



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**

Villamosmérnöki és Informatikai Kar

Irányítástechnika és Informatika Tanszék

# **3D-s objektumok deformálása geometriai kényszerek figyelembevételével**

TDK dolgozat

*Készítette*

Gálai Janka

*Konzulens*

Dr. Várady Tamás László

2020

# TARTALOMJEGYZÉK

Összefoglaló .....	4
Abstract .....	5
1. Bevezetés.....	6
2. Szakirodalmi áttekintés .....	7
2.1 Általános áttekintés <sup>[1]</sup> .....	7
2.1.1 Felületi deformáció .....	8
2.1.2 Térfogati deformáció .....	9
2.1.2.1 Szabályos kontrollrác.....	9
2.1.2.2 Általános kontrollváz.....	10
2.2 Általános baricentrikus koordináták 2D-ben <sup>[2][3][8]</sup> .....	10
2.2.1 Baricentrikus koordináták háromszögekre.....	10
2.2.2 Általános baricentrikus koordináták.....	11
2.2.2.1 Középérték koordináták.....	12
2.2.2.2 Középérték koordináták tulajdonságai 2D-ben .....	12
2.2.2.3 Középérték koordináták számítási algoritmus.....	13
2.2.2.4 Középérték koordináták eloszlása 2D-ben .....	14
2.2.2.5 Deformáció általános kontrollvázal .....	16
2.2.2.6 Középérték koordináták - másik interpretáció <sup>[4][5]</sup> .....	20
2.3 Általános baricentrikus koordináták 3D-ben .....	23
2.3.1 Középérték koordináták .....	25
2.3.1.1 Háromszöglapokkal definiált kontrollváz <sup>[4][5][6][8]</sup> .....	25
2.3.1.2 Általános, $N$ -oldalú lapok által definiált kontrollváz <sup>[8]</sup> .....	30
2.3.2 A középérték koordináták tulajdonságai 3D-ben <sup>[4][5][6][8]</sup> .....	33
2.3.3 Középérték koordináták eloszlása 3D-ben .....	34
2.3.4 Deformáció 3D-ben.....	35
3. Kényszerezett lokális módszer – lokális módosítás .....	39
3.1 Lokális módosítás 2D-ben .....	40
3.1.1 Simítás .....	43
3.2 Lokális módosítás 3D-ben .....	48
4. Tesztprogramok.....	52

4.1	A tesztkörnyezet .....	52
4.2	Tesztprogramok és példák .....	52
5.	Összefoglaló .....	53
	Irodalomjegyzék.....	54

## Összefoglaló

Komplex 3D-s objektumok deformálására formatervezési és animációs alkalmazásokban is gyakran van szükség. Különböző módszerek léteznek, melyek segítségével intuitív módon deformálni lehet az objektumokat anélkül, hogy a felhasználónak a vonatkozó matematikai hátteret ismernie kellene. Ezen módszerek két fő csoportba sorolhatók. Az egyik csoportba a közvetlenül az objektum felületét módosító felületi deformációs módszerek, míg a másik csoportba az objektum körüli teret, és így közvetve a modellt is módosító térfogati deformációs módszerek tartoznak. Utóbbi módszerek az általános baricentrikus koordinátákat használják fel, mely koordináták lehetővé teszik, hogy poligonok, vagy poliéderek csúcaiban értelmezett diszkrét, skalár vagy vektor mennyiségek alapján egy folytonos leképezést értelmezzünk a kontroll poligonok, vagy poliéderek belsejében, és ezáltal természetes módon deformáljunk képeket és különböző komplex alakzatokat.

Dolgozatomban összefoglalom a különböző deformációs módszereket, és az általános baricentrikus koordinátákon alapuló térfogati deformációs módszer matematikai alapjait. Ennek bemutatása során különös figyelmet fordítok arra, hogyan lehet a 2D-s baricentrikus koordinátákat használó módszert általánosítani  $n$ -oldalú, konvex, konkáv, sőt akár többszörösen összefüggő kontrollvázakra 3D-ben.

Ezt követően vizsgálom a modell lokális módosításának lehetőségét, melyre egy új módszert mutatok be többszörösen összefüggő kontrollvázak felhasználásával. Geometriai kényszereket rendelve az egyes kontrollvázakhoz, a modell egyes részei szabadon deformálhatók, míg más részei változatlanok maradnak, vagy csak a kényszerek függvényében deformálódhatnak, mozdulhatnak el.

A módszer bemutatására kifejlesztettem egy interaktív 3D-s grafikus tesztprogramot, melyben a háromszöghálós modell beolvasása és a kontrollvázak megadása után a modell egyszerűen deformálható.

## Abstract

Deforming 3D objects is often required in design and animation. Various methods can intuitively be used to deform objects without the users having to know the relevant mathematical background. These methods are classified into two main groups. One includes surface deformation methods that directly modify the surface of the object, while the other includes volumetric deformation methods that modify the space around the object and thus indirectly the model itself. The latter methods use general barycentric coordinates interpreting a continuous map inside control polygons or polyhedra based on discrete, scalar, or vector quantities interpreted at the vertices of polygons or polyhedra, thereby deforming images and various complex shapes.

In my work, both different deformation methods and the fundamentals of mathematics used in volumetric deformation based on general barycentric coordinates are summarized. Special attention has been paid to how 2D barycentric coordinates are generalized to  $n$ -sided, convex, concave, and even multiply-connected control cages in 3D.

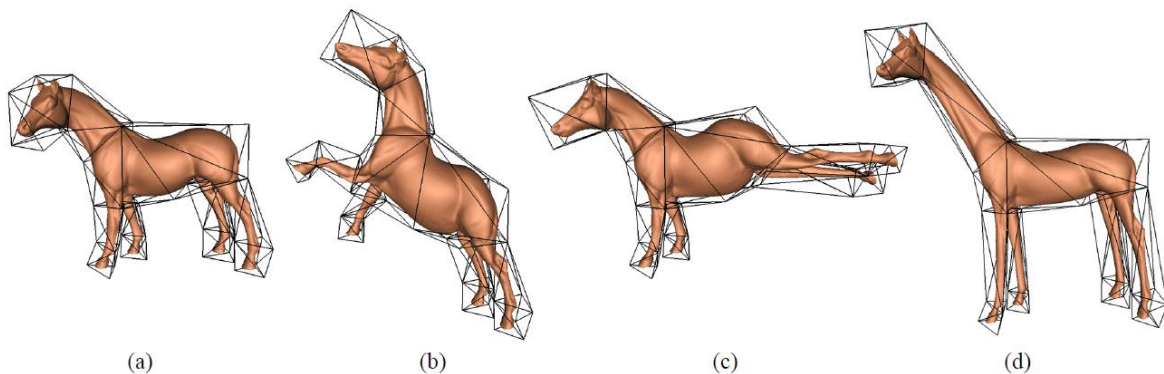
I introduce a new method for local deformations using multiply-connected control cages. By assigning geometric constraints to control cages, some parts of the model can be deformed freely, while other parts remain unchanged, or be deformed or moved depending on the constraints given.

To demonstrate the method, I have developed an interactive 3D graphic test program in which various models can be deformed easily after importing their triangle meshes and editing the control cages.

# 1. Bevezetés

Komplex 3D-s objektumok deformálására formatervezési és animációs alkalmazásokban is gyakran van szükség. Különböző módszerek léteznek, melyek segítségével intuitív módon deformálni lehet az objektumokat anélkül, hogy a felhasználónak a vonatkozó matematikai hátteret ismernie kellene. Ezen módszerek két fő csoportba sorolhatók. Az egyik csoportba a közvetlenül az objektum felületét módosító felületi deformációs módszerek, míg a másik csoportba az objektum körüli teret, és így közvetve a modellt is módosító térfogati deformációs módszerek tartoznak. Utóbbi módszerek az általános baricentrikus koordinátákat használják fel, mely koordináták lehetővé teszik, hogy poligonok, vagy poliéderek csúcsaiban értelmezett diszkrét, skalár vagy vektor mennyiségek alapján egy folytonos leképezést értelmezzünk a kontroll poligonok, vagy poliéderek belsejében, és ezáltal természetes módon deformáljunk képeket és különböző komplex alakzatokat.

Az 1. ábrán egy háromszöglapok által definiált kontrollváz segítségével történő 3D deformáció látható. A kontrollváz belsejében minden ponthoz általános baricentrikus koordinátákat lehet értelmezni, mely koordináták egyértelműen meghatározzák a kontrollvázban lévő pontok helyét. A váz kontrollpontjainak elmozdítása, azaz magának a váznak a deformációja magával viszi a benne lévő objektumot is, vagyis közvetve deformálja azt. Kis lépésekben többször végrehajtva a deformációt a belső modellhez akár animáció is készíthető.



1. ábra: Deformáció kontrollváz használatával [2]

Dolgozatom során célom a különböző deformációs módszerek, és az általános baricentrikus koordinátákon alapuló térfogati deformációs módszer matematikai alapjainak tanulmányozása, különös figyelmet fordítva, hogyan lehet a 2D-s baricentrikus koordinátákat használó módszert általánosítani  $n$ -oldalú, konvex, konkáv, sőt akár többszörösen összefüggő kontrollvázakra 3D-ben.

Ezt követően szeretném vizsgálni a modell lokális módosításának lehetőségét és egy új módszert kidolgozni bitmapek és háromszöghálós modellek lokális deformálására többszörösen összetett kontrollvázak és geometriai kényszerek alkalmazásával.

## 2. Szakirodalmi áttekintés

### 2.1 Általános áttekintés [\[1\]](#)

Egy  $S$  felület deformálása egy kívánt  $S'$  felületté matematikailag egy  $d$  elmozdulás függvénnyel írható le, mely a felület minden  $p$  pontjához egy  $d(p)$  elmozdulás vektort rendel. Az  $S$  felület pontjai így leképezhetők a deformált  $S'$  felületté:

$$S' = \{p + d(p) \mid p \in S\}.$$

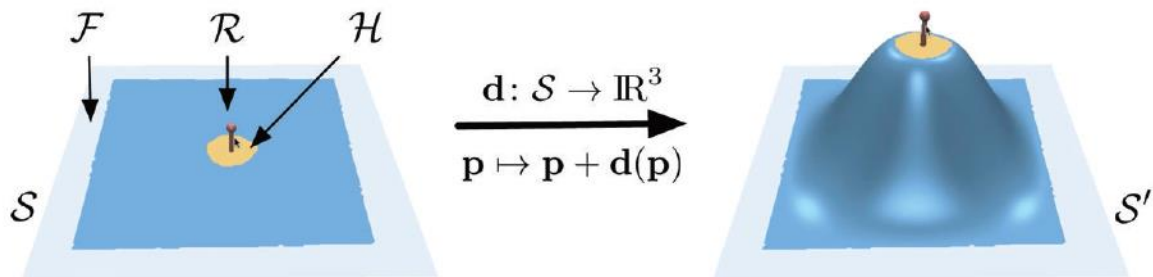
Egy háromszögháló  $d$  elmozdulás függvénye szakaszonként lineáris, vagyis a háló  $p_i$  csúcsában ( $p_i \in S$ ) lévő elmozdulás megegyezik az  $i$ -edik elmozdulás vektorral, azaz  $d_i = d_i(p_i)$ .

A 2. ábrán jól látható, hogy a felületen megkülönböztethetünk 3 különböző területet:

$\mathcal{H}$  (handle region): felhasználó által mozgatható terület,

$\mathcal{F}$  (fixed region): nem deformálódó terület (kényszer),

$\mathcal{R}$  (remaining region): maradó, deformálódó terület,  $\mathcal{R} = S \setminus (\mathcal{H} \cup \mathcal{F})$ .



2. ábra: Felület deformálása [\[1\]](#)

A  $\mathcal{H} \subset S$  terület pontjait a felhasználó szabadon mozgathatja, ezzel közvetlenül definiálva a  $p_i \in \mathcal{H}$  felületi háló pontjainak  $d_i$  elmozdulás vektorát. Az  $\mathcal{F} \subset S$  pontjai nem deformálódnak, ez, mint kényszer jelenik meg a rendszerben. Azaz összefoglalva:

$$d(p_i) = d_i, \text{ minden } p_i \in \mathcal{H},$$

$$d(p_i) = 0, \text{ minden } p_i \in \mathcal{F}.$$

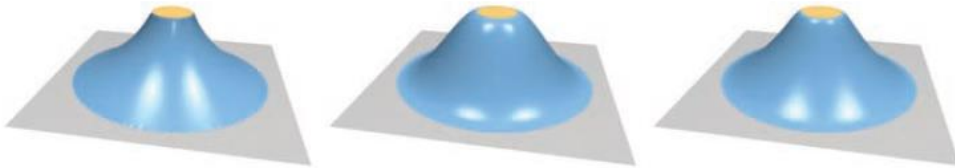
A deformációnál a fő kérdés, hogy az  $\mathcal{R}$  deformációs területet hogyan lehet fizikailag elfogadható módon deformálni.

Különböző módszerek léteznek alakzatok deformálására, melyek két fő csoportba sorolhatók. Az egyik csoportba a közvetlenül az objektum felületét deformáló, míg a másik csoportba az objektum körüli teret, és így közvetve a modellt is deformáló módszerek tartoznak. A következő alfejezetekben ezeket szeretném bemutatni egy kicsit részletesebben.

### 2.1.1 Felületi deformáció

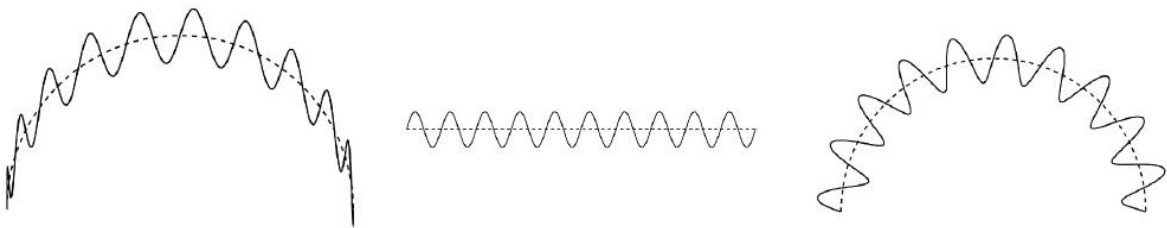
Felületi deformáció esetén az elmozdulás függvény  $d : S \rightarrow R^3$ , vagyis az eredeti  $S$  felületen hat. Így nagyfokú szabadságot hagy a felület pontjainak mozgásában, ám a megbízhatósága és hatékonysága a módszernek nagyban függ a felület hálójának minőségétől.

Több esetet különböztethetünk meg annak függvényében, hogy milyen információk adottak a deformálandó objektumról. Elsőként vegyük azt az esetet, amikor a felület hálójá egy homogén struktúra, és nincsen semmilyen apriori információ róla. Ekkor a 3. ábrán is látható módon, több lehetőség is van arra, hogy a deformálandó terület pontosan milyen alakot is öltön.



3. ábra: Több lehetőség a felület deformálására [1]

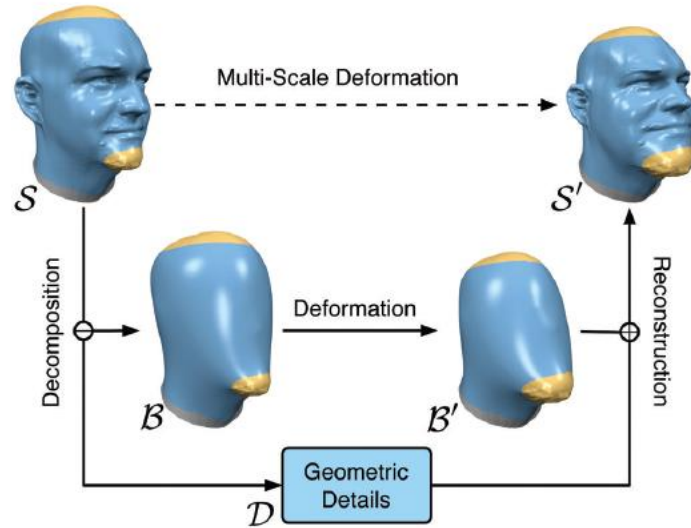
Egy másik eset, amikor már valamilyen tudással rendelkezünk az adott modellről, például kis részleteket speciális módon szeretnénk definiálni a felületen. Ezt jól szemlélteti a 4. ábra, ahol a középső hullámvonalat szeretnénk meghajlítani. Mivel szeretnénk, hogy a tengelyre merőlegesek maradjanak a hullámok a hajlítás után is, így látható, hogy a bal oldali deformált alak nem elfogadható, a jobb oldali az elvárt viselkedés.



4. ábra: Kis részletek különböző deformálása (bal és jobb oldalon különböző deformált alakok) [1]

Az 5. ábra még jobban szemlélteti a deformációt. A fejet úgy deformáljuk, hogy először ketté szedjük a modellt, magára a fejnek az alakjára (alacsony frekvenciájú ábrázolás) és az arc kis részleteire (magas frekvenciájú részletek), majd a fej formáját a kívánt módon deformáljuk, és az utolsó lépésben az arc részleteit a már deformált fejformára helyezzük vissza. Így kapjuk meg a végső deformált modellt.





5. ábra: Több lépésű deformáció [1]

Végül még azt az esetet különböztethetjük meg, ahol már szemantikai tudással is rendelkezünk a modelltől. Ilyen tudás lehet például, ha egy egyenesről tudjuk, hogy nem görbülhet, vagy egy szög deformáció után is derékszög kell maradjon. Ezeket, mint kényszereket vihetjük be a rendszerbe.

## 2.1.2 Térfogati deformáció

A térfogati deformáció az objektum körüli teret, és így közvetve magát a modellt is deformáló módszer. Ekkor az elmozdulás függvény  $d: R^3 \rightarrow R^3$ . A deformáció történhet szabályos kontrollrác, illetve szabálytalan, általános kontrollváz segítségével. Dolgozatomban ezen deformációkkal foglalkoztam 2D-ben és 3D-ben.

Az objektum körüli teret deformáló eljárásokkal nehezebb lehet magának a deformált alaknak a pontos előállítása, mint a felületi deformációs módszerek esetén. Erre egyszerűsítés lehet, ha közvetlenül a felületen veszünk fel mozgatható segédpontokat. Viszont jól látható, hogy ezen eljárások kevésbé függenek az objektum hálójának minőségétől, mint az előző módszerek esetében.

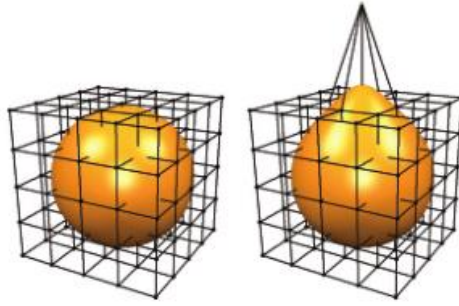
### 2.1.2.1 Szabályos kontrollrác

A modell behelyezhető egy szabályos kontrollrác struktúrába, és magának a rác pontjainak mozgásával a benne lévő tér, és így a modell is deformálható. Használhatók Bézier vagy B-spline súlyfüggvények is a kontrollrác belső pontjainak a meghatározására. Ekkor a tér pontjainak elmozdulásvektora:

$$d(u, v, w) = \sum_i \sum_j \sum_k \Delta c_{ijk} N_i(u) N_j(v) N_k(w),$$

ahol az  $N_i$ -k a Bézier vagy B-spline bázisfüggvények, melyek előre kiszámítható konstansok a modell kiértékelendő pontjaiban és  $\Delta c_{ijk} = (c'_{ijk} - c_{ijk})$  a kontrollpontok deformációja.

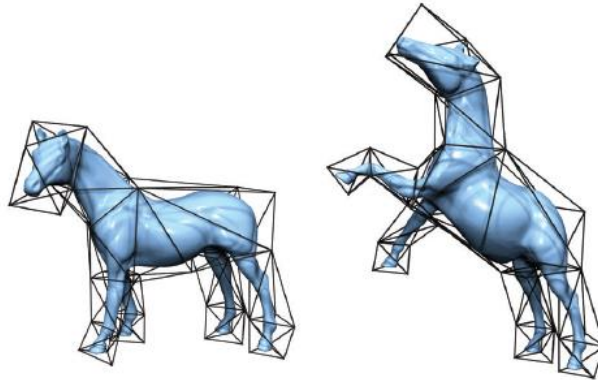
Egy kontrollrác deformációra mutat példát a 6. ábra.



6. ábra: Deformáció szabályos kontrollrác használatával [1]

### 2.1.2.2 Általános kontrollváz

Az előző módszer általánosítása az általános topológiájú kontrollváz (*control cage*) használata (7. ábra). Itt a kontrollvázon belül a modell hálójának pontjai egyértelműen meghatározhatóak az általános baricentrikus koordináták segítségével.



7. ábra: Deformáció általános kontrollváz használatával [1]

A következő fejezetekben ezen általános baricentrikus koordináták matematikai leírását és algoritmusait ismertetem először 2D-ben, majd 3D-ben.

## 2.2 Általános baricentrikus koordináták 2D-ben [2][3][8]

A baricentrikus koordináták először háromszögekre voltak értelmezve, majd ezen ötletet általánosítva ma már többoldalú, konvex, konkáv, többszörösen összetett kontrollváz struktúrákra is használják őket.

### 2.2.1 Baricentrikus koordináták háromszögekre

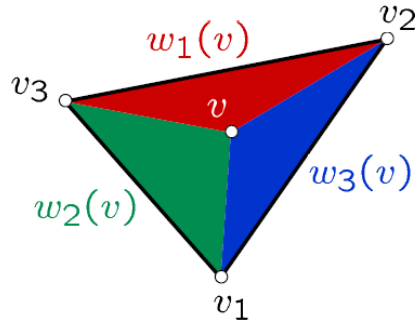
A baricentrikus koordináták háromszögekre már régóta ismertek 2D-ben. Legyen a háromszög három csúcsával:  $v_1$ ,  $v_2$  és  $v_3$  definiálva. Ekkor a háromszög egy tetszőlegesen választott  $v$  belső pontja meghatározható a csúcsai konvex kombinációjaként:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,$$

ahol a  $\lambda_i$ -k a baricentrikus koordináták, melyekről tudjuk, hogy  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  és  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ .

Háromszög esetén a baricentrikus koordináták a háromszögterületek ( $w_i$ ) segítségével fejezhetők ki (8. ábra):

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{w_1(v) + w_2(v) + w_3(v)}.$$

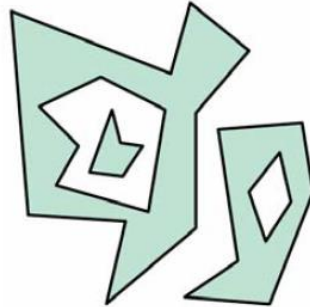


8. ábra: Baricentrikus koordináták háromszögterületekből számolva [3]

Két speciális eset különböztethetünk meg attól függően, hogy a  $v$  pontot a háromszögön belül hol választjuk meg. Az egyik eset, mikor a  $v$  pont az  $i$ -edik csúccsal esik egybe. Ekkor a  $\lambda_i(v)$  baricentrikus koordináta értéke 1. A másik esetben  $v$  a háromszög  $v_i$  és  $v_{i+1}$  csúcsai között lévő élen helyezkedik el,  $i(mod 3)$  értelemben. Ilyenkor a  $\lambda_i$  és  $\lambda_{i+1}$  koordináták összege 1, és a távolságokkal arányosan változik a baricentrikus koordináták értéke.

