csúcsában lévő szöge.



2.25. ábra $\theta_i, h_{i-1}^\perp, h_{i+1}^\perp$ értelmezése

2.7 Bézier-ribbonok és a felület egyenlete

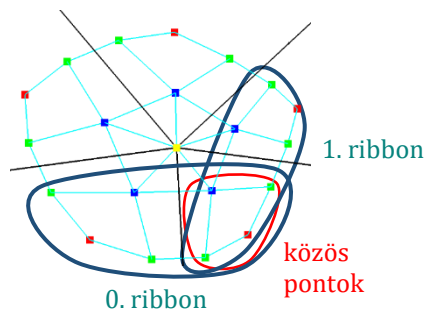
Adott az n -oldalú doménünk, rajta a lokális koordináták és a kontrollponthálónk, ezek felhasználásával meg lehet adni a felület egyenletét. A patch a határgörbét interpolálni fogja, az i -edik ribbon hozzájárulása a felülethez:

$$\mathbf{Rib}_i(s_i, h_i) = \sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^{l-1} \mathbf{C}_{j,k}^{d,i} \mu_{j,k}^i B_{j,k}^d(s_i, h_i), \quad 2.22$$

ahol d a fokszám, l a layerek száma, $\mathbf{C}_{j,k}^{d,i}$ a j -edik kontrollpontja a k -edik layernek, az i -edik oldalon, $B_{j,k}^d$ jelöli az s_i, h_i szerinti Bernstein-függvényeket, $\mu_{j,k}^i$ egy korrekciós súlyfüggvény.

2.7.1 Korrekciós súlyfüggvények

Páros fokszám esetén az i -edik oldal középső kontrollpontjai ($\mathbf{C}_{j,k}^i, j = \frac{d}{2}$) csak az i ribbon egyenletében szerepelnek, azaz csak az i -edik oldalt befolyásolják, míg a szélső kontrollpontok az $(i - 1)$ -edik $[\mathbf{C}_{j,k}^i, j < \frac{d}{2}]$ és $(i + 1)$ -edik $[\mathbf{C}_{j,k}^i, j > \frac{d}{2}]$ oldalt is befolyásolják. Páratlan fokszám esetén minden kontrollpont két oldal kialakításában is részt vesz. Így a végleges egyenletben ugyanaz a kontrollpont (különböző indexeléssel) a Bernstein-függvények súlyozott átlagával van megszorozva.



2.26. ábra Több ribbonon szereplő kontrollpontok

Annak biztosítására, hogy az i -edik oldalt csak a saját kontrollpontjai határozzák meg – azaz független legyen a szomszédos és távoli oldalaktól –, korrekciós súlyfüggvényt vezetünk be az alábbiak szerint:

$$\mu_{j,k}^i = \begin{cases} \alpha_i = \frac{h_{i-1}^2}{h_{i-1}^2 + h_i^2} & j < 2 \\ 1 & \text{egyébként} \\ \beta_i = \frac{h_{i+1}^2}{h_{i+1}^2 + h_i^2} & j > d - 2 \end{cases} \quad 2.23$$

Mivel h_i az i -edik oldalon mindig 0 („az i -edik oldal távolsága az i -edik oldaltól 0”), ezért az i -edik oldal kontrollpontjaira a korrekció 1, azaz egyszerűen a Bernstein-függvénnyel súlyozódnak. A nem i -edik oldalra eső kontrollpontokra pedig az $(i - 1)$ -edik és i -edik oldaltól vett „távolság” (h) arányában súlyoz $j < 2$ pontok esetében. Hasonlóképp, $j > d - 2$ esetben csak az $(i + 1)$ -edik oldallal, így minél távolabb kerülünk az oldaltól, annál kevésbé befolyásolják a kontrollpontok az oldalhoz tartozó felületrészt.

2.7.2 A GB patch egyenlete

A felület egyenletét a ribbonegyenletek és egy központi tag összegeként kapjuk:

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{C}_C B_0(u, v) + \sum_{i=0}^n \mathbf{Rib}_i(s_i(u, v), h_i(u, v)). \quad 2.24$$

Ahol $\mathbf{S}(u, v)$ az (u, v) „hagyományos” koordinátákkal jelölt 2D-s doménponthoz tartozó 3D-s felületpont, n az oldalak száma, $s_i(u, v)$ az (u, v) doménponthoz tartozó i -edik oldalparaméter, $h_i(u, v)$ pedig ezen ponthoz tartozó i -edik távolságparaméter.

A központi tag a független középpont (ami egy ribbonhoz sem tartozik, a patch-hez tartozó kontrollpoliéder-csúcs) egy külön súlyfüggvénnyel súlyozva (B_0), ami biztosítja a kontrollpontok konvex kombinációját és ezáltal az affin invarianciát. A 2.25 egyenlet átrendezésével azt kapjuk, hogy minden (u, v) -re a kontrollpontok lineáris kombinációjában szereplő súlyok összege éppen 1-et ad.

$$B_0^d(u, v) = 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^{l-1} \mu_{j,k}^i B_{j,k}^d(s_i(u, v), h_i(u, v)). \quad 2.25$$

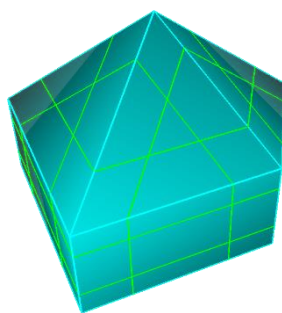
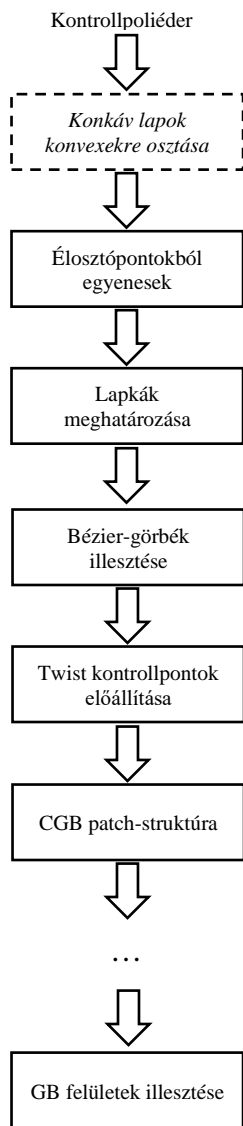
3 Topológiatartó struktúra

A duális struktúrával egy szép, természetes érzetet keltő felületet kapunk, a módszer hátránya, hogy a konkáv lapokat konvexekre kell osztani, illetve, hogy a lapok nem tartalmazhatnak lyukakat. Az n -oldalú Bézier-patchek módszere kiterjeszthető konkáv[6], illetve görbült lapokra[7] is, tehát ha adunk egy topológiatartó struktúrát egy konkáv poliéderhez, a fenti eljárást is ki lehet terjeszteni. Míg a duális struktúra adta magát, a topológiatartó struktúrát többféleképpen is el lehet készíteni.

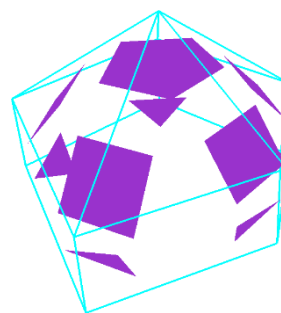
3.1 A felületgeneráló algoritmus blokkdiagramja

Jelen dolgozat egy megfelelő topológiatartó struktúra meghatározását és vizsgálatát fedi le, az ehhez tartozó konkáv GB patch (CGB) meghatározásának csak elméleti áttekintését adja meg. Az blokkdiagram (...) -tal jelölt része megegyezik a fenti eljárással, azaz továbbra is GB patchek határozzák meg a felületet.

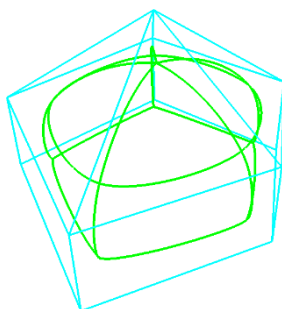
Az algoritmus blokkdiagramja képekkel illusztrálva



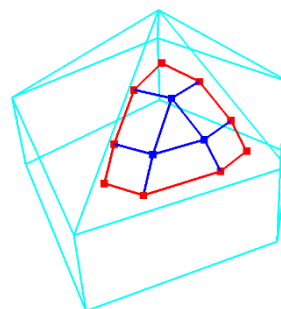
3.1 ábra Élosztó pontok alapján egyenesek



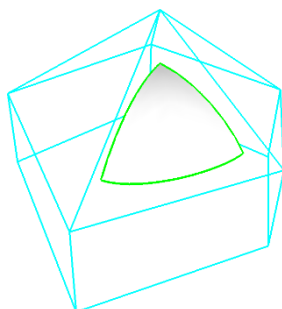
3.2 ábra Lapkák meghatározása



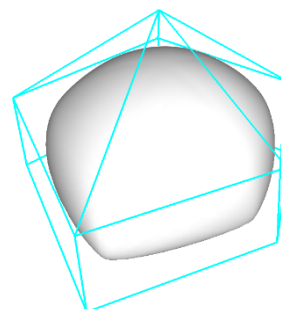
3.3 ábra Bézier-görbeháló



3.4 ábra CGB patch-struktúra



3.5 ábra Egy GB patch



3.6 ábra Az összes GB patch

3.2 Bemenetipoliéder-megkötések

Mivel a probléma akkor sem triviális, ha csak konvex lapjaink vannak, ezért továbbra is felosztásra kerülnek a konkáv lapok, tehát a bemeneti megkötések még megegyeznek a duális eset követelményeivel.

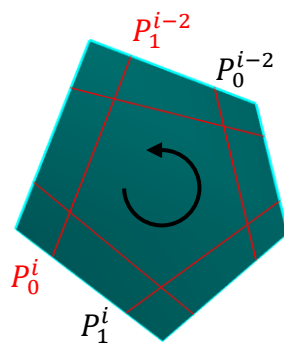
3.3 Határgörbék illesztése

A duális esethez hasonlóan itt is egy olyan patchet akarunk kapni, ami a határgörbéket interpolálja, és itt is harmadfokú Bézier-görbéket használok. Ez a struktúra megtartja a kontrollpoliéder topológiáját, azaz minden kontrollpoliéder laphoz tartozni fog egy azonos oldalszámú, görbékkel határolt lap, tehát a kontrollpoliéder élei és a görbék között egy-egy megfeleltetés van.

3.3.1 Lapkák

A kontrollpontok meghatározáshoz segédlapkákat használok, melyek „lekerekítik” a kontrollpoliédert: a konvex csúcsoknál levágnak a poliéderből, a konkávoknál hozzáadnak.

A lapkák meghatározásához először minden él végpontjából $\frac{1}{w}|e|$ távolságot lépek az élen befelé (ahol $|e|$ az adott él hossza), így két új pont keletkezik az élen. A felosztási arány (w) egy szabadon állítható paraméter mindaddig, amíg a keletkező pontok közelebb vannak a saját csúcsukhoz (ahonnan el lettek tolvá), tehát $w > 2$. Ez a feltétel azt is biztosítja, hogy a keletkező pontok az élre esnek, és nem esnek egybe a végpontokkal vagy egymással. Minden kontrollpoliéder lapon veszem a lap éleihez tartozó új pontokat, és összekötöm az „átellenes” új pontokkal. Ez azt jelenti, hogy egy élen a körüljárási irány szerinti első csúcsot az élet kettővel megelőző él második pontjával kötöm össze, így az osztóegyenesek kirajzolják a poliéder egy kicsinyített változatát.

