Többszörös fedések zárt sokszögekkel

TDK dolgozat

Kovács István
BME TTK, Matematika BSc, III. évfolyam

MŰEGYETEM 1782

Témavezető:
Tóth Géza
tudományos tanácsadó
Rényi A. Matematikai Kutatóintézet
és docens, BME SZIT

2012

Tartalomjegyzék

Kivonat

A sík sokszoros fedéseinek vizsgálatát 50 éve Fejes Tóth László és Harold Davenport kezdeményezték [F53], [H55]. Egy síkbeli halmazokból álló $\mathcal{H}$ halmazrendszert k-szoros fedésnek nevezünk, ha a sík minden pontját legalább k halmaz tartalmazza. A legtöbbet vizsgált eset az, amikor $\mathcal{H}$ elemei egy adott S halmaz eltoltjai.

Tegyük fel, hogy a S halmaz eltoltjaival k-szorosan lefedtük a síkot, vagyis az eltoltakból álló $\mathcal{H}$ halmazrendszer egy k-szoros fedés. Igaz, hogy ha k elég nagy, akkor a fedés felbontható két (vagy több) fedésre? Pontosabban, léteznek-e olyan páronként diszjunkt $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, ..., \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ részrendszerek, amelyek mindegyike fedés?

Ez az egyszerű kérdés meglepően nehéz és mély problémákhoz vezet, amelyek nagy része máig megoldatlan. A kérdésnek, elméleti jelentősége és érdekessége mellett fontos gyakorlati alkalmazása is van, a szenzor-rendszerek ütemezésénél. Ezért ezzel a kérdéskörrel sokan foglalkoztak az utóbbi időben, különböző módszereket bevetve.

Egy síkbeli S halmazt *fedés-felbonthatónak* hívunk, ha létezik olyan $k = k(S)$ szám, hogy a sík tetszőleges k-szoros fedése S eltoltjaival felbomlik két fedésre. 1980-ban Pach János vetette fel, hogy határozzuk meg a fedés-felbontható halmazokat [P80]. Sejtése szerint minden konvex halmaz fedés-felbontható. 1986-ban bebizonyította, hogy minden nyílt, konvex, középpontosan szimmetrikus sokszög fedés-felbontható [P86]. 1987-ben Peter Manival bebizonyították, hogy a nyílt egységkör is fedés-felbontható, bár ezt máig nem publikálták [MP87]. 20 évvel később Tardos Gábor és Tóth Géza nyílt háromszögekre [TT07], Pálvölgyi Dömötör és Tóth Géza pedig minden nyílt konvex sokszögre belátták, hogy fedés-felbonthatók [PT10]. Ugyanakkor Pach, Tardos és Tóth 2007-es eredménye alapján a konkáv négyszögek *nem* fedés-felbonthatók [PTT07], Pálvölgyi 2010-ben ezt általánosítva konkáv sokszögek egy tág osztályáról mutatta meg, hogy nem fedés-felbonthatók [P10]. Ezeknek az eredményeknek számos további általánosítása, javítása született.

Az összes eddigi pozitív eredmény kizárólag nyílt sokszögekre (illetve körlapra) érvényes, zártakra csak akkor működnek a bizonyítások, ha feltesszük, hogy a fedés *lokálisan véges*, vagyis a sík minden pontja véges sokszor van lefedve. Meglepő, hogy éppen a végtelenszer fedett pontok okozzák a nehézséget, hiszen úgy is gondolhatjuk, hogy éppen ezeknél van a legtöbb szabadságunk a fedés felbontására.

A dolgozat fő eredménye, hogy bebizonyítjuk, hogy a *zárt*, konvex, középpontosan szimmetrikus sokszögek is fedés-felbonthatóak.

A fedés-felbonthatóság tulajdonságnak sok egyéb változata van, például a *sík* fedése helyett vizsgálhatjuk (és felbonthatjuk) *tetszőleges halmaz* fedéseit is. Ezenkívül szorítkozhatunk csak véges sok illetve megszámlálható sok fedő halmazra, vagy megengedhetünk akármilyen sokat. A dolgozatban megvizsgáljuk a különböző változatok közti összefüggéseket, és bebizonyítjuk, hogy a *nyílt* és a *zárt*, konvex, középpontosan szimmetrikus sokszögek mindegyik változatban fedés-felbonthatóak, sőt a végtelenszeres fedések két, szintén végtelenszeres fedésre is felbonthatóak.

1. Bevezetés

1.1. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ síkbeli halmazokból álló halmazrendszer, és legyen A egy síkbeli halmaz, $k \geq 0$. $\mathcal{H}$ az A halmazt *k-szorosan fedi*, ha A minden pontját legalább k darab $\mathcal{H}$-hoz tartozó halmaz tartalmazza.

A sík sokszoros fedéseinek vizsgálatát 50 éve Fejes Tóth László és Harold Davenport kezdeményezték [F53], [H55]. Azóta nagyon sok eredmény született ebben a témában, [FTK93], [BMP05]. Az egyik legfontosabb kérdés az, hogy egy adott alakzatokból álló (sokszoros) fedésnek mennyi a minimális sűrűsége. A legtöbbet az olyan fedésekkel foglalkoztak, amely egy adott S halmaz *eltoltjaiból* áll. A továbbiakban mi is csak ilyen halmazrendszerekkel fogunk foglalkozni.

1.2. Definíció. Egy síkbeli S halmazt *fedés-felbonthatónak* hívunk, ha létezik olyan $k = k(S)$ pozitív egész szám, hogy a sík tetszőleges k-szoros fedése S eltoltjaival felbomlik két fedésre.

Halmazok fedés-felbonthatóságat Pach János kezdte el vizsgálni 30 éve.

Sejtés. (Pach János, [P80]) *Minden korlátos konvex halmaz fedés-felbontható.*

Ezt a sejtést a következő speciális esetekben sikerült eddig igazolni.

1.3. Tétel. (a) (Pach, 1986, [P86]) *Minden nyílt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög fedés-felbontható.*

(b) (Mani, Pach, 1987, [MP87]) *A nyílt egységkör fedés-felbontható.*

(c) (Tardos, Tóth, 2007, [TT07]) *Minden nyílt háromszög fedés-felbontható.*

(d) (Pálvölgyi, Tóth, 2010, [PT10]) *Minden nyílt, konvex sokszög fedés-felbontható.*

Megjegyezzük, hogy a több mint 100 oldalas Mani, Pach [MP87] kéziratot a szerzők máig nem publikálták. Látható, hogy az összes általános pozitív eredmény csak *nyílt* alakzatokra érvényes, de ez valószínűleg a bizonyítási módszereink fogyatékossága, igazából feltehetőleg a nyíltságnak illetve zártságnak semmi köze a feladathoz. Dolgozatunk fő eredménye az első általános pozitív eredmény *zárt* alakzatokra.

1.4. Tétel. *Minden zárt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög fedés-felbontható.*

Az alakzat konvexitása viszont szorosan összefügg a fedés-felbonthatósággal. 2007-ben Pach, Tardos és Tóth megmutatták hogy a konkáv négyszögek *nem* fedés-felbonthatók [PTT07]. Ezt általánosította Pálvölgyi 2010-ben, konkáv sokszögeknek egy nagyon tág osztályáról mutatta meg, hogy nem fedés-felbonthatók. A részletek megtalálhatóak a 3. Fejezetben.

A fedés-felbonthatóságnak nagyon sok további változata van, sík helyett tekinthetjük tetszőleges halmaz sokszoros fedéseit, feltehetjük hogy véges sok, megszámlálhatóan sok, vagy akármilyen sok fedő halmazunk van. Ezek a változatok elég nagy mértékben keverednek a szakirodalomban, sőt, néhány helyen hibás állítások, megjegyzések is vannak, mert nem a megfelelő változatot használják. A dolgozat második felében igyekszünk rendszerezni ezeket a változatokat, a köztük levő összefüggéseket, és hogy melyikről mi ismert.

Vegül, de nem utolsó sorban, belátjuk, hogy a 1.4. Tételünk érvényes a fedés-felbonthatóság mindegyik vizsgált változatával, sőt, *nyílt*, konvex, középpontosan szimmetrikus sokszögekkel is igazak az eddig ismertnél erősebb felbonthatósági feltételek. Ez Pach János tételének [P86] messzemenő általánosítása. Belátjuk azt is, hogy nyílt vagy zárt középpontosan szimmetrikus konvex sokszögekkel való végtelenszeres fedések felbonthatóak két végtelenszeres fedésre is.

2. Zárt, szimmetrikus konvex sokszögek; az 1.4. Tétel bizonyítása

2.1. Dualizálás, áttérés ékekre

Mint szinte minden, fedések szétszedhetőségevel foglalkozó cikkben, itt is áttérünk a feladat *duálisára.* Az ötlet Pach Jánostól származik [P86].

Legyen S egy zárt, vagy nyílt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög, a csúcsai v_1, v_2, ..., v_{2n}, órajárás szerint. Az indexeket ezentúl modulo $2n$ értjük, tehát például $v_0 = v_{2n}$ illetve $v_1 = v_{2n+1}$, és a v_k-val szemközti csúcs pedig a v_{k+n}.

Tetszőleges p pontra legyen $S(p)$ S azon eltoltja, amelynek középpontja p-ben van. Tekintsük S eltoltjainak egy $\mathcal{H}$ családját. Legyen $\mathcal{H}'$ az $\mathcal{H}$-hoz tartozó eltoltak középpontjainak a halmaza. Egy tetszőleges a pontot egy $S(p)$ eltolt akkor és csak akkor tartalmaz, ha $S(a)$ tartalmazza $S(p)$ középpontját, p-t. Tehát tetszőleges $k \geq 1$-re, az a pontot $\mathcal{H}$ k-szorosan fedi akkor és csak akkor, ha $S(a)$ k pontot tartalmaz a $\mathcal{H}'$ halmazból. Ennek alapján, ha $\mathcal{H}$ egy k-szoros fedést alkot, akkor S tetszőleges eltoltja $\mathcal{H}'$-nak legalább k pontját tartalmazza. (Megjegyzés: itt felhasználtuk, hogy S középpontosan szimmetrikus. Ha nem lenne, akkor S tetszőleges eltoltja helyett S középpontos tükörképének eltoltját kellene tekintenünk.)

Legyen $x = x(S) > 0$ olyan, hogy egy tetszőleges x oldalú négyzet S-nek legfeljebb két szomszédos oldalát metszi. Osszuk most fel a síkot egy x oldalú négyzetrács segítségével. Ekkor található egy $k' = k'(S)$ konstans amelyre igaz, hogy S tetszőleges eltoltja az x oldalú négyzetrácsnak legfeljebb k' négyzetébe metsz bele.

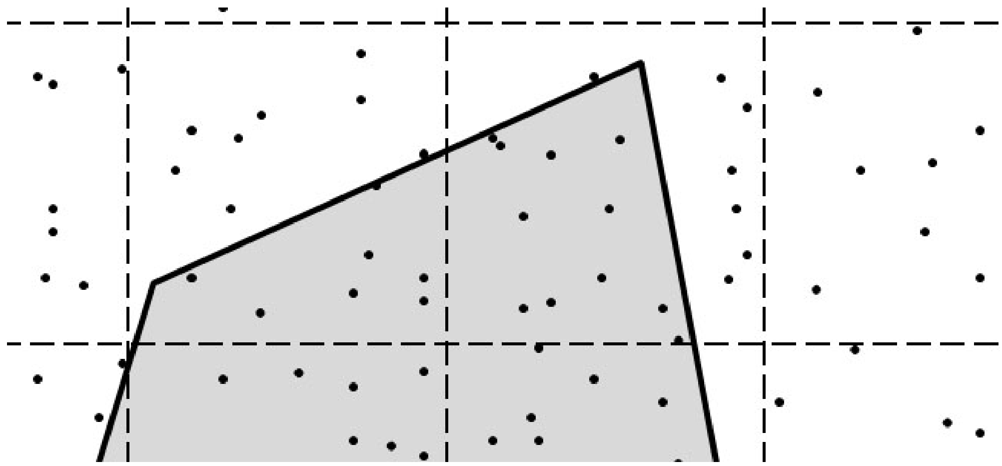
Tekintsünk egy a pontot, amelyet $\mathcal{H}$ k-szorosan fed. Ekkor a fentiek alapján $S(a)$ legalább k pontot tartalmaz a $\mathcal{H}'$ halmazból, tehát a négyzetrács kis négyzetei közül valamelyiken belül legalább k/k' pontot tartalmaz.

2.1. Definíció. Tetszőleges a, b pontokra jelölje $\overrightarrow{ab}$ az a végpontú, b-t tartalmazó félegyenest. Jelölje $arg(\overrightarrow{ab})$ azt a szöget, amellyel a pozitív x-tengely, mint félegyenest órajárás szerinti irányban el kell forgatni, hogy az $\overrightarrow{ab}$ félegyenes eltoltja legyen.

2.2. Definíció. Minden $1 \leq i \leq 2n$-re legyen E_i az a konvex szögtartomány, melynek két határoló félegyenese a $\overrightarrow{v_i v_{i-1}}$ és a $\overrightarrow{v_i v_{i+1}}$ félegyenesek eltoltjai. Ha S zárt, akkor E_i is legyen zárt (tartalmazza a határát), ha pedig S nyílt, akkor E_i is legyen nyílt (ne tartalmazza a határát). E_i-t az S sokszög v_i csúcsához tartozó *éknek* nevezzük. Az $\{ E_1, E_2, \ldots, E_{2n} \}$ ék-halmazt az S-hez tartozó ékeknek nevezzük. Tetszőleges p pontra $E_i(p)$ az E_i azon eltoltja amelynek csúcspontja p.