### 2.2.2 Általános baricentrikus koordináták

A háromszögekre bemutatott eljárás kiterjeszthető  $n$ -oldalú, konvex, konkáv, sőt akár többszörösen összetett poligon halmazokra is az általános baricentrikus koordináták segítségével. Ezen koordináták meghatározása azonban nem egyértelmű, több különböző módszert is kidolgoztak rájuk. Konvex poligonok belsejében jól használhatóak a Wachspress koordináták, míg az egymásba ágyazott kontrollváz struktúrák esetében (9. ábra) a középérték koordinátákat (*Mean Value*) alkalmazzák leggyakrabban. Munkám során a középérték koordinátákkal foglalkoztam.



9. ábra: Egymásba ágyazott kontrollváz struktúra [3]

Egy csúcsaival adott  $n$ -oldalú poligon  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  egy tetszőleges  $v$  pontja felírható a hozzá rendelt  $n$  darab  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  baricentrikus koordináta segítségével:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Minden  $v$  pontra igaz, hogy a ponthoz tartozó  $\lambda_i(v)$  koordináták összege 1:  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , de itt a háromszögeknél megismert  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  tulajdonság nem minden esetben garantálható.

A  $v$  csúcshoz tartozó  $\lambda_i$  értékeket  $n$ -oldalú sokszögek esetében is a csúcsokhoz rendelt  $w_i$  súlyok segítségével lehet meghatározni:

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)}.$$

### 2.2.2.1 Közéérték koordináták

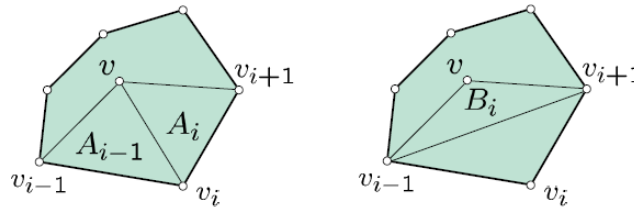
A háromszögeknél ismertetett módon, háromszögterületekből meghatározhatók az általánosított baricentrikus koordináták. Vegyünk egy tetszőleges  $v$  pontot a poligon belsejében, mely nem esik a poligon egyik csúcsára vagy élére. (Ezeket az eseteket, mint a háromszögek esetében is külön, speciális esetként kezeljük.) A  $v$  ponthoz tartozó  $w_i$  közéérték vektor súlyértéke a következő képlettel számolható:

$$w_i = \frac{c_{i+1}A_{i-1} - c_i B_i + c_{i-1}A_i}{A_{i-1}A_i},$$

ahol  $A_i$ ,  $A_{i-1}$  és  $B_i$  háromszögterületek (10. ábra),  $c_i$  pedig egy függvény, mely

- közéérték koordináta (*Mean Value*) esetén:  $c_i^{MV} = \|v - v_i\|$ ,
- Wachspress koordináta esetén:  $c_i^W = 1$ ,
- diszkrét harmonikus koordináta esetén pedig:  $c_i^{DH} = \|v - v_i\|^2$ .

Ezen  $w_i$  értékek normalizálásával kaphatók meg a  $\lambda_i$  közéérték koordináta értékek, melyek nemcsak a kontrollváz belsejében, hanem azon kívül is értelmezettek.



10. ábra:  $A_i$ ,  $A_{i-1}$  és  $B_i$  háromszögterületek az általános baricentrikus koordináták számolásához [3]

A poligon csúcsában felvett  $v$  pont esetén az adott csúcsához tartozó súly értéke 1, míg a többi csúcsé 0, vagyis

$$\lambda_i(v) = \delta_{i,j}.$$

Ha a  $v$  pont a poligon egy élén helyezkedik el, akkor az él két végpontja közt lineáris interpolációt végzünk:

$$\lambda_i(v) = (1 - \mu)\delta_{i,j} + \mu\delta_{i,j+1}.$$

A módszer nemcsak konvex, hanem konkáv, illetve többszörösen összetett poligonokra is működik, azzal a megkötéssel, hogy a poligonok nem metszhetik önmagukat és egymást sem.

### 2.2.2.2 Közéérték koordináták tulajdonságai 2D-ben

A síkbeli közéérték koordináták fontos tulajdonságai:

- 1) Lagrange tulajdonság:  $\lambda_i(v) = \delta_{i,j}$ , azaz, ha az egyik csúcspontban a közéérték koordináta értéke 1, a többi csúcsban 0.
- 2) A csúcsokat kivéve  $\lambda_i$  mindenhol  $C^\infty$  folytonos, vagyis tetszőlegesen sokszor deriválható. A csúcsokban azonban csak  $C^0$  folytonosság érhető el.
- 3) Adott  $v$  ponthoz  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) = 1$ , vagyis a közéérték koordináták összege mindig 1.
- 4) Minden  $v$  pont előáll a közéérték koordináták és a poligon csúcsainak lineáris kombinációjaként:  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v)v_i$ .
- 5) Hasonlósági transzformáció nem változtatja meg a közéérték koordináták értékét.

- 6) A középérték koordináták lineárisan függetlenek, azaz, ha minden  $v$ -re:  $\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i = 0$ , akkor minden  $i$ -re  $c_i = 0$ .
- 7) A középérték koordináták lineárisan változnak a poligon élein, az élet kifeszítő két csúcshoz rendelt érték között.
- 8)  $\lambda_i$  értéke pozitív minden olyan  $v$  pontban, ahol a hozzá tartozó  $v_i$  csúcspont látszik.

### 2.2.2.3 Középérték koordináták számítási algoritmus

Az előző alfejezetekben ismertetett középérték koordinátákat számító algoritmus pszeudokódja az oldal alján található. Az algoritmus 4 darab kétszintű ciklusból áll, mely végigmegy az összes kontrollpoligonon és azok pontjain. Az első ilyen kétszintű ciklusban a  $v$  pontból a poligon csúcsaiba mutató vektorok kigyűjtése történik meg  $s$ -be, valamint a baricentrikus koordináták kinullázásra kerülnek. A következőben  $r$ -be írjuk az  $s$ -ben lévő vektorok hosszát,  $A$ -ba pedig az előző ábrának megfelelő  $A_j$  területek kerülnek. Ha  $r_{i,j} = 0$  (azaz a  $v$  pont nulla távolságra helyezkedik el a  $v_j$ -től), akkor a  $v$  pont a poligon egy csúcsában helyezkedik el. Ekkor az aktuális csúcshoz tartozó koordináta értéke 1. Ez az eset csak egyszer állhat fent, egy csúcsetésén, így a koordinátákkal vissza is lehet térni. Ha a terület adódik nullára és a két vektor

```

function Barycentric2D(v, poly)
  for i = 1 to n do // végig minden poligonon
    for j = 1 to m_i do // végig a poligon minden csúcán
      s_{i,j} := v_{i,j} - v
      coord_{i,j} = 0 // tömb a baricentrikus koordinátáknak.
    for i = 1 to n do // végig minden poligonon
      for j = 1 to m_i do // végig a poligon minden csúcán
        r_{i,j} := ||s_{i,j}||
        A_{i,j} := det(s_{i,j}, s_{i,j+1})/2 // az A_{i,j} háromszög területe.
        D_{i,j} := <s_{i,j}, s_{i,j+1}>
        if r_{i,j} = 0 then // ha a csúcsban található a v pont (v ∈ v_i)
          coord_{i,j} := 1
          return coord
        if A_{i,j} = 0 and D_{i,j} < 0 then // ha az élen található a v pont (v ∈ e_{j,j+1})
          r_{i,j+1} := ||s_{i,j+1}||
          coord_{i,j} := (r_{i,j+1})/(r_{i,j} + r_{i,j+1})
          coord_{i,j+1} := (r_{i,j})/(r_{i,j} + r_{i,j+1})
          return coord
      W := 0
      for i = 1 to n do // végig minden poligonon
        for j = 1 to m_i do // végig a poligon minden csúcán
          w := 0
          if A_{i,j-1} ≠ 0 then
            w := w + (r_{i,j-1} - (D_{i,j-1})/r_{i,j})/A_{i,j-1}
          if A_{i,j} ≠ 0 then
            w := w + (r_{i,j+1} - (D_{i,j})/r_{i,j})/A_{i,j}
          coord_{i,j} := w
          W := W + w
      for i = 1 to n do // végig minden poligonon
        for j = 1 to m_i do // végig a poligon minden csúcán
          coord_{i,j} := coord_{i,j}/W
          return coord

```

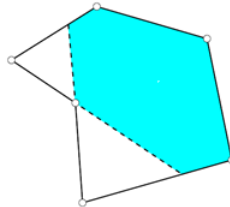
Középérték koordinátákat számoló pszeudokód [2][8]

skaláris szorzata negatív, akkor a  $v$  pont a  $v_j$  és  $v_{j+1}$  csúcsok közti élen fekszik. Ebben az esetben a két csúcshoz tartozó súlyértékek lesznek a koordináták, és ezzel vissza is térhetünk, mert ez az eset is csak egyszer fordulhat elő.

Az utolsó két kétszintű ciklus azokat az eseteket vizsgálja, mikor a  $v$  pont se nem csúcsban, se nem élen lett felvéve. A 3. ciklusban a csúcsokhoz tartozó  $w$  értékek kerülnek a koordináta tömbbe, míg a 4. ciklusban normalizálás történik, hogy a  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) = 1$  feltétel teljesüljön.

#### 2.2.2.4 Középérték koordináták eloszlása 2D-ben

Nézzük meg a  $v_1, \dots, v_n$  csúcsokkal definiált poligonon belül azoknak a  $v$  pontoknak a halmazát, melyre a  $[v, v_i]$  szakasz  $\forall v_i$ -re kizárólag  $v_i$ -ben metszi a poligont. Ez azon pontok halmaza, amelyekből a poligon minden csúcsa jól látszik. Ezt nevezzük a poligon kerneljének, magjának. Ezen belüli pontokhoz rendelt középérték koordinátákra igaz, hogy csak pozitív értékeket vehetnek fel. A poligon magja a következő ábrán látható (11. ábra).

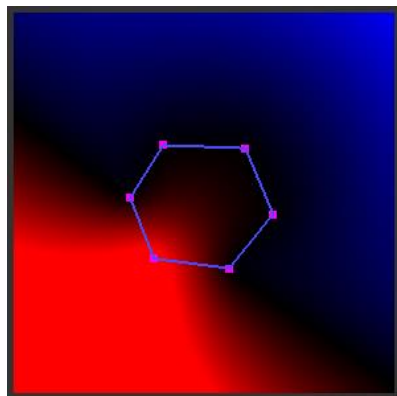


11. ábra: Konkáv poligon és magja [5]

A magon kívül eső pontokhoz is rendelhetők középérték koordináták, azonban ezen pontokra már nem áll fent, hogy kizárólag pozitív értékeket vehetnek fel. A baricentrikus koordináták a poligonon kívül is értelmezettek, és mivel ezek is a poligon magján kívül eső pontok közé tartoznak, így akár negatív értékeket is felvehetnek.

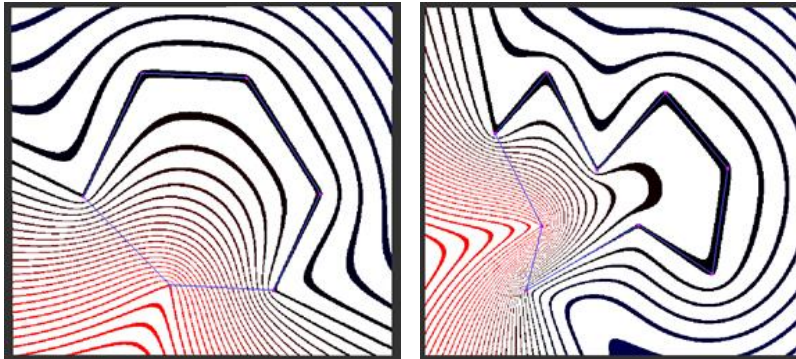
A síkbeli középérték koordináták eloszlására vonatkozó fontos tulajdonságok a 2.2.2.2 *alfejezetben* található tulajdonságok közül az 1, 2, 7 és 8 sorszámmal jelölt tulajdonságok.

A baricentrikus koordináták eloszlását jól szemléltetik az alábbi ábrák, melyek egy kontrollponthoz tartozó baricentrikus koordináták eloszlását mutatják be. A 12. ábrán bitmapen ábrázoltam az eloszlást. Az egy és annál nagyobb értékű koordináták pirossal kerültek megjelenítésre, nullában fekete, egy és nulla között fokozatos színátmenet látható pirosból feketébe. A negatív tartományban feketéből fokozatosan kék színbe átmenve lettek megjelenítve a pontokhoz rendelt koordináták.



12. ábra – Bitmap színezése egy kontrollponthoz tartozó baricentrikus koordináta alapján

A 13. és 14. ábrák megjelenítése hasonló, az eltérés mindössze annyi, hogy a konstans paramétervonalak kis környezetében, sávokban szemléltetem az eloszlást, mint egy szintvonalterkép, mely véleményem szerint szemléletesebb, de mindenképp könnyebben tanulmányozható ábrát eredményez.



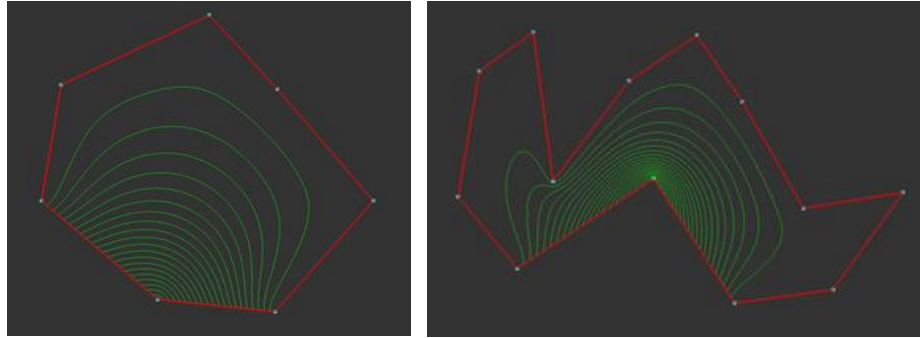
13. ábra – Bitmap alapú konstans paramétersávok (szintvonalterkép)

Az általános középérték koordináták jól használhatóak egymásba ágyazott poligonok esetén is. A 14. ábrán a belső kontrollpoligon egy pontjához tartozó szintvonalterképet láthatunk.



14. ábra – Bitmap alapú konstans paramétersávok (szintvonalterkép) egymásba ágyazott kontrollvázak esetén, simítás nélkül

A paraméterek eloszlását nemcsak bitmap segítségével vizsgáltam, hanem „marching cube” alapon követtem is a szintvonalat a poligon belsejében (15. ábra). Mint említettem, a középérték koordináták lineárisan változnak a poligon élein, az élet kifizető két csúcshoz rendelt érték között, így a szintvonal kezdő, illetve végpontja ismert volt, a poligon belsejében pedig követtem a paramétervonalat a „marching cube” technikát alkalmazva.



15. ábra – Kontrollváz egy csúcsához tartozó konstans paramétervonalak

### 2.2.2.5 Deformáció általános kontrollvázal

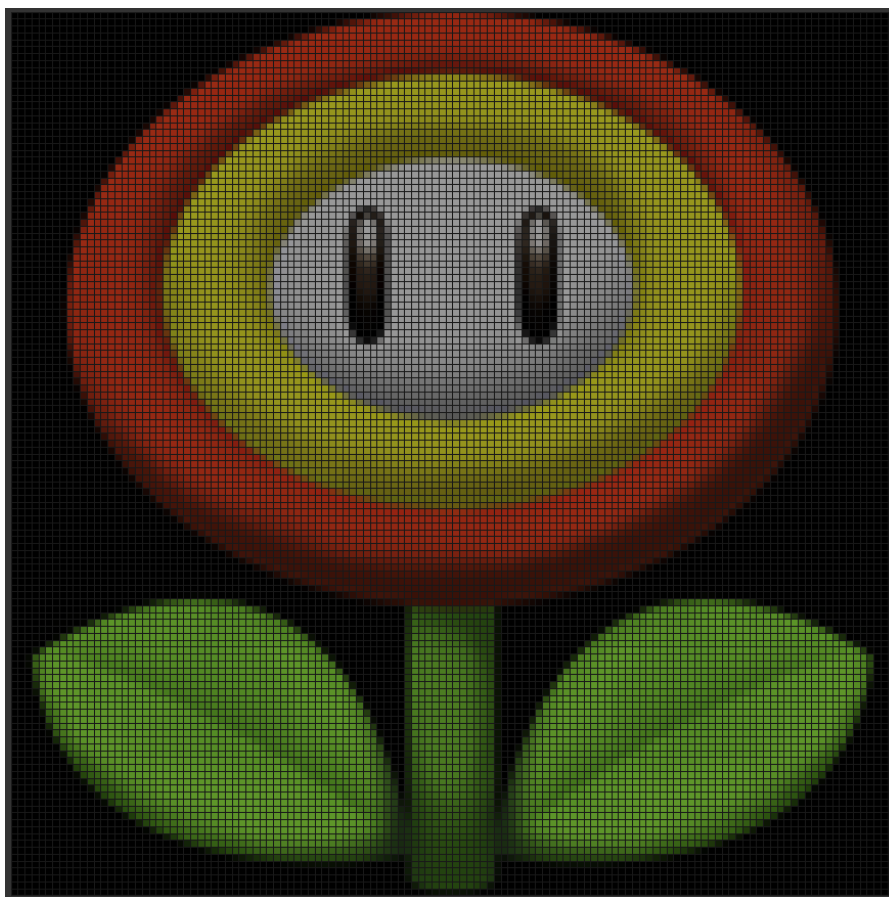
Az alább ábrákon (16-18. ábrák) bemutatok egy példát az egy darab kontrollpoligonnal történő deformációra egy virágon. A példa jól szemlélteti, hogy a középérték koordináták a kontrollvázon kívül is értelmezettek. A 18-19. ábrákon jól látható, hogy a bitmapen lévő rácsozás hogyan változik a deformáció hatására.



16. ábra: Virág deformálása kontrollpoligonnal,  
balra: módosítatlan bitmap, jobbra: deformált bitmap

Amint az említésre került az előző fejezetekben, az általános középérték koordináták jól használhatóak egymásba ágyazott poligonok esetén is. Itt fontos azonban megemlíteni, hogy a kontrollpoligonok irányítására oda kell figyelni, vagyis, ha az első poligon pontjai az óramutató járásával megegyezően lettek megadva, akkor a második poligont az óramutató járásával ellentétesen kell definiálni. Ez biztosítja, hogy a poligonok közt lévő pontok a poligonok bejárása során azonos (pl. mindkét esetben bal) oldalt legyenek, ezzel biztosítva az elvárt működést. (Ez hasonló elven alapszik, mint a háromszögháló fél-él struktúrájánál ismert bejárési irány, vagyis, hogy az anyag mindig a bal oldalon van.)



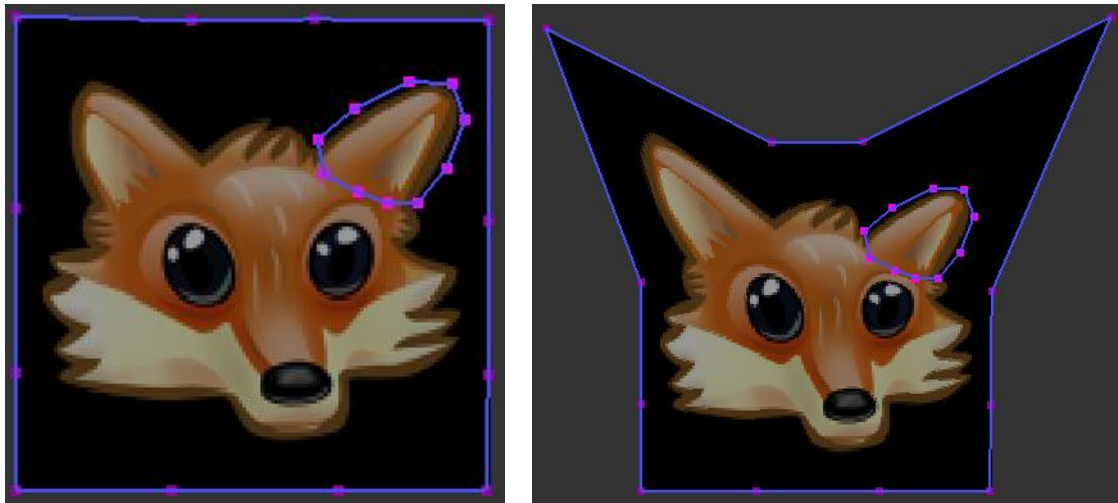


17. ábra: Eredeti kép - virág rácsozással

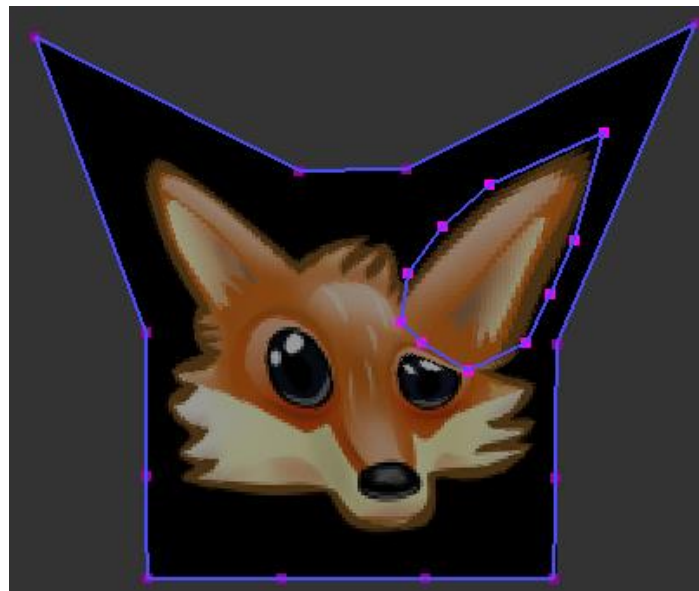


18. ábra: Deformált kép - virág rácsozással

Egymásba ágyazott poligonok esetén a belső poligonban lévő rácspontok kizárólag a belső poligon pontjainak mozgására változnak, vagyis baricentrikus koordinátáik kizárólag a belső kontrollpoligontól származnak.