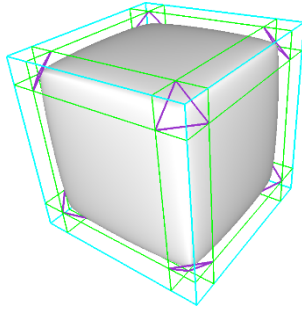


3.7 ábra Osztócsúcsok összekötése egy ötoldalú lapon

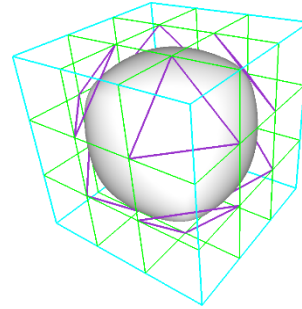
Minden kontrollpoliéder csúcsra összekötöm az azt körülvevő osztóegyenesez metszéspontokat. Így minden csúcshoz kapok egy oda befutó élszámmal azonos élszámú sokszöget, ezek lesznek a segédlapkák. Minél kisebb volt a w értéke, az adott csúcshoz annál távolabb történt a csonkolás/hozzáadás, a keletkező lapka annál jobban „besüllyedt” a

kontrollpoliéderbe konvex csúcs esetén (középpontja távolabb van a csúcstól), konkáv csúcs esetén pedig annál jobban kiemelkedik a kontrollpoliéderből. Innentől $\frac{1}{w}$ -re mint lapkamélységre hivatkozom.

Az alábbi ábrákon egy kocka alakú kontrollpoliéderből készült felületeket láthatunk és a segédlapkáikat. Kis lapkamélység esetén egy lekerekített kockához hasonló eredményt kapunk, míg nagy lapkamélység esetén egy gömbszerű testet.

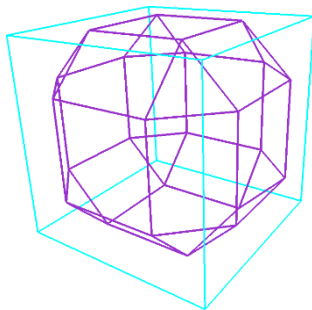


3.8 ábra Kis lapkamélység ($w = 7$)

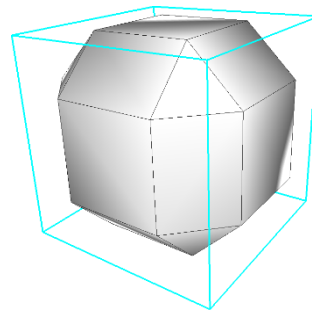


3.9 ábra Nagy lapkamélység ($w = 3$)

Ha a segédlapkák csúcsait összekötjük az élek mentén, illetve a kontrollpoliéder egy-egy lapjára esőket, a kapott konstrukció megfeleltethető a Doo–Sabin rekurzív felosztás első iterációjának eredményével.



3.10 ábra Lapkarendszer

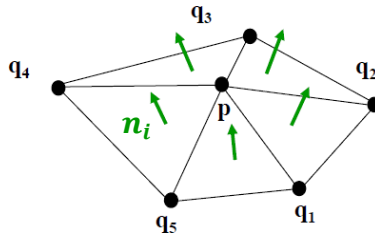


3.11 ábra Egy iterációs Doo–Sabin-felosztás

3.3.2 Legjobb lapkasík

Ha egy lapkának négyenél több oldala van, lehetséges, hogy a csúcsai nem esnek egy síkba, ekkor a középpontból az élfelezőkbe húzott egyenesek sem esnek egy síkba, így az induló tangensek sem. Tehát a csúcsban találkozó görbék folytonosan kapcsolódása sérül.

Négyenél több oldalú lapkák esetén meg kell határozni egy „legjobb síkot”, amit a lapka középpontja és egy becsült normálvektor fog megadni. A lapkát felosztjuk háromszögekre, meghatározzuk ezek normálvektorait az élk keresztmetszoroszatával.



3.12 ábra Lapka normálvektor becslése(6)

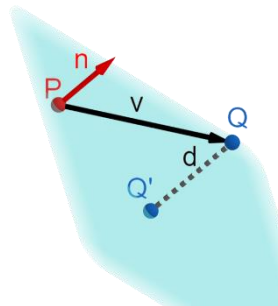
$$\mathbf{n}_i = (\mathbf{q}_i - \mathbf{p}) \times (\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{p}) \quad 3.1$$

A lapka legjobb normálvektorát (\mathbf{n}_p) ezen normálvektorok területarányosan súlyozott összege adja.

$$A = \frac{1}{2} \sum_i |\mathbf{n}_i| \quad 3.2$$

$$\mathbf{n}_p = \frac{1}{2A} \sum_i \mathbf{n}_i \quad 3.3$$

Az így kapott legjobb síkra levetítjük a lapka csúcsait, ezzel a vetítéssel lesz minimális az eredeti és vetített pontok közti eltérés (ezért a legjobb elnevezés). A vetítés során vesszük a vetítendő pont előjeles távolságát a síktól, majd ezzel a távolsággal eltoljuk a legjobb normálvektor mentén.



3.13 ábra Pont vetítése(*)

A távolság a normálvektor és a sík pontjából a vetítendő pontba mutató vektor skaláris szorzata:

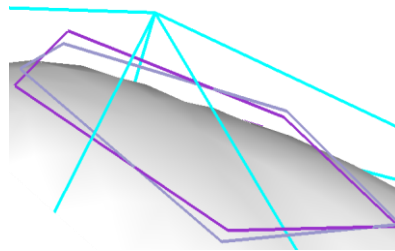
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{Q} - \mathbf{P} \\ d &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad 3.4$$

Mivel \mathbf{v} \mathbf{n} -re vett vetületének hossza:

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{n}|}. \quad 3.5$$

De $|\mathbf{n}| = 1$, mivel normálvektor. Az így kapott vetület előjeles, ezzel mindenféleképpen a lapka felé fogjuk eltolni a pontot:

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} - d\mathbf{n}. \quad 3.6$$



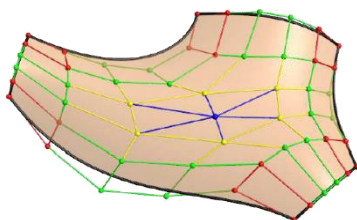
3.14 ábra Eredeti lapka (halványlila) és az új, simított lapka (sötétlila)

3.3.3 A görbe kontrollpontjai

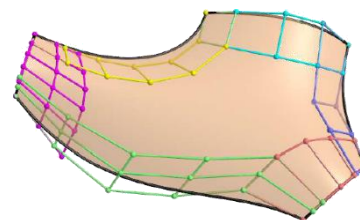
A határgörbék szélső kontrollpontjait a lapkaközepek adják, míg a belső kontrollpontjait a lapkák élfelezői. Tehát a lapkamélységgel a görbe indulásának mélységét és az indulótangenseket, és ezáltal a belső görbületet is állítani lehet.

3.4 A CGB patch struktúra

GB patch esetén minden patchet egy összefüggő kontrollpontstruktúra határozott meg, CGB esetén szabadabb a kontrollstruktúra: minden élhez a többi éltől független ribbon tartozik, a központi közös részt nem kell megkonstruálni. Az összefüggő struktúra elhagyása megnöveli a tervezési szabadságfokot, mivel így a ribbonoknak sem fokszámban, sem layerszámban nem kell megegyezniük.



3.15 ábra GB struktúra (összefüggő)(7)



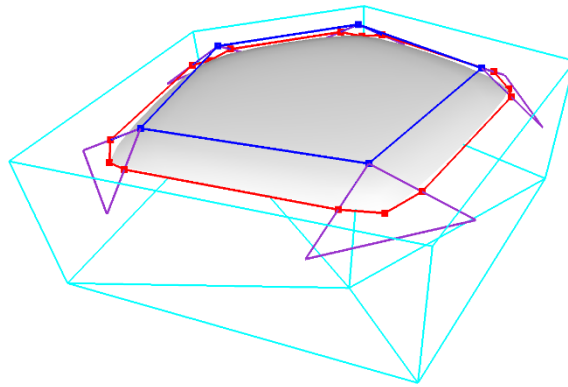
3.16 ábra Független ribbonok(7)

Lehetséges, hogy a GB patchhez hasonlóan egybeesnek a kontrollpontok, vagy a két ribbon csak a twist pontjában tér el, vagy csak a sarokpontban egyezik meg.

3.4.1 Kontrollpontháló

Az általam konstruált kontrollháló minden oldalon harmadfokú és 2 layerből áll, a szomszédos oldalak twist pontjaik közösek. A kontrollhálóban a második layerek szélső pontjai megegyeznek a már kiszámolt szomszédos első layerek kontrollpontjaival. A kapott háló lényegében hasonló szerkezetű, mint a korábbi GB kontrollháló, a központi pont kivételével.

A twistpontokat első megközelítésben (folytonossági megfontolások a 4. fejezetben) egyszerűen a lapkacsúcsokba választom. Így minden kontrollpont a lapka síkjába esik, ami konvex csúcsok esetén a kontrollpoliéderen belül helyezkedik el, így itt is teljesül, hogy a felület a kontrollpoliéder konvex burkán belül van. (Konkáv csúcsoknál kívül van a lapka, így a felület is, de ez az, amit el is várunk egy konkáv él lekerekítésénél, és a poliéder konvex burkán így is belül maradunk.)



3.17. ábra Kontrollháló és segédlapkák

3.5 A domén meghatározása

A konkáv GB patch módszer a jobb felületminőség érdekében konkáv doménnel dolgozik, és egy módszert is ad görbehálóból olyan domén származtatására, amivel a felületnek a legmegfelelőbb paraméterezést tudjuk biztosítani. Konkáv poligonon nem értelmezettek a Wachspress-koordináták, de helyettesíthetőek harmonikus koordinátákkal, ezekből a lokális paraméterek származtatása a konvex esettel azonosan történik.

A jelen dolgozatban bemutatott algoritmus még konvex lapokkal dolgozik, és az esetlegesen előforduló konkáv lapokat fel kell osztani. Jövőbeli kutatásaim egyik legfontosabb célja, hogy áttérjek valódi konkáv doménekre és a harmonikus koordináták használatára.

3.6 A felület egyenlete

Az i -edik ribbon hozzájárulása a felülethez hasonló, annyi különbséggel, hogy a layer és fokszám minden ribbonra más lehet. Esetemben azonban ez megegyezett a konvex esettel. A felületet – a GB patch-csel ellentétben – csak a ribbonok határozzák meg, nincs egy központi kontrollpont. A konvex kombináció tulajdonságot így nem tudjuk a központi kontrollponthoz rendelt súllyal biztosítani, helyette egyszerűen leosztjuk az egyenletet az összsúllyal.

$$B_{sum}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{d_i} \sum_{k=0}^{l_i-1} \mu_{j,k}^i B_{j,k}^{d_i}(s_i, h_i) \quad 3.7$$

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{1}{B_{sum}(u, v)} \sum_{i=0}^n \mathbf{R}_i(s_i, h_i) \quad 3.8$$

4 Szomszédos felületek sima összekapcsolódása

Az előző fejezetekben megadtam a twist kontrollpontok két lehetséges meghatározását, ebben a fejezetben pedig kifejtem, hogyan lehet egy felület folytonosságát meghatározni, és ezt hogyan befolyásolja a patchek kontrollstruktúrája.

4.1 Folytonosságról általánosan

Célunk, hogy egy olyan szabadformájú testet kapjunk, melynek felületdarabjai simán illeszkednek egymáshoz. Ahhoz, hogy a felületek illeszkedését meg tudjuk határozni, először a görbék folytonosságát vizsgáljuk meg.

4.1.1 Görbék parametrikus folytonossága

A folytonosság egy matematikai megfogalmazása a C parametrikus folytonosság[8]. Az $\mathbf{r}(t)$ görbe t_0 -ban C^n folytonosan kapcsolódik $\mathbf{p}(s)$ görbéhez s_0 -ban, ha az n -edik deriváltig megegyeznek, azaz:

$$\left. \frac{d^i}{dt^i} \mathbf{r}(t) \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d^i}{ds^i} \mathbf{p}(s) \right|_{s=s_0} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad 4.1$$

A C^0 folytonosság tehát a nulladrendű deriváltak megegyezését jelenti, azaz a két görbének közösek a pontjai.