Azért volt érdemes felosztani a síkot kis négyzetekre, mert egy kis négyzetnek és $S(a)$-nak a metszete nagyon egyszeűen leírható. Legyen N egy kis négyzet. Mivel N $S(a)$ legfeljebb két szomszédos oldalát metszi, ezért $N \cap S(a)$ megegyezik egy S-hez tartozó ék alkalmas eltoltjának és N-nek a metszetével, vagyis $N \cap S(a) = N \cap E_i(p)$ valamilyen $1 \leq i \leq 2n$-re, és p pontra. (1. ábra)

Ezek után kimondhatjuk az 1.4. Tétel egy duális változatát, amelyből könnyen következik az 1.4. Tétel.



1. ábra. A duális feladat, tartományokra osztás után

2.3. Tétel. *Legyen S egy zárt, középpontosan szimmetrikus konvex sokszög, a csúcsai v_1, v_2, ..., v_{2n}, órajárás szerint. Létezik egy $m = m(S) > 0$ szám a következő tulajdonsággal.*

Tetszőleges korlátos $\mathcal{H}$ ponthalmaz kiszínezhető két színnel, pirossal és kékkel úgy, hogy minden S-hez tartozó ék $E_i(p)$ eltoltjára, ha $|E_i(p) \cap \mathcal{H}| \geq m$, akkor $E_i(p) \cap \mathcal{H}$ tartalmaz piros és kék pontot is.

Most megmutatjuk, hogyan következik az 1.4. Tétel a 2.3. Tételből.

A 1.4. Tétel bizonyítása a 2.3. Tétel felhasználásával. Legyen tehát S egy zárt középpontosan szimmetrikus, $2n$ csúcsú konvex sokszög. Legyen $x = x(S)$ és $k' = k'(S)$ az imént definiált konstansok, vagyis az x oldalú négyzet S-nek legfeljebb két szomszédos oldalát metszheti, és az x oldalú négyzetrácsnak legfeljebb k' négyzetébe metszhet bele S egy eltoltja. Legyen továbbá $m = m(S)$ a 2.3. Tétel feltételeit kielégítő konstans, és legyen $k = k'm$.

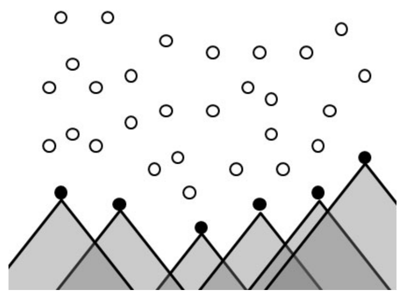
Tekintsük a sík egy k-szoros $\mathcal{H}$ fedését S eltoltjaival. Legyen $\mathcal{H}'$ az eltoltak középpontjainak a halmaza. Osszuk fel a síkot egy x oldalú négyzetrács segítségével, és mindegyik négyzetben különkülön színezzük ki $\mathcal{H}'$ oda eső pontjait a 2.3. Tétel feltételei szerint. Most térjünk vissza az eredeti $\mathcal{H}$ fedéshez, és színezzük ki $\mathcal{H}$ tagjait a középpontjuk színére. Azt állítjuk, hogy $\mathcal{H}$ piros illetve kék tagjai a sík egy-egy fedését adják. Tekintsünk egy tetszőleges p pontot. Be kell bizonyítanunk, hogy fedi őt mindkét színű eltolt. Ez ekvivalens azzal, hogy $S(p)$ tartalmaz mindkét színű pontot $\mathcal{H}'$-ból. Tudjuk, hogy $S(p)$ $\mathcal{H}'$ legalább k pontját tartalmazza, tehát a rács valamelyik négyzetéből, mondjuk N-ből, legalább $k/k' = m$ pontot tartalmaz. Viszont $S(p)$ úgy metszi N-et „mint egy ék”, pontosabban $N \cap S(p) = N \cap E_i(q)$ valamilyen $1 \leq i \leq n$-re, es q pontra. De a 2.3. Tétel illetve a színezés tulajdonságai alapján ekkor $N \cap S(p) = N \cap E_i(q)$ tartalmaz mindkét színű pontot. Vagyis az p pontot fedi mindkét színű eltolt $\mathcal{S}$-ből. □

Mostmár „csak” a 2.3. Tétel bizonyítása van hátra. Ehhez szükségünk lesz egy kis előkészületre.

Legyen S egy zárt vagy nyílt, középpontosan szimmetrikus, $2n$ csúcsú konvex sokszög, csúcsai v_1, v_2, ..., v_{2n}, órajárás szerint, az S-hez tartozó ékek pedig E_1, E_2, ..., E_{2n}. Legyen $\mathcal{H}$ egy korlátos ponthalmaz.

2.4. Definíció. Egy $p \in \mathcal{H}$ pontot nevezzünk *E_i-határpontnak*, vagy *E_i szerinti határpontnak* ha $E_i(p) \cap \mathcal{H} = \{p\}$ ha E_i zárt, és $\emptyset$ ha E_i nyílt. Azaz a p csúcspontú E_i ék nem tartalmaz p-n kívül más pontot. Az E_i szerinti határpontok halmaza pedig legyen $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i(\mathcal{H})$.

2.5. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ S szerinti határa $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathcal{H}) = \bigcup_{i=1}^{2n} \mathbf{B}_i$, azaz az összes, valamely ék szerinti határpontok halmaza. $\mathcal{H}$ többi pontját *belső pontnak* nevezzük.



2. ábra. Határpontok egy ék szerint

Világos, hogy ha S zárt, így a hozzá tartozó ékek is zártak, akkor minden p határpontra $E_i(p) \cap \mathcal{H} = \{p\}$, ha pedig S nyílt, akkor $E_i(p) \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

Először *zárt* sokszögekre bizonyítjuk be a 2.3. Tételt, de megjegyezzük, hogy nyílt ékekkel is hasonlóan működik a bizonyítás, sőt egyszerűsíthető is.

2.2. A véges bizonyítás ötlete

A 2.3. Tételt bebizonyította Pach János [P86] abban a speciális esetben, ha a $\mathcal{H}$ ponthalmaz *véges*. Most vázoljuk a bizonyítás ötletét. S tehát legyen egy zárt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög.

Belátható, hogy a határpontoknak van egy természetes ciklikus sorrendje (ezt később majd részletezzük). Nem neház látni, hogy egy S-hez tartozó ék eltoltja a határból legfeljebb két intervallumot metsz ki, és esetleg belső pontokat.

A bizonyítás két ötlet ötvözéséből alakult ki.

(a) *színezzük a határpontokat felváltva pirosra és kékre, ha elég sokat tartalmaz egy ék, biztosan lesz mindkét színű*

(b) *legyenek a határpontok kékek, a belsők pirosak, ha elég mélyen belemetsz az ék a ponthalmazba, lesz mindkét típusú pont*

Az első ötlet hibája, hogy lehetséges, hogy csak egy határpontot, és sok belső pontot metsz ki az ék. Nevezzük az ilyen határpontokat *gazdag* határpontnak. (A pontos definíciótól most eltekintünk.) Ha az az egy határpont piros, és a belső pontok is azok, akkor bajban vagyunk.

A második ötlet hibája pedig az, hogy lehet, hogy egy ék csak nagyon sok határpontot tartalmaz, belső pontot nem. Ekkor csupa kék pont van az ékben.

Ezt a két módszert úgy ötvözhejük, hogy a gazdag határpontokat kékre, a belső pontokat pirosra színezzük, a szegény (nem gazdag) határpontokat pedig lényegében felváltva színezzük pirosra és kékre.

Ekkor ha egy ék sok határpontot tartalmaz, és egy belsőt sem, nem lehet benne túl sok gazdag pont, mivel akkor belső pontnak is kellene lennie. Ha pedig sok belső pontot, és csak egy határpontot metsz ki, az a pont gazdag, és kék, tehát készen vagyunk. Ha pedig tartalmaz legalább kettő szomszédos nem gazdag határpontot a felváltott színezés miatt készen vagyunk. Ez persze a véges eset bizonyításnak csak a fő ötlete volt.

A mi bizonyításunk is ezen az ötleten alapul, sőt, véges sok határpont esetén a fentivel megegyező színezési eljárást ad a határon, de a belső pontokon nem.

2.3. Határpontok és tulajdonságaik

2.3.1. Szükséges fogalmak, definíciók

Az itt szereplő fogalmak, állítások egy részének megfelelői szerepeltek Pach Janos említett cikkében [P86] azzal a különbséggel, hogy ott S nyílt volt, $\mathcal{H}$ pedig véges ponthalmaz, amelyben semelyik két pont nem határoz meg S oldalaival párhuzamos egyenest. Itt S lehet zárt is, $\mathcal{H}$ lehet végtelen, és pontjai meghatározhatnak S oldalaival párhuzamos egyenest.

Legyen S egy zárt vagy nyílt, középpontosan szimmetrikus, $2n$ csúcsú konvex sokszög, csúcsai v_1, $v_2, \ldots, v_{2n}$, órajárás szerint, az S-hez tartozó ékek pedig $E_1, E_2, \ldots, E_{2n}$, és legyen $\mathcal{H}$ egy korlátos (de nem feltétlenül véges) ponthalmaz.

Most bevezetjük minden i-re $\mathcal{H}$ E_i szerinti határpontjainak egy rendezését, ezek együtt az összes S szerinti határpont egy ciklikus rendezését adják.

Legyen az E_i ék szögfelezőjére merőleges egyenes l_i. Irányítsuk l_i-t úgy, hogy E_i eltolható legyen $\overrightarrow{l_i}$ *bal* oldalára. Az $\overrightarrow{l_i}$ irányított egyenesen az irányítása szerint végighaladva megkapjuk a pontjainak egy rendezését. Azt mondjuk hogy x y előtt van (illetve y x után van) ha $\overrightarrow{l_i}$-n az irányítása szerint végighaladva x-szel előbb találkozunk, mint y-nal.

$\mathbf{B}_i$ pontjait merőlegesen vetítsük $\overrightarrow{l_i}$-re. Legyen a $p \in \mathbf{B}_i$ pont képe $\pi_i(p)$ (3. ábra).

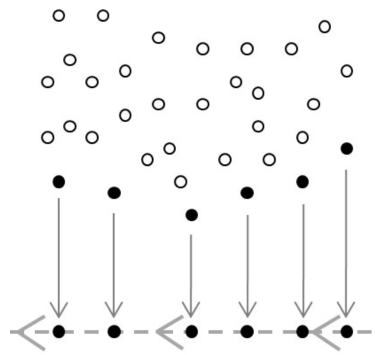
2.6. Állítás. *Két $p_1 \neq p_2 \in \boldsymbol{B}_i$ pontnak nem eshet egybe a merőleges vetülete l_i-n, azaz π_i injektív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $p_1, p_2 \in \mathbf{B}_i$ merőleges vetülete l_i-n ugyanaz. Mivel l_i merőleges E_i szögfelezőjére, ezért vagy $p_2 \in E_i(p_1)$ vagy $p_1 \in E_i(p_2)$, ami ellentmond annak, hogy p_1, p_2 E_i-határpontok. $\square$

Tetszőleges p_1, p_2 E_i-határpontokra $p_1 \prec_i p_2$ akkor és csak akkor, ha $\pi_i(p_1)$ $\pi_i(p_2)$ előtt van $\overrightarrow{l_i}$-n.

Ennek alapján az E_i-határpontokon beszélhetünk intervallumokról is, például $p_1, p_2 \in \mathbf{B}_i$, $p_1 \prec_i p_2$-re

$$[p_1, p_2] = \{p \in \mathbf{B}_i : \pi_i(p) \in [\pi_i(p_1), \pi_i(p_2)]\}\,.$$



3. ábra. Határpontok vetítése

Ennek alapján a $[p_1, p_2]$ intervallum első fele a

$$\left\{ p \in \mathbf{B}_i : \pi_i(p) \in \left[\pi_i(p_1), \frac{\pi_i(p_1) + \pi_i(p_2)}{2} \right] \right\}$$

intervallum, de hasonlóan definiálhatjuk a második felét is.

2.7. Állítás. *Tegyük fel, hogy $p \in \mathcal{H}$, és p E_i és E_{i+1} szerint is határpont. Ekkor a p-ben húzott, $v_i v_{i+1}$ egyenessel párhuzamos ℓ egyenesnek $\mathcal{H}$ minden pontja ugyanazon az oldalán van. Ha S nyílt, akkor az ℓ egyenesen is lehetnek $\mathcal{H}$-beli pontok. Ezen pontok mind E_i és E_{i+1} szerint is határpontok. Ha S zárt, akkor ℓ csak p-t tartalmazhatja.*

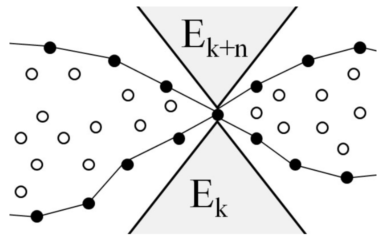
Bizonyítás. Legyen először S nyílt. Ha p E_i és E_{i+1} szerint is határpont, akkor $E_i(p)$ és $E_{i+1}(p)$ nem tartalmaz $\mathcal{H}$-beli pontot. De $E_i(p) \cup E_{i+1}(p)$ tartalmaz egy F nyílt félsíkot, amelynek ℓ határoló egyenese éppen a p-ben húzott, $v_i v_{i+1}$ egyenessel párhuzamos egyenes. Ha ezen az ℓ egyenesen van egy $q \in \mathcal{H}$ pont, akkor F tartalmazza $E_i(q)$-t és $E_{i+1}(q)$-t, tehát q E_i és E_{i+1} szerint is határpont.