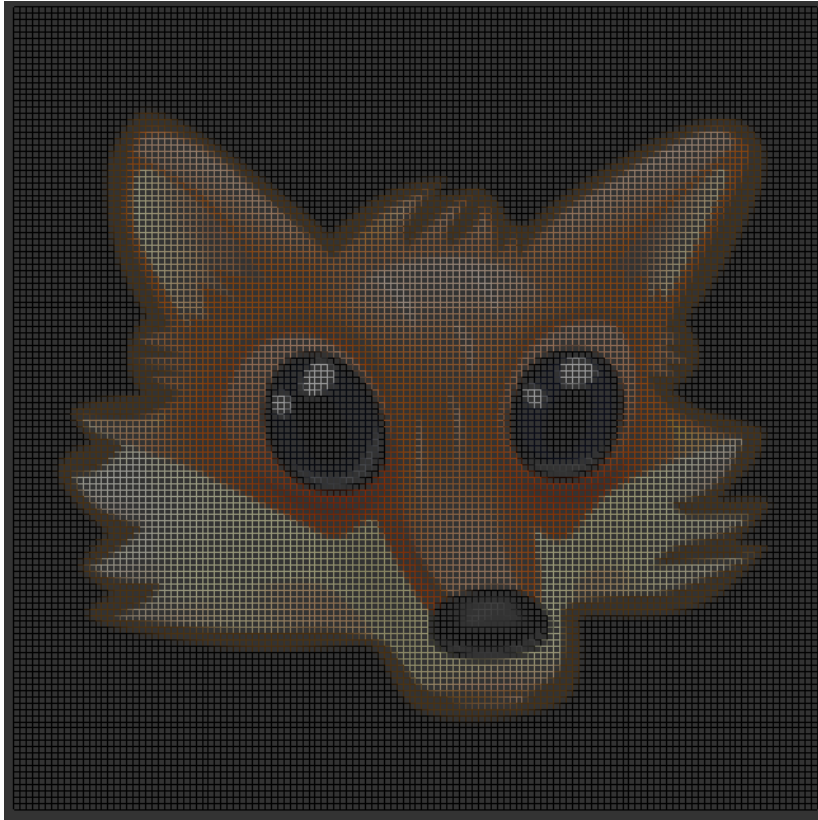


19. ábra: Egymásba ágyazott kontrollváz – deformáció a külső kontrollpoligon mozgására

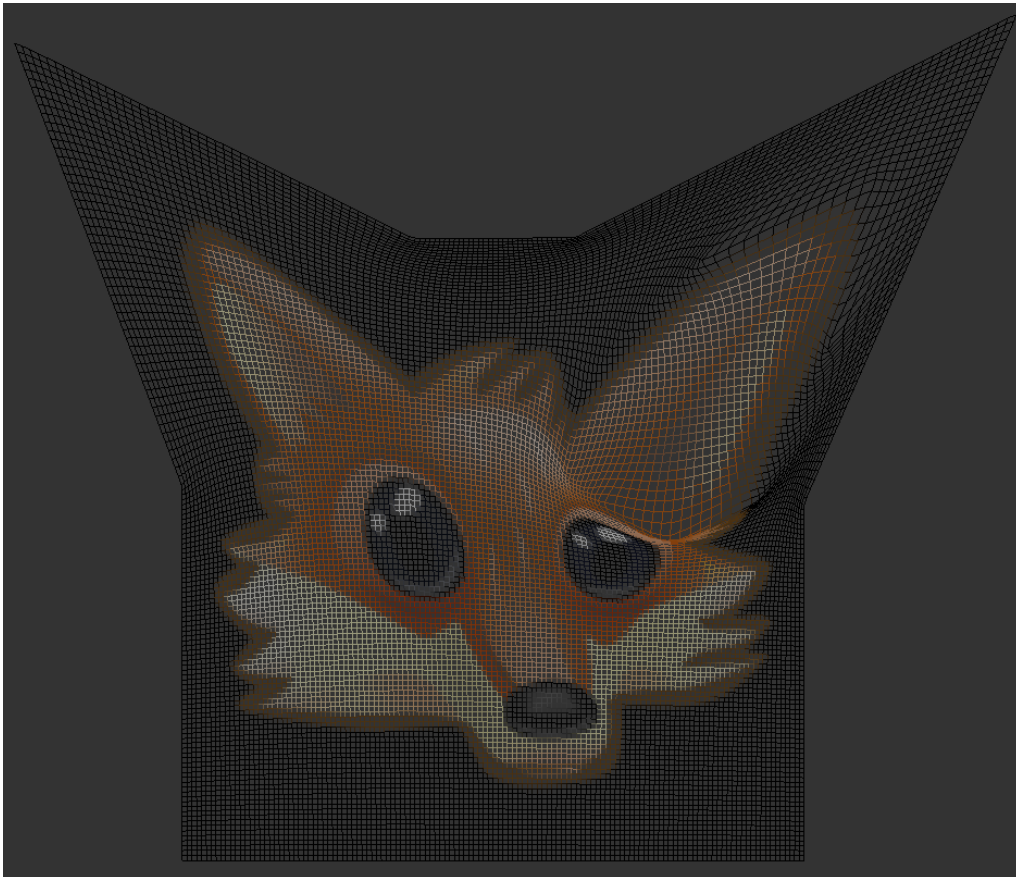


20. ábra: Egymásba ágyazott kontrollváz – deformáció a belső kontrollpoligon mozgására

Ezt a működést jól szemlélteti a 19. ábra. A külső kontrollpoligon pontjainak mozgására a róka belső poligonban lévő füle változatlan marad, míg a másik füle (és teljes arca) deformálódik. A 20. ábrán pedig jól látható, hogy a belső kontrollpoligon pontjainak mozgására a teljes kép változik. A 21-22. ábrákon az eredeti kép rácsozása, valamint a deformált kép rácsozása látható.

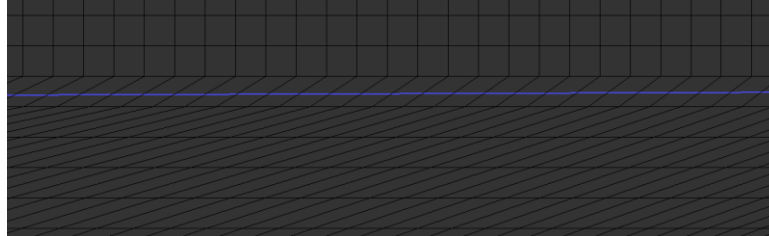


21. ábra: Eredeti kép rácsozással



22. ábra: Deformált kép rácsozással

A belső poligonban lévő rácspontok baricentrikus koordinátái kizárólag a belső poligontól származnak, azonban az azon kívül eső pontok a belső és külső kontrollpoligonoktól is kapnak baricentrikus koordinátákat egymásba ágyazott kontrollvázak esetén. Ez biztosítja, hogy szakadás ne következzen be a kontrollváz határain. Ezt jól szemlélteti az alábbi ábra. Szakadás nincsen, azonban a rácsvonalak a belső kontrollpoligon határán megtörnek. Ennek javítására a 3. fejezetben bemutatott lokális módosításra használt eljárás javasol megoldást a baricentrikus koordináták simítási zónában való módosításával.



23. ábra: Rácsvonalak törése a belső kontrollpoligon határa mentén

### 2.2.2.6 Középpérték koordináták - másik interpretáció<sup>[4][5]</sup>

Szeretnék bemutatni egy másik szemléletmódot a középpérték koordináták számolására, az előző alfejezetben részletezett háromszögterületekkel számoló megoldás mellett, hogy a 2.3 alfejezetben tárgyalt 3D-s eset vizsgálata könnyebben érthető legyen.

Legyen egy poligon  $n$  darab csúcsával:  $v_1, v_2, \dots, v_n$  definiálva. Ekkor a poligon egy tetszőlegesen választott  $v$  belső pontja meghatározható a csúcsai konvex kombinációjaként:

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot v_i,$$

ahol a  $\lambda_i$ -k a baricentrikus koordináták, melyekről tudjuk, hogy  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  és  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ .

Vegyünk egy  $v$  középpontú egységsugarú kört, és a 24. ábrán látható módon vetítsük a poligon  $n$  darab csúcsát az egységkörre. Az ábráról leolvasható, hogy:

$$e_i = (\cos \varphi_i, \sin \varphi_i),$$

$$\alpha_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i,$$

$$e_i = \frac{v_i - v}{\|v_i - v\|}.$$

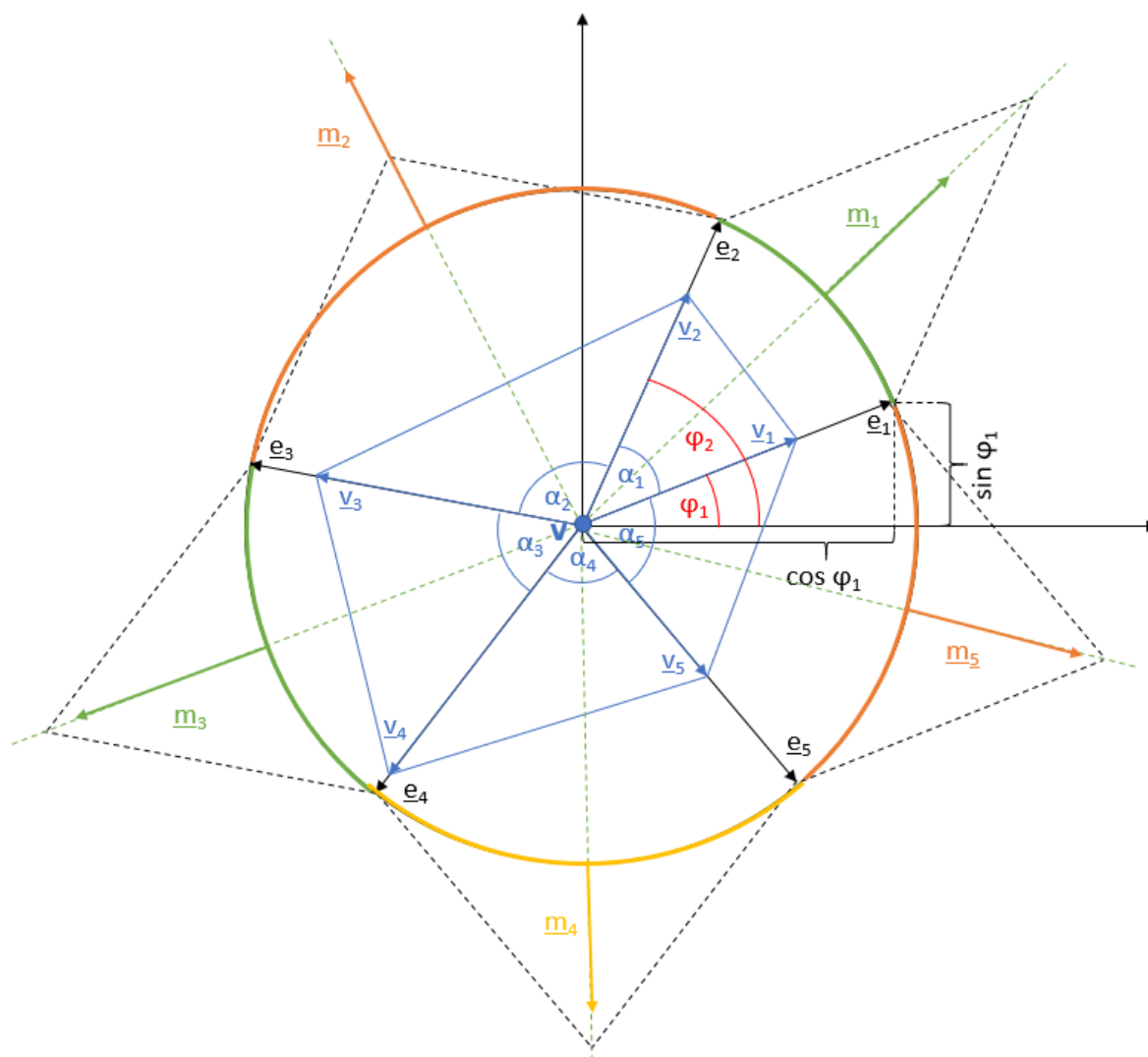
A jól ismert alapegyenletünk:  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot v_i = v$ , és mivel tudjuk, hogy  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , ezért  $v$  pont a következőképpen is felírható:  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot v$ . Ezt az előző egyenletbe helyettesítve:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot v,$$

amit átrendezve kapjuk:  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot (v_i - v) = 0$ .

Felhasználva, hogy  $\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)}$  (vagyis  $w_i(v) = \lambda_i(v) \cdot \sum_{j=1}^n w_j(v)$ ), és beszorozva  $\sum_{j=1}^n w_j(v)$ -vel adódik, hogy:

$$\sum_{i=1}^n w_i(v) \cdot (v_i - v) = 0.$$



24. ábra: Egységkör

Tételezzük fel, hogy sikerül konstruálnunk olyan  $c_i(v)$  függvényeket, melyekre teljesül a  $\sum_{i=1}^n c_i(v)e_i = 0$  egyenlet. Ebben az esetben a feladatot megoldottnak tekinthetjük, hiszen ekkor  $w_i(v)$  kifejezhető az alábbi alakban:

$$w_i(v) = \frac{c_i(v)}{\|v_i - v\|}.$$

Tudjuk, hogy az egységnormális integrálja az egységsugarú körön:

$$\int n(\varphi) d\varphi = 0,$$

mely felírható a következő alakban is:

$$\sum_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} n(\varphi) d\varphi = \sum_i m_i = 0,$$

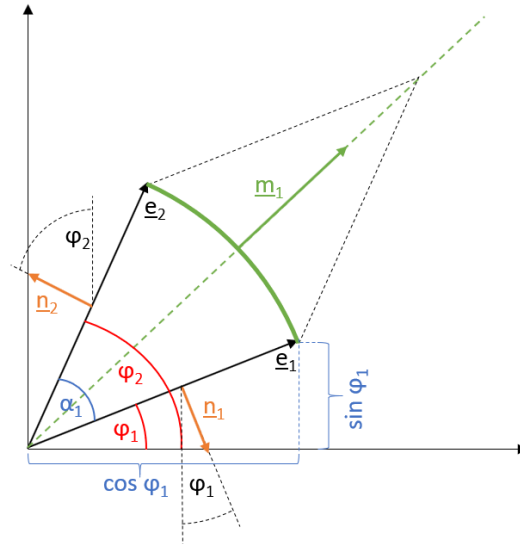
ahol  $m_i = \tan \frac{\alpha_i}{2} \cdot (e_i + e_{i+1})$ . Ezt hamarosan bizonyítjuk is.

A  $\sum_i m_i$ -t véve láthatjuk, hogy  $e_i$  benne van  $m_i$ -ben és  $m_{i-1}$ -ben is, vagyis kétszer fordul elő a  $\sum_i m_i$ -ben. Így  $e_i$  segítségével felírva az egyenletet:

$$\sum_i \left( \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2} + \tan \frac{\alpha_i}{2} \right) \cdot e_i = \sum_{i=1}^n c_i(v) e_i = 0,$$

azaz visszakaptuk a keresett alakot.

Most pedig kanyarodjunk vissza és nézzük meg az  $m_i = \tan \frac{\alpha_i}{2} \cdot (e_i + e_{i+1})$  bizonyítását. Ehhez integráljuk a normálvektor a  $[\varphi_1, \varphi_2]$  tartományon (25. ábra):



25. ábra: Normálvektorok

Az ábrát nézve belátható, hogy:

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} n(\varphi) d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = [\sin \varphi, -\cos \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \\ &= (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1, -(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy:

$$\tan \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = -\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta},$$

felírható két szög különbségének is a tangense:

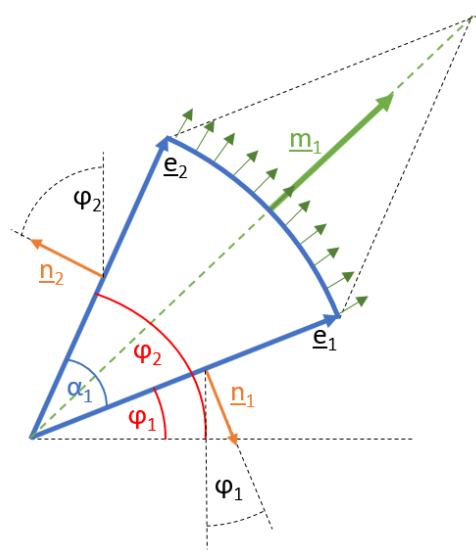
$$\tan \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = -\frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}.$$

Legyen most  $\alpha = \varphi_2$  és  $\beta = \varphi_1$ , ekkor felírható, hogy

$$\begin{aligned} m_1 &= (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1, -(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)) = \\ &= \tan \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cdot (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2, \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = \\ &= \tan \frac{\alpha_1}{2} \cdot (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2, \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = \end{aligned}$$

$$= \tan \frac{\alpha_1}{2} \cdot ((\cos \varphi_1, \sin \varphi_1) + (\cos \varphi_2, \sin \varphi_2)) = \tan \frac{\alpha_1}{2} \cdot (e_1 + e_2),$$

vagyis megkaptuk a kívánt  $m_i = \tan \frac{\alpha_i}{2} \cdot (e_i + e_{i+1})$  formulát.



26. ábra: Körcikk

Mivel tudjuk, hogy a 26. ábrán látható körcikk körül az integrál nulla, felírható, hogy:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} n(\varphi) d\varphi + \int_{e_1} n_1 d\varphi + \int_{e_2} n_2 d\varphi = 0,$$

vagyis

$$m_1 = (-n_1) + (-n_2),$$

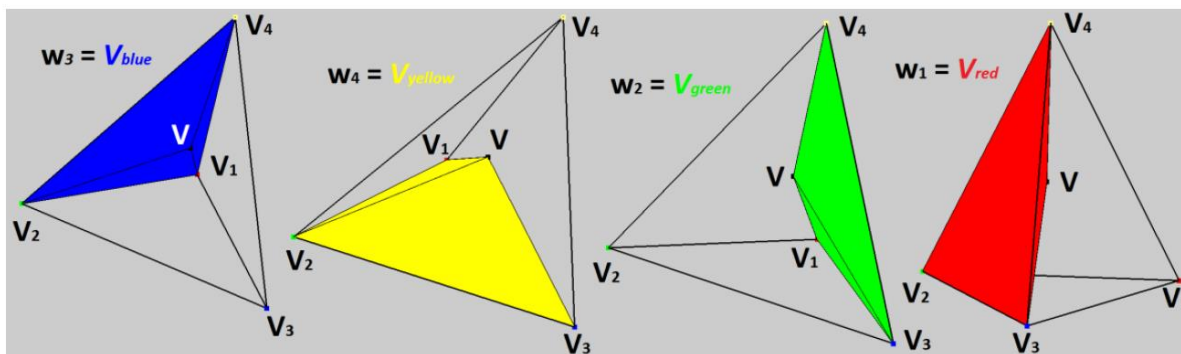
ahol  $n_1 = (\sin \varphi_1, -\cos \varphi_1)$  és  $n_2 = (-\sin \varphi_2, \cos \varphi_2)$ . Azaz megkaptuk a körív normálvektorát.

Ezzel beláttuk, hogy a 2.2.2.1 alfejezetben részletezett háromszögterületekkel számoló megoldás mellett a középérték koordináták számolhatók az egységsugarú körre vetített poligon integrálvektorainak kombinációjaként.

### 2.3 Általános baricentrikus koordináták 3D-ben

Mint azt korábban láthattuk, a baricentrikus koordináták először háromszögekre voltak értelmezve, majd ezen ötletet általánosítva ma már többoldalú, konvex, konkáv, többszörösen összetett kontrollváz struktúrákra is használják őket 2D-ben. Azonban nemcsak síkban, hanem térben is értelmezhetőek a baricentrikus koordináták.

Síkban a háromszög egy belső pontja a pontból a háromszög csúcaiba húzott szakaszok által létrejövő háromszögek területeinek segítségével számolható. 3D-ben egy belső pont hasonlóan számolható, a különbség, hogy térben területek helyett térfogatokkal súlyozunk. Például egy tetraéder esetében (27. ábra), a tetraéder egy  $v$  belső pontjából a tetraéder csúcaiba húzott szakaszok a tetraédert 4 kisebb tetraéderre bontják. Ezen tetraéderek térfogatainak segítségével a belső ponthoz tartozó baricentrikus koordináták könnyen kiértékelhetők.



27. ábra: Térfogatok baricentrikus koordináták számolásához [8]

Legyen a tetraéder négy csúcsával:  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  és  $v_4$  definiálva. Ekkor a tetraéder egy tetszőlegesen választott  $v$  belső pontja meghatározható a csúcsai konvex kombinációjaként:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4,$$

ahol a  $\lambda_i$ -k a baricentrikus koordináták, melyekről tudjuk, hogy  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  és  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ . Tetraéder esetén a baricentrikus koordináták a tetraédertérfogatok ( $w_i$ ) segítségével fejezhetők ki (27. ábra):

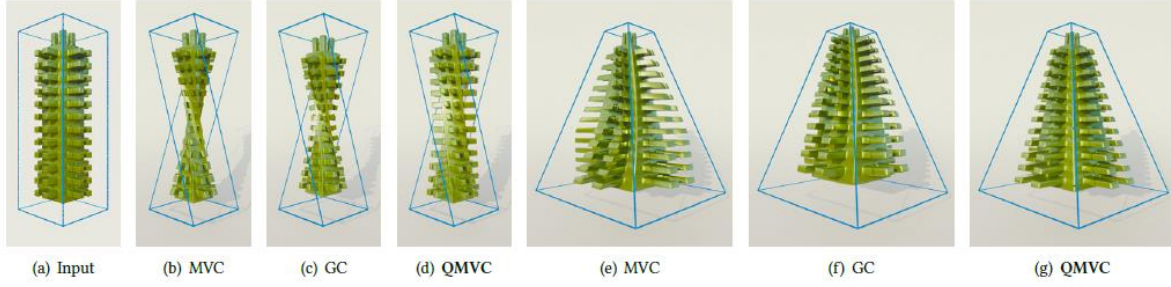
$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{w_1(v) + w_2(v) + w_3(v) + w_4(v)}.$$

Tehát láthatjuk, hogy a klasszikus baricentrikus koordináták segítségével egy tetraéderben lévő  $v$  pont kifejezhető a tetraéder négy csúcsának konvex kombinációjaként.

A baricentrikus koordináták 2D-ben nemcsak háromszögekre értelmezettek, hanem általános poligonokra is. Ez 3D-ben is hasonlóan igaz, azaz nincs megkötve a kezünk, hogy csak tetraéderekkel dolgozhassunk. Tetszőleges poliéderekre is ugyanúgy értelmezettek az általános baricentrikus koordináták, és a poliédereknek lehetnek háromoldalú, négyoldalú, sőt akár általános,  $N$ -oldalú lapjai is. Itt is több lehetőségünk van, hogy a  $v$  ponthoz tartozó  $w_i$  súlyértékeket milyen módszerrel számoljuk ki. Beszélhetünk középérték koordinátákról (*Mean Value Coordinates – MVC*), Wachspress koordinátákról, diszkrét harmonikus koordinátákról, Green koordinátákról (*GC*), vagy esetleg Quad középérték koordinátákról (*QMVC*).

Attól függően, hogy milyen koordinátákat is használunk pontosan, és hány oldalú lapokat engedünk meg a kontrollvázunkban, különböző minőségű deformációkat kaphatunk a módosítani kívánt modellünkön. Ezt jól szemlélteti a 28. ábra, melynek bal oldalán látható az eredeti modell, és három különböző baricentrikus koordinátát használva (*MVC*, *GC* és *QMVC*) mutat be két eltérő deformációt. Jól látható az ábrán, hogy attól függően, milyen koordinátát használunk, más és más deformált alakot kaphatunk. A három és négyoldalú lapok által definiált kontrollvázat használó *QMVC* koordináták már közel valósághűen deformált modellt is eredményezhetnek ([7]).





28. ábra: Deformáció - különböző módszerek összehasonlítása [7]

### 2.3.1 Középérték koordináták

A következő alfejezetekben a háromoldalú, valamint általános,  $N$ -oldalú poliéderek alkotta kontrollvázban részletezem a középérték koordináták számítását.