4.1.2 Görbék geometriai folytonossága

A geometriai folytonosság nem paraméterfüggő, hanem geometriai jelentéssel bíró folytonosság definíció. G^{-1} geometriai folytonosság – a C^{-1} -hez hasonlóan – azt jelenti, hogy a határpontjaiban sem egyezik meg a két felület, G^0 esetén a határgörbe pontjai megegyeznek. Görbék esetén a „ G^1 a közös pontban érintők (az egyenesek és nem feltétlenül a deriváltak) egybeesését, G^2 az előzőek mellett a simulósik és a görbület megegyezését, G^3 pedig a pontbeli torzió megegyezését is jelenti.”[8]

4.1.3 Felületek parametrikus folytonosága

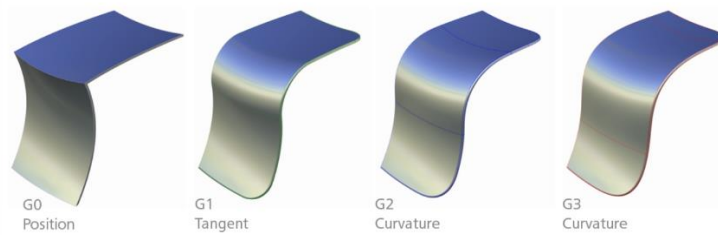
A parametrikus folytonosság felületekre való kiterjesztéséhez csak a deriválás két változóra való kiterjesztésére van szükség, azt pedig megtehetjük parciális deriválással.

$$\left. \frac{\partial^i}{\partial u^i} \mathbf{S}(u, v) \right|_{u=u_0, v=v_0} = \left. \frac{\partial^i}{\partial s^i} \mathbf{Q}(s, t) \right|_{s=s_0, t=t_0} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad 4.2$$

$$\left. \frac{\partial^i}{\partial v^i} \mathbf{S}(u, v) \right|_{u=u_0, v=v_0} = \left. \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{Q}(s, t) \right|_{s=s_0, t=t_0} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad 4.3$$

4.1.4 Felületek geometriai folytonosága

G^1 folytonosság felületek esetén az érintősíkok egybeesését jelenti, G^2 esetén a simulósík és a görbületek is megegyeznek, G^3 esetén pedig a pontbeli torzió is.



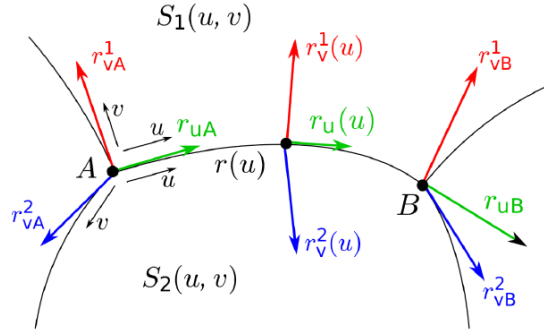
4.1. ábra Geometriai folytonosság(8)

4.2 Folytonosság vizsgálata általában

A paraméteres folytonosság függ a görbék és felületek paraméterezésétől, azaz azok átparaméterezésével megszűnhet a C^n folytonosság, miközben a görbék vagy felületek alakja változatlan. Ezért a geometria folytonosságát részesítjük előnyben, ami csak a geometriától függ és invariáns az átparaméterezésre.

4.2.1 Érintősík folytonossága (G^1)

Érintősík folytonosságának vizsgálatához meg kell határozni a vizsgált (közös) pontot és az érintősíkok normálvektorait. A normálvektorokat a pontbeli deriváltak keresztszorzataként kaphatjuk meg. A tangens irányú deriváltak meg kell hogy egyezzenek ($\dot{\mathbf{r}}^1_{\mathbf{u}}(u) = \dot{\mathbf{r}}^2_{\mathbf{u}}(u) = \dot{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}(u)$), hiszen különben nem teljesülne a G^0 folytonosság, így értelmetlen lenne a G^1 vizsgálata.



4.2. ábra Geometriai folytonosság számítása(9)

Legyen $\hat{r}_v^1(u)$ az S_1 -hez tartozó keresztirányú derivált, $\hat{r}_v^2(u)$ az S_2 -höz tartozó. Ekkor az egyes felületekhez tartozó érintősíkok normálvektorai a következőképp adódnak:

$$N_1(u) = \hat{r}_u(u) \times \hat{r}_v^1(u) \quad N_2(u) = \hat{r}_u(u) \times \hat{r}_v^2(u) \quad 4.4$$

Ahhoz, hogy az érintősíkok megegyezzenek, a normálvektoroknak párhuzamosaknak kell lenniük egymással.

4.2.2 Vizuális vizsgálat

A matematikai módszerek mellett vizuálisan is lehet az egymás melletti felületek folytonosságát vizsgálni. Ezek ugyan nem egyenértékűek egy bizonyítással, de sokkal gyorsabban és egyszerűbben használhatóak. Segítségükkel könnyen eldönthetjük, hogy érdemes-e belefogni egy G^n folytonosság bizonyításába, vagy biztosak lehetünk, hogy nem teljesül a G^n .

Az egyik ilyen módszer az isophote vonalak (vagy fényvonalak) használata, melyek olyan pontokat kötnek össze egy felületen, amik azonos fény visszaverődéssel rendelkeznek egy adott megvilágítás mellett. Az isophote vonalak G^n folytonos kapcsolódását a felületek G^{n+1} folytonos kapcsolódását jelzi. Például ha az isophote vonalak G^0 folytonosan csatlakoznak (azaz ugyan csatlakoznak a határon, de töréssel), akkor a felületek G^1 folytonosan csatlakoznak.

4.3 A közös irányblendtechnika

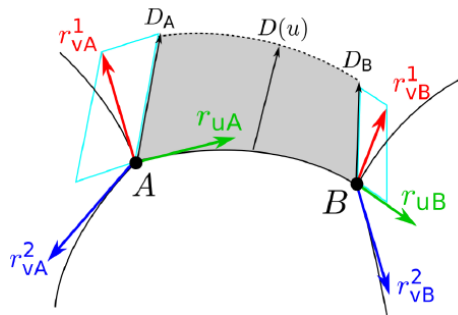
A folytonosság biztosításának egyik módja a közös irányblend (direction blend) alkalmazása: a végpontbeli keresztderiváltakat „vegyítjük egymással”, majd ennek segítségével határozzuk meg a görbe keresztirányú deriváltjait, hogy azok párhuzamos normálvektorokat

eredményezzenek. Minden u paraméterhez tartozó keresztderiváltat az irányblend és tangensirányú derivált lineáris kombinációjaként kapunk:

$$\mathbf{r}_v^i(u) = \alpha^i(u)\mathbf{D}(u) + \beta^i(u)\mathbf{r}_u(u) \quad i = 1,2 \quad 4.5$$

ahol $\alpha^i(u), \beta^i(u)$ skalárfüggvények.

Az irányblend $\mathbf{D}(u)$ egy vektorfüggvény, ami a görbe egyik végpontjából a másikba „átsimítja” az érintőket.



4.3. ábra Irányblend(9)

Csak a felület belsejét akarjuk módosítani, a kezdő és végpontokban vissza akarjuk kapni az eredeti deriváltakat, azaz a következő peremfeltételeknek eleget kell tenni:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{vA}^i(0) &= \alpha^i(0)\mathbf{D}(0) + \beta^i(0)\mathbf{r}_u(0) & i = 1,2 \\ \mathbf{r}_{vB}^i(1) &= \alpha^i(1)\mathbf{D}(1) + \beta^i(1)\mathbf{r}_u(1) & i = 1,2 \end{aligned} \quad 4.6$$

A végpontokban az irányblendnek a keresztderiváltak átlagával kell megegyeznie:

$$\mathbf{D}(0) = D_A = \frac{\mathbf{r}_{vA}^1 - \mathbf{r}_{vA}^2}{2} \quad \mathbf{D}(1) = D_B = \frac{\mathbf{r}_{vB}^1 - \mathbf{r}_{vB}^2}{2}, \quad 4.7$$

A G^1 folytonosság teljesül, mivel a 4.4 egyenletbe a 4.6 egyenletet behelyettesítve az $\mathbf{r}_u(u)$ önmagával vektoriálisan szorozva 0-t ad, így mindkét felület normálvektorát kizárólag a közös irányblend és közös tangensirányú derivált adja.

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^i(u) &= \mathbf{r}_u(u) \times \mathbf{r}_v^i(u) = \mathbf{r}_u(u) \times (\alpha^i(u)\mathbf{D}(u) + \beta^i(u)\mathbf{r}_u(u)) = \\ &= \alpha^i(u)(\mathbf{r}_u(u) \times \mathbf{D}(u)) + \beta^i(u) \underbrace{(\mathbf{r}_u(u) \times \mathbf{r}_u(u))}_0 = \alpha^i(u)(\mathbf{r}_u(u) \times \mathbf{D}(u)) \end{aligned} \quad 4.8$$

4.4 A folytonosság vizsgálata esetünkben

A patch belsejében a Bézier-felület egyenlete C^∞ folytonosságot biztosít, így csak a patchek kapcsolódását kell vizsgálni. Ezek G^0 folytonossága teljesül, mivel a határokon azonosak a görbék kontrollpontjai, és a felületet a határokon kizárólag ezek a kontrollpontok határozzák meg.

Mindkét fajta folytonosság méréséhez szükségünk van a deriváltakra. A harmadfokú Bézier-görbe deriváltja:

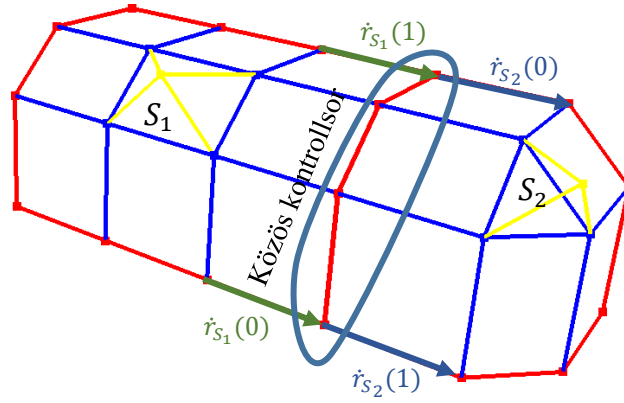
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{C}_0 \cdot (1-t)^3 + \mathbf{C}_1 \cdot 3(1-t)^2t + \mathbf{C}_2 \cdot 3(1-t)t^2 + \mathbf{C}_3 \cdot t^3) = \\ &= 3(1-t)^2(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) + 6t(1-t)(\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) + 3t^2(\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_2).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Tehát $t_0 = 0$ és $t_1 = 1$ paraméterekre (azaz a görbe végein) a deriváltak megegyeznek a kontrollpontokat összekötő szakaszok hosszának háromszorosával.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(0) = 3(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{r}(1) = 3(\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_2)\tag{4.10}$$

Két patch találkozásánál (S_1, S_2) figyelniük kell azok körüljárására, mivel a kontrollpontok számozásai egymás tükörképei, így a közös határgörbén S_1 szerint u^* -hoz tartozó pont az S_2 szerint $(1 - u^*)$ -hoz tartozó ponttal fog megegyezni. Ehhez a ponthoz mindkét patchen tartozik egy keresztirányú derivált. Legyen S_1 az a patch, aminek keresztirányú görbéi a közös határgörbébe érkeznek, S_2 határgörbéi pedig innen indulnak.

Ekkor a határgörbeponthoz tartozó S_1 szerinti keresztderivált az ide érkező keresztirányú görbe $v = 1$ helyen vett deriváltja. Ha $u^* = 0$ vagy $u^* = 1$, akkor ezek a deriváltak (a 4.10 képlet alapján) a 2. kontrollpontosorból a közös kontrollpontosorba mutató vektorok háromszorosai. S_1 esetén hasonlóan, csak itt a közös kontrollpontosorból indulnak a 2. kontrollpontosor felé a vektorok.



4.4. ábra Keresztirányú deriváltak

Vegyük észre, hogy mivel a geometriai folytonosság független a paraméterezéstől, ezért megtehetjük, hogy S_1 -et átparaméterezzük: a határgörbén és a keresztirányú görbén megcseréljük a paraméterezés irányát. Így az meg fog egyezni S_2 paraméterezésével a határgörbén, és a keresztirányú deriváltak itt is kifelé fognak mutatni a közös görbéből. Ezzel a felületek alakja nem változott.

4.4.1 Az alkalmazott irányblend

A tangenciális folytonosság biztosítására kétféle irányblendtechnikát is kipróbáltam, mindkettőnél a peremfeltételek mellett egy központi $D_{0.5}$ irányblendkényszert is alkalmaztam.