Most legyen S zárt. Ha p E_i és E_{i+1} szerint is határpont, akkor $E_i(p)$ és $E_{i+1}(p)$ nem tartalmaz p-n kívül $\mathcal{H}$-beli pontot. De $E_i(p) \cup E_{i+1}(p)$ tartalmaz egy F zárt félsíkot, amelynek ℓ határoló egyenese éppen a p-ben húzott, $v_i v_{i+1}$ egyenessel párhuzamos egyenes. Tehát ezen az ℓ egyenesen nincs p-n kívül $\mathcal{H}$-beli pont. $\square$

Könnyen látható, hogy ha S nyílt, p_1 és p_2 mindketten E_i és E_{i+1} szerint is határpontok, akkor $p_1 \prec_i p_2$ akkor és csak akkor, ha $p_1 \prec_{i+1} p_2$. A 2.7. Állítás alapján nincs ilyen p_1 és p_2 közös határpont, ha S zárt. A 2.7. Állításból az is következik, hogy ha p E_i és E_{i+1} szerint is határpont, akkor minden q E_i-határpontra $p \prec_i q$.

Lehetnek olyan határpontok is, amelyek nem csak egy ék szerinti határpontok, és mégsem esnek a fenti kategóriába.

2.8. Definíció. Egy $p \in \mathcal{H}$ pontot *szinguláris határpontnak* nevezünk, ha vannak olyan $i_1 < n_1 < i_2 < n_2 \in \{1, ..., 2n\}$, vagy $n_1 < i_1 < n_2 < i_2 \in \{1, ..., 2n\}$, számok, hogy p E_{i_1} és E_{i_2}-határpont, de nem E_{n_1} és E_{n_2}–határpont. A nem szinguláris határpontokat *reguláris határpontoknak* hívjuk.

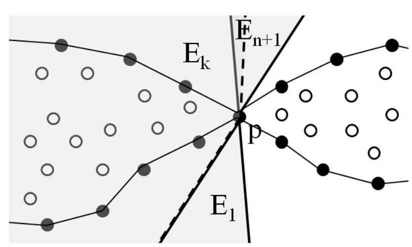


4. ábra. Egy szinguláris határpont E_k és középpontos tükörképe, E_{n+k} szerint

Vizsgáljuk meg a szinguláris határpontok néhány fontos tulajdonságát. A következő két állítás bizonyítása semmi újat nem tartalmaz a [P86] cikkben szereplő megfelelő bizonyításhoz képest, csak a teljesség kedvéért közöljük.

2.9. Állítás. *Egy p szinguláris határpont ha E_i-határpont, akkor rajta kívül csak E_{i+n} (E_i középpontos tükörképe) szerint lehet határpont.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy vannak olyan $i_1 < n_1 < i_2 < n_2 \in \{1, ..., 2n\}$ számok, hogy p E_{i_1} és E_{i_2} szerint határpont de E_{n_1} és E_{n_2} szerint nem, és $i_1 + n \neq i_2$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $i_1 = 1$, $i_2 = k < n$. Ekkor $E_1(p)$ és $E_k(p)$ p-n kívül nem tartalmaznak $\mathcal{H}$-beli pontot. Viszont könnyen ellenőrizhető, hogy minden $1 < j < k$ esetén $E_j(p) \subset E_1(p) \cup E_k(p)$, ezért $E_i(p)$ sem tartalmaznak p-től különböző $\mathcal{H}$-beli pontot, ezért p E_i szerint is határpont, ami ellentmond a feltevésnek. Az $n_1 < i_1 < n_2 < i_2$ esetben is pontosan ugyanígy érvelhetünk. □



5. ábra. Csak szemközti ékpár szerint lehet egy határpont szinguláris

Most belátjuk, hogy csak „egyféle” szinguláris határpont lehet.

2.10. Állítás. *Ha p szinguláris határpont E_i és középpontos tükörképe (E_{i+n}) szerint, akkor más ékpár szerint nem létezhet szinguláris határpont.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van két p és q szinguláris határpont, amik küölnböző ékpárok szerinti határpontok, mondjuk p az E_1 és E_{n+1} szerint, q az E_k és E_{n+k} szerint, $1 < k \leq n$. Mivel p E_1 és E_{n+1} szerint is határpont, vagy

$$arg(\overrightarrow{v_1 v_2}) \leq arg(\overrightarrow{pq}) \leq arg(\overrightarrow{v_{2n} v_1}), \tag{1}$$

vagy

$$arg(\overrightarrow{v_1 v_2}) \leq arg(\overrightarrow{qp}) \leq arg(\overrightarrow{v_{2n} v_1}). \tag{2}$$

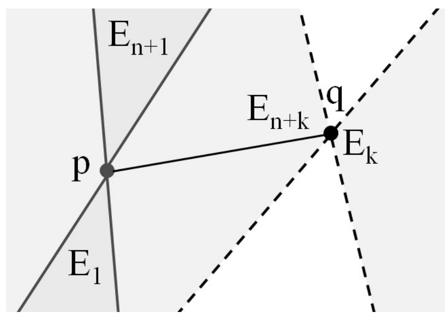
Tegyük fel, hogy (1) teljesül. Ekkor, mivel q E_k és E_{n+k} szerint is határpont,

$$arg(\overrightarrow{v_{k-1} v_k}) \leq arg(\overrightarrow{pq}) \leq arg(\overrightarrow{v_k v_{k+1}}). \tag{3}$$

Megjegyezzük, hogy ha S zárt, akkor a fenti egyenlőtlenségekben mindenütt szigorú egyenlőtlenség van, egyenlőseg nem megengedett. Ezek a szögtartományok, amiket így $arg(\overrightarrow{pq})$ lehetséges értékeire kaptunk, éppen az S csúcsaihoz tartozó megfelelő kiegészítő szögek, amelyek páronként diszjunktak. Tehát (1) és (3) csak úgy teljesülhet egyszerre, ha $k = 2$, és

$$arg(\overrightarrow{v_1 v_2}) = arg(\overrightarrow{pq}).$$

Ekkor viszont q E_1 szerint is határpont, ami a 2.9. Állítás szerint ellentmond annak, hogy q szinguláris. □



6. ábra. Csak egy ékpár szerint vannak szinguláris határpontok

Vegyük észre, hogy ha p és q E_1 és E_{n+1} szerinti szinguláris határpontok, akkor $p \prec_1 q \Leftrightarrow q \prec_{n+1} p$.

A fenti állítások alapján jól leírható a $\mathcal{H}$ halmaz határának a struktúrája. Legyen egy p határpont *típusa* az a legkisebb i, amelyre p E_i szerinti határpont. Tegyük fel, hogy a szinguláris határpontok E_1 és E_{n+1} szerinti határpontok. Tekintsük határpontok $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathcal{H})$ halmazát. Ebben a p szinguláris határpontokat helyettesítsük egy p' E_1 szerinti, és egy p'' E_{n+1} szerinti határponttal. Legyen p, $q \in \mathbf{B}'$. $p \prec q$, ha

- p i típúsú határpont, q j típúsú határpont, és $1 \leq i < j \leq 2n$.
- Valamilyen $i \geq 1$-re p és q is i típúsú határpont, és $p \prec_i q$.

A $\prec$ reláció a fenti állítások alapján egy rendezést ad a $\mathbf{B}'$ halmazon. Ha $\mathbf{B}'$ pontjait a rendezésnek megfelelően egy körön képzeljük el, akkor a határpontok egy körüljárását kapjuk, ahol minden határpont pontosan egyszer szerepel, kivéve a szinguláris határpontokat, azok kétszer. Ezen körüljárás szerint a következő sorrendben látjuk a határpontokat:

- E_{2n} és E_1 szerinti közös határpontok, $\prec_{2n}$ illetve $\prec_1$ szerint rendezve.

- E_1 szerinti határpontok, $\prec_1$ szerint rendezve,
- E_1 és E_2 szerinti közös határpontok, $\prec_1$ illetve $\prec_2$ szerint rendezve
- E_2 szerinti határpontok, $\prec_2$ szerint rendezve,
- E_2 és E_3 szerinti közös határpontok, $\prec_2$ illetve $\prec_3$ szerint rendezve
- E_3 szerinti határpontok, $\prec_3$ szerint rendezve,
- ...
- E_{2n} szerinti határpontok, $\prec_{2n}$ szerint rendezve,

Ennek alapján már világos, mit értünk $\mathbf{B}'$ illetve $\mathbf{B}$ *intervalluma* alatt, de azert formálisan is definiáljuk.

2.11. Definíció. Egy $I \subset \mathbf{B}'$ halmazt *intervallumnak* nevezünk, ha vagy

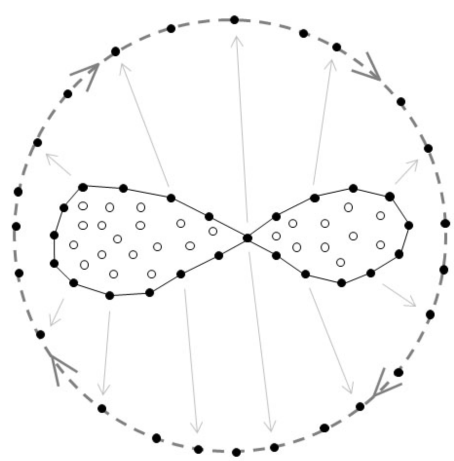
(i) ha $p \prec q \prec r$, és $p, r \in I$, akkor $q \in I$,

vagy

(ii) ha $p \prec r$, és $p, r \in I$, és $q \prec p$ vagy $r \prec q$, akkor $q \in I$.

Egy $I \subset \mathbf{B}$ halmazt *intervallumnak* nevezünk, ha a megfelelő $I' \subset \mathbf{B}'$ halmaz $\mathbf{B}'$ intervalluma.

Egy $I \subset \mathbf{B}$ illetve $I \subset \mathbf{B}'$ intervallumot *homogénnek* hívunk, ha valamilyen i-re minden eleme E_i-határpont.



7. ábra. Körre vetített határpontok

2.12. Állítás. *Egy S-hez tartozó ék eltoltja a határpontokból legfeljebb két diszjunkt intervallumot metszhet ki.*

Bizonyítás. Tekintsük mondjuk az E_2 ék egy eltoltját, $E_2(z)$-t. Tegyük fel, hogy p E_i-határpont, q E_j-határpont, $3 \leq i, j \leq n+1$, $p \in E_2(z)$, és $p \succ q$. Ekkor

$$arg(\overrightarrow{v_2 v_1}) \leq arg(\overrightarrow{pq}) \leq arg(\overrightarrow{v_2 v_3}),$$

ezért $q \in E_2(z)$. Hasonlóan érvelhetünk, ha p és q a „másik oldalon” van, vagyis $i, j \in \{n+3, n+4, \ldots, 2n, 1\}$.

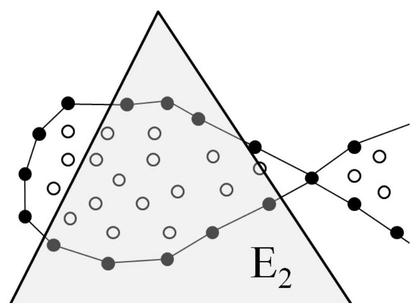
Most tegyük fel, hogy p E_i-határpont, q E_2-határpont, $3 \leq i \leq n+1$, $p, q \in E_2(z)$, és $p \succ r \succ q$. Ekkor megint

$$arg(\overrightarrow{v_2 v_1}) \leq arg(\overrightarrow{pr}) \leq arg(\overrightarrow{v_2 v_3}),$$

ezért $r \in E_2(z)$. Megint hasonlóan érvelhetünk a szimmetrikus állításnál, amikor $i \in \{n+3, n+4, \ldots, 2n, 1\}$.

Végül tegyük fel, hogy p, q, és r E_2-határpontok, $p, r \in E_2(z)$, és $p \succ q \succ r$. Ekkor megint könnyen ellenőrizhető, hogy $r \in E_2(z)$. Ugyanez igaz akkor is, ha p, q, és r E_{n+2}-határpontok.

Ezekből pedig következik, hogy $E_2(z)$ a határból legfeljebb két intervallumot metsz ki. □



8. ábra. Egy ék a határból legfeljebb két összefüggő intervallumot metszhet ki

Külön problémát fognak okozni a belső pontoknak azon torlódási pontjai, amelyek határpontok lennének, de nem tartoznak a $\mathcal{H}$ halmazhoz. Nevezzük ezeket a pontokat *fantom határpontoknak.* Nyilvánvaló, hogy ha $\mathcal{H}$ véges, akkor nincsenek fantom határpontok. A véges bizonyításban [P86] az összes belső pont piros lett. Ha $\mathcal{H}$ végtelen is lehet, akkor ez nem tartható, mert elképzelhető hogy egy ék csak egy fantom határpontot tartalmaz, és az oda torlódó belső pontokat. Ezért kénytelenek leszünk a belső pontokat is több színűre színezni, eltérően a véges esettől.

2.3.2. Színezési algoritmus

Legyen S egy zárt vagy nyílt, középpontosan szimmetrikus, $2n$ csúcsú konvex sokszög, csúcsai v_1, v_2, …, v_{2n}, órajárás szerint, az S-hez tartozó ékek pedig E_1, E_2, …, E_{2n}. Legyen $\mathcal{H}$ egy korlátos ponthalmaz.

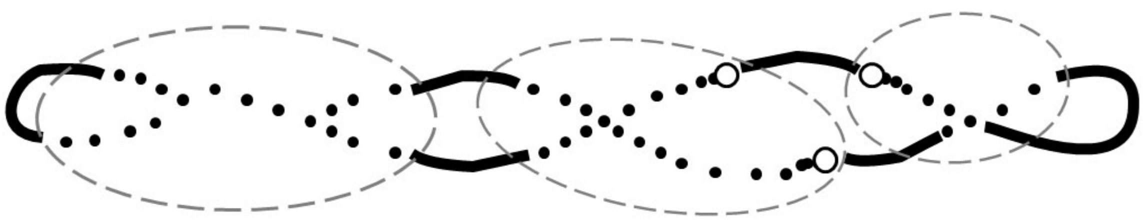
2.13. Definíció. Két határpont *szomszédos*, ha nincs köztük harmadik pont a $\prec$ rendezés szerint. Legyen a $\approx$ reláció a szomszédsági reláció tranzitív leártja, azaz $a \approx b$ akkor és csak akkor, ha megadható határpontok a-val kezdődő b-vel végződő véges sorozata, amelyben az egymás utáni pontok szomszédosak.