#### 2.3.1.1 Háromszöglapokkal definiált kontrollváz [4][5][6][8]

Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  egy kizárólag háromszöglapokkal határolt poliéder (kontrollváz), aminek csúcsai  $v_1, \dots, v_n$ , ahol  $\forall v_i \in \mathbb{R}^3$ . Továbbá legyen  $K \subset \Omega$  azon  $v_i$  poliéderen belüli pontok halmaza, melyre a  $[v, v_i]$  szakasz  $\forall v_i$ -re kizárólag  $v_i$ -ben metszi a poliéder felületét. Vagyis  $K$  azon pontok halmaza, amelyekből a poliéder minden csúcsa és lapja jól látszik. Ezt nevezzük a poliéder kerneljének, magjának. Ezen belüli pontokhoz rendelt középérték koordinátákra igaz, hogy csak pozitív értékeket vehetnek fel. A mag egy síkbeli metszete látható a 11. ábrán.

A magon kívül eső pontokhoz is rendelhetők középérték koordináták, azonban ezen pontokra már nem áll fenn, hogy kizárólag pozitív értékeket vehetnek fel.

A célunk továbbra is az, mint a 2D esetben, hogy az alábbi feltételek teljesüljenek:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot v_i = v \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

vagyis 
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot (v_i - v) = 0,$$

ahol 
$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)}.$$

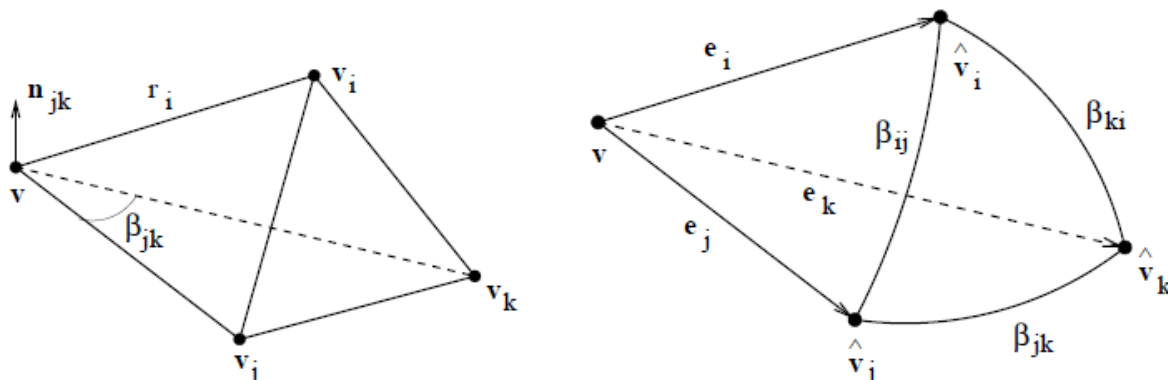
Mivel a fejezetben csak olyan kontrollvázal foglalkozunk, mely kizárólag háromszöglapokból épül fel, fogalmazhatunk úgy is, hogy magát az  $\Omega$  poliéderünket egy  $T$  háromszögekből álló  $\tau$  háromszögháló határoolja. Ekkor minden  $v$  pont és az azonos sodrású  $[v_i, v_j, v_k] \in \tau$  háromszögek egy  $[v, v_i, v_j, v_k]$  tetraédert alkotnak.

Képezzük le ezt a tetraéderünket egy egységsugarú  $S$  gömb felületére a 29. ábra alapján, ahol  $r_i = \|v_i - v\|$  az adott  $v$  pontból a  $v_i$  csúcsba mutató vektor hossza,  $e_i = (v_i - v)/r_i$  pedig az egységvektor. Ekkor a  $v$  középpontú egységgömbön lévő gömbi háromszög csúcsa  $\hat{v}_i = v + e_i$ . A háromszögháló minden  $T = [v_i, v_j, v_k]$  háromszögének lesz egy  $\hat{T} = [\hat{v}_i, \hat{v}_j, \hat{v}_k]$  gömbi háromszög párja az  $S$  egységgömb felületén.

A gömb felületén lévő egységnormálisokról tudjuk, hogy integráljuk nulla:

$$\int_S n(p) dS = \int_S (p - v) dS = 0, \text{ ahol } p \in S.$$

Ennek kiszámítása bonyolult lenne, inkább használjuk fel azt a tulajdonságot, hogy a tetraéder egységgömbre vetítéséből előálló téridomra is igaz, hogy felületi normálisaik integrálja nulla.



29. ábra: Tetraéder és gömbi háromszög [5]

Tehát a határoló körcikkék ( $F_{jk}, F_{ki}, F_{ij}$ ) és a  $\hat{T}$  gömbi háromszög által határolt téridomra (29. ábra, jobb oldal) teljesül:

$$\int_{\hat{T}} n(p) d\hat{T} + \int_{F_{jk}} n(p) dF + \int_{F_{ki}} n(p) dF + \int_{F_{ij}} n(p) dF = 0,$$

vagyis 
$$\int_{\hat{T}} n(p) d\hat{T} = - \int_{F_{jk}} n(p) dF - \int_{F_{ki}} n(p) dF - \int_{F_{ij}} n(p) dF,$$

ahol  $F_{rs}$  az  $e_r$  és  $e_s$  egységvektorok által bezárt körcikk, (ahol  $r, s \in \{i, j, k\}$  és  $r \neq s$ ). Összegezve ezt a teljes gömbfelületre kapjuk, hogy:

$$\int_S n(p) dS = \int_S (p - v) dS = \sum_{T \in \tau} \int_{\hat{T}} (p - v) d\hat{T} = 0,$$

ahol  $p - v = e$ , azaz az egységvektorral egyezik meg, mely felírható a következő alakban is a  $\tau_i(e)$ ,  $\tau_j(e)$  és  $\tau_k(e)$  gömbi baricentrikus koordináták segítségével:

$$e = \tau_i(e) \cdot e_i + \tau_j(e) \cdot e_j + \tau_k(e) \cdot e_k.$$

Ezt visszahelyettesítve az integrálba:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{T}} (p - v) d\hat{T} &= \int_{\hat{T}} e d\hat{T} = \int_{\hat{T}} \tau_i(e) \cdot e_i + \tau_j(e) \cdot e_j + \tau_k(e) \cdot e_k d\hat{T} = \\ &= \int_{\hat{T}} (\tau_i(e) \cdot e_i) d\hat{T} + \int_{\hat{T}} (\tau_j(e) \cdot e_j) d\hat{T} + \int_{\hat{T}} (\tau_k(e) \cdot e_k) d\hat{T} = \\ &= \mu_{iT} \cdot e_i + \mu_{jT} \cdot e_j + \mu_{kT} \cdot e_k, \end{aligned}$$

ahol  $\mu_{sT} = \int_{\hat{T}} \tau_s(e) d\hat{T} > 0$ ,  $s \in \{i, j, k\}$  együttható. Vagyis a  $v$  pontból a gömbi háromszög csúcsaiba mutató egységvektorok lineáris kombinációja határozza meg az integrálvektort.

Ezt összegezve a  $\tau$  háromszögháló felületére:

$$0 = \sum_{i=1}^n (\sum_{(v_i \in T)} \mu_{iT} \cdot e_i) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot (v_i - v) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot r_i,$$

ahol  $w_i = \frac{1}{r_i} \cdot \sum_{(v_i \in T)} \mu_{iT} > 0$ . Ez az összefüggés teljesen analógiába hozható a 2D-s formulával az alábbiak alapján.

A már említett  $\mu_{sT}$  együtthatók kiszámolása a következőképpen történik. Vegyük észre, hogy az  $e_r$  és  $e_s$  egységvektorok által bezárt  $F_{rs}$  körcikk területe az egységvektorok által bezárt  $\beta_{rs}$  szögnek éppen a fele. Ezt felhasználva:

$$\int_{\hat{T}} (p - v) d\hat{T} = \frac{1}{2} \cdot (\beta_{ij} \cdot n_{ij} + \beta_{jk} \cdot n_{jk} + \beta_{ki} \cdot n_{ki}), \text{ ahol } n_{rs} = (e_r \times e_s) / |e_r \times e_s|,$$

és felhasználva, hogy  $\int_{\hat{T}} (p - v) d\hat{T} = \mu_{iT} \cdot e_i + \mu_{jT} \cdot e_j + \mu_{kT} \cdot e_k$ :

$$\mu_{iT} \cdot e_i + \mu_{jT} \cdot e_j + \mu_{kT} \cdot e_k = \frac{1}{2} \cdot (\beta_{ij} \cdot n_{ij} + \beta_{jk} \cdot n_{jk} + \beta_{ki} \cdot n_{ki}) \quad / \cdot n_{jk}$$

$$\begin{aligned} \mu_{iT} \cdot e_i \cdot n_{jk} + \mu_{jT} \cdot e_j \cdot n_{jk} + \mu_{kT} \cdot e_k \cdot n_{jk} &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\beta_{ij} \cdot n_{ij} \cdot n_{jk} + \beta_{jk} \cdot n_{jk} \cdot n_{jk} + \beta_{ki} \cdot n_{ki} \cdot n_{jk}) \end{aligned}$$

$$\mu_{iT} \cdot e_i \cdot n_{jk} + \mu_{jT} \cdot 0 + \mu_{kT} \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot (\beta_{ij} \cdot n_{ij} \cdot n_{jk} + \beta_{jk} \cdot 1 + \beta_{ki} \cdot n_{ki} \cdot n_{jk})$$

$$\mu_{iT} \cdot e_i \cdot n_{jk} = \frac{1}{2} \cdot (\beta_{ij} \cdot n_{ij} \cdot n_{jk} + \beta_{jk} + \beta_{ki} \cdot n_{ki} \cdot n_{jk})$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy:

$$\mu_{iT} = \frac{\beta_{ij} \cdot n_{ij} \cdot n_{jk} + \beta_{jk} + \beta_{ki} \cdot n_{ki} \cdot n_{jk}}{2 \cdot e_i \cdot n_{jk}}.$$

Hasonlóan levezethetők a  $\mu_{jT}$  és a  $\mu_{kT}$  együtthatók:

$$\mu_{jT} = \frac{\beta_{ij} \cdot n_{ij} \cdot n_{ki} + \beta_{jk} \cdot n_{jk} \cdot n_{ki} + \beta_{ki}}{2 \cdot e_j \cdot n_{ki}},$$

$$\mu_{kT} = \frac{\beta_{ij} + \beta_{jk} \cdot n_{jk} \cdot n_{ij} + \beta_{ki} \cdot n_{ki} \cdot n_{ij}}{2 \cdot e_k \cdot n_{ij}}.$$

Kiértékelve a  $\mu$  együtthatókat az összes háromszögre, és azokat a saját csúcsaikhoz rendezve megkaphatjuk minden  $v_i$  csúcsához a hozzátartozó súlyértéket:

$$w_i = \frac{1}{r_i} \cdot \sum_{(v_i \in T)} \mu_{iT}.$$

Ezt normalizálva kapjuk meg a  $v$  ponthoz tartozó térbeli középérték koordinátákat, melyek kielégítik a feltételeinket:

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)}.$$

A 2D-hez hasonlóan 3D-ben is megkülönböztetünk speciális eseteket annak függvényében, hogy a  $v$  pont a poliéderen belül hol helyezkedik el, hogy elkerüljük a numerikus hibákat. A speciális esetek a következők.

- A poliéder csúcsában felvett  $v$  pont esetén az adott csúcshoz tartozó súly értéke 1, míg a többi csúcsé 0, vagyis

$$\lambda_i(v) = \delta_{i,j}.$$

- Ha a  $v$  pont a poliéder egy élén helyezkedik el, akkor az él két végpontja közt lineáris interpolációt végzünk:

$$\lambda_i(v) = (1 - \mu) \cdot \delta_{i,j} + \mu \cdot \delta_{i,j+1}.$$

- Ha pedig a  $v$  pont a poliéder egy lapján található, akkor síkbeli középérték koordinátákat számolhatunk a háromoldalú lap csúcsaira. Ekkor a poliéder többi csúcsának súlya nulla.

A fejezetben bemutatott általános eset akkor áll fenn, ha az előbb említett 3 speciális eset közül egyik sem lép fel, vagyis mikor a konvex vagy konkáv poliéderen belül található  $v$  ponthoz keressük a középérték koordinátákat.

A középérték koordináták számítását bemutató pszeudokód a következő oldalon található, fontosabb lépéseit pedig tekintsük most át. Az első ciklusban a  $v$  pontból a poligon csúcsaiba mutató vektorok kigyűjtése történik meg  $s$ -be,  $r$ -be az  $s$ -ben lévő vektorok hosszát írjuk, valamint a baricentrikus koordináták kinullázásra kerülnek. A következő 3 ciklus az előbb részletezett speciális esetek vizsgálatával foglalkozik. Ha  $r_i = 0$  (azaz a  $v$  pont nulla távolságra helyezkedik el a  $v_i$ -től), akkor a  $v$  pont a poliéder egy csúcsában helyezkedik el. Ekkor az aktuális csúcshoz tartozó koordináta értéke 1. Ez az eset csak egyszer állhat fent, egy csúcs esetén, így a koordinátákkal vissza is lehet térni. Ha a  $v$  pontból az él két csúcsába mutató vektorok hosszának összege megegyezik az él hosszával, akkor a  $v$  pont a  $p_1$  és  $p_2$  csúcsok által kifeszített élen fekszik. Ebben az esetben a két csúcshoz tartozó súlyértékek lesznek a koordináták, és ezzel vissza is térhetünk, mert ez az eset is csak egyszer fordulhat elő. Ha a  $v$  pontot a lap három csúcsával kötjük össze, és ezen szakaszok közti szögek összege kiadja a  $360^\circ$ -ot, akkor ebben az esetben a  $v$  pont az aktuális lapon helyezkedik el. Ekkor a síkbeli esethez hasonlóan számolhatók a lap 3 csúcsához a középérték koordináták. Mivel ez az eset is csak egyszer fordulhat elő, vissza is térhetünk a koordinátatömbbel. Amennyiben nem áll fent egyik speciális eset sem, úgy a fejezetben részletezett számításhoz fordulhatunk. Számoljuk ki minden lapra az  $e$  egységvektorokat, az általuk bezárt  $\beta$  szögeket, valamint a hozzájuk tartozó  $n$  felületi normálisokat. Ezek segítségével számolhatók a  $\mu$  együtthatók a háromszög csúcsaira és a csúcsokhoz rendelt koordinátatömb megfelelő elemeit növeljük meg a kiszámolt együtthatók értékével, hogy megkapjuk a ciklus végén a csúcsokhoz rendelt súlyértékeket. Ekkor a koordináta tömbünkben minden  $i$  csúcshoz a  $\lambda_i$  középérték koordináta értékek helyett a  $w_i$  súlyértékek szerepelnek. Ennek javítására a  $W$ -ben összegyűjtjük az összsúly, azaz a  $\sum_j w_j$  értéket. Ezzel normalizálva kapjuk meg a középérték koordinátákat a koordináta tömbben.

```

function Barycentric3D_Triangle(v, poly)
  for i = 1 to n do // végig minden csúcson
    si := vi - v
    ri := ||vi - v||
    coordi := 0 // tömb a baricentrikus koordinátáknak.
  for i = 1 to n do // végig minden csúcson
    if ri = 0 then // ha a csúcsban található a v pont (v ∈ vi)
      coordi := 0
    return coord
  for i = 1 to m do // végig minden élen
    p1 := li,from //él kezdőpontja
    p2 := li,to //él végpontja
    if ||p1 - v|| + ||p2 - v|| = ||li|| then // ha az élen található a v pont (v ∈ li)
      coordi,1 := ||p2 - v||/||li||
      coordi,2 := ||p1 - v||/||li||
    return coord
  for i = 1 to q do // végig minden lapon
     $\varphi_1 := |\text{acos}(\langle f_{i,1} - v, f_{i,2} - v \rangle)|$ 
     $\varphi_2 := |\text{acos}(\langle f_{i,2} - v, f_{i,3} - v \rangle)|$ 
     $\varphi_3 := |\text{acos}(\langle f_{i,3} - v, f_{i,1} - v \rangle)|$ 
    if  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 360^\circ$  then // ha a lapon található a v pont (v ∈ fi)
       $w_1 := |(f_{i,2} - v) \times (f_{i,3} - v)|/2$ 
       $w_2 := |(f_{i,3} - v) \times (f_{i,1} - v)|/2$ 
       $w_3 := |(f_{i,1} - v) \times (f_{i,2} - v)|/2$ 
      W := w1 + w2 + w3
      coordi,1 := w1/W
      coordi,2 := w2/W
      coordi,3 := w3/W
    return coord
  for i = 1 to q do // végig minden lapon
    e1 := (fi,1 - v)/||fi,1 - v|| //egységvektor
    e2 := (fi,2 - v)/||fi,2 - v||
    e3 := (fi,3 - v)/||fi,3 - v||
     $\beta_{1,2} := \text{acos}(\langle e_1, e_2 \rangle / (\|e_1\| \cdot \|e_2\|))$  //egységvektorok által bezárt szög
     $\beta_{2,3} := \text{acos}(\langle e_2, e_3 \rangle / (\|e_2\| \cdot \|e_3\|))$ 
     $\beta_{3,1} := \text{acos}(\langle e_3, e_1 \rangle / (\|e_3\| \cdot \|e_1\|))$ 
     $n_{1,2} := (e_1 \times e_2) / \|e_1 \times e_2\|$  //felületi normális
     $n_{2,3} := (e_2 \times e_3) / \|e_2 \times e_3\|$ 
     $n_{3,1} := (e_3 \times e_1) / \|e_3 \times e_1\|$ 
     $\mu_{1,T} := (\beta_{1,2} \cdot n_{1,2} \cdot n_{2,3} + \beta_{2,3} + \beta_{3,1} \cdot n_{3,1} \cdot n_{2,3}) / (2 \langle e_1, n_{2,3} \rangle)$  // μ együttható
     $\mu_{2,T} := (\beta_{1,2} \cdot n_{1,2} \cdot n_{3,1} + \beta_{2,3} \cdot n_{2,3} \cdot n_{3,1} + \beta_{3,1}) / (2 \langle e_2, n_{3,1} \rangle)$ 
     $\mu_{3,T} := (\beta_{1,2} + \beta_{2,3} \cdot n_{2,3} \cdot n_{1,2} + \beta_{3,1} \cdot n_{3,1} \cdot n_{1,2}) / (2 \langle e_3, n_{1,2} \rangle)$ 
    coordi,1 := coordi,1 +  $\mu_{1,T}$ 
    coordi,2 := coordi,2 +  $\mu_{2,T}$ 
    coordi,3 := coordi,3 +  $\mu_{3,T}$ 
  for i = 1 to n do // végig minden csúcson
    coordi := coordi/ri

  W := 0
  for i = 1 to n do // végig minden csúcson
    W := W + coordi

  for i = 1 to n do // végig minden csúcson
    coordi := coordi/W
  return coord

```

### 2.3.1.2 Általános, $N$ -oldalú lapok által definiált kontrollváz<sup>[8]</sup>

Az előző fejezetben kizárólag háromoldalú lapok által definiált  $\Omega$  kontrollpoligont vizsgáltunk. De nézzük meg, mi történik akkor, ha a háromoldalú feltételünket elhagyjuk, és tetszőleges  $N$ -oldalú lapokat is megengedünk a kontrollvázban. Fontos megemlíteni, hogy továbbra is szeretnénk, hogy a többi jól ismert feltételünk fennálljon:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot v_i = v \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) \cdot (v_i - v) = 0.$$

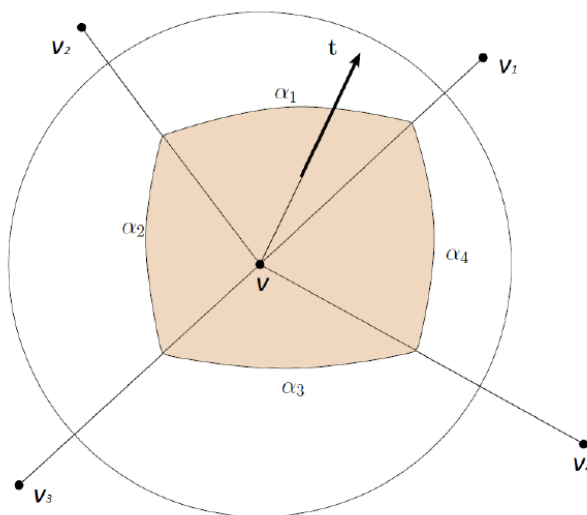
Általános poliéder esetén is megkülönböztetünk speciális eseteket annak függvényében, hogy a  $v$  pont a poliéderen belül hol helyezkedik el, hogy elkerüljük a numerikus hibákat. A speciális esetek egyeznek az előző alfejezetben részletezettekkel.

Az általános eset ismét akkor áll fenn, ha az előbb említett speciális esetek közül egyik sem lép fel, vagyis mikor a konvex vagy konkáv poliéderen belül található  $v$  ponthoz keressük a középérték koordinátákat.

Általános lapokkal határolt poliéder lapjai is levetíthetők egy egységsugarú gömb felületére (30. ábra). Jelöljük  $\hat{N}$ -nel a gömb felületére levetített  $N$ -oldalú poliédert. Az egységgömbön lévő felületi normálisokról tudjuk, hogy integráljuk nulla és az előző fejezetben részletezett módon az  $\hat{N}$  gömbi poliéder  $t$  integrálvektorát a következőképpen írhatjuk fel:

$$t = \int_{\hat{N}} (p - v) d\hat{N} = \sum_{i=1}^N \mu_{iN} \cdot e_i,$$

azaz a  $v$  pontból a gömbi  $\hat{N}$ -szög csúcsaiba mutató egységvektorok lineáris kombinációja határozza meg az integrálvektort.



30. ábra: Gömbi négyszög integrálvektora <sup>[8]</sup>

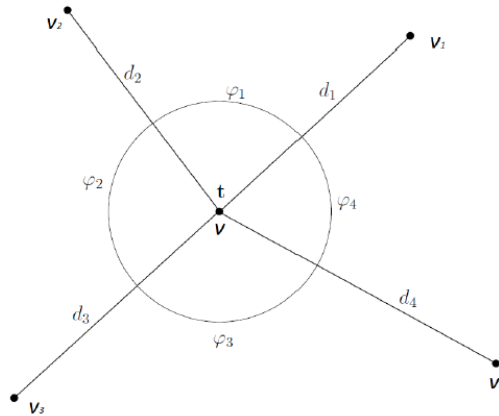
A gömbi  $\hat{N}$ -szög és a  $v$  pont meghatároz egy téridomot, melynek oldalai a gömbi  $\hat{N}$ -szög, valamint  $N$  darab körcikk. Erre a téridomra is teljesül, hogy a normálvektor felületi integrálja nulla. Ezt felhasználva beláthatjuk, hogy a gömbi  $\hat{N}$ -szög  $t$  integrálvektora (30. ábra)

megegyezik a körcikkék befelé irányított normálvektorainak összegével. Ez alapján felírható, hogy:

$$t = \sum_{i=1}^k \frac{(vv_i) \times (vv_{i+1})}{|vv_i| \cdot |vv_{i+1}| \cdot \sin \frac{\alpha_i}{2}} \cdot \frac{\alpha_i}{2},$$

ahol  $vv_i$  a  $v$ -ből a  $v_i$ -be mutató vektor.