A skalárfüggvények a következők:

$$\alpha(u) = (1 - u)\alpha_A + u\alpha_B \quad 4.11$$

$$\beta(u) = (1 - u)\beta_A + u\beta_B, \quad 4.12$$

ahol

$$\alpha^A = \gamma(\mathbf{r}_{vA}^1, \mathbf{D}_A, \mathbf{r}_u) \quad \alpha^B = \gamma(\mathbf{r}_{vB}^1, \mathbf{D}_B, \mathbf{r}_u) \quad 4.13$$

$$\beta^A = \gamma(\mathbf{r}_{vA}^1, \mathbf{r}_w, \mathbf{D}_A) \quad \beta^B = \gamma(\mathbf{r}_{vB}^1, \mathbf{r}_w, \mathbf{D}_B), \quad 4.14$$

ahol

$$\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{w}|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} \cdot \text{sgn}((\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})). \quad 4.15$$

Így visszkapjuk a kezdő és végpontokban az eredeti keresztirányú deriváltakat.

4.4.2 Approximatív irányblend

Approximáló esetben $\mathbf{D}_{0.5} \neq \mathbf{D}(\mathbf{0.5})$, azaz a központi vektort csak approximáljuk. A blend függvény, ami ezt biztosítja:

$$\mathbf{D}(u) = (1-u)^2 \mathbf{D}_0 + 2u(1-u) \mathbf{D}_{0.5} + u^2 \mathbf{D}_1, \quad 4.16$$

mivel ekkor $\mathbf{D}(u)$ -ba behelyettesítve 0, 0.5 és 1 értékeket, a $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_{0.5}, \mathbf{D}_1$ -hez rendelt súlyok a következőképpen alakulnak:

u	\mathbf{D}_0	$\mathbf{D}_{0.5}$	\mathbf{D}_1
0	1	0	0
0.5	1/4	1/2	1/4
1	0	0	1

Vegyük a $\mathbf{D}(u)\alpha(u)$ szorzatot, helyettesítsük bele a 4.11 és 4.24 egyenleteket, és az így kapott lineáris kombinációt írjuk át Bernstein-alakra:

$$\mathbf{D}(u)\alpha(u) = \sum_{i=0}^3 Q_i^\alpha B_i^3(u) \quad 4.17$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(u)\alpha(u) = & (1-u)^3 \alpha_A \mathbf{D}_A + u(1-u)^2 (2\alpha_A \mathbf{D}_{0.5} + \alpha_B \mathbf{D}_A) + \\ & + u^2(1-u)(\alpha_A \mathbf{D}_B + 2\alpha_B \mathbf{D}_{0.5}) + u^3 \alpha_B \mathbf{D}_B \end{aligned}$$

A 2. és 3. tagot 3-mal leosztva és megszorozva megkapjuk a Bernstein-alakot, és így Q_i^α -t.

$$(1-u)^3 \alpha_A \mathbf{D}_A + 3u(1-u)^2 \frac{2\alpha_A \mathbf{D}_{0.5} + \alpha_B \mathbf{D}_A}{3} + 3u^2(1-u) \frac{\alpha_A \mathbf{D}_B + 2\alpha_B \mathbf{D}_{0.5}}{3} + u^3 \alpha_B \mathbf{D}_B \quad 4.18$$

Hasonló műveleteket elvégezve $\mathbf{r}_u(u)\beta(u)$ szorzatra kapjuk Q_i^β -ket. A 4.5 egyenlet alapján tehát a keresztirányú deriváltak:

$$\mathbf{Q}_0 = \alpha_A \mathbf{D}_A + 3\beta^1(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) \quad 4.19$$

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{\alpha_B}{3} \mathbf{D}_A + \frac{2\alpha_A}{3} \mathbf{D}_{0.5} + \beta^2(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) + 2\beta^1(\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) \quad 4.20$$

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{2\alpha_B}{3} \mathbf{D}_{0.5} + \frac{\alpha_A}{3} \mathbf{D}_B + \frac{1}{3}(\alpha^2 - \alpha_A) \mathbf{D}_B + 2\beta^2(\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) + 2\beta^1(\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_2) \quad 4.21$$

$$\mathbf{Q}_3 = \alpha_B \mathbf{D}_B + 3\beta^1(\mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_2) \quad 4.22$$

Az új kontrollpontokat a határgörbe-kontrollpontjainak $\frac{Q_i}{3}$ eltolásával kapjuk, mivel az első húr pont a derivált harmada.

$$C_{i,1} = C_{i,0} + \frac{Q_i}{3}, \quad 4.23$$

4.4.3 Interpoláló irányblend

Interpoláló esetben $D_{0.5} = D(0.5)$, azaz a központi értéknek meg kell egyeznie a 0.5-ben felvett irányblend értékkel. A blend függvény, ami ezt biztosítja:

$$D(u) = (2u^2 - 3u + 1)D_0 + 4u(1 - u)D_{0.5} + (2u^2 - u)D_1, \quad 4.24$$

mivel ekkor $D(u)$ -ban behelyettesítve 0, 0.5 és 1 értékeket, a $D_0, D_{0.5}, D_1$ -hez rendelt súlyok a következőképp alakulnak:

u	$D_0 = D_A$	$D_{0.5}$	$D_1 = D_B$
0	1	0	0
0.5	0	1	0
1	0	0	1

Az interpoláló esethez hasonló számítással juthatunk a tangensekhez:

$$Q_0 = \alpha^1 D_A + 3\beta_A(C_1 - C_0) \quad 4.25$$

$$Q_1 = \frac{1}{3}(\alpha_B - \alpha_A)D_A + \frac{4}{3}\alpha_A D_{0.5} - \alpha_A \frac{1}{3}D_B + \beta_B(C_1 - C_0) + 2\beta_A(C_2 - C_1) \quad 4.26$$

$$Q_2 = \frac{1}{3}\alpha_B D_A + \frac{4}{3}\alpha_B D_{0.5} + \frac{1}{3}(\alpha_A - \alpha_B)D_B + 2\beta_B(C_2 - C_1) + \beta_A(C_3 - C_2) \quad 4.27$$

$$Q_3 = \alpha_A D_A + 3\beta_B(C_3 - C_2) \quad 4.28$$

4.4.4 Duális struktúra

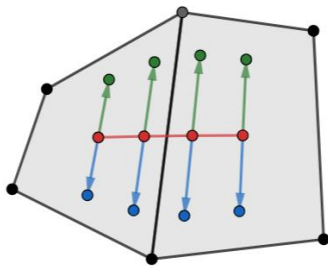
A duális csúcsokban, azaz ahol több patch találkozik, automatikusan teljesül a G^1 , azaz érintősík-folytonosság, ha síklapjai vannak a kontrollpoliédernek, mivel ekkor r_u, r_v^1 és r_v^2 is a duális csúcshoz tartozó kontrollpoliéder-lapon van, azaz egy síkba esnek. Ha nem sík egy lap, akkor a 3.3.2 fejezetben bemutatott legjobb síkra vetítéssel érhetjük el a G^1 -t.

4.4.4.1 Négyoldalú lapok találkozása

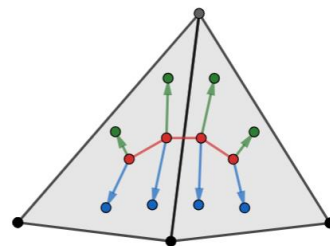
Négyoldalú lapok találkozásánál a 2.4.2 fejezet alapján számolt twist kontrollpontok biztosítani fogják a C^1 folytonos kapcsolódást, mivel azok páronként azonos nagyságúak, és egy egyenesre esnek a határgörbe-kontrollponttal. Így a két patch keresztirányú deriváltjai is meg fognak egyezni a két patchnek.

4.4.4.2 Nem négyoldalú lapok találkozása

Nem négyoldalú lapok találkozásánál a keresztirányú deriváltak nem fognak egy egyenesre esni, így nem biztosított a C^1 folytonosság.



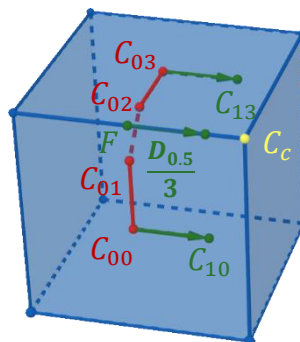
4.5. ábra Négyoldalú lapok találkozása



4.6. ábra Nem négyoldalú lapok találkozása

A folytonosság biztosítására interpoláló és approximáló irányblendet is megvalósítottam. $D_{0.5}$ választására természetesen adta magát a duális görbéhez tartozó kontrollpoligon él felezőpontjának és a központi kontrollhálónak a κ szerinti lineáris kombinációjának háromszorosaként. (Mintha az élre is esne egykontrollpont sor, aminek deriváltja első húrjának háromszorosa.)

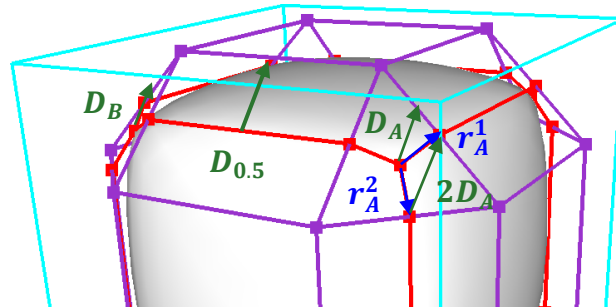
$$D_{0.5} = 3(\kappa F + (1 - \kappa) C_c) \quad 4.29$$



4.7. ábra $D_{0.5}$ választása

4.4.5 Topológiatartó struktúra

Topológiatartó struktúra esetében $D_{0.5}$ egy természetes megválasztása az élhez tartozó segédlapka közepétől a segédlapka élfelezőjébe mutató vektor, melynek nagysága a lapkamélység szerint változik.



4.8. ábra $D_{0.5}$ választása

A $D_{0.5}$ nagyságát lapkától függetlenül is változtathatjuk, ezzel befolyásolva a csatlakozó felületek görbületét.

5 Tesztrendszer

A leírt algoritmust a gyakorlatban is kipróbáltam, egy 3D testek megjelenítésre alkalmas futtató környezet[9] segítségével, C++-ban programozva. A keretrendszer gondoskodott a kontrollpoliéderek beolvasásáról és megjelenítéséről, így nekem elsősorban a felületek megalkotását kellett elvégezniem.

A programban az OpenMesh[10] könyvtár segítségével készítek meshstruktúrákat, amelyek lehetőséget adnak a csúcsok, élek, lapok közötti változatos navigálásra iterátorok segítségével. Saját adatstruktúrákat lehet rendelni a mesh adattagjaihoz, ami nagy segítségét jelent a kontrollháló és egyéb szükséges adatok letárolásában és elérésében. A görbehálót, a felület kontrollpontjait, az azok által alkotott hálót és a grafikus debug célú pontokat, vonalakat (pl. koordináta-szintvonalak) OpenGL[11] metódusok segítségével rajzoltam ki.

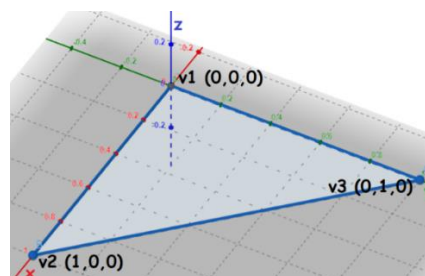
Patchenként készítettem el a felületeket, majd összefűztem őket egyetlen felületté, hogy lehessen rajta különböző görbületmegjelenítő algoritmusokat futtatni.

5.1 Poliéderek beolvasása

A program bemenete egy .obj file, amely egy 3 dimenziós kontrollpoliédert tartalmaz. A file tartalmazza a csúcspontok koordinátahármasait és a lapokat. Egy lap megadásához az általa tartalmazott csúcsokat kell felsorolni, a csúcsokra a sorszámukkal hivatkozunk, mely sorszám a felsorolási sorrenddel ekvivalens.