A $\approx$ reláció ekvivalenciareláció. Azért vezettük be, mert így egy ekvivalenciaosztályon belüli határpontok lokálisan hasonóan viselkednek, mint a véges esetben, nincsenek köztük torlódási pontok (viszont fantom-határpontok lehetnek!). Könnyen látható, hogy ha a $\mathcal{H}$ halmaz határán véges sok pont van, akkor azok mind egy ekvivalenciaosztályba kerülnek.

Először adunk egy színezési eljárást, amely feketére és fehérre színezi a határpontokat. A végső színezésben pirosra és kékre színezünk, ehhez a fekete-fehér színező eljárást többször alkalmazzuk.

Fekete-Fehér-Határszínezés$(S, \mathcal{H})$

Bontsuk fel $\mathcal{H}$ S szerinti határát az $\approx$ reláció segítségével ekvivalenciaosztályokra. Legyen E egy tetszőleges ekvivalenciaosztály, és $|E| > 1$.



9. ábra. A bekarikázott határpontok egy ekvivalenciaosztályhoz tartoznak

Ha vannak E-ben szinguláris *pontok, akkor színezzük ki először őket a $\prec$ szerinti sorrendben felváltva feketével és fehérrel. Ezek után, ha két egymás utáni szinguláris pont között vannak reguláris határpontok, színezzük őket felváltva úgy, hogy ha esetleg kettő ugyanolyan színű kerül egymás mellé, azok fehérek legyenek. Vagyis színezzük őket úgy, hogy ne legyen két szomszédos fekete, és három szomszédos fehér. Ez mindig megtehető, mivel az ekvivalencia-osztályokban a pontok diszkréten helyezkednek el egymás mellett. Ezt végezzük el minden E ekvivalenciaosztályra, ahol $|E| > 1$.*

A szomszéd nélküli határpontok, *azaz amelyek egy egy elemű ekvivalenciaosztályhoz tartoznak, még nem kaptak színt. Ezek halmaza, $\boldsymbol{B}_{szn}$, felírható, mint legfeljebb $2n$ darab homogén intervallum uniója, $\boldsymbol{B}_{szn} = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_{2n}$, ahol I_i elemei mind E_i-határpontok. Ezeket külön fogjuk színezni. Az E_i-határpontokon definiáltunk egy π_i vetítést az l_i egyenesre, amely az E_i szögfelezőjére merőleges. A π_i vetítés felhasználásával definiáltuk I_i részintevallumainak felezését.*

Minden i-re, $1 \leq i \leq 2n$, tekintsük az I_i intervallumot, ha végtelen sok pontot tartalmaz, válasszunk benne egy pontot, és színezzük feketére. Ezután megint minden i-re, $1 \leq i \leq 2n$, ha I_i végtelen sok pontot tartalmaz, válasszunk benne kiszínezetlen *pontot, és színezzük fehérre. Ha véges sok pontot tartalmaz, akkor színezzük az összeset fehérre. Most felezzük meg a* *végtelen sok pontot tartalmazó intervallumokat. A véges sok pontot tartalmazó intervallumokkal nem foglalkozunk tovább. Legyen az új intervallumok halmaza J_1, J_2, $\ldots$, J_m. Ismételjük meg az előbbi lépést, minden végtelen sok pontot tartalmazó intervallumban válasszunk egy kiszínezetlen pontot, és színezzük feketére, majd minden végtelen sok pontot tartalmazó intervallumban válasszunk egy kiszínezetlen pontot, és színezzük fehérre. A véges sok pontot tartalmazó intervallumok pontjait színezzük fehérre. Ismételjük ezt az eljárast megszámlálható sokszor.*

Ezután, ha maradt kiszínezetlen határpont, akkor azt színezzük fehérre.

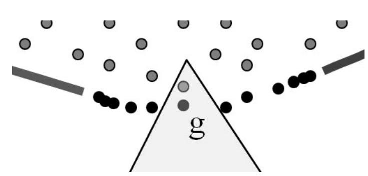
Megjegyzés: A Fekete-Fehér-Határszínezés$(S, \mathcal{H})$ eljárás egy nem determinisztikus algoritmus, ugyanazon S és $\mathcal{H}$ esetén több különböző színezést is adhat.

2.14. Állítás. *Ha egy intervallumban végtelen sok határpont van, az tartalmaz mindkét színű pontot. Sőt mindkettőből végtelen sokat.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy az I intervallum homogén, mondjuk minden pontja E_i-határpont.

Tegyük fel először, hogy az intervallum tartalmaz a belsejében egy szomszéd nélküli p határpontot, vagyis egy olyan p határpontot, amely nem is minimális, és nem is maximális az intervallumban $\prec_i$ szerint. Ekkor van I belsejében határpontoknak egy q torlódási pontja (amely nem feltétlenul eleme $\mathcal{H}$-nak). Ha q szomszéd nélküli határpontok torlódási pontja, akkor intervallum felezéses színezési algoritmussal el fogunk jutni egy olyan $J \subset I$ intervallumhoz, amelyben végtelen sok szomszéd nélküli határpont van, és itt választunk mindkét színű pontot. Az eljárást folytatva végtelen sokat is találhatunk mindkét színből. Ha q szomszéddal rendelkező határpontok torlódási pontja, vagy ha I egyáltalan nem tartalmaz a belsejében szomszéd nélküli p határpontot, akkor I végtelen sok szomszéddal rendelkező határpontot tartalmaz. Ekkor viszont vagy tartalmaz olyan $x \prec_i y \prec_i z$ pontokat, amelyek szomszédosak, ekkor van köztük mindkét színű, vagy pedig tartalmaz olyan $x \prec_i y$ pontokat, hogy nincs $z \in I$, amelyre $y \prec_i z$ illetve $z \prec_i x$. Ekkor x-et és y-t különböző színűre színeztük. Mivel végtelen sok határral rendelkező határpontunk van, hasonló módon végtelen sokat is találunk mindkét színből. □

2.15. Definíció. Egy határpontot nevezzünk *gazdagnak*, ha kimetszhető úgy egy S-hez tartozó ék eltoltjával, hogy az ék csak őt tartalmazza a határpontok közül, és legalább egy belső pontot.



10. ábra. Egy g gazdag határpont

2.4. A 2.3. Tétel bizonyítása

2.4.1. A színezés

Most már készen állunk, hogy bebizonyítsuk a 2.3. Tételt.

Legyen S egy zárt, középpontosan szimmetrikus, $2n$ csúcsú konvex sokszög, csúcsai v_1, v_2, ..., v_{2n}, órajárás szerint, az S-hez tartozó ékek pedig E_1, E_2, ..., E_{2n}. Legyen S' S a határa nélkül, vagyis S „nyílt változata". Végül legyen $\mathcal{H}$ egy korlátos ponthalmaz.

Az alábbi színezés először $\mathcal{H}$ határát, $\mathbf{B}$-t színezi, majd a belső pontok határát, $\mathbf{B}'$-t utána megmaradt pontok S' szerinti határát, $\mathbf{B}''$-t végül pedig a megmaradt pontokat, $\mathcal{H}'''$-t. Nagyon pontatlanul fogalmazva, az első réteg felelős a véges sok pontot tartalmazó ékekben a kék pontokért, a masodik a pirosért, a következő két réteg pedig a végtelen sok pontot tartalmazó ékeket intézi el.

Piros-Kék-Színezés$(S, \mathcal{H})$

1. *Színezzük ki $\mathcal{H}$ S szerinti határát, az* első réteget, *vagyis $\boldsymbol{B}$-t a* Fekete-Fehér-Határszínezés$(S, \mathcal{H})$ *segítségével. Ezután egy tetszőleges $p \in \boldsymbol{B}$ határpont*

   – *legyen kék, ha gazdag, vagy fehér,*

   – *legyen piros minden egyéb esetben.*

Most legyen $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \boldsymbol{B}$, vagyis $\mathcal{H}$ belső pontjainak a halmaza.

2. *Színezzük ki $\mathcal{H}'$ S szerinti határát,* a második réteget, *$\boldsymbol{B}'$-t a* Fekete-Fehér-Határszínezés$(S, \mathcal{H}')$ *segítségével. Ezután egy tetszőleges $p \in \boldsymbol{B}'$ határpont, 1.-höz képest felváltott kiosztással*

   – *legyen piros, ha gazdag, vagy fehér,*

   – *legyen kék minden egyéb esetben.*

Most pedig legyen $\mathcal{H}'' = \mathcal{H}' \setminus \boldsymbol{B}'$, vagyis $\mathcal{H}'$ belső pontjainak a halmaza.

3. *Színezzük ki $\mathcal{H}''$ S' (figyelem! nem S, hanem S') szerinti határát,* a harmadik réteget, *$\boldsymbol{B}''$-t a* Fekete-Fehér-Határszínezés$(S', \mathcal{H}'')$ *segítségével. Ezután egy tetszőleges $p \in \boldsymbol{B}'$ határpont*

   – *legyen kék, ha fehér,*

   – *legyen piros ha fekete.*

Végül legyen $\mathcal{H}''' = \mathcal{H}'' \setminus \boldsymbol{B}''$, a negyedik réteg, *vagyis a még kiszínezetlen pontok halmaza.*

4. *Vegyünk az első lépésben egy $\mathcal{H}'''$-t tartalmazó négyzetet. Ha végtelen sok pontot tartalmaz, $\mathcal{H}'''$-ből, (vagyis $\mathcal{H}'''$-nek végtelen sok pontja van), akkor válasszunk egy pirosat és egy kéket. A két oldalt megfelezve vágjuk négy kisebb négyzetre a négyzetet, a $\mathcal{H}'''$-ből végtelen sok pontot tartalmazó kis négyzetekben válasszunk megint mindkét színű pontot, majd tovább

negyedeljük a négyzeteket. Ha bármikor az eljárás során véges sok pontot tartalmazó négyzethez jutunk, színezzük az összes színezetlen pontját pirosra, és ezt a négyzetet ne osszuk tovább. Megszámlálható sok lépés után, a továbbra is színezetlen pontokat színezzük pirosra.

Ezzel megadtuk a színezési eljárást.

2.4.2. Véges ékek

Tegyük föl, hogy E_i egy eltoltja, $E_i(a)$ $\mathcal{H}$ *véges sok* pontját tartalmazza, de legalább 24-et. Ekkor $E_i(a)$ mindenképpen tartalmaz E_i szerinti határpontot.

1. eset: $E_i(a)$ az első rétegből 1 pontot tartalmaz, vagyis $|E_i(a) \cap \mathbf{B}| = 1$ Ekkor ez a p pont gazdag, ezért kék, és $E_i(a)$ tartalmaz legalább 23 belső pontot.

2. eset: $|E_i(a) \cap \mathbf{B}| = 2$. A 2.12. Állítás alapján $E_i(a)$ az első rétegből legfeljebb két intervallumot metsz ki. Ha mindkettő egy pontot tartalmaz, akkor valamelyik gazdag, ezért kék. Ha a két határpont szomszédos, akkor valamelyikük kék. Ezenívül $E_i(a)$ tartalmaz legalább 22 belső pontot.

3. eset: $3 \leq |E_i(a) \cap \mathbf{B}| \leq 21$. Ekkor $E_i(a)$ mindenképpen tartalmaz két szomszédos határpontot, amelyek közül valamelyik kék. Ezenkívül $E_i(a)$ tartalmaz legalább 3 belső pontot.

4. eset: $22 \leq |E_i(a) \cap \mathbf{B}| \leq 24$. Ekkor, mivel $E_i(a) \cap \mathbf{B}$ legfeljebb két intervallumból áll, $E_i(a)$ mindenképpen tartalmaz 11 szomszédos határpontot, legyenek ezek $p_1, \ldots, p_{11}$. Mindenképpen van köztük kék. Tegyük fel, hogy nincs köztük piros. A FEKETE-FEHÉR-HATÁRSZÍNEZÉS során nem színeztünk három szomszédos pontot fehérre, tehát p_2, p_3 és p_4 közül valamelyik azért kék, mert gazdag. Hasonlóan, p_5, p_6 és p_7, illetve p_8, p_9 és p_{10} közül is valamelyik gazdag. Viszont nem nehéz látni, hogy a hozzájuk tartozó belső pontok különbözőek, és $E_i(a)$ tartalmazza mindhárom pontot.

Összefoglalva, ha $E_i(a)$ 24 pontot tartalmaz a $\mathcal{H}$ halmazból, és nem tartalmaz mindkét színű pontot, akkor tartalmaz kék pontot a határból, és legalább 3 belső pontot.

Mivel $E_i(a)$ a $\mathcal{H}'$ halmazból ($\mathcal{H}'$ $\mathcal{H}$ belső pontjait jelöli) véges sok pontot tartalmaz, tartalmazza $\mathcal{H}'$ legalább egy határpontját. Ezt a határt ugyanazzal az eljárással színeztük, mint az első réteget, $\mathcal{H}$ határat, csak a színek szerepét felcseréltük. Ezért ugyanúgy érvelhetünk, mint az előbb, és azt kapjuk, hogy $E_i(a)$ mindenképpen tartalmaz *piros* pontot $\mathcal{H}'$ határán. Ezzel beláttuk, hogy ha $E_i(a)$ $\mathcal{H}$ véges sok, de legalább 24 pontját tartalmazza, akkor mindkét színű pontot tartalmaz.

2.4.3. Végtelen ékek

Most tegyük fel, hogy $E_i(a)$ $\mathcal{H}$ *végtelen sok* pontját tartalmazza, de nem tartalmaz mind a két színű pontot.