Vetítsük a gömbi  $\hat{N}$ -szöget egy a  $t$  integrálvektorra merőleges síkra. A poligon pontjainak erre a síkra történő súlyozott levetítésével megkapjuk a már jól ismert 2D-s problémát, ahol a  $v$  pontunk a  $t$  vektornak a vetülete lesz, és mivel a  $t$ -re merőleges síkra történik a vetítés, így a  $v$  pont a  $(0,0)$  koordinátában helyezkedik el a vetítés után (31. ábra).



31. ábra: Négyszöglap vetülete  $t$ -re merőleges síkra [8]

A  $t$ -re merőleges síkon kiértékelt középérték koordináták azonban még nem oldják meg a térbeli problémát, vissza kell az értékeket skálázni a vetítési tényezővel. Az így kapott  $\mu$  értékeket a csúcsok szerint összegezve kapjuk meg minden  $i$  csúcsra a csúcs  $w_i$  súlyát:

$$w_i = \frac{1}{r_i} \cdot \sum_{(v_i \in N)} \mu_{iN}.$$

A súlyok összegével ( $\sum_j w_j$ ) normalizálva kapjuk meg a végleges középérték koordinátákat:

$$\lambda_i(v) = \frac{w_i(v)}{\sum_{j=1}^n w_j(v)}.$$

Általános poliéder esetén a középérték koordináták számítása nagyon hasonlít a csak háromszöglapokkal definiált poliéderen értelmezett koordináta számításhoz. Azonban a kisebb eltérések miatt nézzük végig most is a számítási algoritmust, melyet az alábbi pszeudokód mutat be.

Az első ciklusban a  $v$  pontból a poligon csúcsaiba mutató vektorok kigyűjtése történik meg  $s$ -be,  $r$ -be az  $s$ -ben lévő vektorok hosszát írjuk, valamint a baricentrikus koordináták kinullázásra kerülnek. A következő 3 ciklus a speciális esetek vizsgálatával foglalkozik. Ha  $r_i = 0$  (azaz a  $v$  pont nulla távolságra helyezkedik el a  $v_i$ -től), akkor a  $v$  pont a poliéder egy csúcsában

```

function GeneralBarycentric3D_N_sided(v, poly)
  for i = 1 to n do // végig minden csúcson
    si := vi - v , ri := |vi - v|
    coordi := 0 // tömb a baricentrikus koordinátáknak.
  for i = 1 to n do // végig minden csúcson
    if ri = 0 then // ha a csúcsban található a v pont (v ∈ vi)
      coordi := 0
  return coord
  for i = 1 to m do // végig minden élen
    p1 := li,from //él kezdőpontja
    p2 := li,to //él végpontja
    if |p1 - v| + |p2 - v| = |li| then // ha az élen található a v pont (v ∈ li)
      coordi,1 := |p2 - v|/|li|
      coordi,2 := |p1 - v|/|li|
  return coord
  for i = 1 to q do // végig minden lapon
    φsum := 0
    for j = 1 to k do // végig a lap minden csúcsán
      j+ := (j + 1) mod k
      φ3 := φsum + |acos(< fi,j - v, fi,j+ - v >)|
    if φsum = 360° then // ha a lapon található a v pont (v ∈ fi)
      t := (fi,1 - v)x(fi,2 - v)/(|(fi,1 - v)x(fi,2 - v)|) //felületi normális
      e := (1,1,1) , u0 := (e x t)/(|e x t|) , v0 := (u0 x t)/(|u0 x t|)
      for j = 1 to k do
        points2Dj := (< u0, fi,j >, < v0, fi,j >) //síkra vetítés
        vproj := (< u0, v >, < v0, v >)
        coordtemp = Baricentric2D(vproj, points2D)
        for j = 1 to k do
          coordi,j := coordtemp,j
      return coord
  for i = 1 to q do // végig minden lapon
    for j = 1 to k do // végig a lap minden csúcsán
      j+ := (j + 1) mod k
      βi,j := acos((< si,j, si,j+ >)/(|si,j| · |si,j+|))
      t := (1,1,1)
      for j = 1 to k do
        j+ := (j + 1) mod k
        t := t + (si,j x si,j+)/(|si,j| · |si,j+| · sin(βi,j)) · (βi,j/2)
      tnorm := t/||t||
      e := (1,1,1) , u0 := (e x t)/(|e x t|) , v0 := (u0 x t)/(|u0 x t|)
      for j = 1 to k do
        esi,j := si,j/||si,j|| , scalerj := < tnorm, esi,j >
        points2Dj := (< u0, esi,j >/scalerj, < v0, esi,j >/scalerj) //síkra vetítés
      coordtemp = Baricentric2D((0,0), points2D)
      for j = 1 to k do
        coordtemp,j := coordtemp,j · ||t||/(scalerj)
      for j = 1 to k do
        coordi,j := coordi,j + coordtemp,j
  W := 0
  for i = 1 to n do // végig minden csúcson
    W := W + coordi
  for i = 1 to n do // végig minden csúcson
    coordi := coordi/W
  return coord

```



helyezkedik el. Ekkor az aktuális csúcshoz tartozó koordináta értéke 1. Ez az eset csak egyszer állhat fent, egy csúcs esetén, így a koordinátákkal vissza is lehet térni. Ha a  $v$  pontból az él két csúcába mutató vektorok hosszának összege megegyezik az él hosszával, akkor a  $v$  pont a  $p_1$  és  $p_2$  csúcsok által kifeszített élen fekszik. Ebben az esetben a két csúcshoz tartozó súlyértékek lesznek a koordináták, és ezzel vissza is térhetünk, mert ez az eset is csak egyszer fordulhat elő.

Ha a  $v$  pontot a lap összes csúcásával összekötjük, és ezen szakaszok közti szögek összege kiadja a  $360^\circ$ -ot, akkor ebben az esetben a  $v$  pont az aktuális lapon helyezkedik el. Ekkor a síkbeli esethez hasonlóan számolhatók az adott lap összes csúcához a középérték koordináták. A többi csúcs koordinátája nulla marad. Mivel ez az eset is csak egyszer fordulhat elő, vissza is térhetünk a koordinátatömbbel.

Amennyiben nem áll fent egyik speciális eset sem, úgy a fejezetben részletezett számítást használhatjuk. A cél itt is a 2D-s esetre visszavezetés. Ehhez számoljuk ki a  $v$  pontból a lap csúcsaiba mutató  $s_i$  vektorok által bezárt  $\beta$  szögeket, és ezek segítségével határozzuk meg a  $t$  integrálvektort. Vetítsük egy  $t$ -re merőleges síkra a csúcshoz tartozó  $e_i$  vektorokat (a „gömbön lévő csúcsokat”), skálázva a  $t$ -től mért távolság reciprokával, ezt tároljuk el a *points2D* tömbben. Majd ezen  $t$ -re merőleges síkon számoljuk ki a koordinátákat a már ismert *Baricentric2D* függvény segítségével. Ezek az értékek azonban még nem a keresett középérték koordinátákat adják meg, vissza kell az értékeket skálázni a vetítési tényezővel. Az így kapott  $\mu$  értékeket a csúcsok szerint összegezve kapjuk meg minden  $i$  csúcra a csúcshoz tartozó súlyt. Ezen súlyok összegével normalizálva jutunk a végleges középérték koordinátákhoz.

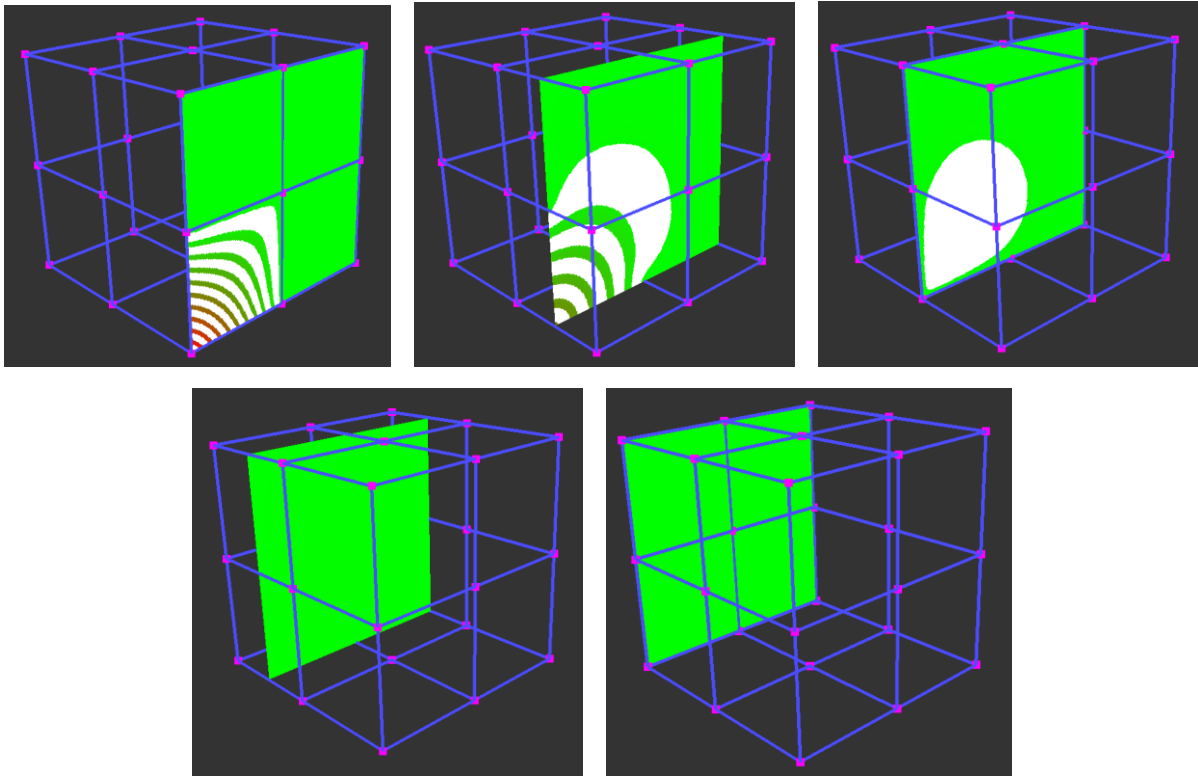
### 2.3.2 A középérték koordináták tulajdonságai 3D-ben [\[4\]\[5\]\[6\]\[8\]](#)

A térbeli középérték koordináták tulajdonságai nagyon hasonlóak a síkbeli esethez, viszont itt már nem 2D-s poligonról, hanem 3D-s poliéderről beszélünk. A kisebb eltérések miatt összegezném, mik is a koordináták főbb tulajdonságai:

- 1) Lagrange tulajdonság:  $\lambda_i(v) = \delta_{i,j}$ , azaz, ha az egyik csúcspontban a középérték koordináta értéke 1, a többi csúcsban 0.
- 2) A csúcsokat kivéve  $\lambda_i$  mindenhol  $C^\infty$  folytonos, vagyis tetszőlegesen sokszor deriválható. A csúcsokban azonban csak  $C^0$  folytonosság érhető el.
- 3) Adott  $v$  ponthoz  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) = 1$ , vagyis a középérték koordináták összege mindig 1.
- 4) Minden  $v$  pont előáll a középérték koordináták és a poliéder csúcsainak lineáris kombinációjaként:  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v)v_i$ .
- 5) Hasonlósági transzformáció nem változtatja meg a középérték koordináták értékét.
- 6) A középérték koordináták lineárisan függetlenek, azaz, ha minden  $v$ -re:  $\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i = 0$ , akkor minden  $i$ -re  $c_i = 0$ .
- 7) A középérték koordináták lineárisan változnak a bázispoligon élein, az élet kifeszítő két csúcshoz rendelt érték között.
- 8)  $\lambda_i$  értéke pozitív minden olyan  $v$  pontban, ahol a hozzá tartozó  $v_i$  csúcspont látszik. Ezen terület a *II. ábrán* látható poliédermag.
- 9) A poliéder lapjain elhelyezkedő pontok koordinátái a 2D-s esetre visszavezetve egyszerűen számíthatók.

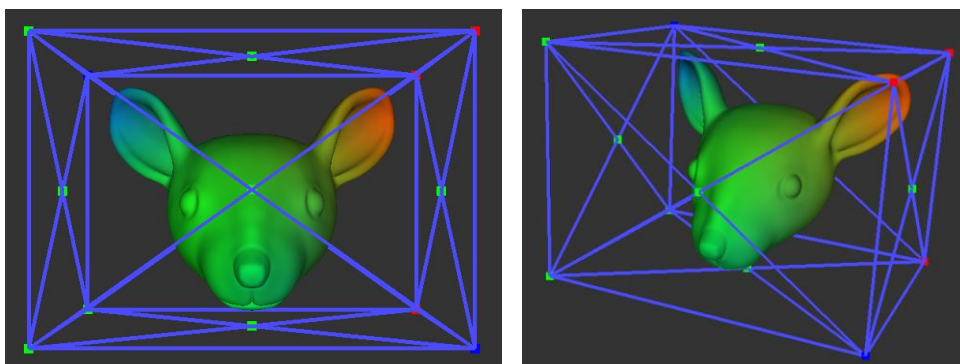
### 2.3.3 Közéérték koordináták eloszlása 3D-ben

A baricentrikus koordináták eloszlására vonatkozó tulajdonságokat a 2.2.2.4 *alfejezetben* részleteztem, a síkbeli eset vizsgálatánál bemutatott tulajdonságok a térben is érvényesek maradnak.



32. ábra – Egy kontrollponthoz tartozó baricentrikus koordináták eloszlása a térben, megjelenítés: bitmapen, metszősíkok segítségével

Az egy kontrollponthoz tartozó baricentrikus koordináták eloszlását a térben a kontrollvázat metsző síkok segítségével tanulmányoztam. Erre mutat példát a 32. ábra, mely a hozzánk közelebb eső alsó kontrollponthoz tartozó paraméter eloszlását szemlélteti. Látható, hogy a kontrollponttól távolodva gyorsan csökken a kontrollpont hatása a térben.



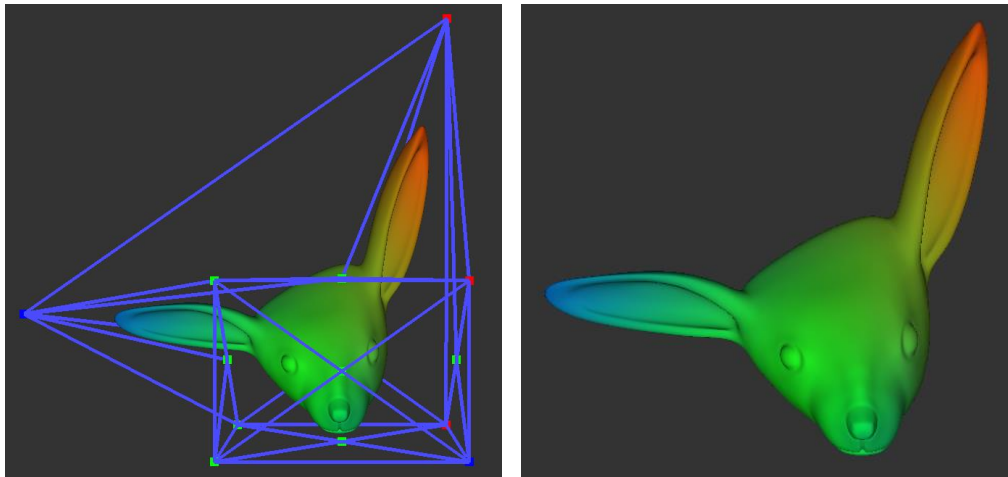
33. ábra – Egér modell színezése a baricentrikus koordináták eloszlása szerint [16]

A bitmaphez hasonlóan a 3D modell is színezhető a baricentrikus koordináták segítségével (33. és 34. ábrák). Ehhez a kontrollváz csúcsaihoz különböző színeket rendeltem és a modell adott pontjához tartozó szint a baricentrikus koordináták segítségével határoztam meg úgy, hogy a

kontrollpontok színét a hozzájuk tartozó baricentrikus koordinátákkal súlyozva vettem figyelembe.

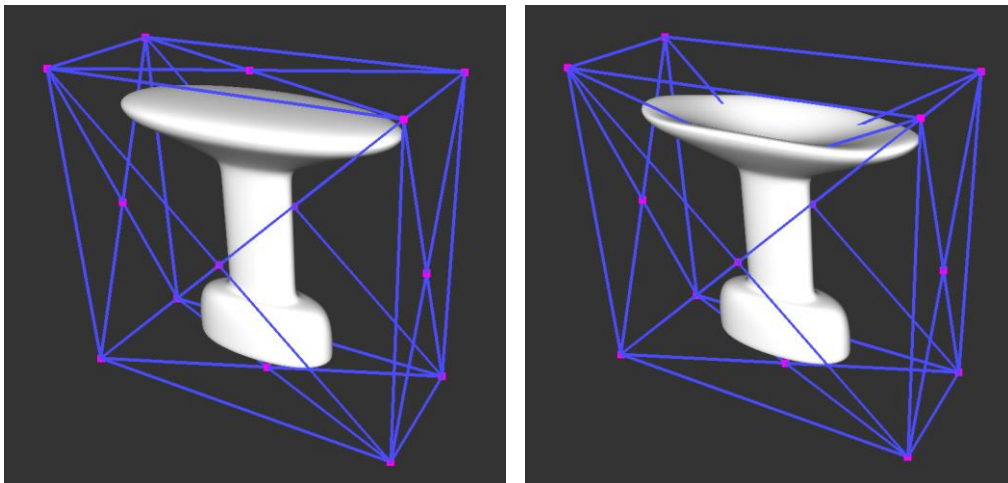
### 2.3.4 Deformáció 3D-ben

Az előző alfejezetben bemutatott baricentrikus koordináták segítségével színezett egér modellt deformáltam. Egy háromszöglappokkal definiált kontrollváz segítségével a modell deformált alakját szemlélteti a 34. ábra kontrollvázal és kontrollváz nélkül. Látható a színezésből, hogy a piros színű kontrollpontnak az egér narancssárgás színű fülénél van a legnagyobb hatása a modellre, így nem meglepő, hogy a kontrollpont elmozgatására a legnagyobb deformáció a narancssárga fülön figyelhető meg. Hasonlóan igaz ez a kék színű kontrollpontra és a kékesre színezett fülre.



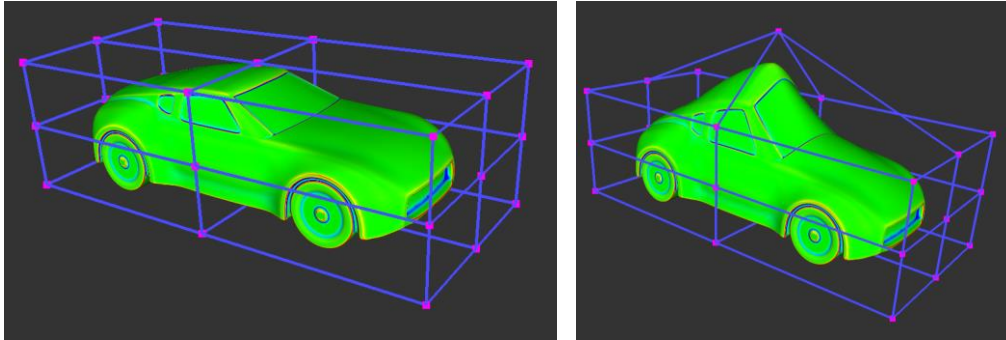
34. ábra – Egér deformált modellje, színezése a baricentrikus koordináták eloszlása szerint [16]  
balra: kontrollvázal, jobbra: kontrollváz nélkül

A 35. ábrán egy példa látható egy asztal madáritatóvá deformálására háromszöglappokkal definiált kontrollváz segítségével.

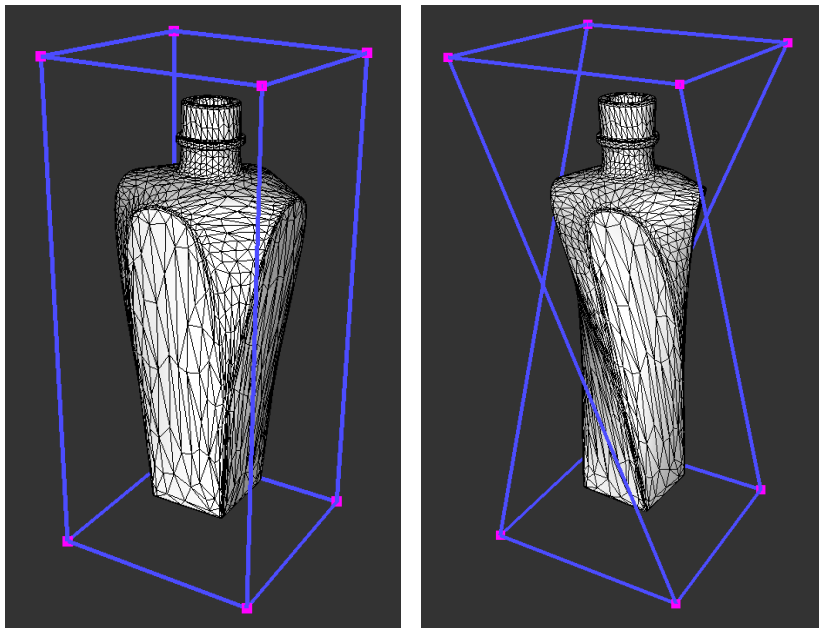


35. ábra: Asztal deformálása kontrollváz segítségével,  
balra: modell kontrollvázal, jobbra: deformált modell módosított kontrollvázal

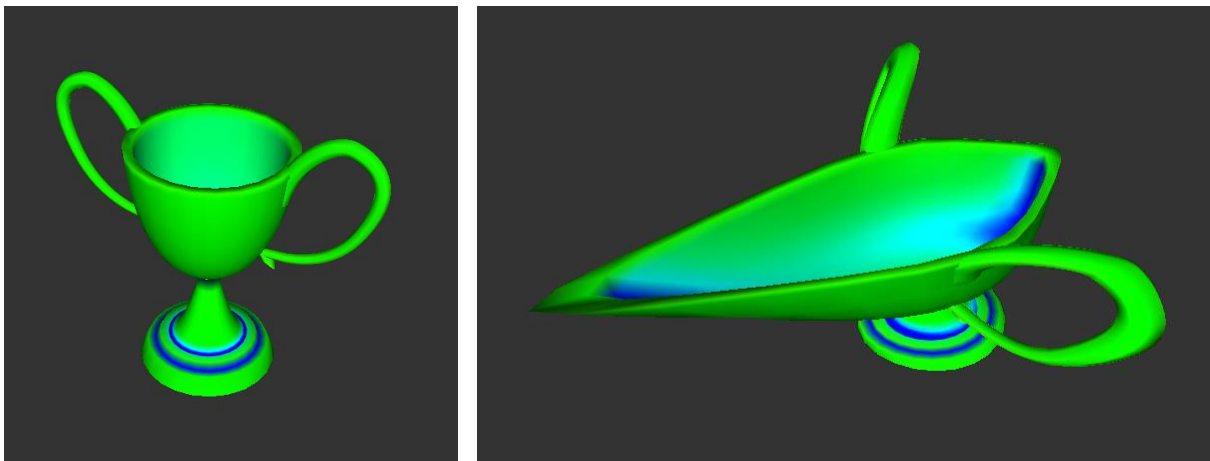
A következő ábrákon négyoldalú kontrollváz segítségével történő deformált modellek láthatók.