Az alábbi példa egy x-y síkban elhelyezkedő háromszöget ad.

```
v 0 0 0
v 1 0 0
v 0 1 0
f 1 2 3
```



5.1. ábra .obj file példa

5.2. ábra A példafájl alapján kapott háromszög*

Lehetőség van kézzel is megadni a kontrollpoliédereket, de magas csúcspontszám esetén ez bonyolulttá válhat, mivel megfelelő sorrendben kell megadni az egyes lapok csúcspontjait – nemcsak egymáshoz képest (körüljárási irány), de a többi lapon betöltött

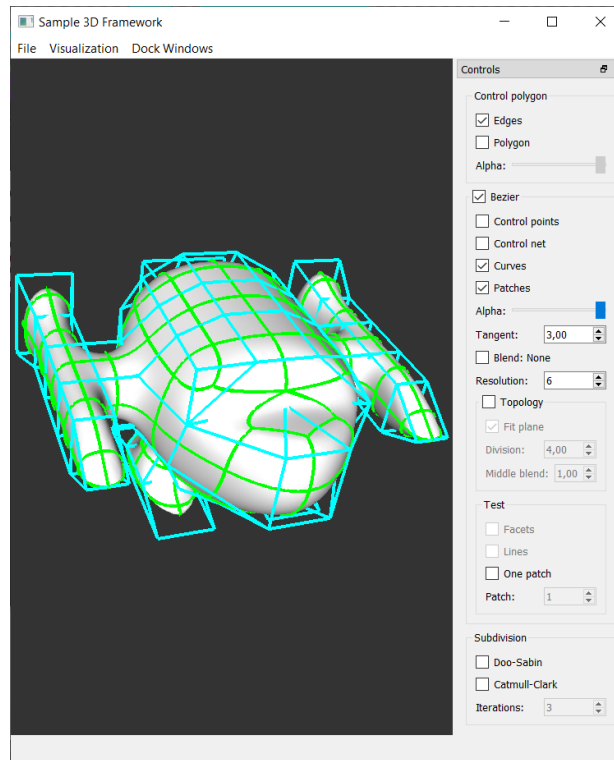
sorrendjüknek is megfelelően. Több 3D rajzolóprogram is tartalmaz importálási lehetőséget .obj kiterjesztésre, én a Blendert[12] és 3d Studio Maxot[13] használtam bonyolultabb poliéderek megadására.

5.2 Megjelenítési módok

A kontrollpoliédert leíró .obj fájl tállózó segítségével egyszerűen kiválaszthatjuk a fájlrendszerből. A keretrendszer az egyszerű mesh megjelenítése mellett billentyűparancsok segítségével lehetőséget ad a felület drótvázának (wireframe), átlaggörbületének (mean curvature), isophote vonalainak és szeletelésének (slicing) megjelenítésére.

A keretrendszert kiegészítettem problémaspecifikus megjelenítési lehetőségekkel. Röviden felsorolva a lehetséges beállítások:

- Kontrollpoliéder oldalainak és lapjainak megjelenítése/elrejtése.
- Kontrollpoliéder-lapok átlátszóságának állítása.
- Kontrollpontok és az azok alkotta háló megjelenítése/elrejtése.
- Határgörbék és -felület megjelenítése/elrejtése.
- Felület átlátszóságának állítása.
- Duális struktúra esetén indulótangensek nagyságának állítása.
- Approximáló vagy interpoláló irányblend közti váltás, illetve azok kikapcsolása.
- A felületet approximáló háromszögháló sűrítése/ritkítása.
- Legjobb síkra vetítés ki/bekapcsolása.
- Lapkamélység állítása.
- Topológiatartó struktúra esetén a középső blendérték nagyságának állítása.
- Topológiatartó struktúra esetén a segédvonalak és lapkák megjelenítése/elrejtése.
- Egyetlen patch, illetve az ahhoz tartozó fenti elemek megjelenítése.
- A kontrollpoliéderből Doo–Sabin- vagy Catmull–Clark-felosztással készült felület megjelenítése.



5.3. ábra Az elkészült program felhasználói felülete

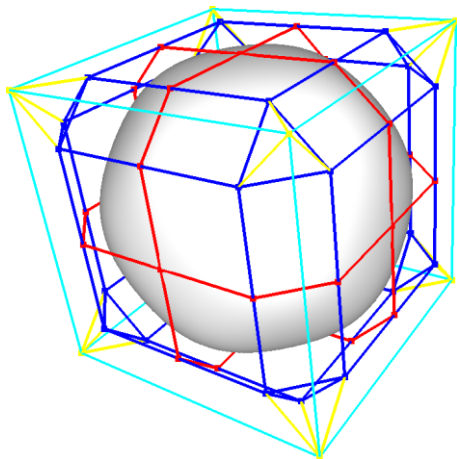
Ha nem poliédert töltünk be, hanem egy poligont, akkor azon megjeleníthetjük a λ_i, s_i, h_i szintvonalakat különböző csúcsokra és oldalakra.

6 Teszteredmények

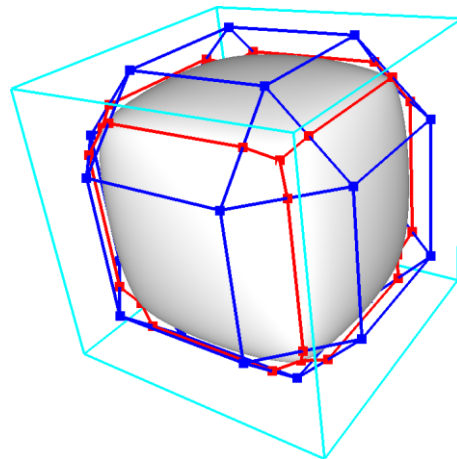
Különböző poliéderhálókon teszteltem az algoritmust, és ezek különböző megjelenítését is megnéztem. A GB patch esetén a háromszögháló-felosztás finomításával, rekurzív felosztásoknál az iterációszám növelésével, illetve a kontrollpoliéder lapszámának növelésével a program számításigénye értelemszerűen nő.

6.1 Egyszerű modellek

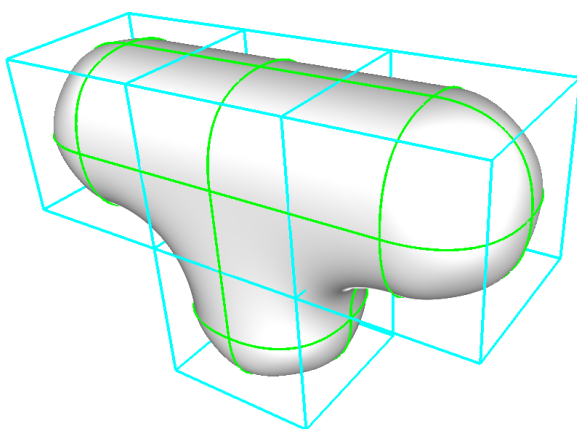
Először egyszerű modellekkel (kevés lap) teszteltem a programot, ezek esetében szemmel is könnyen át lehet tekinteni és ellenőrizni a különböző struktúrákat és segédstruktúrákat.



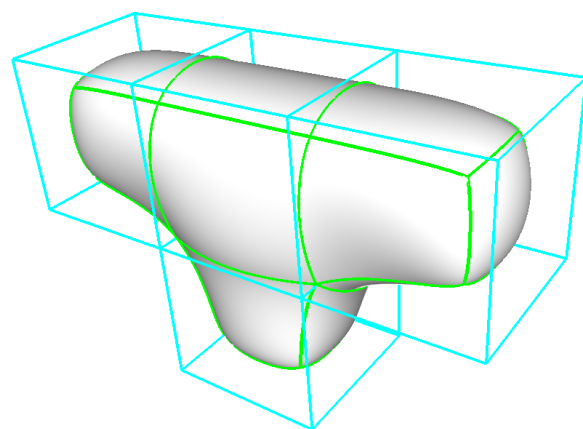
6.1. ábra Duális felület és kontrollpontháló



6.2. ábra Topológiatartó felület és kontrollpontháló



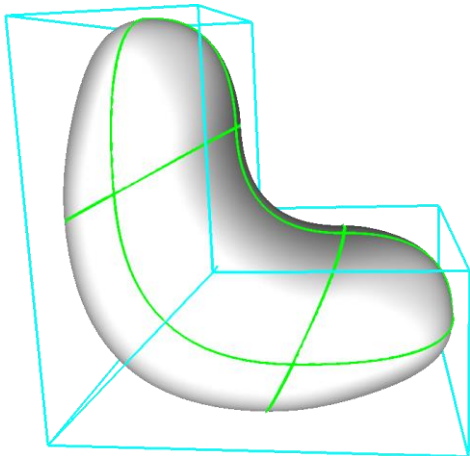
6.3. ábra Duális felület és görbeháló



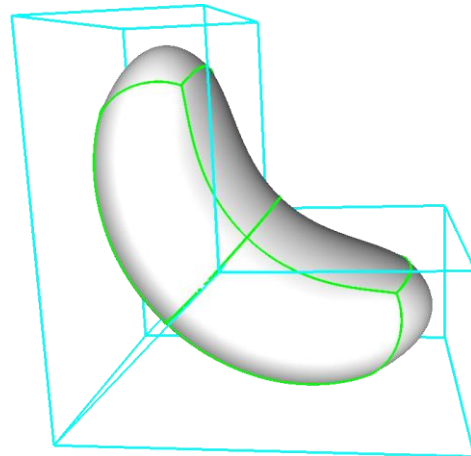
6.4. ábra Topológiatartó felület és görbeháló

6.1.1 Konkáv lapok felosztása

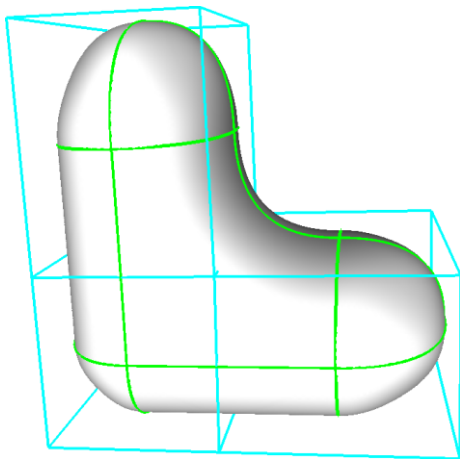
Mivel mindkét algoritmus csak konvex lapokkal tud dolgozni, ezért a konkáv lapokat fel kell osztani. Ezt a felosztást többféleképpen is meg lehet tenni, és a kapott felületek eltérőek lesznek. A alábbi ábrákon az oldalsó L alakú lapkát először 2 trapézra osztottam (6.5. ábra és 6.6. ábra), majd 3 téglalagra (6.7. ábra és 6.8. ábra).



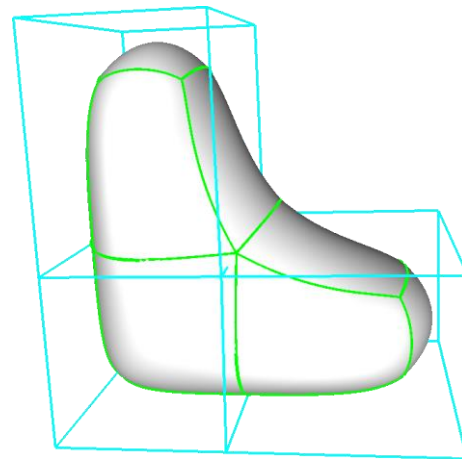
6.5. ábra Duális 2 konvex lapra bontás esetén



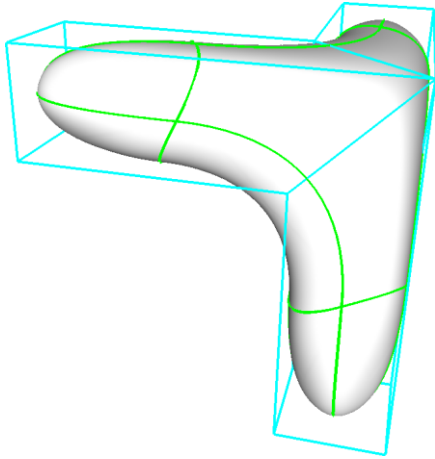
6.6. ábra Topológiaiartó 2 konvex lapra bontás esetén



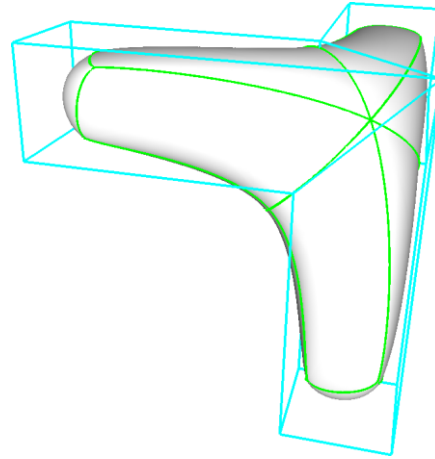
6.7. ábra Duális 3 konvex lapra bontás esetén