1. eset: $E_i(a)$ végtelen sok pontot tartalmaz $\mathcal{H}$ határából. Azt állítjuk, hogy ekkor $E_i(a)$ végtelen sok belső pontot is tartalmaz. A 2.12. Állítás alapján $E_i(a) \cap \mathbf{B}$ legfeljebb két intervallumból áll, tehát valamelyik, mondjuk I, végtelen. Tekintsük a pontoknak a FEKETE-FEHÉR-HATÁRSZÍNEZÉS során kapott színét. A 2.14. Állításból következik, hogy I-ben végtelen sok fehér és fekete pont van.

Ebből azonnal következik, hogy kék pont mindenképpen lesz I-ben. Ha piros nincs, akkor az összes I-ben levő fekete pont gazdag. De ekkor ezekhez a gazdag pontokhoz tartozó végtelen sok belső pont is $E_i(a)$-ban van.

2. eset: $E_i(a)$ véges sok pontot tartalmaz $\mathcal{H}$ határából, de legalább egyet. Ekkor, hasonlóan a véges esethez, könnyen látható, hogy $E_i(a)$ legalább egy kék pontot is tartalmaz $\mathcal{H}$ határából, és megint végtelen sok belső pontot is tartalmaz.

3. eset: $E_i(a)$ nem tartalmaz határpontot. Ekkor nyilván végtelen sok belső pontot tartalmaz.

Tehát összefoglalva, már csak azokkal az esetekkel kell foglalkoznunk amikor $E_i(a)$ végtelen sok belső pontot is tartalmaz, és tartalmaz *kék* pontot, kivéve, ha egyáltalán nem tartalmaz határpontot. Tehát ugyanígy érvelhetünk a $\mathcal{H}'$ halmaz ($\mathcal{H}$ belső pontjai) esetén is. $\mathcal{H}'$ határát, $\mathbf{B}'$-t, ugyanazzal az eljárással színeztük, mint $\mathbf{B}$-t, csak a színek szerepét felcseréltük. Ezért $E_i(a)$ mindenképpen $\mathcal{H}'$ végtelen sok belső pontját tartalmazza, és tartalmaz *piros* pontot $\mathbf{B}'$-en, kivéve, ha egyáltalán nem tartalmaz pontot $\mathbf{B}'$-n.

Ennek alapján, mivel feltettük hogy $E_i(a)$ nem tartalmaz mind a két színű pontot, vagy (i) $E_i(a) \cap \mathbf{B} = \emptyset$, vagy (ii) $E_i(a) \cap \mathbf{B}' = \emptyset$. Vagyis vagy az első, vagy a második rétegből nem tartalmaz pontot.

Tegyük fel, hogy $E_i(a) \cap \mathbf{B} = \emptyset$, a másik eset teljesen ugyanúgy megy.

Tudjuk, hogy $E_i(a)$ mindenképpen $\mathcal{H}''$ ($\mathcal{H}'$ belső pontjai) végtelen sok pontját tartalmazza, tehát megint két eset lehetséges.

1. eset: $E_i(a)$ $\mathcal{H}''$ S' szerinti határából, $\mathbf{B}''$-ből végtelen sok pontot tartalmaz. Mivel a metszet megint legfeljebb két intervallumból áll, valamelyik intervallum végtelen sok pontú, és a 2.14. Állítás alapján van benne mindkét színű pont.

2. eset: Már csak az az eset maradt, amikor $E_i(a)$ $\mathcal{H}''$ S' szerinti határából, $\mathbf{B}''$-ből véges sok pontot tartalmaz, és $\mathcal{H}''$ S' szerinti belső pontjaiból, $\mathcal{H}'''$-ből tartalmaz végtelen sok pontot. Azt állítjuk, hogy ekkor $E_i(a)$ a *belsejében* is tartalmaz pontot. Tegyük föl, hogy nem. Ekkor viszont minden pont, amit tartalmaz, a határán van. Viszont akkor ezek a pontok S' szerint mind határpontok, ami ellentmond a feltevésünknek. Tehát van egy a_0 pont $E_i(a)$ belsejében. Ebből következik, hogy $E_i(a_0)$ is $E_i(a)$ belsejében van. Mivel $E_i(a)$ nem tartalmazza $\mathcal{H}$ határpontját, a_0 nem határpont, tehát $E_i(a_0)$ tartalmaz egy a_1 pontot. Hasonlóan, $E_i(a_1) \subset E_i(a_0)$ is tartalmaz egy a_2 pontot. Így kapunk végtelen, $a_0, a_1, \ldots$ pontsorozatot $E_i(a_0)$-ban. Ezek véges sok kivételével a negyedik réteghez, $\mathcal{H}'''$-hoz tartoznak. ($\mathcal{H}'''$ $\mathcal{H}''$ S' szerinti belső pontjainak a halmaza). Ezeknek a pontoknak van egy x torlódási pontja, $x \in E_i(a_0)$, hiszen $E_i(a_0)$ zárt. Ebből következik, hogy x is $E_i(a)$ belsejében van. Viszont ekkor, $\mathcal{H}'''$ színezésekor, egyszer eljutottunk egy olyan kis négyzethez, amely tartalmazza x-et, $E_i(a)$-ban van, és végtelen sok pont van benne. Ezért ebben választottunk egy piros és egy kék pontot.

Ezzel bebizonyítottuk az 2.3. Tételt.

3. A felbonthatóság változatai

A fedés-felbonthatóság tulajdonságnak sok változata van, például a *sík* fedése helyett vizsgálhatjuk és felbonthatjuk *tetszőleges halmaz* fedéseit is. Ezenkívül vizsgálhatunk csak véges sok illetve megszámlálható halmazból álló fedéseket, vagy megengedhetünk akármilyen sokat. Most az erre vonatkozó definíciókat pontosan kimondjuk, és felsoroljuk az ezekkel kapcsolatos eddig ismert összefüggéseket. Tisztázzuk, hogy az eddig ismert eredmények melyik változatokra érvényesek. Látni fogjuk, hogy középpontosan szimmetrikus nyílt illetve zárt sokszögek esetén a legáltalánosabb felbonthatósági tulajdonság is teljesül.

A továbbiakban kizárólag egy *korlátos, síkbeli S halmaz eltoltjaiból* álló fedéseket vizsgálunk.

3.1. Definíció. (a) Egy fedés *véges*, ha véges sok eltoltból áll.

(b) Egy fedés *lokálisan véges*, ha bármely kompakt halmazba csak véges sok eltolt metsz bele.

(c) Egy fedés *megszámlálható*, ha megszámlálható sok eltoltból áll.

Most pedig definiáljuk a fedés-felbonthatóság nyolc különböző változatát.

3.2. Definíció. Egy S síkbeli halmaz

{véges, lokálisan véges, megszámlálható, illetve tetszőleges}

{sík- illetve totális- }

fedés-felbontható, ha létezik olyan k, hogy a

{sík, illetve tetszőleges halmaz}

{véges, lokálisan véges, megszámlálható, illetve tetszőleges}

k-szoros fedése felbontható két fedésre.

Az egyszerűség kedvéért a megfelelő fedés-felbonthatósági tulajdonságot $F_{i,j}$-vel jelöljük, az alábbi táblázat alapján. Az elnevezésben a *totális* jelzőt el is hagyhatjuk.

	véges	lokálisan véges	megszámlálható	tetszőleges
a sík	$F_{1,1}$	$F_{1,2}$	$F_{1,3}$	$F_{1,4}$
tetszőleges halmaz	$F_{2,1}$	$F_{2,2}$	$F_{2,3}$	$F_{2,4}$

Mivel egy korlátos halmaz véges sok eltoltjával nem fedhető le a sík, az $F_{1,1}$ tulajdonság minden ilyen S halmazra teljesül (viszont semmitmondó). A továbbiakban az $F_{1,1}$ tulajdonsággal nem foglalkozunk többet. Nyilván minden S-re $F_{i,4} \Rightarrow F_{i,3} \Rightarrow F_{i,2} \Rightarrow F_{i,1}, (i \in \{1,2\})$, és $F_{2,j} \Rightarrow F_{1,j}, (j \in \{1,2,3,4\})$ minden alakzat esetében fennáll. Tehát a tulajdonságok jobbról balra illetve lentről felfelé gyengülnek.

3.3. Definíció. A halmaz lezártját jelöljük $Cl(A)$-val, belsejét pedig $Int(A)$-val.

A dolgozat elején már definiált, és az 1.4. Tételben alkalmazott fedés-felbonthatóság esetén a sík minden pontját le kell fednünk k-szorosan, viszont teszőlegesen sok eltolt lehet. Ez a most definiált fogalmak közül a *totális-sík-fedés-felbonthatóság*, ($F_{1,4}$). A bevezetett fogalmak közötti eddig ismert további kapcsolatok függnek attól, hogy S nyílt, vagy zárt.

Pach János már említett sejtésének általánosabb változata a következő.

3.4. Sejtés. *Konvex, korlátos S síkbeli alakzatra minden $F_{i,j}$ tulajdonság teljesül ($i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,3,4\}$).*

Először vizsgáljuk meg, hogy nyíltságtól, zártságtól függetlenül milyen kapcsolatok állnak fenn a felbonthatósági tulajdonságok között.

3.1. Általános állítások

3.5. Állítás. *Legyen S egy nyílt, korlátos, konvex halmaz. $F_{2,1}$ (véges-fedés-felbonthatóság) teljesül S-re akkor és csak akkor, ha teljesül $Cl(S)$-re.*

Bizonyítás. Legyen S egy nyílt, korlátos, konvex halmaz, k pedig egy konstans azzal a tulajdonsággal, hogy tetszőleges halmaz legalább k-szoros, véges fedése S eltoltjaival felbontható két fedésre. Legyen s S egy belső pontja, amelyet S *középpontjának* hívunk. Tetszőleges x pontra jelölje $S(x)$ S eltoltját a $\vec{sx}$ vektorral, vagyis $S(x)$ S azon eltoltja, amelynek középpontja x. Tetszőleges α konstansra legyen αS S nagyítása illetve kicsinyítése α faktorral az s pontból. Ekkor $\alpha S(x)$ $S(x)$ nagyítása illetve kicsinyítése α faktorral az x pontból.

Tekintsük egy A halmaz k-szoros, véges $\mathcal{H}$ fedését $Cl(S)$ eltoltjaival. Legyenek a fedő eltoltak $Cl(S(x_1))$, $Cl(S(x_2))$, …, $Cl(S(x_m))$. Egy $X \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$ részhalmazt nevezzünk *fedő részhalmaznak*, ha van olyan $a = a(X) \in A$, *X-et reprezéntáló pont*, hogy az a pontot pontosan az X részhalmazhoz tartozó eltoltak tartalmazzák, vagyis $a \in Cl(S(x_i)) \Leftrightarrow i \in X$. Minden fedő X részhalmazhoz válasszunk egy $a(X)$ repreźentáló pontot. Mivel $Cl(S)$ zárt, létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $a(X)$-re és i-re $a(X) \in Cl(S(x_i)) \Leftrightarrow a(X) \in Cl((1+\varepsilon)S(x_i))$. Vagyis $a(X)$ ugyanazt a részhalmazt repzezentálja a $Cl(S(x_1))$, $Cl(S(x_2))$, …, $Cl(S(x_m))$, és az $Cl((1+\varepsilon)S(x_1))$, $Cl((1+\varepsilon)S(x_2))$, …, $Cl((1+\varepsilon)S(x_m))$ fedésben. Tekintsük most az $(1+\varepsilon)S(x_1)$, $(1+\varepsilon)S(x_2)$, …, $(1+\varepsilon)S(x_m)$ halmazokat. Ez egy véges, legalább k-szoros $\mathcal{H}'$ fedése A-nak a nyílt $(1+\varepsilon)S$ eltoltjaival. A feltevés szerint $\mathcal{H}'$ felbontható két fedésre. Ennek megfelel a $\mathcal{H}$ fedésnek egy felbontása. Mivel a $\mathcal{H}'$ fedésnek pontosan ugyanazok a fedő részhalmazai, mint az eredeti $\mathcal{H}$ fedésnek, a kapott felbontás a $\mathcal{H}$ fedést is két fedésre bontja.

Tehát ha S-re $F_{2,1}$ teljesül, akkor $Cl(S)$-re is teljesül. Az ellenkező irányú következtetést nagyon hasonlóan lehet bebizonyítani. □

3.6. Lemma (Kőnig). *Ha egy megszámlálhatóan végtelen csúcsú, gyökeres fagráf minden foka véges, akkor a fa tartalmaz végtelen utat.*

3.7. Állítás. *Egy S halmaz lokálisan véges-fedés-felbontható ($F_{2,2}$) akkor és csak akkor, ha véges-fedés-felbontható ($F_{2,1}$).*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy minden S-re $F_{2,1} \Rightarrow F_{2,2}$. Legyen S egy rögzített, véges-fedés-felbontható halmaz, és legyen k egy konstans azzal a tulajdonsággal, hogy tetszőleges halmaz legalább k-szoros, véges fedése S eltoltjaival felbontható két fedésre. Tekintsünk egy S eltoltjaiból álló $\mathcal{H}$ halmazrendszert, amely az A halmaznak egy lokálisan véges, legalább k-szoros fedése. Mivel $\mathcal{H}$ lokálisan véges, ezért megszámlálható, legyen $\mathcal{H} = \{S_1, S_2, \ldots\}$. Minden $i > 0$-ra legyen $\mathcal{H}_i = \{S_1, S_2, \ldots, S_i\}$.

Egy $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ egy felbontásán egy $f : \mathcal{H}' \to \{0,1\}$ függvényt értünk. Legyen $f^{-1}(0) = \{S \in \mathcal{H}' \mid f(S) = 0\}$ és $f^{-1}(1) = \{S \in \mathcal{H}' \mid f(S) = 1\}$.