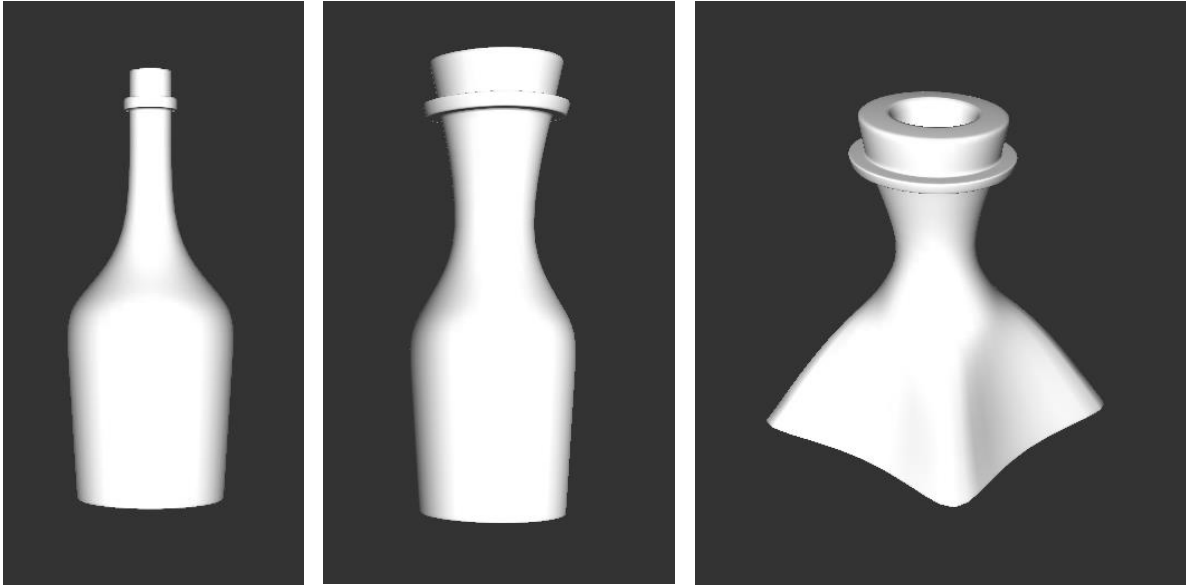
36. ábra: Autó deformálása négyoldalú kontrollváz segítségével – átlaggörbület [17]  
 balra: módosítás előtt, jobbra: módosítás után



37. ábra: Üveg deformálása négyoldalú kontrollváz segítségével [18]  
 balra: módosítás előtt, jobbra: módosítás után



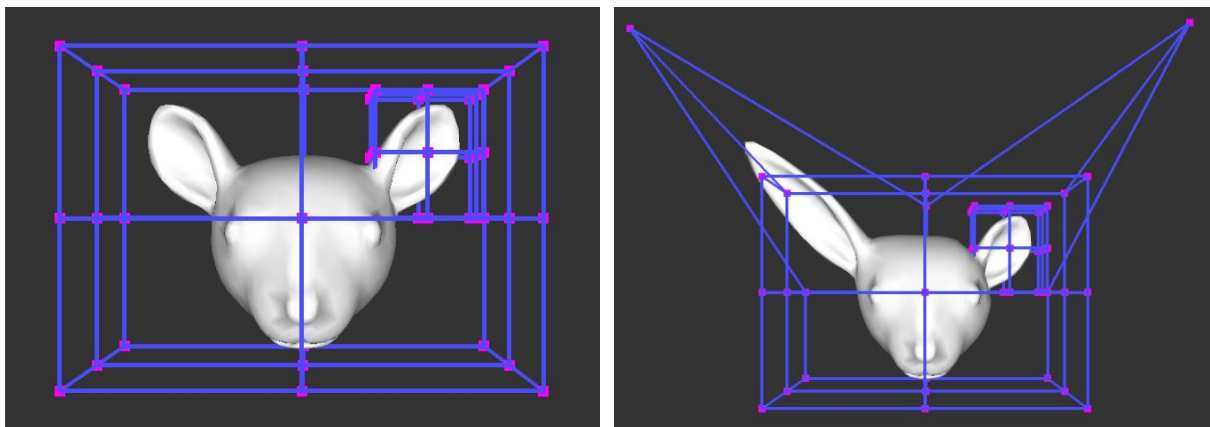
38. ábra: Kupa deformálása négyoldalú kontrollváz segítségével – átlaggörbület [19]  
 balra: módosítás előtt, jobbra: módosítás után



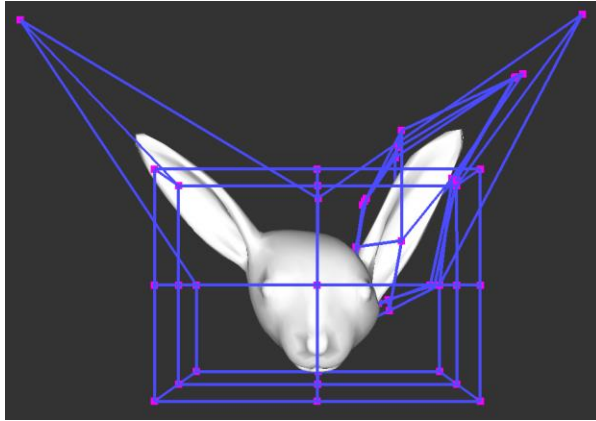
39. ábra: Üveg deformálása négyoldalú kontrollváz segítségével [20]  
balra: módosítás előtt, középen és jobbra: módosítás után

Az általános középérték koordináták nemcsak 2D-ben, hanem 3D-ben is jól használhatóak egymásba ágyazott kontrollvázak esetén. Fontos azonban most is megjegyezni, hogy a kontrollpoliéderek irányítására oda kell figyelni. A poliéderek közt lévő pontok a poliéderek bejárása során azonos (pl. mindkét esetben bal) oldalt kell legyenek, ezzel biztosítva az elvárt működést.

Egymásba ágyazott poliéderek esetén a belső poliéderben lévő rácspontok kizárólag a belső poliéder pontjainak mozgására változnak, vagyis baricentrikus koordinátáik kizárólag a belső kontrollpoliédertől származnak. Ezen működést jól szemléltetik az alábbi ábrák, melyek a 19-22. ábrákon látható 2D-s deformáció mintájára készültek. A külső kontrollpoliéder pontjainak mozgására az eger belső poliéderben lévő füle változatlan marad, míg a másik füle (és teljes arca) deformálódik (40. ábra). A belső kontrollpoliéder pontjainak mozgására pedig a teljes modell megváltozik (41. ábra).



40. ábra: Egymásba ágyazott kontrollváz – deformáció a külső kontrollpoliéder mozgására [16]

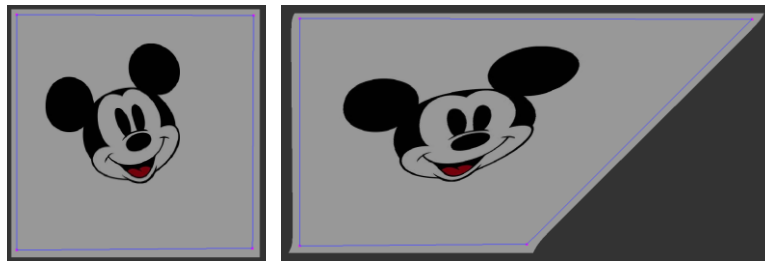


41. ábra: Egymásba ágyazott kontrollváz – deformáció a belső kontrollpoliéder mozgására [\[16\]](#)

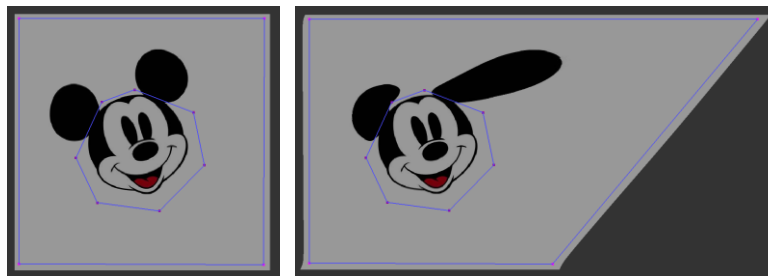
### 3. Kényszerezett lokális módszer – lokális módosítás

A modell minden egyes pontjához rendelünk a kontrollváz csúcsaihoz tartozó baricentrikus koordinátákat, és ezen koordináták lineáris kombinációja adja meg a pontok tényleges elhelyezkedését. Vagyis minden egyes kontrollpont befolyásolja a teljes modellünket, a különbség csak az, mekkora mértékben. Egy kontrollpont elmozdítása nagy módosításokat csak a modell hozzá közeli részén eredményez, tőle távol az eltérés már nem számottevő, de továbbra is jelen van. Ez viszont problémát jelent akkor, ha nem a teljes modellt szeretnénk globálisan módosítani, hanem annak csak egy kis részét.

Ezt a viselkedést jól szemléltetik az alábbi ábrák. Látható, hogy egyetlen kontrollvázal nem tudjuk kizárólag az egér füleit deformálni, hiszen a teljes feje módosulni fog a kontrollpontok elmozdítására (42. ábra).



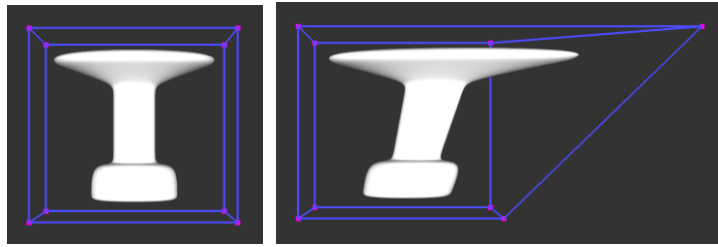
42. ábra – Mickey egér bitmap kényszerezett kontrollvázak nélkül (2D) [15]  
balra: módosítatlan modell, jobbra: módosított modell



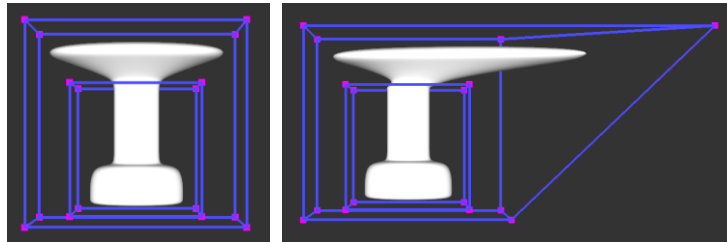
43. ábra – Mickey egér bitmap kényszerezett kontrollvázal simítás nélkül (2D) [15]  
balra: módosítatlan modell, jobbra: módosított modell

Ezt a tulajdonságot vizsgálva kezdtem el foglalkozni modellek lokális deformálásával, hisz lokális változtatás igénye gyakran merül fel mind képek, mind pedig térbeli modellek esetén. A lokális módosításra egy új módszert mutatok be többszörösen összefüggő kontrollvázak felhasználásával. Geometriai kényszereket rendelve az egyes kontrollvázakhoz, a modell egyes részei szabadon deformálhatók, míg más részei változatlanok maradnak, vagy csak a kényszerek függvényében deformálódhatnak, mozdulhatnak el.

A 43. ábrán jól látható, hogy egy kényszerezett kontrollváz felvételével, melyen belül nem engedjük meg a deformációt, az egér fülei már könnyedén deformálhatók, míg arca változatlan marad. Hasonló példát láthatunk a 44-45. ábrákon egy asztal deformálása során. Ahhoz, hogy az asztalnak kizárólag az asztallapját módosítani tudjuk, szükségünk van egy kényszerezett kontrollváz felvételére is, mellyel biztosítjuk a deformáció során, hogy az asztalnak a lába ne mozduljon el.



44. ábra – Asztal modell kényszerezett kontrollvázak nélkül (3D),  
balra: módosítatlan modell, jobbra: módosított modell



45. ábra – Asztal modell kényszerezett kontrollvázal simítás nélkül (3D),  
balra: módosítatlan modell, jobbra: módosított modell

A kényszerezett lokális módszert a következő alfejezetekben mutatom be először képek, majd térbeli modellek lokális deformálásával.

### 3.1 Lokális módosítás 2D-ben

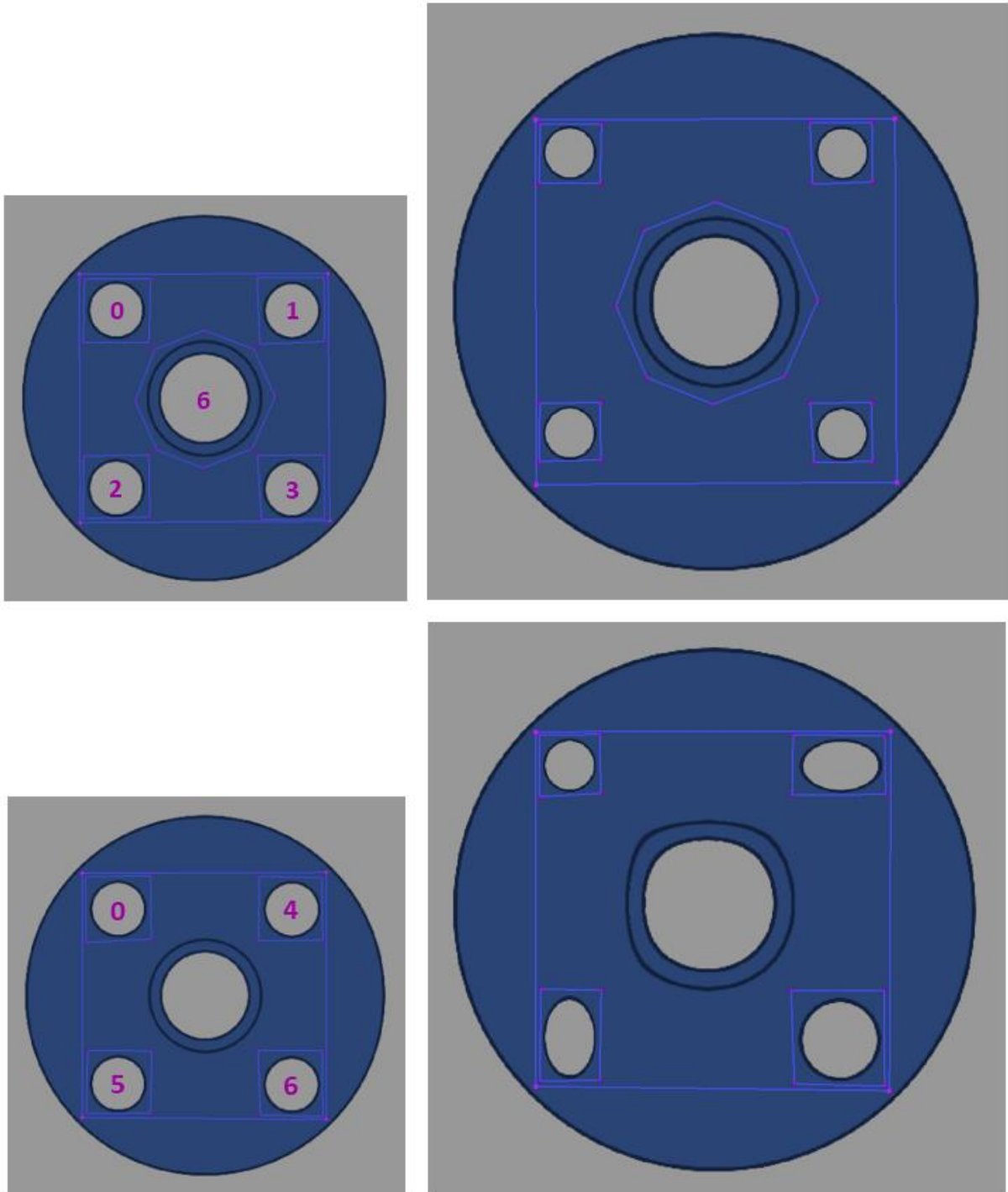
Bitmapok lokális deformálására kidolgoztam egy kényszerezett lokális módszert, mely kényszerezett lokális kontrollvázak segítségével biztosítja, hogy a bitmapon lokális módosításokat lehessen végrehajtani. A kényszerezett lokális módszer kontrollváz struktúrája a következőképpen épül fel. Az első kontrollváz a módosítani kívánt terület köré helyezendő el. A bitmapon megadhatók további kontrollvázak, melyek olyan területeket jelölnek ki, melyeknek deformálása nem, vagy csak bizonyos szabályok között engedélyezett. Ezen területek baricentrikus koordinátái kizárólag a közvetlen körülöttük lévő, úgymond saját kontrollvázuktól függenek, a többi kontrollváznak nincs hatása ezen területekre. Ezeknél a kontrollvázaknál az alábbi kényszerek adhatóak meg:

- A kontrollváz legyen teljesen fix, azaz ne változzon az alakja és elmozdulása sem engedélyezett.
- A kontrollváz alakja ne változzon, de elmozdulása az x-tengely, az y-tengely vagy esetleg mindkét tengely mentén engedélyezett.
- A kontrollváz deformálása, azaz alakjának megváltoztatása és elmozdulása engedélyezett az x-tengely, az y-tengely vagy esetleg mindkét tengely mentén.

A kényszerezett lokális módszer működését az alábbi ábra szemlélteti. A belső kontrollvázak kényszereit magyarázó indexelés a bal oldali módosítatlan bitmapeken látható. A 0-val jelölt kontrollvázak az alakváltozása és az elmozdulása sem engedélyezett. Azon poligonok, melyeknek az elmozdulása megengedett, azonban alakváltozása nem, az 1, 2 és 3 jelzést kapták, ezek sorban az x-, y- és mindkét tengely mentén engedélyezett elmozdulást reprezentálják. A 4, 5 és 6 számokkal jelölt kontrollvázaknál pedig már az alakváltozás is megengedett. A külső

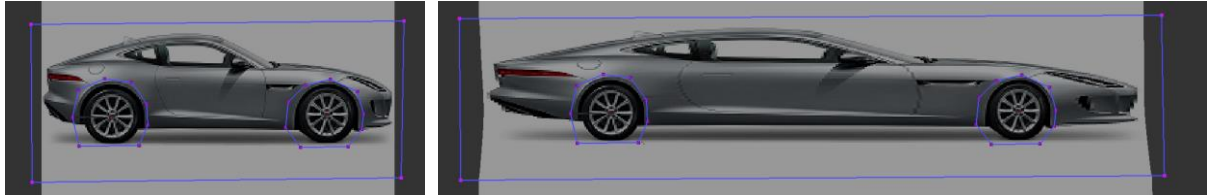


módosító poligonon belül, de a belső kontrollpoligonokon kívül eső pontok baricentrikus koordinátái az összes kontrollváztól függenek (ezzel biztosítva, hogy szakadás ne következhesen be a poligonhatárokon). Ez a tulajdonság jól meg is figyelhető a módosított ábra (46. ábra jobbra lent) azon alakzatán, mely nem került kényszerezett kontrollvázba.

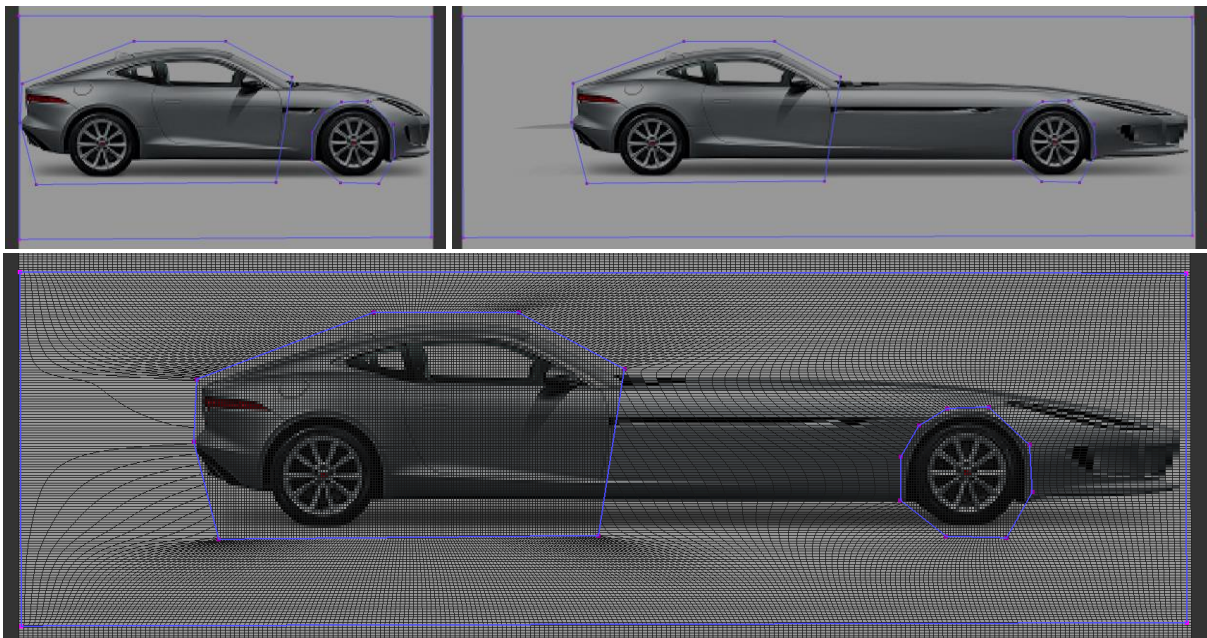


46. ábra – Lokális módszer, kényszerezett lokális vázakkal, belső kontrollváz kényszerek:  
 alakváltozás, elmozdulás nem megengedett: 0  
 alakváltozás nem megengedett, elmozdulás x-, y- és mindkét tengely mentén megengedett: 1, 2, 3  
 alakváltozás az elmozdulások irányában, x-, y- és mindkét tengely mentén megengedett: 4, 5, 6

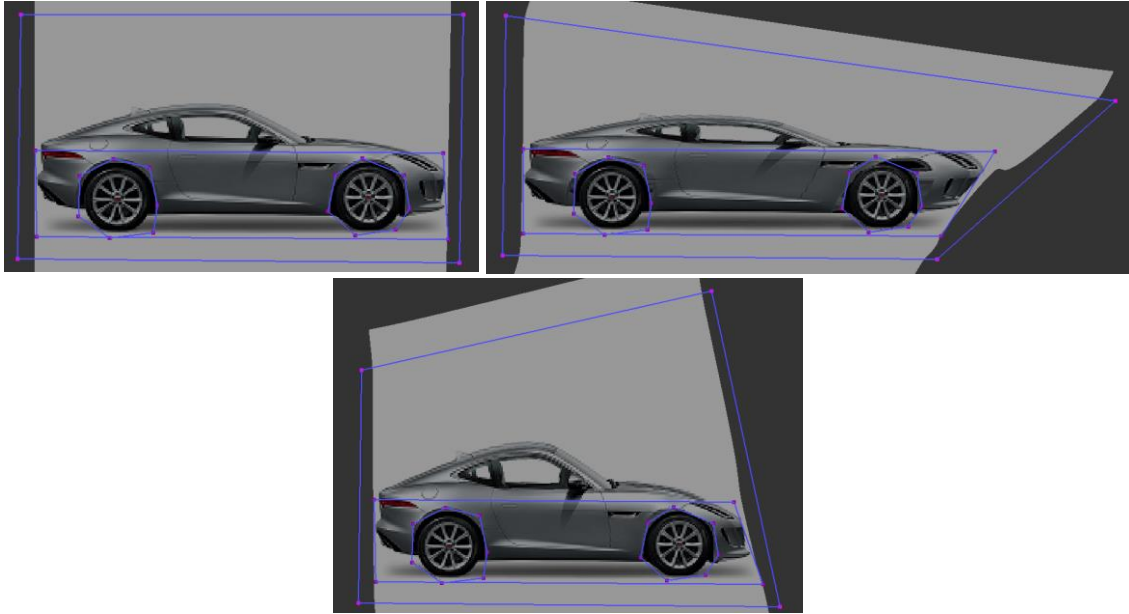
A következő ábrákon autók különböző deformálásaival szemléltetem a kényszerített lokális módszer működését. Az autó könnyedén megnyújtható a módosító kontrollváz pontjainak elmozdítására, azonban azt szeretnék, hogy kerekei továbbra is kör alakúak maradjanak, ne torzuljanak el. Ezen tulajdonság megőrzésére az autó kerekei köré kényszerített belső kontrollvázakat vehetünk fel, melyek nem módosulhatnak, azonban vízszintesen szabadon elmozdulhatnak (47. ábra). Az autó orrának és tetejének módosítása hasonlóan történhet kényszerített kontrollvázak felvételével (48-50. ábrák).