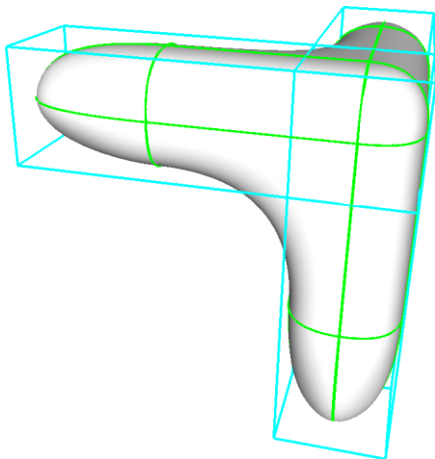
6.8. ábra Topológiaiartó 3 konvex lapra bontás esetén



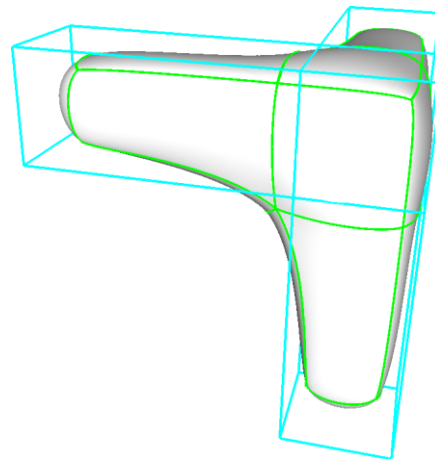
6.9. ábra Duális 2 konvex lapra bontás esetén



6.10. ábra Topológiai tartó 2 konvex lapra bontás esetén



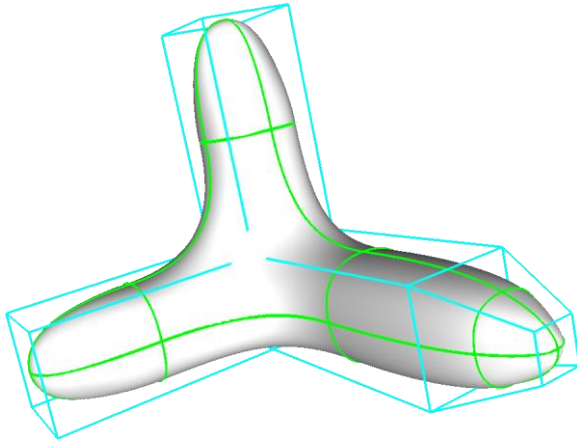
6.11. ábra Duális 3 konvex lapra bontás esetén



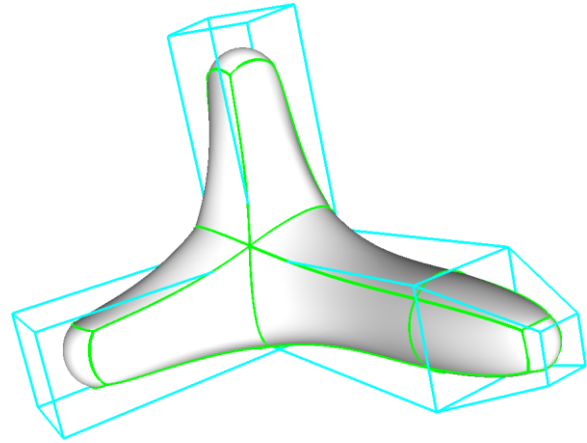
6.12. ábra Topológiai tartó 3 konvex lapra bontás esetén

6.1.2 Kontrollpoliéder módosítása

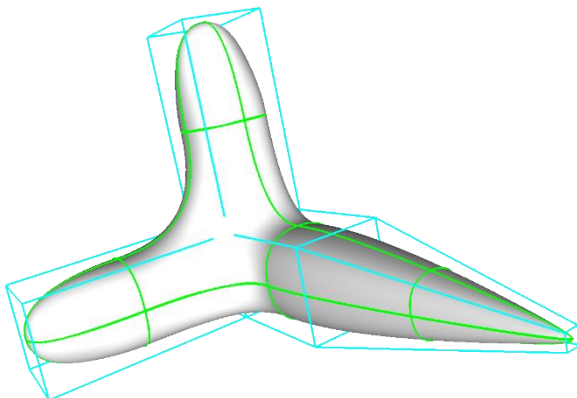
Kihúzásokat végeztem a kontrollpoliéder lapjain, amelyek egyre kisebb lapokban végződnek, így lett a kapott felület is egyre hegyesebb lett.



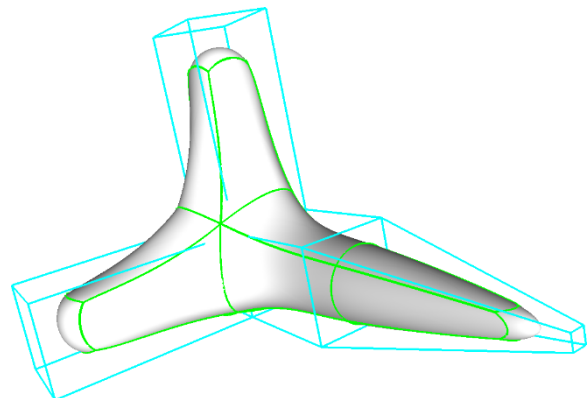
6.13. ábra Kismértékű lapkihúzás (duális)



6.14. ábra Kismértékű lapkihúzás (topológiatartó)

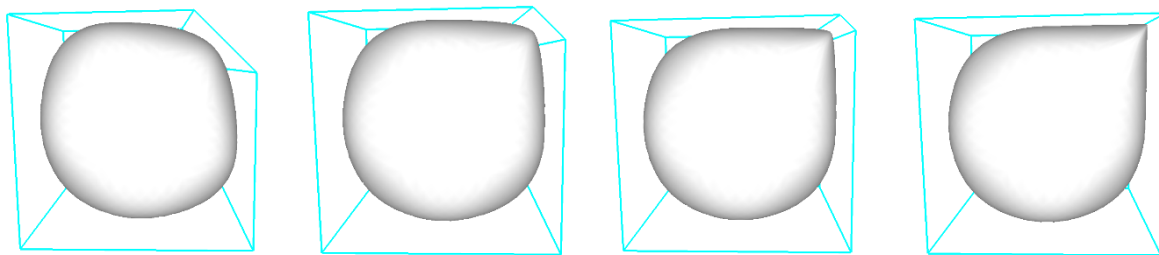


6.15. ábra Nagymértékű lapkihúzás (duális)

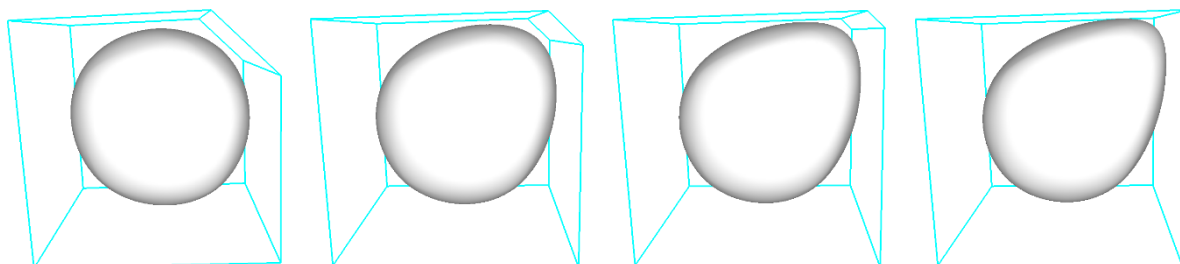


6.16. ábra Nagymértékű lapkihúzás (topológiatartó)

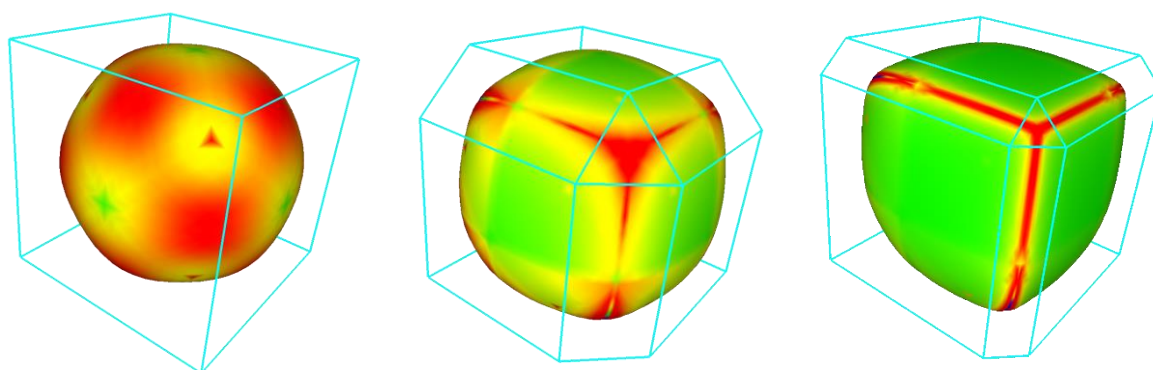
A kontrollpoliéder élének és csúcsainak lekerekítésével a felület egyre jobban megpróbálja megközelíteni az újonnan keletkezett, kisebb lapokat.



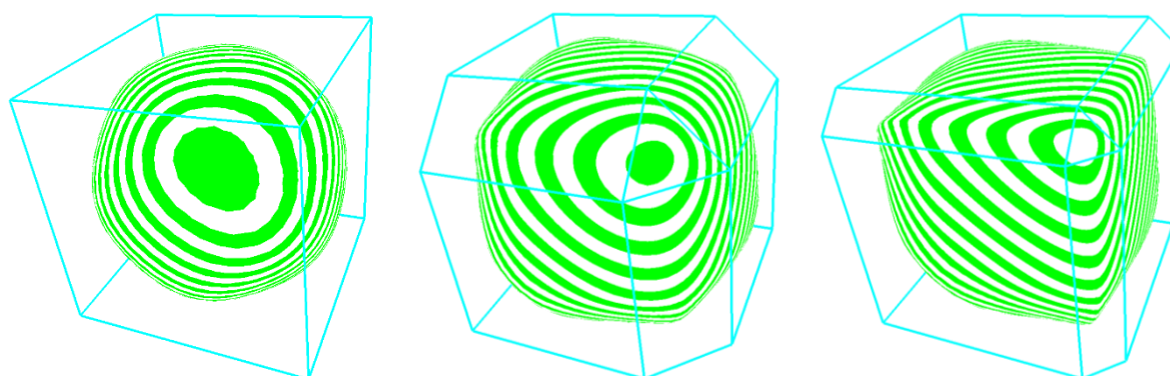
6.17. ábra Éllekerekítés egyre csökkenő lapmérettel (duális)



6.18. ábra Éllekerekítés egyre csökkenő lapmérettel (topológiatartó)



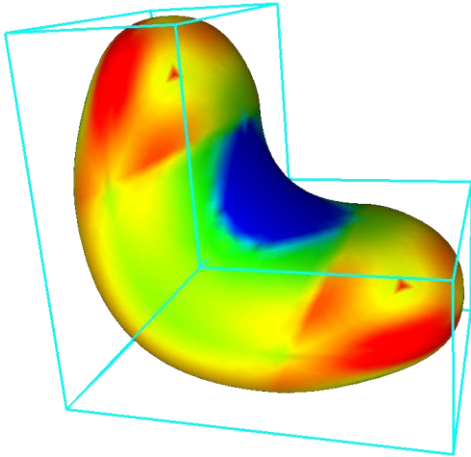
6.19. ábra Csúcs- és éllekerekítés átlaggörbület megjelenítéssel (duális)



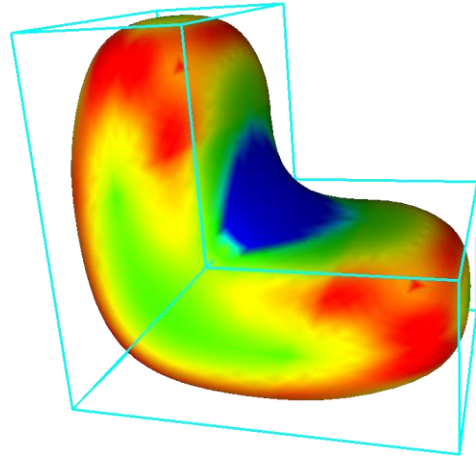
6.20. ábra Csúcs- és éllekerekítés ábrázolása szeleteléssel (duális)

6.2 Paraméterváltoztatás

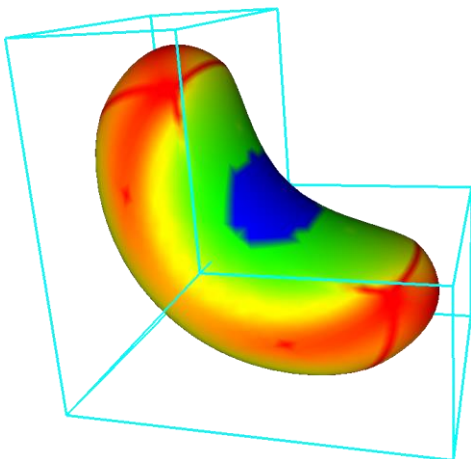
Duális esetben lehetőség van a kezdő tangens változtatására, ezáltal a görbetelítettségének változtatására, míg topológiatartó esetben a lapkamélység változtatására.