Egy $f : \mathcal{H}' \to \{0,1\}$ felbontás $\mathcal{H}_i$-**jó**, ha a következő teljesül.

- Ha egy $a \in A$ pontot $\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_i$ *nem* fedi, akkor $f^{-1}(0)$ és $f^{-1}(1)$ is fedi a-t.

Készítsük el a következő gráfot:

A_i legyen a $\mathcal{H}_i$-jó szétválasztások halmaza, ezek elemei lesznek a gráf csúcsai, minden i-re. $A_i \neq \emptyset$ az $F_{2,1}$ tulajdonság miatt. Kössünk össze egy $f \in A_i$ és egy $g \in A_{i+1}$ szétválasztást, ha g kiterjesztése f-nek, azaz $\mathcal{H}_i$-n f és g megegyezik. Erre a gráfra teljesülnek a Kőnig lemma feltételei, gyökere az üres halmaz szétválasztása, minden pont foka véges, mivel A_i véges minden i-re, és egy $\mathcal{H}_{i+1}$-jó szétválasztás $\mathcal{H}_i$ jó is, tehát a gráf tényleg fa. Vegyünk egy végtelen felszálló utat. Ekkor az összekötött felszálló út jó szétválasztásoknak egy felszálló $f_1, f_2, \ldots$ rendszere, ahol f_i $\mathcal{H}_i$-jó szétválasztás. Mivel minden $a \in A$ pont véges sokszor van fedve, létezik hozzá olyan i, hogy $\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_i$ már nem fedi a-t. Ezért az $f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i$ függvény szétválasztja $\mathcal{H}$-t a legalább az A halmazon két fedésre. $\square$

Erre az ismert 3.7. Állításításra most adunk egy, az eddigitől eltérő, modellelméleti jellegű bizonyítást, amiből egy kicsivel erősebb állítás is adódik. Legyen I egy tetszőleges nemüres halmaz, $\mathcal{P}(I)$ a hatványhalmaza, 2^I pedig jelölje az $f : I \to \{0,1\}$ függvények halmazát.

3.8. Definíció. Egy $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(I)$ halmazrendszer *(ultra)szűrő*, ha a következő feltételek teljesülnek.

(i) $I \in \mathcal{U}, \emptyset \notin \mathcal{U}$

(ii) ha $A, B \in \mathcal{U}$, akkor $A \cap B \in \mathcal{U}$

(iii) ha $A \in \mathcal{U}$ és $A \subset B \subset I$, akkor $B \in \mathcal{U}$

(iv) (ultra ha $A \subset I$ esetén $A \in \mathcal{U}$ vagy $I \setminus A \in \mathcal{U}$)

Egy $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(I)$ halmazrendszert *centráltnak* nevezünk, ha véges $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$-ra $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$, azaz véges sok elemének metszete nem üres (de nem feltétlen $\mathcal{H}$-beli). Szükségünk lesz a következő alapvető állításra.

3.9. Lemma ([CK92])**.** *Minden centrált halmazrendszer kiterjeszthető ultraszűrővé.*

Ezek után bebizonyíthatjuk a következőt:

3.10. Lemma. *Adott síkbeli halmazok egy $\mathcal{H}$ családja. A következők ekvivalensek:*

(i) Létezik olyan k, hogy tetszőleges véges *$\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ felbontható két részre úgy, hogy a legalább k-szor fedett pontokat mindkét rész fedi.*

(ii) Létezik olyan k, hogy tetszőleges $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ felbontható két részre úgy, hogy a legalább k-szor, de véges sokszor fedett pontokat mindkét rész fedi.

Bizonyítás. (ii) $\Rightarrow$ (i) triviális, most belátjuk, hogy (i) $\Rightarrow$ (ii).

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H}$ halmazrendszerre (i) teljesül, és legyen k a feltételnek megfelelő szám. Legyen $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ egy tetszőleges, rögzített halmazrendszer.

Ahogy az előző bizonyításban, $\mathcal{H}'$ egy felbontásán egy $f : \mathcal{H}' \to \{0, 1\}$ függvényt értünk. $f^{-1}(0) = \{S \in \mathcal{H}' \mid f(S) = 0\}$ és $f^{-1}(1) = \{S \in \mathcal{H}' \mid f(S) = 1\}$.

Adott véges $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}'$-re egy $f : \mathcal{H}' \to \{0, 1\}$ felbontás $\mathcal{V}$-*jó*, ha a következő teljesül.

• Ha egy p pontot $\mathcal{H}'$ legalább k-szor fedi, és $\mathcal{H}' \setminus \mathcal{V}$ pedig *nem* fedi, akkor $f^{-1}(0)$ és $f^{-1}(1)$ is fedi p-t.

Minden véges $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}'$-re legyen $A(\mathcal{V})$ $\mathcal{H}'$ $\mathcal{V}$-jó szétválasztásainak a halmaza. Legyen

$$A = \{A(\mathcal{V}) \mid \mathcal{V} \subset \mathcal{H}', \mathcal{V} \text{ véges}\} \subset \mathcal{P}(2^{\mathcal{H}'}).$$

Legyen $A_1, A_2, ..., A_n \in A$ tetszőleges. Ezekhez léteznek olyan véges $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n \subset \mathcal{H}'$ részhalmazok, hogy A_i éppen a $\mathcal{V}_i$-jó szétválasztások halmaza. Legyen $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_i$, ami nyilván véges. Tehát a feltétel szerint létezik egy $\mathcal{V}$-jó szétválasztás, ami $\mathcal{V}_i$-jó is minden i-re. Ezért az A_1, A_2, $\ldots$, A_n halmazok metszete nem üres.

Ez alapján tehát A centrált, azaz véges sok elemének metszete nem üres. Centrált halmazrendszer kiterjeszthető egy $U \supset A$ ultraszűrővé.

Minden $S \in \mathcal{H}'$-re legyen

$$f(S) := \begin{cases} 0 & \text{ha } \left\{g \in 2^{\mathcal{H}'} \mid g(S) = 0\right\} \in U \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Belátjuk, hogy az f függvény egy $\mathcal{H}'$ egy felbontását adja két részre úgy, hogy a legalább k-szor, de véges sokszor fedett pontokat mindkét rész fedi. Tegyük fel, hogy egy p pontot $\mathcal{H}'$ legalább k-szor, de véges sokszor fedi. Legyenek a fedő halmazok $S_1, S_2, \ldots, S_m$, ezek halmaza $\mathcal{V}$. Tegyük fel, hogy minden i-re $f(S_i) = 0$. Ekkor tehát $\mathcal{H}'$ S_i-n 0-át felvevő felbontások halmaza U-ban van, így ezek metszete is, mert véges metszetre zárt. Viszont a $\mathcal{V}$-jó szétválaszások halmaza is U-ban van, így két, egymástól diszjunkt halmazt találtunk U-ban, ami ellentmondás. Hasonlóan látható, hogy nem lehet minden i-re $f(S_i) = 1$. Ezzel beláttuk az állítást. $\square$

A 3.10. Lemmából következik a 3.7. Állításítás. Ha viszont a 3.10. Lemmában feltesszük, hogy $\mathcal{H}$ megszámlálható, akkor azt a 3.7. Lemma bizonyításához hasonlóan, a Kőnig lemma felhasználásával is beláthattuk volna. A 3.10. Lemma annyiban általánosabb, hogy nem tesszük fel, hogy $\mathcal{H}$ megszámlálható, de a felbontás itt is csak a végesszeresen fedett pontok felett biztosítható.

Ezek alapján a tulajdonságok viszonyáról egyenlőre a következőket tudjuk általános esetben:

$$\begin{tikzcd}
 & F_{1,2} & F_{1,3} \arrow[l, Rightarrow] & F_{1,4} \arrow[l, Rightarrow] \\
F_{2,1} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & F_{2,2} \arrow[u, Rightarrow] & F_{2,3} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] & F_{2,4} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Általánosan igaz még a következő negatív eredmény, aminek bizonyítása már túllépi a dolgozat határait.

3.11. Tétel (Pach, Tardos, Tóth, 2007, [PTT07]). *Konkáv négyszögek semmilyen változatban sem fedés-felbonthatóak, kivéve $F_{1,1}$-et.*

Általános alakzatok esetében csak ennyit tudunk kimondani, viszont nyílt alakzatok esetében egy kicsit többet is tudunk.

3.2. Nyílt alakzatok

3.12. Állítás. *Nyílt halmaz eltoltjaival való, tetszőleges kompakt A síkbeli ponthalmaz k-szoros fedéséből kiválasztható egy véges k-szoros fedés.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges fedést. Minden legalább k-szor fedett pont felett válasszunk ki k darab fedő alakzatot. Mivel ezek nyíltak, a metszetük is nyílt, így ez a pontnak egy k-szorosan fedett nyílt környezete. Legyen ez $U(x)$. A minden pontja felett kiválasztva $U(x)$-et, ezek uniója fedi A-t. Mivel A kompakt, kiválasztható a nyílt fedéséből egy véges fedés. Az ezekhez tartozó pontok felett kiválasztott k darab alakzatok egy megfelelő véges fedését adják A-nak. $\square$

3.13. Állítás. *Nyílt korlátos halmaz eltoltjaival való, a teljes sík k-szoros fedéséből kiválasztható egy lokálisan véges k-szoros fedés.*

Bizonyítás. Fedjük a síkot négyzetrács-szerűen kompakt egységnégyzetekkel. A 3.12. állítás szerint mindhez választhatunk véges sok eltoltat, ami azokat k-szorosan fedi. Ezeknek uniója egy megfelelő k-szoros fedés, ami lokálisan véges, mivel az alakzatunk korlátos. $\square$

3.14. Állítás. *Egy S nyílt halmazra $F_{2,1} \Rightarrow F_{1,4}$, azaz ha S véges-fedés-felbontható akkor sík-fedés-felbontható.*

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges k-szoros síkfedést S eltoltjaival, majd ennek egy lokálisan véges k-szoros részfedését. Erre viszont már alkalmazható a 3.7. Állítás, ami miatt készen vagyunk. $\square$

Ismert olyan *nem korlátos* nyílt halmaz, amelyre $F_{1,4}$ teljesül, de $F_{2,1}$ nem [P10], tehát a fenti állitásban az ellenkező irányba nem mindig következtethetünk. Ugyanakkor elképzelhető, hogy *korlátos* nyílt halmazoknál $F_{2,1} \Leftrightarrow F_{1,4}$.

A fedések lokális tulajdonságai mellett, vizsgálhatjuk a fedések számosságára vonatkozó feltételeket is.

3.15. Definíció. Egy topologikus tér *Lindelöf* tulajdonságú, ha tetszőleges nyílt fedéséből kiválasztható egy megszámlálható fedés. *Öröklődően Lindelöf* ha minden résztere is Lindelöf tulajdonságú.

Közismert az alábbi állítás:

3.16. Állítás ([E89]). *A valós sík öröklődően Lindelöf.*

3.17. Lemma. *Nyílt korlátos halmazokra $F_{2,3} \Leftrightarrow F_{2,4}$, és $F_{1,2} \Leftrightarrow F_{1,3} \Leftrightarrow F_{1,4}$, azaz a megszámlálható- és a totális-fedés-felbonthatóság, illetve a lokálisan véges-, megszámlálható- és a tetszőleges-sík-fedés-felbonthatóság tulajdonságok ekvivalensek.*

Bizonyítás. Csak azt kell bizonyítanunk, hogy $F_{1,2} \Rightarrow F_{1,3} \Rightarrow F_{1,4}$, és $F_{2,3} \Rightarrow F_{2,4}$. Az $F_{1,2} \Rightarrow F_{1,3} \Rightarrow F_{1,4}$ implikáció azonnal következik a 3.13. Állításból.

Tegyük fel, hogy S megszámlálható-fedés-felbontható, a feltételben szereplő konstans legyen k. Legyen $\mathcal{H}$ egy A halmaz k-szoros fedése. A minden pontjához tekintsünk k darab őt tartalmazó eltoltat, ezek nyíltak, így metszetük is az. Ezek a nyílt halmazok lefedik A-t, így kiválasztható belőle egy megszámlálható fedés, a sík öröklődően Lindelöf tulajdonsága miatt. Ebben minden fedő elemhez vegyük az eredeti k eltoltat. Ez egy megfelelő megszámlálható fedése H-nak, ami pedig a feltétel miatt felbontható. $\square$

Azaz a tulajdonságok viszonyáról egyelőre a következőket tudjuk korlátos nyílt halmazoknál:

$$\begin{tikzcd}
& F_{1,2} \arrow[r, Leftrightarrow] & F_{1,3} \arrow[r, Leftrightarrow] & F_{1,4} \\
F_{2,1} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & F_{2,2} \arrow[u, Rightarrow] & F_{2,3} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & F_{2,4} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Ezek az összefüggések eddig is ismertek voltak, megtalálhatók például Pálvölgyi Dömötör cikkében [P10]. Több cikkben is megalapozatlanul jelent meg, hogy nyílt halmazok esetében *véges-fedés-felbonthatóságból* ($F_{2,1}$) következik a *megszámlálható-fedés-felbonthatóság* ($F_{2,3}$), erre még nem ismert bizonyítás.

Ezek után vizsgáljuk meg, az eddig ismert tételeket milyen általánosságban mondhatjuk ki.