47. ábra – Autó megnyújtása, a kerekek alakja változatlan [14]

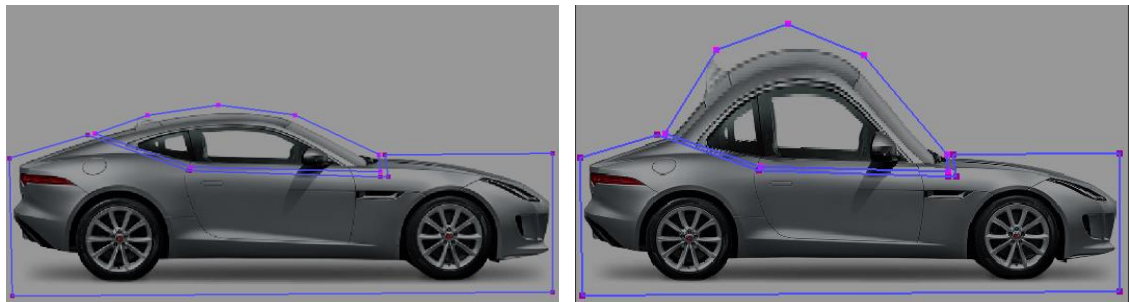


48. ábra – Autó orrának megnyújtása, a kerék alakja változatlan [14]  
felül: bitmap rácsozás nélkül, alul: bitmap rácsozással



49. ábra – Autó módosítása [14]

az autó alsó része vízszintesen deformálódhat, a kerekek alakja változatlan



50. ábra – Az autó tetejének deformálása [14]

módosító kontrollváz és kontrollváz alakváltozást és elmozdulást akadályozó kényszerrel

### 3.1.1 Simítás

Említésre került, hogy a kényszerezett kontrollvázakon kívül eső pontok nemcsak a módosító, hanem a kényszerezett kontrollváztól is kapnak baricentrikus koordinátákat, ezáltal biztosítva, hogy szakadás ne következzen be a kontrollváz határain. Ezt jól szemlélteti a 52. ábra jobb oldalán és az 55. ábrán látható módosított bitmap. Szakadás ugyan nincsen, de a rácsvonalak a kényszerezett lokális kontrollvázak határán megtörtnek.

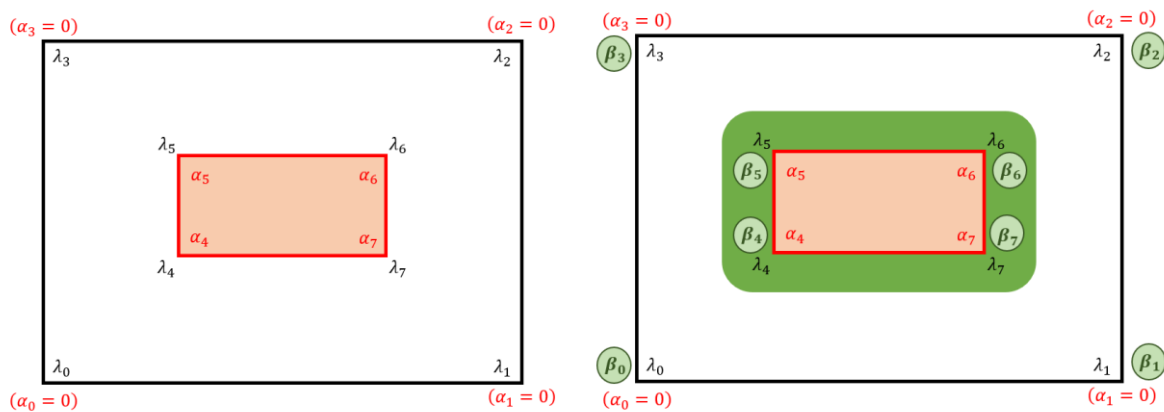
Ennek javítására kidolgoztam egy post-processing eljárást, mely a baricentrikus koordináták simítási zónában való módosításával simítja a rácsvonalakat, ezáltal megszüntetve a belső kontrollvázak határán lévő törést. Az eljárás működési elve az 51. ábrán látható.

A kényszerezett kontrollvázakon kívül eső pontok nemcsak a módosító, hanem a kényszerezett kontrollváztól is kapnak baricentrikus koordinátákat, mely koordinátákat jelöljük az ábra alapján (fekete)  $\lambda_i$ -vel. A kényszerezett kontrollvázakon belül lévő pontok (51. ábra - piros terület) baricentrikus koordinátái azonban csak a közvetlen körülöttük lévő, úgymond saját kontrollvázuktól függenek, a többi kontrollváznak nincs hatása ezen területre. Vagyis az ábrán látható piros területen belül lévő ponthoz rendeljük (piros)  $\alpha_i$  baricentrikus koordinátákat.

Mivel a külső módosító (*fekete*) kontrollpoligonnak nincsen hatása ezen területre, az azokhoz tartozó  $\alpha_i$  koordináták nullára adódnak.

A kényszerezett kontrollvázak szélén lévő törés pont ott következik be, ahol a piros baricentrikus koordinátákról átváltunk a fekete baricentrikus koordinátákra. Ezen törés megszüntetése érdekében definiáljunk egy simítási zónát. Ez a zóna mindenképp a kényszerezett kontrollvázon kívül kell elhelyezkedjen, hiszen az azon belül eső rész egyáltalán nem, vagy csak a geometriai kényszerek figyelembevételével deformálható.

Rendeljünk a belső kontrollvázakon kívül eső pontokhoz is piros  $\alpha_i$  koordinátákat minden belső kényszerezett kontrollvázhoz, melyek kizárólag a saját belső kontrollpoligonjaiktól függenek. Ezen baricentrikus koordináták összege a belső kontrollpoligonon kívül is mindig 1 ( $\sum_{i=1}^n \alpha_i(v) = 1$ ), és mivel a külső kontrollpoligonhoz tartozó  $\alpha_i$  értékek nullák, így igaz lesz az is, hogy a belső kontrollpoligonhoz tartozó baricentrikus koordináták értéke is 1 lesz ( $\sum_{\text{belső}} \alpha_i(v) = 1$ ). A fekete baricentrikus koordinátákra azonban csak a  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(v) = 1$  áll fenn. A belső kontrollvázhoz tartozó  $\lambda_i$  értékek összegét jelöljük  $c$ -vel ( $\sum_{\text{belső}} \lambda_i(v) = c$ ), mely  $c$  érték a belső kontrollváztól távolodva csökken.



51. ábra – Baricentrikus koordináták a különböző zónákban  
balra: simítási zóna nélkül, jobbra: simítási zónával (*zöld*)

A simítási zónát (51. ábra - zöld terület) határozzuk meg ezen  $c$  érték segítségével. Simítsunk azon a területen, ahol a  $c$  értéke nagyobb egy megadott  $k$  küszöbértéknél ( $0 < k < 1$ ). Ekkor a  $\sum_{\text{belső}} \lambda_i = k$  és a  $\sum_{\text{belső}} \lambda_i = 1$  (azaz a belső kontrollpoligon határa) között történik a simítás. A simítási zóna szélessége:  $1 - k$ .

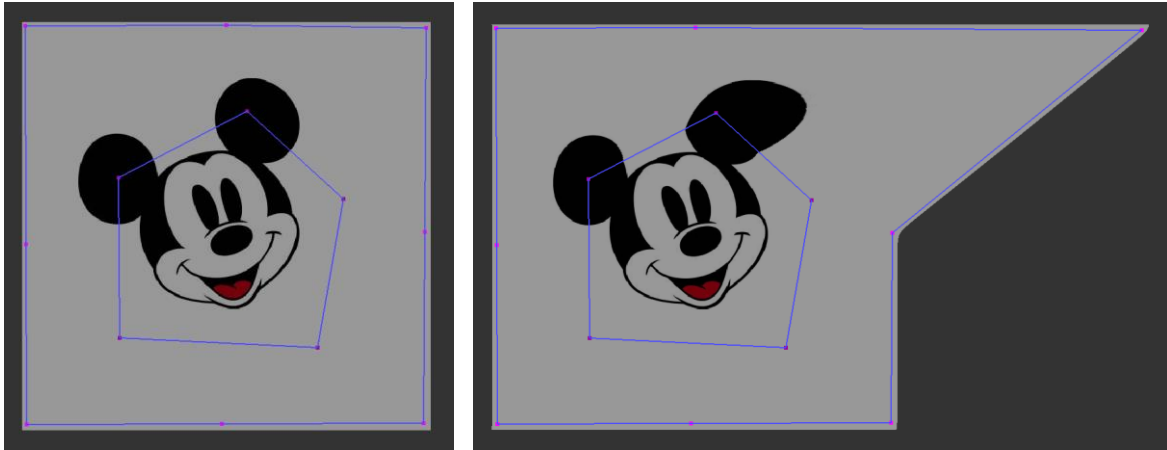
A módosított (zöld)  $\beta_i$  baricentrikus koordinátákat a simítási zónában a következő képlettel számolhatjuk:

$$\beta_i = A(t) \cdot \lambda_i + B(t) \cdot \alpha_i,$$

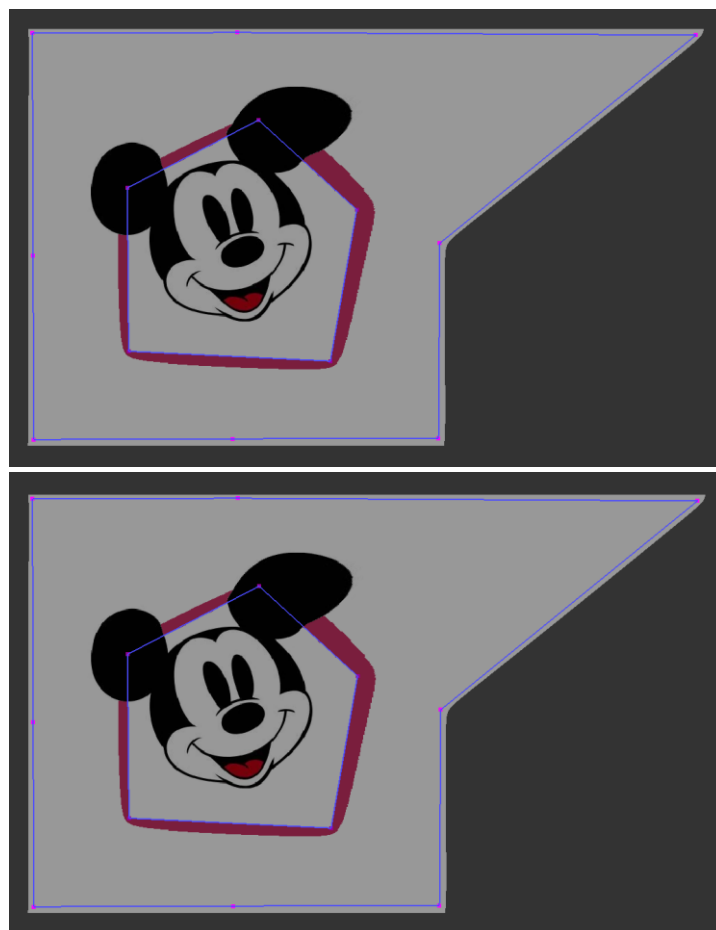
ahol:

- $t \in [0,1]$ , mely azt mutatja meg, hogy a  $k$  és az 1 érték közt hol helyezkedik el a pont a simítási zónában,
- $A(t)$  és  $B(t)$  súlyfüggvények, melyek kielégítik az  $A(t = 0) = 1$ ,  $A(t = 1) = 0$ ,  $B(t = 0) = 0$ ,  $B(t = 1) = 1$  feltételeket.

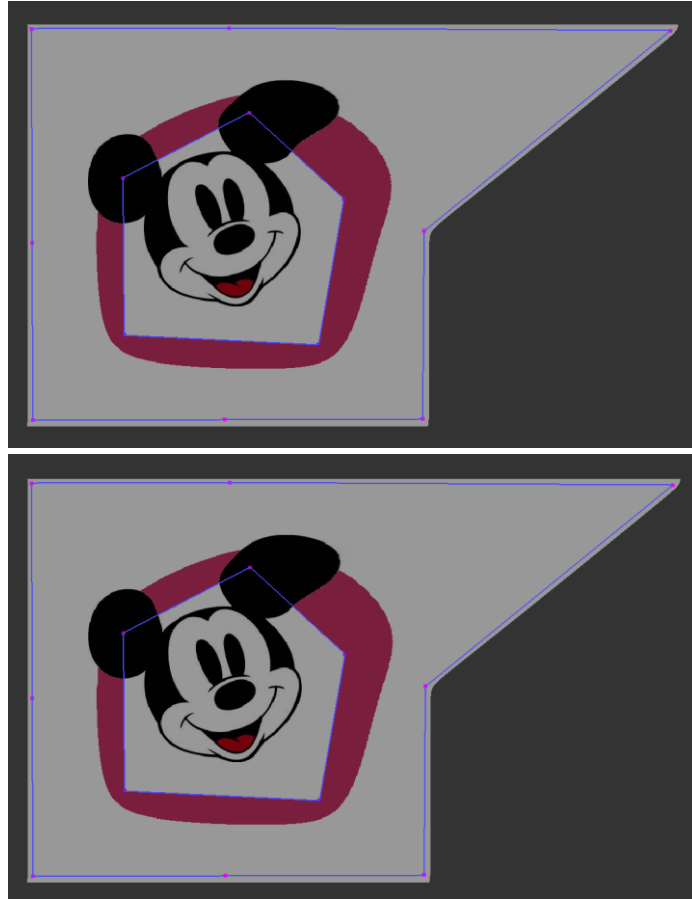
A simítási eljárás működését az 53-54. és 56-57. ábrák szemléltetik. A példákon harmadfokú *Hermite* polinomokkal, valamint másodfokú súlyfüggvényekkel történt a simítás különböző simítási zónaszélességeket vizsgálva. A rácsvonalak változása a simítás hatására az 56-57. ábrákon figyelhető meg.



52. ábra – Törés a kényszerített kontrollvázak szélén [15]  
balra: bitmap módosítás előtt, jobbra: bitmap módosítás után

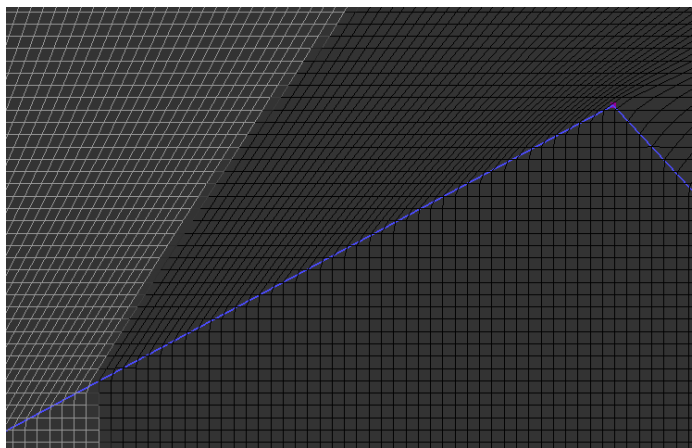


53. ábra – Deformált bitmap, simítási zóna szélessége: 0.2 [15]  
fent: harmadfokú Hermite polinomokkal simítva, lent: másodfokú súlyfüggvényekkel simítva



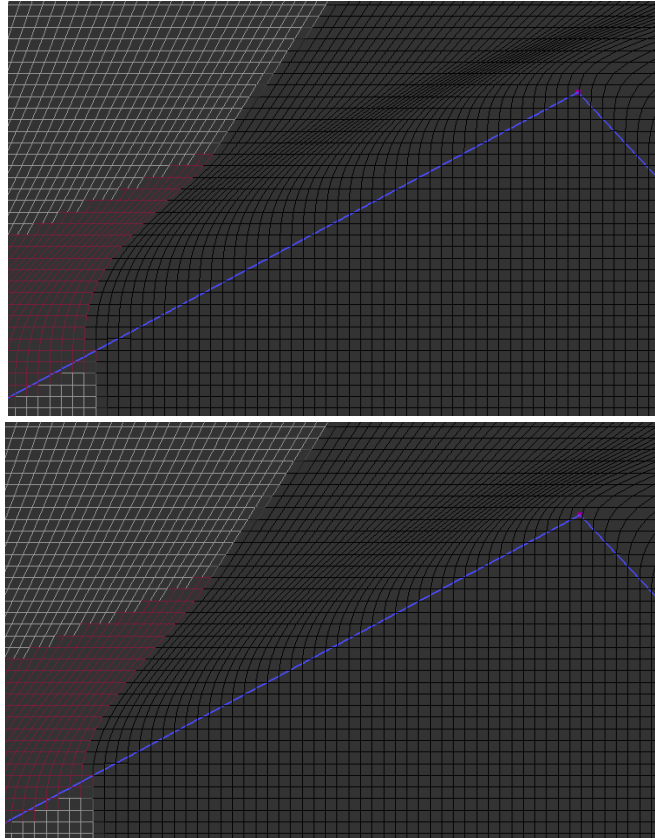
54. ábra – Deformált bitmap, simítási zóna szélessége: 0.5 [15]

fent: harmadfokú Hermite polinomokkal simítva, lent: másodfokú súlyfüggvényekkel simítva

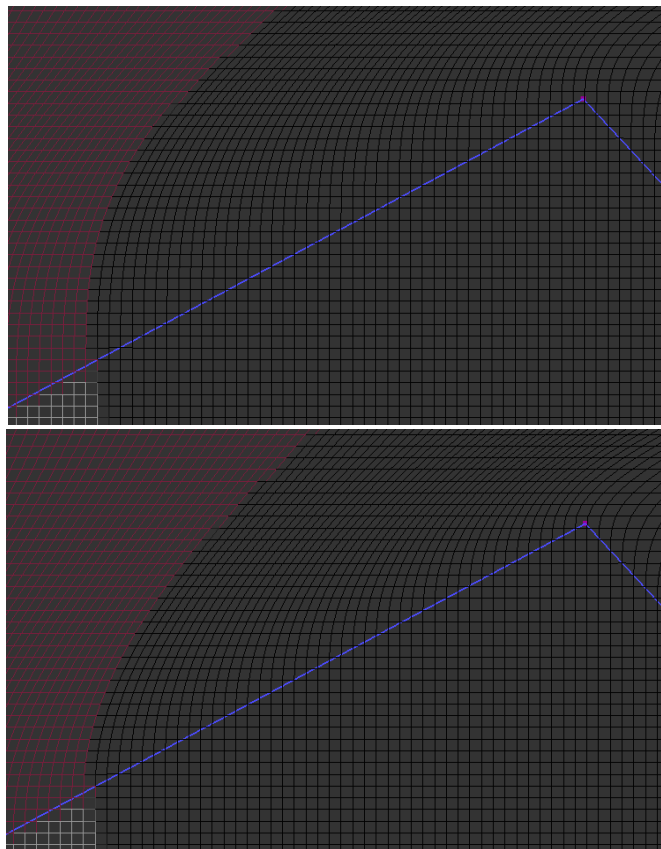


55. ábra – Törés a kényszerezett kontrollváz szélén

A simítási zónában lévő baricentrikus koordináták megváltoztatásával a kényszerezett kontrollváz körüli tér került módosításra, és ezáltal közvetve maga a rácsozás is módosult. Ebben az esetben egyszerűen lehetett simítási zónát definiálni. Azonban a rácsvonalakban keletkező törés akár felületi simítással is javítható lenne, ahol közvetlen a rácsvonalakon történhetne a simítás.



56. ábra – Simítás hatása a kényszerezett kontrollváz szélén, simítási zóna szélessége: 0.2  
 fent: harmadfokú Hermite polinomokkal simítva, lent: másodfokú súlyfüggvényekkel simítva



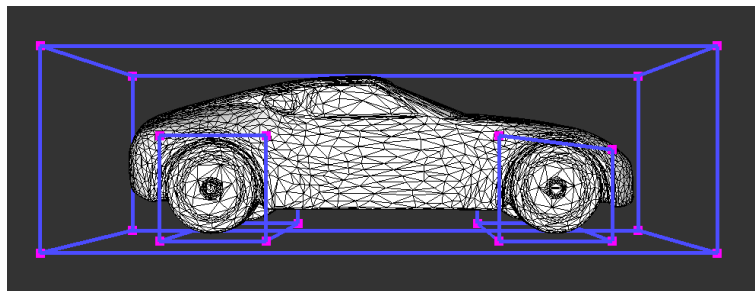
57. ábra – Simítás hatása a kényszerezett kontrollváz szélén, simítási zóna szélessége: 0.5  
 fent: harmadfokú Hermite polinomokkal simítva, lent: másodfokú súlyfüggvényekkel simítva

### 3.2 Lokális módosítás 3D-ben

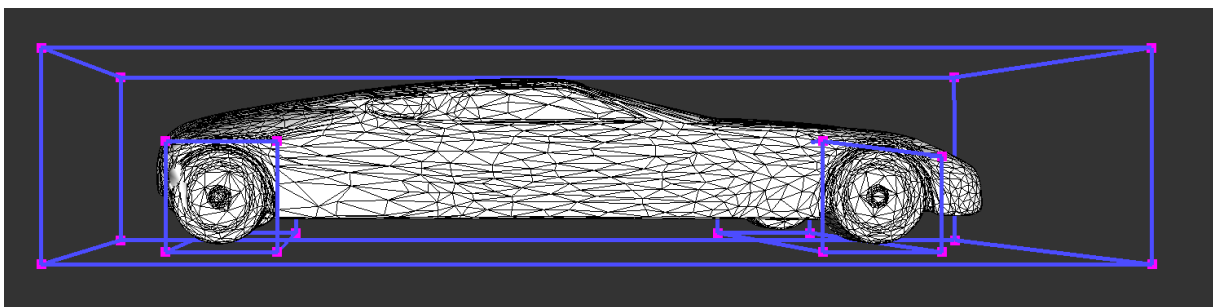
A kényszerezett lokális módszer 3D-ben is hasonlóan működik. A modellek lokális deformálására megadható egy módosító kontrollváz a deformálandó rész köré. Ezt követően megadhatók további kontrollvázak, melyek olyan részleteket jelölnek ki a modellen, melyeknek deformálása nem, vagy csak bizonyos szabályok között engedélyezett. Ezen részek baricentrikus koordinátái kizárólag a közvetlen körülöttük lévő, úgymond saját kontrollpoliéderüktől függenek, a többi kontrollváznak nincs hatása ezen területekre. Ezeknél a kényszerezett kontrollvázaknál az alábbi kényszerek adhatóak meg:

- A kontrollváz legyen teljesen fix x-tengely, y-tengely és/vagy z-tengely mentén, azaz a megadott irányban ne változzon az alakja és elmozdulása se legyen engedélyezett.
- A kontrollváz alakja ne változzon, de elmozdulása az x-tengely, az y-tengely és/vagy z-tengely mentén engedélyezett.
- A kontrollváz deformálása, azaz alakjának megváltoztatása és elmozdulása engedélyezett az x-tengely, az y-tengely és/vagy z-tengely mentén.