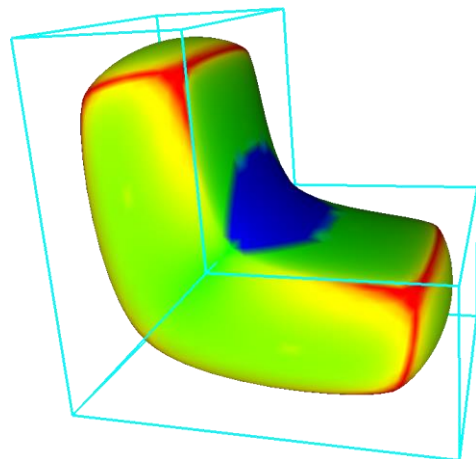
6.21. ábra Nagy induló tangens (duális)



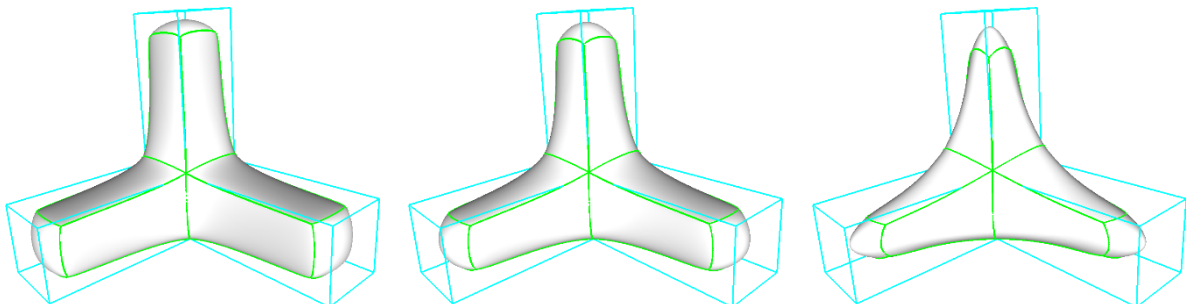
6.22. ábra Kis induló tangens (duális)



6.23. ábra Nagy lapkamélység (topológiatartó)



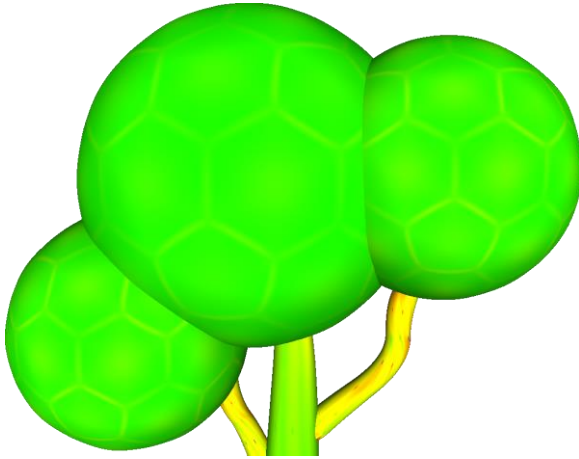
6.24. ábra Kis lapkamélység (topológiatartó)



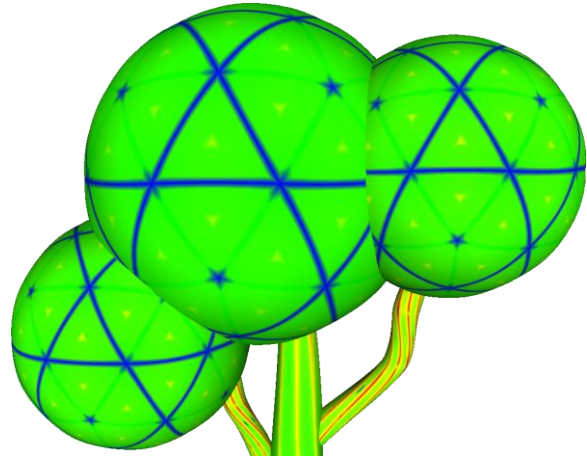
6.25. ábra Egyre növekvő lapkamélység (topológiatartó)

6.3 Irányblend

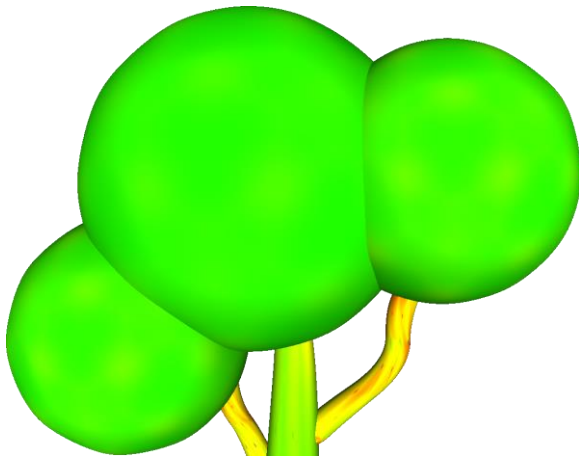
Az átlaggörbület-térképen megfigyelhetők a görbület hirtelen változásai. A 6.26. ábra és ákon az irányblend nélküli felületeken kirajzolódnak a patchhatárok: sárgával a duális esetben, kékkel a topológiatartó esetben. A további képeken látszik, ahogy az interpoláló (6.28. ábra és 6.29. ábra) illetve approximáló irányblend (6.30. ábra és 6.31. ábra) alkalmazása eltünteti az éles határokat.



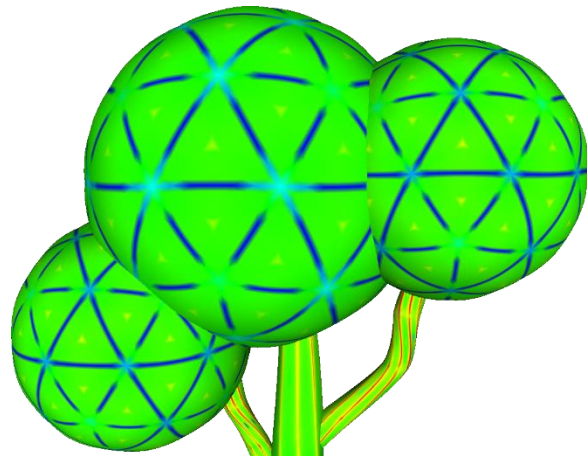
6.26. ábra Átlaggörbület irányblend nélkül (duális)



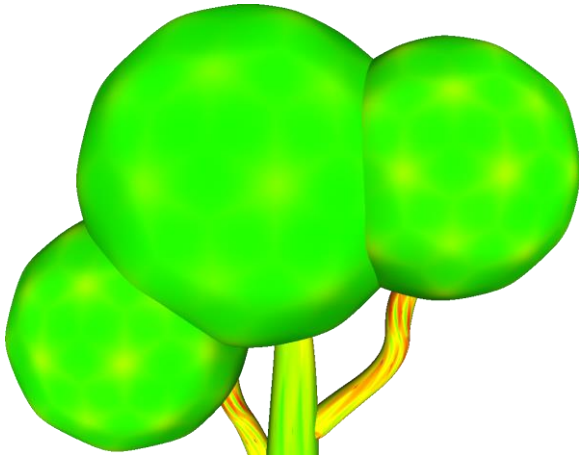
6.27. ábra Átlaggörbület irányblend nélkül (topológiatartó)



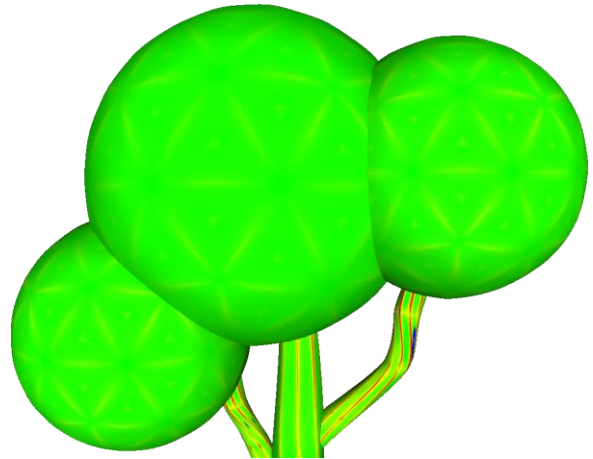
6.28. ábra Átlaggörbület interpoláló irányblenddel (duális)



6.29. ábra Átlaggörbület interpoláló irányblenddel (topológiatartó)



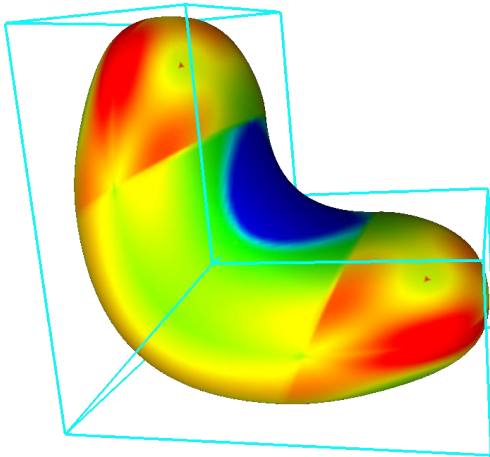
6.30. ábra Áttaggörbület approximáló irányblennel (duális)



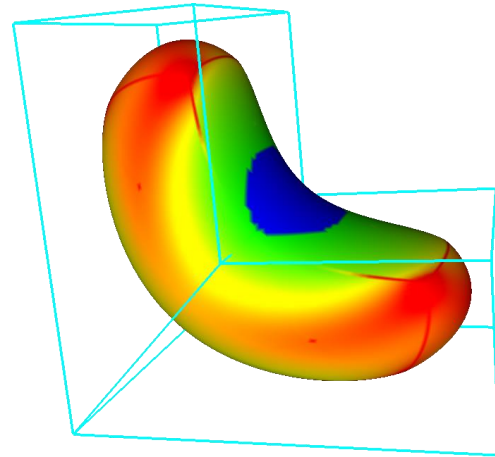
6.31. ábra Áttaggörbület approximáló irányblennel (topológiatartó)

6.4 Összehasonlítás rekurzív felosztással készült modellekkel

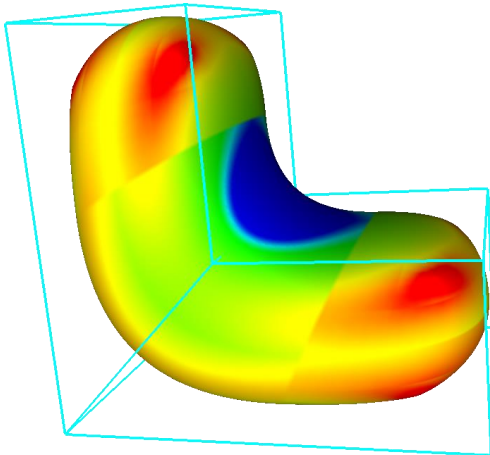
Ugyanazon kontrollpoliéderre más végső felületet kapunk különböző felületgeneráló technikák esetén. A Doo–Sabin és a GB patcheken alapuló technika a felületeket G^1 folytonossággal kapcsolja össze, szemben a Catmull–Clarkkal, mely G^2 folytonosságot biztosít. A GB patchek G^2 összekapcsolódása jövőbeli kutatási-fejlesztési feladat. Megfigyelhetjük a hasonlóságot a duális és a Doo–Sabin-, illetve a topológiatartó és a Catmull–Clark-módszerrel kapott felületeknél.