3.18. Tétel. (a) (Pach, 1986, [P86]) *Minden nyílt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög sík-fedés-felbontható ($F_{1,4}$) és lokálisan-véges-felbontható ($F_{2,2}$).*

(b) (Mani, Pach, 1987, [MP87]) *A nyílt egységkör sík-fedés-felbontható ($F_{1,4}$) és lokálisan-véges-felbontható ($F_{2,2}$).*

(c) (Tardos, Tóth, 2007, [TT07]) *Minden nyílt háromszög sík-fedésfelbontható ($F_{1,4}$) és lokálisan-véges-felbontható ($F_{2,2}$).*

(d) (Pálvölgyi, Tóth, 2010, [PT10]) *Minden nyílt, konvex sokszög sík-fedésfelbontható ($F_{1,4}$) és lokálisan-véges-felbontható ($F_{2,2}$).*

Ezekben a tételekben mindig véges fedésekre adnak bizonyítást, de láthattuk, hogy nyílt alakzatok esetében ebből következik a sík-fedés-felbonthatóság és a lokálisan-véges-felbonthatóság ($F_{2,2}$).

Sajnos nyílt alakzatok esetében a megszámlálható-fedés-felbonthatóság ($F_{2,3}$) és a totális-fedés-felbonthatóság ($F_{2,4}$) esetén nem ismert, hogy az következik-e a gyengébb feltételekből. Viszont az 2.3. Tétel bizonyításának minimális módosításával (igazából egyszerűsítésével) belátható annak *nyílt*, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszögekre vonatkozó változata. A részleteket itt mellőzzük.

3.19. Tétel. *Legyen S egy nyílt, középpontosan szimmetrikus konvex sokszög, a csúcsai v_1, v_2, ..., v_{2n}, órajárás szerint. Létezik egy $m = m(S) > 0$ szám a következő tulajdonsággal.*

Tetszőleges korlátos $\mathcal{H}$ ponthalmaz kiszínezhető két színnel, pirossal és kékkel úgy, hogy minden S-hez tartozó ék $E_i(p)$ eltoltjára, ha $|E_i(p) \cap \mathcal{H}| \geq m$, akkor $E_i(p) \cap \mathcal{H}$ tartalmaz piros és kék pontot is.

Ebből pedig, ugyanúgy, ahogy a zárt esetben, azonnal következik az 1.4. Tétel alábbi általánosítása.

3.20. Tétel. *Minden nyílt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög totális-fedés-felbontható.*

Nézzük meg táblázatban, mit tudunk ezek után a középpontosan szimmetrikus nyílt sokszögekről, a [K] jelöli a dolgozatban bemutatott eredményeket:

	véges	lokálisan véges	megszámlálható	tetszőleges
a sík	–	[P86]	[P86]	[P86]
tetszőleges halmaz	[P86]	[P86]	[K]	[K]

3.3. Zárt alakzatok

Zárt alakzatok esetén sokkal rosszabb a helyzet, most Pálvölgyi Dömötör, „szép” halmazokra vonatkozó szép tételét fogjuk ismertetni.

3.21. Definíció. A C zárt halmaz *szép*, ha létezik egy t egész szám, és zárt félköröknek egy megszámlálható $\mathcal{D}$ halmaza úgy, hogy ha egy p pontot fed C-nek t különböző eltoltja, akkor az uniójuk fed egy P középpontú félkörlapot $\mathcal{D}$-ből (P a félkörlap határoló szakaszának felezőpontja), és a belsejeik uniója fedi a félkörlap belsejét.

3.22. Tétel (Pálvölgyi, 2010, [P10])**.** *Egy S szép halmaz ha megszámlálható-fedés-felbontható, akkor totális-fedés-felbontható.*

Bizonyítás. Vegyünk egy S szép halmazt, és tegyük fel, hogy megszámlálható-fedés-felbontható, azaz valamilyen k konstansra tetszőleges halmaz k-szoros, megszámlálható fedése S eltoltjaival, felbontható két fedésre. Mivel S szép, létezik a 3.21. Definíció feltételeit kielégítő t konstans és $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, ...\}$ zárt félkörlapok rendszere.

Legyen most $\mathcal{H}$ egy A halmaz kt-szeres fedése S eltoltjaival. Feltehetjük, hogy $\mathcal{H}$ nem tartalmaz egy $S(x)$ eltoltat több, mint egyszer, különben a két azonos eltoltat betennénk a felbonás egyik, és másik osztályába, és A helyett csak a $A \setminus S(x)$ halmazt tekintenénk.

Megmutatjuk hogy $\mathcal{H}$ tartalmaz egy $\mathcal{H}'$ megszámlálható részt, amely A-t legalább k-szorosan fedi. Feltehető, hogy $k = 1$, mivel minden k-ra az eljárást k-szor megismételve, egy k-szoros fedést kapunk. Legyen A_0 az A-nak azon pontjai, amiket $\mathcal{H}$-beli eltoltak a belsejükkel legalább egyszeresen fednek. Mivel a sík öröklődően Lindelöf, ezért kiválasztható $\mathcal{H}$-ból A_0 egy megszámlálható fedése is. A megmaradt $A' = A \setminus A_0$ halmazhoz tartozó pontokat legalább t eltolt fedi a határával. Legyen $p \in A$. A „szép” tulajdonság miatt van egy p középpontú zárt félkörlap, $d_i(p) \in \mathcal{D}$, amelyet lefed

$\mathcal{H}$. Azt mondjuk, hogy ekkor p i típúsú. Legyen $A_i \subset A'$ az i típúsú pontok halmaza. Ekkor $A' = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Legyen $i > 0$, rögzített. Az A_i halmaz minden p pontjához tekintsük a *nyílt*, d_i-vel egyforma sugarú, p középpontú körlapot. Ezek nyilván fedik A_i-t, és az öröklődően Lindelöf tulajdonság miatt ezekből kiválasztható megszámlálható sok, amik még mindig fedik A_i-t. Most cseréljük ki ezt a megszámlálható sok körlapot d_i azonos középpontú eltoltjára. Ezek továbbra is fedik A_i-t, hiszen ha nem így lenne, akkor találhatnánk olyan $p, q \in A_i$ pontokat, hogy p benne van $d_i(q)$ *belsejében.* Csakhogy ekkor a „szép" tulajdonság és d_i választása miatt $p \in A_0$, ami ellentmondás. Most pedig d_i megszámlálható sok eltoltjából, amelyek fedik A_i-t, mindegyik d_i' eltoltat cseréljük ki S t darab megfelelő eltoltjára $\mathcal{H}$-ból, amelyek uniója fedi d_i'-t. Ezzel A_i egy megszámlálható fedését kaptuk. Ezt minden i-re elvégezve A egy megszámlálható részfedését kaptuk. Végül ezt az eljárást megfelelő módon k-szor ismételve, A egy $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ megszámlálható, k-szoros részfedését kapjuk, amely a feltétel szerint felbontható. $\square$

3.23. Állítás. *Minden S zárt konvex halmaz szép.*

Bizonyítás. Legyen S zárt, konvex halmaz. Ha S határának egy darabja egy szakasz, akkor azt S oldalának hívjuk. Legyen a $\mathcal{D}$-ben benne az összes olyan zárt félkörlap, amelynek a sugara racionális, és a határszakasza vagy párhuzamos valamelyik oldallal, vagy racionális iránytangensű. Ez megszámlálhatóan sok félkörlap.

Tekintsünk egy p pontot, ami $t = 5$-szörösen le van fedve S eltoltjainak a határával. Ekkor nézzük S-et, és vegyük fel a határán azokat a pontokat amivel p-t fedik az eltoltak. Ezek a pontok egy konvex ötszöget alkotnak, aminek van két pontja, ahol a hozzájuk tartozó ékek együtt lefednek egy 180°-os szögtartományt, amire odailleszthető vagy az egyik oldallal párhuzamos irányú, megfelelően kicsi félkör, vagy lefed egy 180°+ε méretű szögtartományt is, ahova betehető egy racionális irányú, megfelelően kicsi félkör. $\square$

Az eddigi eredmények zárt sokszögek esetében véges-fedés-felbonthatóságot bizonyítanak, ezért ezek a tételek ez esetben nem alkalmazhatóak. Sajnos a totális-fedés-felbonthatóságról egyenlőre nem tudunk általános esetben semmit.

Ezek alapján szép konvex zárt alakzatokra a következőket tudjuk:

$$
\begin{tikzcd}
 & F_{1,2} & F_{1,3} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & F_{1,4} \\
F_{2,1} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & F_{2,2} \arrow[u, Rightarrow] & F_{2,3} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & F_{2,4} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Az előző fejezetben ismertetett tétel bizonyításában, sem a megszámlálhatóságot, sem más egyéb feltételt nem használtunk fel, így a legerősebb állítás amit kimondhatunk, a következő:

3.24. Tétel. *Minden zárt, középpontosan szimmetrikus, konvex sokszög totális-fedés-felbontható ($F_{2,4}$).*

Ezek után nézzük meg táblázatban, hogy mit tudunk a középpontosan szimmetrikus zárt sokszögekről, [K] jelöli a dolgozatban bemutatott eredményeket:

	véges	lokálisan véges	megszámlálható	tetszőleges
a sík	–	[P86]	[K]	[K]
tetszőleges halmaz	[P86]	[P86]	[K]	[K]

3.4. Totális- és sík-fedés-felbonthatóság kapcsolata

Az világos, hogy a totális-fedés-felbontható alakzatok sík-fedés-felbonthatóak is, ez az a speciális eset amikor a fedett halmaz a sík. Azt sejtjük, hogy korlátos halmaz esetén nem lehet különbség.

3.25. Sejtés. *Korlátos alakzat akkor és csak akkor sík-fedés-felbonthaó ($F_{1,4}$), ha totális-fedés-felbontható ($F_{2,4}$).*

A 3.25. Sejtésnek egy fontos feltétele a korlátosság. Pálvölgyi Dömötör egy konstrukciójából [P10] alkotható egy nem korlátos halmaz, ami bár sík-fedés felbontható, de nem totális-fedés-felbontható.

3.5. Fedések felbontása több részre

Az előzőekben definiált felbonthatósági feltételek mind a fedések két diszjunkt fedésére való felbonthatóságát követelték meg. Felmerülhet a kérdés, hogy mi a helyzet akkor, ha nem kettő, hanem több részre szeretnénk felbontani a fedést, azaz minden n-re létezik-e $k(n)$, hogy adott alakzat eltoltjaival való $k(n)$-szeres fedés felbomlik n diszjunkt fedéssé. A dolgozatban bizonyított felbonthatósági tételekben a bizonyítás megfelelő módosításával kettő helyett több részre való felbonthatóságot is igazohatunk.

3.26. Tétel. *Minden nyílt vagy zárt, középpontosan szimmetrikus, konvex S sokszöghöz és $n > 0$-hoz létezik egy $k(n)$ konstans a következő tulajdonsággal. Ha a sík tetszőleges H részhalmazát lefedjük S eltoltjaival legalább $k(n)$-szeresen, akkor a fedés felbontható n darab fedésre.*

A 3.26. Tételt teljesen más módszerrel Vizer Maté is igazolta a közelmúltban [V12].

Tardos Gábor mutatott példát olyan halmazrendszerre ahol az $n = 2$ esetben teljesül a feltétel, de $n = 3$-ra már nem. Viszont ezt a halmazrendszert geometriailag nem sikerült realizálni. Nem is ismerünk geometriai ellenpéldát.

3.6. Végtelenszeres fedések

Azt gondolhatnánk hogy a végtelenszeres fedések felbontása nem egy nehéz feladat, hiszen óriási szabadságunk van. Valójában ez néha még mélyebb problémákhoz is vezethet, mint véges esetben. Elekes, Mátrai, Soukup mutattak a számegyenesnek egy olyan, zárt halmaz eltoltjaival való fedését aminek a felbonthatósága független ZFC-től [EMS09]. Azt gondoljuk, hogy konvex zárt halmazok esetében nem merülnek fel függetlenségi kérdések. Pach sejtésének végtelen változatát is kimondhatjuk.

3.27. Sejtés. *A sík egy korlátos konvex halmaz eltoltjaival való végtelenszeres fedése felbontható két végtelenszeres fedésre.*

A 3.27. Sejtés *nyílt*, korlátos konvex halmaz eltoltjaival való fedés esetében könnyen igazolható, hiszen a 3.13. Állításítás miatt leválasztható egy lokálisan véges fedés, így a megmaradó eltoltak még mindig végtelenszeres fedést adnak, ezért tovább választhatunk le lokálisan véges részeket.

3.28. Definíció. A sík egy X részhalmaza σ-kompakt, ha előáll mint megszámlálhatóan sok kompakt halmaz uniója.

Maga a sík σ-kompakt, de például $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ már nem [E89].

3.29. Állítás. *A sík egy S σ-kompakt részének végtelenszeres nyílt fedése felbontható végtelen sok fedésre.*

Bizonyítás. Legyen $S = \cup_{i=0}^{\infty} K_i$, ahol a K_i halmazok kompaktak, $\mathcal{H}$ S-nek egy nyílt halmazokból álló végtelenszeres fedése, és legyen (p_i, q_i), $i \geq 0$, a nemnegatív egész számpárok, azaz $\mathbb{N}^2$ egy felsorolása.

Most rekurzívan definiáljuk a $\mathcal{H}(i) = \mathcal{H}_{q_i}^{p_i} \subset \mathcal{H}$ véges halmazokat. Legyen $\mathcal{H}(0) \subset \mathcal{H}$ a K_{p_0} halmaz egy véges fedése. Most legyen $m > 0$ és tegyük fel, hogy már meghatároztuk a $\mathcal{H}(0), \dots \mathcal{H}(m-1)$ véges halmazokat. Ekkor $\mathcal{H} \setminus \cup_{i=0}^{m-1} \mathcal{H}(i)$ is végtelenszeresen lefedi a K_{p_m} halmazt. Legyen $\mathcal{H}(m) \subset \mathcal{H} \setminus \cup_{i=0}^{m-1} \mathcal{H}(i)$ a K_{p_m} halmaz egy véges fedése, mivel K_{p_m} kompakt, ilyen létezik.