A következő ábrákon autók különböző deformálásaival szemléltetem a kényszerezett lokális módszer működését 3D-ben. A kerek köré kényszerezett kontrollvázakat vehetünk fel, melyek alakja nem változhat, azonban vízszintesen elmozdulhat, ezzel biztosítva, hogy a kerek ne torzuljanak el.

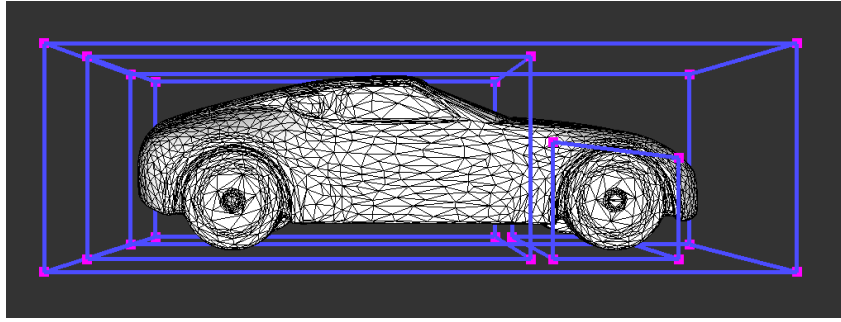


58. ábra – Autó modell kényszerezett kontrollvázakkal, módosítatlan modell [17]

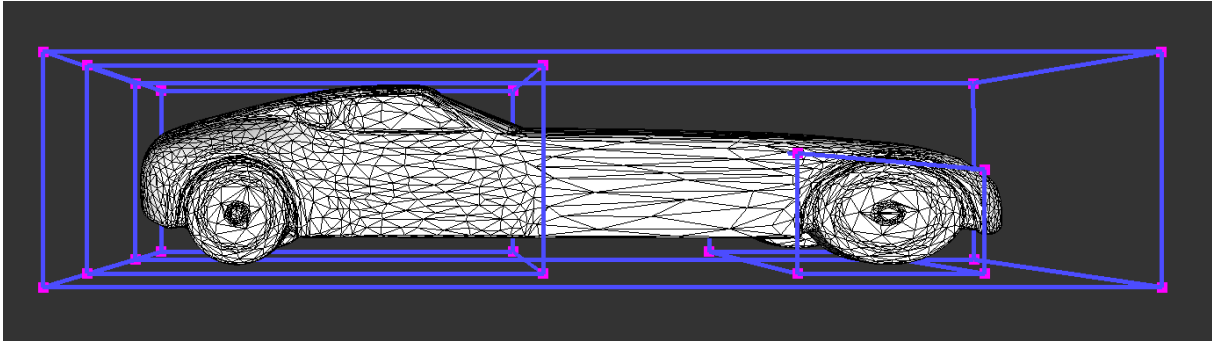


59. ábra – Autó modell kényszerezett kontrollvázakkal [17]  
az autó megnyújtása, a kerek alakja változatlan





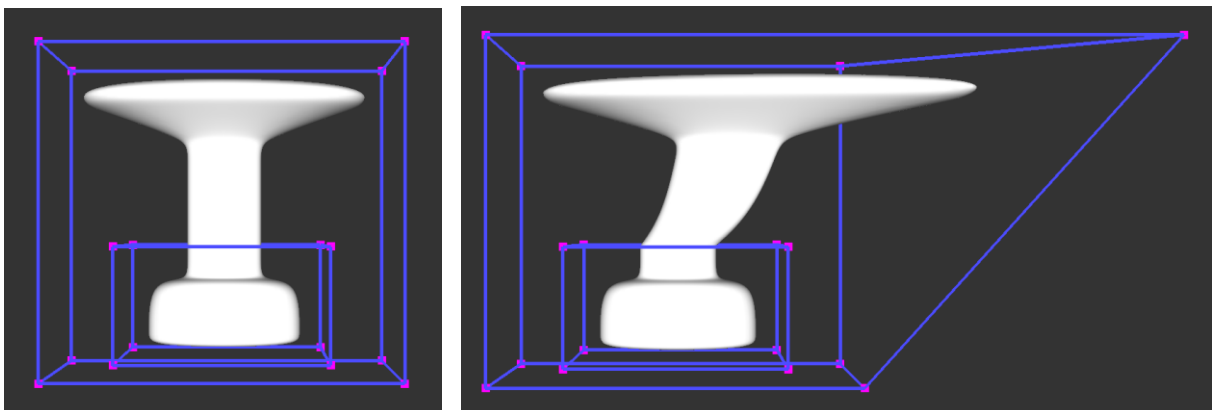
60. ábra – Autó modell kényszerített kontrollvázakkal, modosítatlan modell [17]



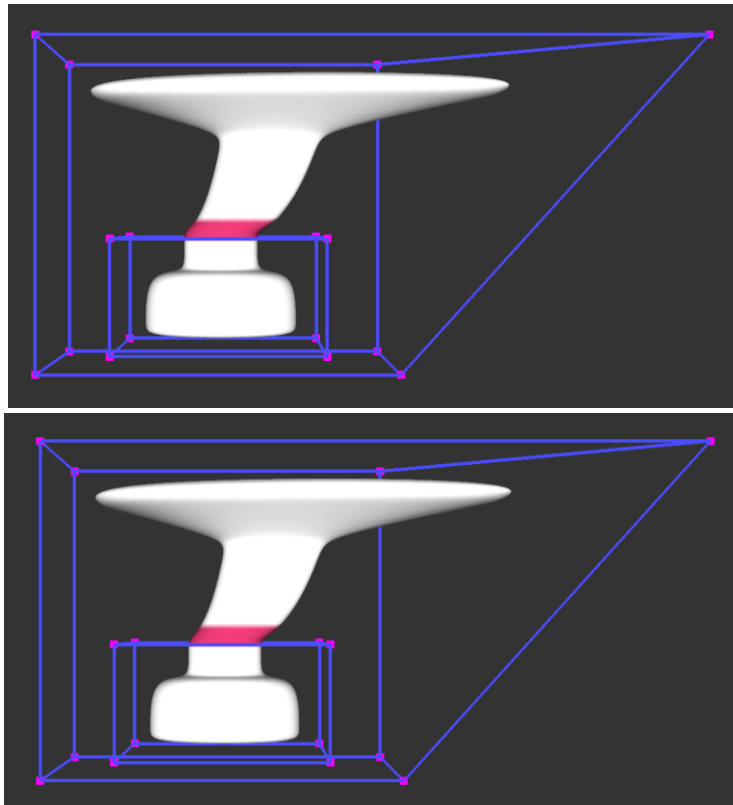
61. ábra – Autó modell kényszerített kontrollvázakkal [17]  
az autó orrának megnyújtása, a kerek alakja változatlan

A kényszerített kontrollvázakon kívül eső pontok, ahogy 2D-ben is, nemcsak a módosító, hanem a kényszerített kontrollvázától is kapnak baricentrikus koordinátákat. Ezáltal szakadás nem következik be a kontrollváz határain, ám a kényszerített lokális kontrollvázak határán a modell megtörik. Erre láthatunk példát a 62. ábra jobb oldalán és a 65. ábrán.

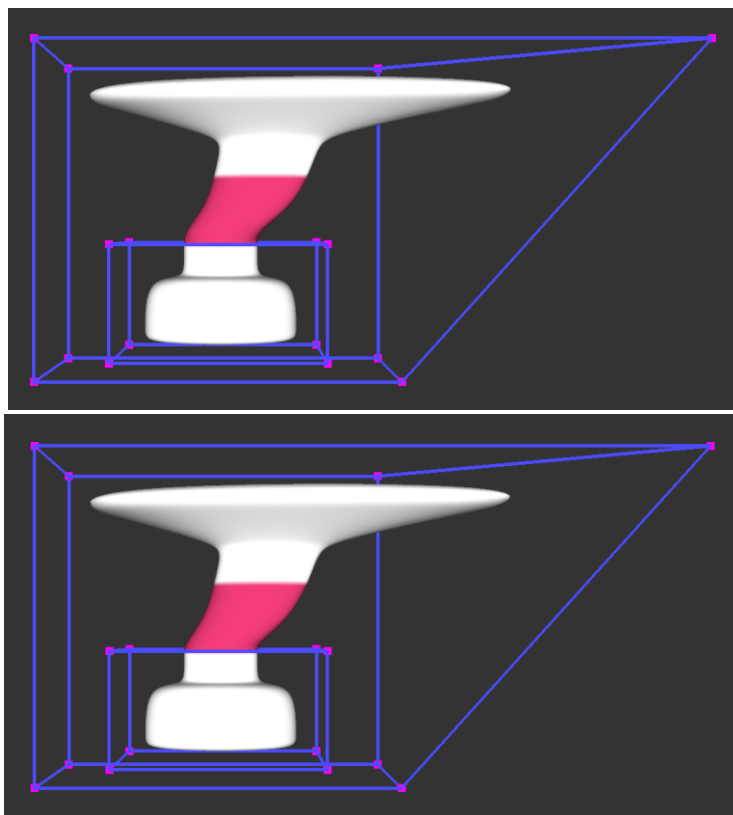
Ennek javítása a 2D-s esethez hasonlóan működik. A belső kontrollvázak határán lévő törés megszüntethető a baricentrikus koordináták simítási zónában való módosításával, ezáltal simítva a modellt. Harmadfokú *Hermite* polinomokkal és másodfokú súlyfüggvényekkel történő simítást láthatunk különböző simítási zónaszélességek esetén a 63-64. és 66-67. ábrákon.



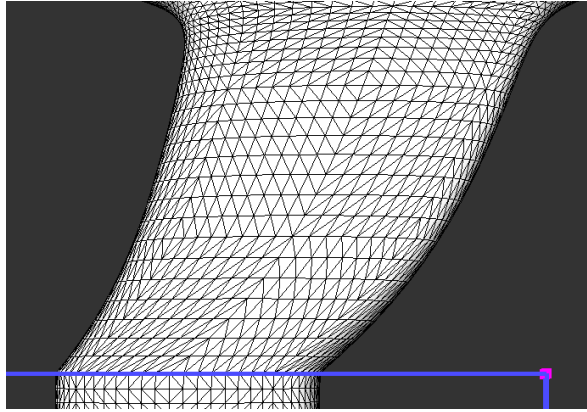
62. ábra – Törés a kényszerített kontrollvázak szélén,  
balra: asztal modell módosítás előtt, jobbra: modell módosítás után



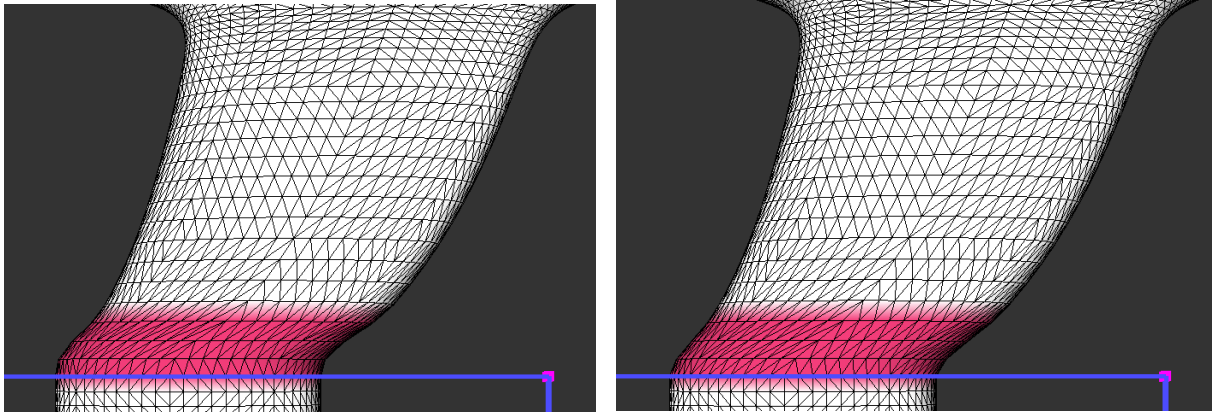
63. ábra – Deformált modell, simítási zóna szélessége: 0.5  
 fent: harmadfokú Hermite polinomokkal simítva, lent: másodfokú súlyfüggvényekkel simítva



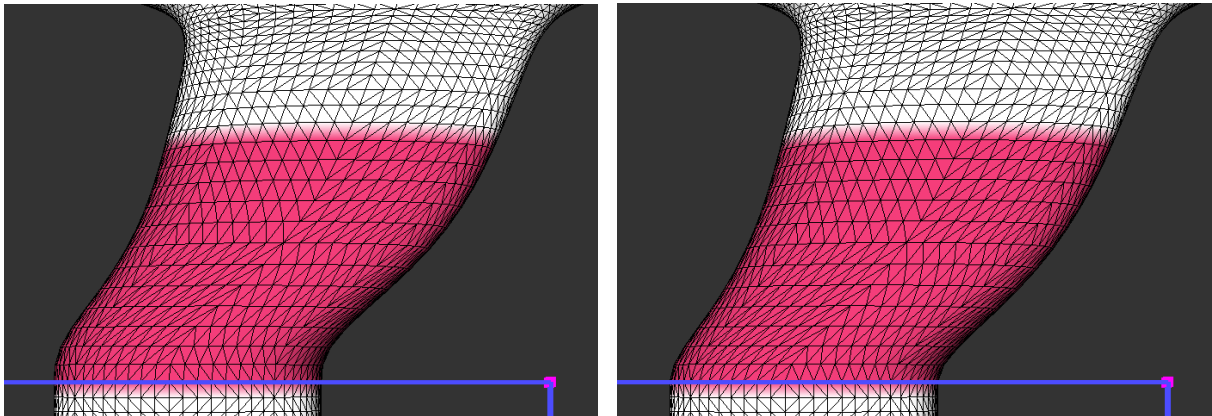
64. ábra – Deformált modell, simítási zóna szélessége: 0.9  
 fent: harmadfokú Hermite polinomokkal simítva, lent: másodfokú súlyfüggvényekkel simítva



65. ábra – Törés a kényszerezett kontrollváz szélén



66. ábra – Simítás hatása a kényszerezett kontrollváz szélén, simítási zóna szélessége: 0.5  
balra: harmadfokú Hermite polinomokkal simítva, jobbra: másodfokú súlyfüggvényekkel simítva



67. ábra – Simítás hatása a kényszerezett kontrollváz szélén, simítási zóna szélessége: 0.9  
balra: harmadfokú Hermite polinomokkal simítva, jobbra: másodfokú súlyfüggvényekkel simítva

## 4. Tesztprogramok

### 4.1 A tesztkörnyezet

Munkám során a *Salvi-féle tesztkörnyezetet* [10] használtam, mely C++ nyelven íródott. A környezet a menükhöz és dialógusablakokhoz *Qt*-t [11] használ, a megjelenítéshez pedig ehhez tartozó kiegészítő könyvtárat, a *libQGLViewer*-t [12], mely *OpenGL* ablakkezelést biztosít *Qt* környezetben sok hasznos funkcióval (pl. kameramozgatás, 3D kiválasztás). A hatékony poligonháló implementációt és a standard fájlformátumok kezelését *OpenMesh*-sel [13] valósítja meg, mely egy általános és hatékony fél-él adatstruktúra poligonhálók reprezentációjára és manipulációjára.

Ebben a tesztkörnyezetben implementáltam a 2. és 3. fejezetekben bemutatott baricentrikus koordináták eloszlására, valamint a kontrollvázalattal történő deformáció vizsgálatára készített tesztprogramokat 2D-ben és 3D-ben.

### 4.2 Tesztprogramok és példák

A tesztprogramok során 2D-ben a baricentrikus koordináták eloszlását jelenítettem meg, valamint bitmapeket deformáltam általános kontrollpoligonokkal, melyeket a 2.2 alfejezetekben mutattam be. A 3D-s tesztprogramban pedig vizsgáltam a koordináták eloszlását a térben, melyet háromszöghálós modellek színezésén és deformálásán is szemléltettem. A térbeli deformációt háromoldalú és  $N$ -oldalú lapokkal határolt kontrollvázak segítségével végeztem. A 3D-s tesztprogram példái a 2.3 alfejezetben találhatóak.

A 3. fejezetben bemutatott lokális módszer kényszerezett lokális kontrollvázakat használva biztosítja a modell lokális deformálását. Ezen módszer a 2D-s, valamint a 3D-s tesztprogramban is implementálásra került.

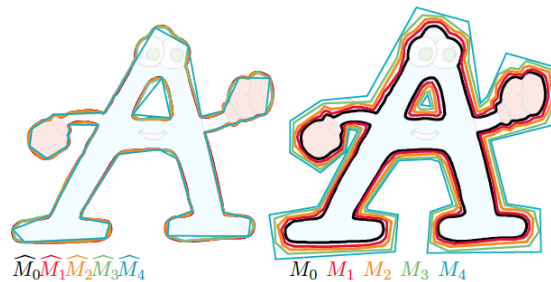
## 5. Összefoglaló

Dolgozatomban összefoglaltam a különböző deformációs módszereket, és az általános baricentrikus koordinátákon alapuló térfogati deformációs módszer matematikai alapjait. Ennek bemutatása során különös figyelmet fordítottam arra, hogyan lehet a 2D-s baricentrikus koordinátákat használó módszert általánosítani  $N$ -oldalú, konvex, konkáv, sőt akár többszörösen összefüggő kontrollvázakra 3D-ben.

Ezt követően vizsgáltam a modell lokális módosításának lehetőségét, melyre egy új módszert mutattam be többszörösen összefüggő kontrollvázak felhasználásával. Geometriai kényszereket rendelve az egyes kontrollvázakhoz, a modell egyes részei szabadon deformálhatók, míg más részei változatlanok maradnak, vagy csak a kényszerek függvényében deformálódhatnak, mozdulhatnak el. A deformáció során a kényszerezett kontrollvázak szélén létrejövő törés megszüntetésére kidolgoztam egy baricentrikus koordinátákat módosító eljárást a simítási zónán belül.

A módszer bemutatására kifejlesztettem 2D-s és 3D-s interaktív grafikus tesztprogramokat, mely tesztprogramokban 2D-s esetben a kép, 3D-s esetben a háromszöghálós modell beolvasása, és a kontrollvázak megadása után a beolvasott modell egyszerűen deformálható.

Munkám folytatásaként az automatikus kontrollvázat generáló módszerekkel szeretnék megismerkedni, hiszen, mint láhattuk, a modelleket a kontrollváz pontjainak mozgatásával deformálni lehet. Azonban ahhoz, hogy meglegyen a kellő szabadságunk az alkotásra, megfelelő kontrollvázra van szükségünk, mely jól magába foglalja a modellt és jó helyeken, kellő mennyiségben tartalmaz kontroll pontokat, melyek segítségével módosítható a modellünk. Így a továbbiakban vizsgálni szeretném, hogyan lehet egy adott modell kellően nagy szabadságfokú deformálásához egy jó vázat készíteni. Az alábbi ábrákon az egymásba ágyazott kontrollvázak módszerével generált kontrollvázak láthatók 2D-ben és 3D-ben.



68. ábra – Modell decimált változatai (balra) és egymásba ágyazott kontrollvázak (jobbra) - 2D [9]



69. ábra – Példa egymásba ágyazott kontrollvázakra – 3D [9]

## Irodalomjegyzék

Deformációról általában:

- [1] M. Botsch et al.: *Polygon Mesh Processing, (Chapter 9: Deformation, pp 151-177)*, AK Peters Ltd., 2010

Általános baricentrikus koordinátákról:

- [2] Hormann & M. S. Floater: *Mean Value Coordinates for Arbitrary Planar Polygons*, ACM Transactions on Graphics, 25(4):1424-1441, October 2006.  
<http://www.inf.usi.ch/hormann/papers/Hormann.2006.MVC.pdf>
- [3] K. Hormann: *Barycentric Coordinates and Transfinite Interpolation*, Tenth SIAM Conference on Geometric Design and Computing, San Antonio, Texas, November 4-8, 2007, <http://www.inf.usi.ch/faculty/hormann/barycentric/Hormann.pdf>
- [4] T. Ju, S. Schaefer and J. Warren: *Mean value coordinates for closed triangular meshes*, ACM SIGGRAPH 2005, pp 561-566
- [5] Michael S. Floater, Geza Kos, Martin Reimers - *Mean value coordinates in 3D*, Computer Aided Geometric Design - Special issue: Geometric modelling and differential geometry, Volume 22 Issue 7, October 2005, Pages 623-631
- [6] Kós, Géza: *A general construction for barycentric coordinates in 3D polyhedra*. In: III. magyar számítógépes grafika és geometria konferencia, Budapest, 2005
- [7] J-M. Thiery et al.: *Mean value coordinates for quad cages in 3D*; ACM Transactions on Graphics, Vol. 37, No. 6, 2018.  
[https://perso.telecom-paristech.fr/boubek/papers/QMVC/QMVC\\_lowres.pdf](https://perso.telecom-paristech.fr/boubek/papers/QMVC/QMVC_lowres.pdf)
- [8] Sziujártó András: *Az általánosított baricentrikus koordináták alkalmazása a 3D-s számítógépes geometriai tervezésben*, Diplomamunka, Budapest, 2016

Kontrollvázakról:

- [9] L. Sacht: *Nested Cages*, ACM SIGGRAPH Asia, 2015

A szoftverfejlesztéshez használt tesztkörnyezet és könyvtárak:

- [10] Salvi-féle tesztkörnyezet: <https://bitbucket.org/salvipeter/sample-framework/>
- [11] Qt: <http://www.qt.io/>
- [12] libQGLViewer: <http://libqglviewer.com/>
- [13] OpenMesh: <http://www.openmesh.org/>

A felhasznált modellek:

- [14] Autó 2D: <https://www.stickpng.com/img/transport/cars/jaguar/grey-f-type-sideview-jaguar>

- [15] Egér 2D: <https://www.redwolf.in/image/cache/catalog/stickers/disney-mickey-mouse-face-sticker-india-700x700.jpg>
- [16] Egér 3D: <https://free3d.com/3d-model/mouse-v5--731049.html>
- [17] Autó 3D: <https://free3d.com/3d-model/car-v2--192448.html>
- [18] Üveg: <https://free3d.com/3d-model/case-gin-bottle-v1--635246.html>
- [19] Kupa: <https://free3d.com/3d-model/winner-cup-801253.html>
- [20] Üveg: <https://free3d.com/3d-model/amber-benedictine-bottle-v1--925407.html>