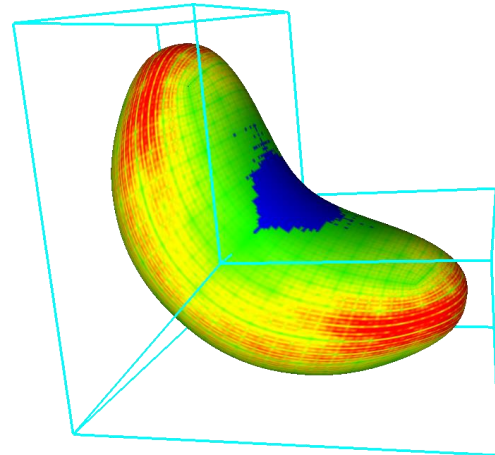
6.32. ábra Duális



6.33. ábra Topológiatartó



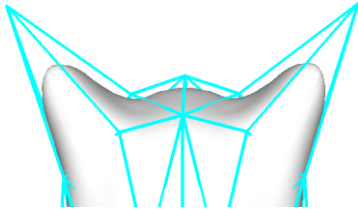
6.34. ábra Doo-Sabin



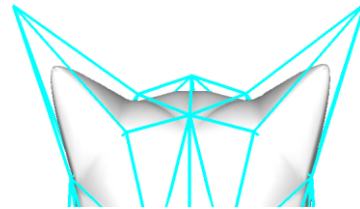
6.35. ábra Catmull-Clark

6.5 Művészi modellek

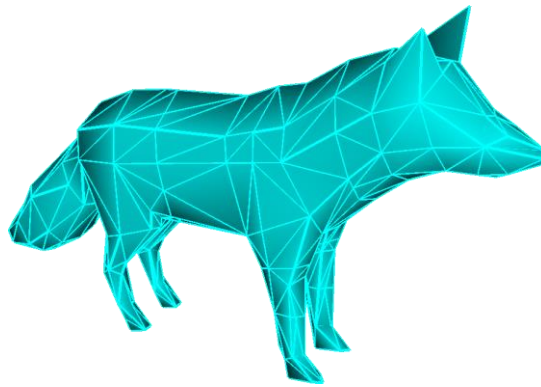
Végezetül pedig bemutatok pár komplexebb kontrollpoliédert, amelyek érdekes szabadformájú objektumokat definiálnak. Az alábbi ábrán az látható, hogy a GB patch erősebben lekerekíti a kontrollpoliéder alapból éles részeit (róka füle), míg a CGB ezeket jobban megőrzi.



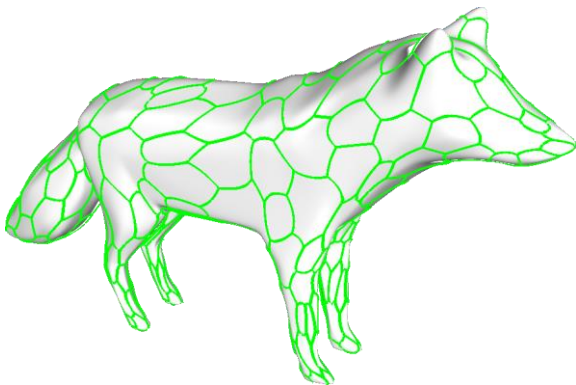
6.36. ábra Csúcsok lekerekítése (duális)



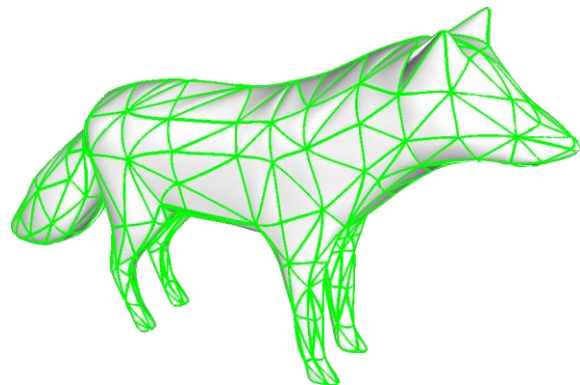
6.37. ábra Csúcsosság megőrzése (topológiatartó)



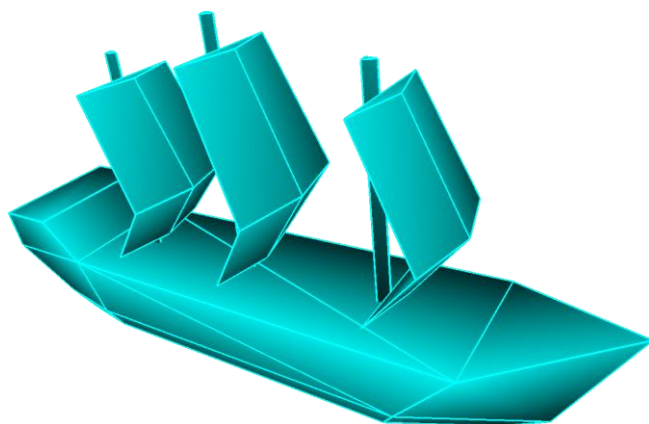
6.38. ábra Róka kontrollpoliéder



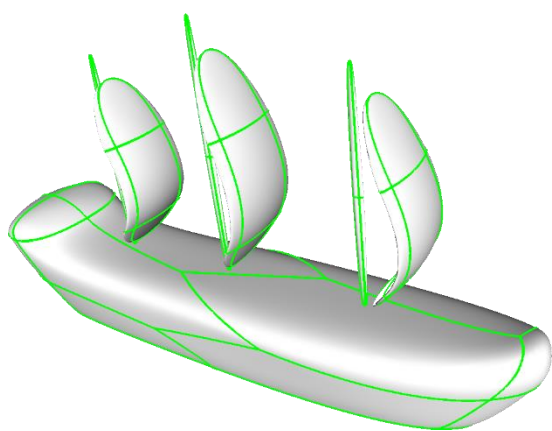
6.39. ábra Duális



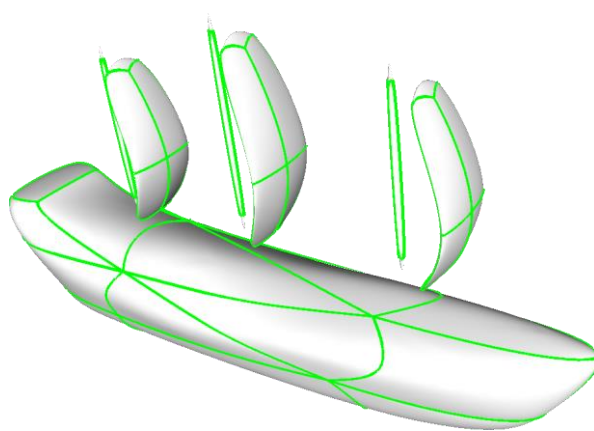
6.40. ábra Topológiatartó



6.41. ábra Hajó kontrollpoliéder



6.42. ábra Duális



6.43. ábra Topológiatartó

7 Összefoglalás és további tervek

Szabadformájú testek kontrollpoliéderez tervezését vizsgáltam. A kontrollpoliéderből a felületelemek struktúrájának előállítására két lehetséges algoritmust adtam meg: egy duális struktúrát és egy topológiatartót. A felületelemeket n -oldalú általánosított GB patchekkel reprezentáltam. Mindkét esetben vizsgáltam a felületelemek közötti tangenciális folytonosságot, melyet irányblend technikával biztosítottam.

További terveim között szerepel, hogy konkáv lapokat és lyukakat tartalmazó kontrollpoliédereket felosztás nélkül kezelni tudjak; ezekhez konkáv domének meghatározására és harmonikus koordináták használatára lesz szükség. További vizsgálatra szorul a különböző struktúrák magasabb szintű folytonossága, illetve a különböző szabad paraméterek optimális beállítása.

Irodalomjegyzék

- [1] Jörg Peters:
Splines for Meshes with Irregularities
The SMAI Journal of Computational Mathematics, Volume S5, pp. 161-183 (2019)
- [2] T. Várady, P. Salvi, G. Karikó:
A Multi-sided Bézier Patch with a Simple Control Structure
Computer Graphics Forum 35: 2 pp. 307-317 (2016)
- [3] D. Doo:
A subdivision algorithm for smoothing down irregularly shaped polyhedrons
Proc. on Interactive Techniques in Computer Aided Design, pp. 157 - 165 (1978)
- [4] E. Catmull, J. Clark, J.:
Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes
Computer-Aided Design, 10 (6) (1978)
- [5] J. Warren:
Barycentric coordinates for convex polytopes
Adv. in Comp. Math. 6, pp. 97– 108 (1996)
- [6] Salvi, P., Várady, T.:
Multi-sided Bézier surfaces over concave polygonal domains
Computers & Graphics 74, pp. 56–65 (2018)
- [7] Tamás Várady, Péter Salvi, Márton Vaitkus, Ágoston Sipos:
Multi-sided Bézier surfaces over curved, multi-connected domains
Elsevier Volume 78, (2020)
- [8] Juhász Imre:
Görbék és felületek modellezése
Kelet-Magyarországi Informatika Tananyag Tárház (2011)
- [9] Használt keretrendszer:
<https://bitbucket.org/salvipeter/sample-framework/>
- [10] OpenMesh:
<http://www.openmesh.org/media/Documentations/OpenMesh-Doc-Latest/index.html>
- [11] OpenGL:
<https://www.opengl.org/>
- [12] Blender:
<https://www.blender.org/>
- [13] 3d Studio Max
<https://www.autodesk.com/education/free-software/3ds-max>

- [14] GeoGebra 3D rajzolóprogram:
<https://www.geogebra.org/3d?lang=hu>
- [15] GeoGebra:
<https://www.geogebra.org/graphing>

Képforrásjegyzék

A (*) -gal jelölt ábrák a GeoGebra 3D-s rajzolóprogram[14] és a GeoGebra 2D-s rajzolóprogram[15] segítségével készültek.

- (1) 3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció
Témalaborismertető
https://www.iit.bme.hu/system/files/uploads/module_files/3D_SzGA_ShowAll_V4.pdf
- (2) 3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció
Rekurzív felosztáson alapuló felületek előadás
http://cg.iit.bme.hu/portal/sites/default/files/oktatott-targyak/3d-geometria-mernoki-visszafejtes/slides/8.%20Subdivision_V82.pdf
- (3) Math Wikia, Duális poliéder
https://math.wikia.org/wiki/Dual_polyhedron
- (4) 3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció
Bézier-görbék és felületek előadás:
<http://cg.iit.bme.hu/portal/sites/default/files/oktatott-targyak/3d-geometria-mernoki-visszafejtes/slides/3dgeom-05-v92.pdf>
- (5) 3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció
GB Patch előadás:
http://cg.iit.bme.hu/portal/sites/default/files/oktatott-targyak/3d-geometria-2/GB_Patches_V9.pdf
- (6) 3D számítógépes geometria és alakzatrekonstrukció
Háromszöghálók előadás
http://cg.iit.bme.hu/portal/sites/default/files/oktatott-targyak/3d-geometria-mernoki-visszafejtes/slides/2b.MeshAlgorithms_V83.pdf
- (7) Tamás Várady, Péter Salvi, Márton Vaitkus, Ágoston Sipos:
Multi-sided Bézier surfaces over curved, multi-connected domains
Elsevier Volume 78, (2020)
- (8) https://www.aliasworkbench.com/theoryBuilders/TB3_continuity1.htm
- (9) 3D számítógépes geometria 2
Négyoldalú felületekből összetett 3D modellek előadás:
http://cg.iit.bme.hu/portal/sites/default/files/oktatott-targyak/3d-geometria-2/Quadrilaterals_V13.pdf