Ekkor minden $i \geq 0$-ra az $\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_i^j$ halmaz lefedi S-t. □

Az 1.4. Tétel alapján egy zárt, középpontosan szimmetrikus konvex sokszög eltoltjaival való végtelenszeres fedés nyilvánvalóan felbontható két részre, azt viszont a tétel nem garantálja, hogy a két fedés szintén végtelenszeres lesz. Valójában ebben a speciális esetben ez az erősebb állítás is igaz. Hasonlókat mondhatunk nyílt esetben is, azaz a σ-kompakt feltételre ebben az esetben nincsen szükség.

3.30. Tétel. *Egy tetszőleges síkbeli halmaz nyílt vagy zárt konvex középpontosan szimmetrikus sokszögekkel való végtelenszeres fedése felbontható két végtelenszeres fedésre.*

Ezt az állítást a korábbiakhoz hasonlóan bizonyíthatjuk, ezért itt csak vázoljuk a bizonyítást. Először a megszokott módon szintén térjünk át a feladat duálisára.

3.31. Tétel. *Legyen S egy nyílt vagy zárt, középpontosan szimmetrikus konvex sokszög, a csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$, órajárás szerint. Ekkor*

Tetszőleges korlátos $\mathcal{H}$ ponthalmaz kiszínezhető két színnel, pirossal és kékkel úgy, hogy minden S-hez tartozó ék $E_i(p)$ eltoltjára, ha $|E_i(p) \cap \mathcal{H}| = \infty$, akkor $E_i(p) \cap \mathcal{H}$ tartalmaz végtelen sok piros és végtelen sok kék pontot is.

Mostantól a határt az S' nyílt változat szerint értjük.

- Legyen $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)}$ $\mathcal{H}$ határpontjainak halmaza, belső pontjai $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H} \setminus \mathbf{B}^{(0)}$.
- Legyen $\mathbf{B}' = \mathbf{B}^{(1)}$ $\mathcal{H}^{(1)}$ határpontjainak halmaza, belső pontjai $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}^{(1)} \setminus \mathbf{B}^{(1)}$
- ...
- Legyen $\mathbf{B}^{(n)}$ $\mathcal{H}^{(n)}$ határpontjainak halmaza, belső pontjai $\mathcal{H}^{(n+1)} = \mathcal{H}^{(n)} \setminus \mathbf{B}^{(n)}$

Továbbá $\mathbf{B}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}^{(n)}$, és $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \setminus \mathbf{B}^*$

$\mathbf{B}_i^{(n)}$ legyen $\mathbf{B}^{(n)}$ E_i határpontjainak halmaza, és $\mathbf{B}_i^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{B}_i^{(n)}$

Ezek után már megadhatjuk a színezést.

Többszörös-Piros-Kék-Színezés$(S, \mathcal{H})$

1. $\boldsymbol{B}^*$ pontjai egy részét úgy fogjuk kiszínezni, hogy minden rétegből legfeljebb egy pontot színezünk, és négy szomszédos réteg közül legfeljebb az egyiken színezünk.

Egy $p \in \boldsymbol{B}^*$ pontra $h(p) = n$ pontosan akkor ha $p \in \boldsymbol{B}^{(n)}$, azaz p az n. határrétegen van.

Vegyünk egy $\boldsymbol{B}^*$-ot tartalmazó négyzetet, ezt kétoldalt megfelezve osszuk 4 egyenlő részre, így előáll a 1.-4. négyzet. Ezek után az 1. négyzetet negyedelve kapjuk az 5.-8. négyzetet, a 2.-at negyedelve a 8.-12.-et és így tovább, előbb utóbb minden újabban keletkező négyzetet negyedelünk, majd sorszámozzuk. A következő színezésben minden $2k$. és $2k-1$. lépésben a k. négyzetben levő pontokkal foglalkozunk.

*Az 1. lépésben ha az 1. négyzet végtelen sok pontot tartalmaz, válasszunk ki egy p_1 pontot színezzük ki **pirosra**. Ha csak véges sok pont van nem csinálunk semmit.*

*A 2. lépésben már $\boldsymbol{B}^* \setminus \bigcup_{l<h(p_1)+3} \boldsymbol{B}^{(l)}$ pontjai közül ha az 1. négyzet végtelen sok pontot tartalmaz, választunk egy p_2 **kék** pontot.*

Ezek után hasonlóan minden $2k-1$. lépésben, $\boldsymbol{B}^* \setminus \bigcup_{l<h(p_{2k-1})+3} \boldsymbol{B}^{(l)}$ pontjai közül, ha a k. négyzet végtelen sok pontot tartalmaz, választunk egy p_{2k} pontot, amit pirosra színezünk.

Hasonlóan, minden $2k$. lépésben, $\boldsymbol{B}^* \setminus \bigcup_{l<h(p_{2k-2})+3} \boldsymbol{B}^{(l)}$ pontjai közül, ha a k. négyzet végtelen sok pontot tartalmaz, választunk egy p_{2k-1} pontot, amit kékre színezünk.

Megszámlálható sok lépés után készen vagyunk.

A következő lépésekben csak a még színezetlen pontokat színezzük.

2. Színezzük ki páros n-re, $\boldsymbol{B}^{(n)}$-t a FEKETE-FEHÉR-HATÁRSZÍNEZÉS$(S, \mathcal{H}^{(n)})$ *segítségével. Ezután egy tetszőleges $p \in \boldsymbol{B}^{(n)}$ határpont*

- *legyen kék, ha gazdag, vagy fehér,*
- *legyen piros minden egyéb esetben.*

3. Színezzük ki páratlan n-re, $\boldsymbol{B}^{(n)}$-t a FEKETE-FEHÉR-HATÁRSZÍNEZÉS$(S, \mathcal{H}^{(n)})$ *segítségével. Ezután egy tetszőleges $p \in \boldsymbol{B}^{(n)}$ határpont*

- *legyen piros, ha gazdag, vagy fehér,*
- *legyen kék minden egyéb esetben.*

Azaz cseréljük fel a színek szerepét a páros esethez képest.

4. Vegyünk az első lépésben egy $\mathcal{H}^*$-t tartalmazó négyzetet. Ha végtelen sok pontot tartalmaz, $\mathcal{H}^*$-ból, (vagyis $\mathcal{H}^*$-nak végtelen sok pontja van), akkor válasszunk egy pirosat és egy kéket. A két oldalt megfelezve vágjuk négy kisebb négyzetre a négyzetet, a $\mathcal{H}^*$-ból végtelen sok pontot tartalmazó kis négyzetekben válasszunk megint mindkét színű pontot, majd tovább negyedeljük a négyzeteket. Ha bármikor az eljárás során véges sok pontot tartalmazó négyzethez jutunk, színezzük az összes színezetlen pontját pirosra, és ezt a négyzetet ne osszuk tovább. Megszámlálható sok lépés után, a továbbra is színezetlen pontokat színezzük pirosra.

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H}$ ponthalmazt kiszíneztük a TÖBBSZÖRÖS-PIROS-KÉK-SZÍNEZÉS$(S, \mathcal{H})$ eljárással. Megmutatjuk, hogy ha egy S-hez tartozó ék eltoltja végtelen sok pontot tartalmaz $\mathcal{H}$-ból, akkor mindkét színből végtelen sokat fog.

Először általánosan belátjuk, hogy ha egy éknek a belsejében van torlódási pontja, mindkét színből végtelen sok pontot fog tartalmazni.

3.32. Állítás. *Tegyük fel, hogy $E_i(a) \cap \mathcal{H}$ végtelen és van a pontoknak egy t torlódási pontja $E_i(a)$ belsejében. Ekkor $E_i(a)$ mindkét színből végtelen sok pontot fog tartalmazni.*

Bizonyítás. Bontsuk esetekre aszerint, hogy milyen pontok is torlódnak t-be.

1. Csak belső pontok ($\mathcal{H}^*$) torlódnak, ekkor a 4. színezési lépés miatt lesz négyzet, amely tartalmazza t-t és így oda választunk mindkét színű pontot, és ezt tovább ismételhetjük, hiszen mindig lesz egyre kisebb négyzet ami tartalmaz végtelen sok t-hez torlódó pontot.

2. Végtelen sok olyan határréteg van, amelynek a pontjai torlódnak t-be. Ekkor hasonlóan érvelhetünk, és az 1. színezési eljárással mindkét színű pont fog t-be torlódni.

3. Tegyük fel, hogy az 1. és 2. eset nem áll fenn, azaz t-be csak véges sok határrétegről torlódnak pontok. Legyen n a legnagyobb amire $\mathbf{B}^{(n)}$ torlódik t-be. Ekkor a 2.14. Állítás miatt végtelen sok fekete és fehér pont is van az ékben, ami miatt ha nem tartalmaz mindkét színből végtelen sokat az ék, végtelen sok gazdag határpontnak kell torlódnia t-be. Minden gazdag határponthoz létezik egy pont (ami vagy belső, vagy későbbi határrétegről való) és egy ék ami bizonyítja a pont gazdagságát. Válasszunk ki egy t-be torlódó gazdag határpont-sorozatot, $(g_1, g_2, g_3...)$. Egy g_i-hez tartozó gazdagságot bizonyító ékek tartalmazzák g_i-t, és egy az ő gazdagságát bizonyító b_i pontot, de g_{i-1} és g_{i+1} pontokat nem, és $g_1, g_2, g_3...$ t-hez torlódik, tehát g_{i-1} és g_{i+1} egyre közelebb kerülnek egymáshoz ahogy i nő, ezért a gazdagságot bizonyító ékek csúcsa is egyre közelebb kell kerüljön g_i-hez, és így b_i pontok is torlódni fognak t-be. Ami viszont ellentmondás, mivel $\mathbf{B}^{(n)}$ a legnagyobb sorszámú réteg ami t-hez torlódik, és az 1. és 2. eset sem áll fenn. □

Ezután bontsuk a problémát két esetre aszerint hogy $E_i(a) \cap \mathbf{B}_i^*$ véges, vagy végtelen. Feltehető, hogy nincs a pontoknak belső torlódási pontja.

I. Először tegyük fel $E_i(a) \cap \mathbf{B}_i^*$ végtelen. Figyeljük meg, ha $E_i(a) \cap \mathbf{B}_i^{(n)} \neq \emptyset$ akkor minden $k < n$-re $E_i(a) \cap \mathbf{B}_i^{(k)} \neq \emptyset$, a rétegek definíciója miatt. Megjegyezzük, hogy ez $E_i(a) \cap \mathbf{B}_j^*$, $i \neq j$, azaz más ék szerinti határpontok esetén nem feltétlenül teljesül.

Ezt is bontsuk fel két esetre:

(a) Tegyük fel, hogy minden n-re $E_i(a) \cap \mathbf{B}_i^{(n)} \neq \emptyset$. Ekkor viszont a felváltott színek miatt páros n-re tartalmaz végtelen sok kék, páratlan esetén végtelen sok piros pontot, mivel az 1. színezési lépésben két különböző réteg ahonnan színeztünk pontokat megfelelően távol van.

(b) Tegyük fel, hogy csak véges sok n-re lesz $E_i(a) \cap \mathbf{B}_i^{(n)} \neq \emptyset$. Vegyük a legnagyobb n-et amire $E_i(a) \cap \mathbf{B}^{(n)}$ végtelen. Az FEKETE-FEHÉR-HATÁRSZÍNEZÉS$(S, \mathcal{H}^{(n)})$ alapján a 2.14. Állítás miatt végtelen sok fehér és fekete pontot is tartalmaz az ék. Tehát baj csak akkor lehet, ha az összes fekete pont gazdag. Ekkor viszont $E_i(a)$ tartalmazná végtelen sok pont gazdagságát mutató pontot, és mivel a következő rétegekben csak véges sok pont lehet, ezek közül végtelen sok nem tartozik $\mathbf{B}_i^*$-hoz. Ezek a gazdagságot bizonyító ékek csak véges sok pontot tartalmazhatnak, mert nincs belső torlódási pont. Ekkor viszont ezeknek szükségszerűen egy egy későbbi réteghez kell tartozniuk, ami viszont a feltevések miatt szintén ellentmondás.

II. Most pedig tegyük fel, hogy $E_i(a) \cap \mathbf{B}_i^*$ véges, feltehető, hogy üres. Szintén tegyük fel, hogy a pontoknak nincsen belső torlódási pontja, azaz hogy a pontoknak csak $E_i(a)$ határán van a pontoknak torlódási pontja. Ha nincs a belsejében pont ellentmondáshoz jutunk, mert ekkor ezek a pontok E_i határpontok. Ha van a belsejében egy p_0 pont, akkor mivel az nem E_i határpont, $E_i(p_0)$ tartalmaz egy p_1 pontot és így tovább, amik mind $E_i(a)$ belsejében helyezkednek el, ami szintén ellentmondás mivel ezeknek lenne egy belső torlódási pontja. Tehát az összes pontok az ék határán helyezkednek el, ami viszont azt jelenti, hogy ezek definíció szerint E_i határpontok, mivel most a határt nyílt ék szerint értjük. Ekkor viszont az I./(a) eset áll fenn.

Ezek alapján tehát igazoltuk a 3.31. Tételt, így a 3.30. Tételt is.

4. Összefoglalás

A 2. fejezetben Pach János középpontosan szimmetrikus sokszögekre vonatkozó felbonthatósági tételét általánosítottuk zárt sokszögekre, bebizonyítottuk az 1.4. Tételt, ami azt mutatja, hogy ez esetben nincs szükség a végességi feltételre. A 3. fejezetben összefoglaltuk a felbonthatóság eddig vizsgált változatait, a köztük lévő eddig ismert összefüggéseket, és beláttuk, hogy egyes végtelenszeres fedések felbonthatóak két végtelen részre.

További cél hasonlóan belátni, hogy a konvex, de nem középpontosan szimmetrikus zárt sokszögek is fedés-felbonthatóak, aminek a nehézsége, hogy az ismert bizonyítások nagyon erősen használják a végességi feltételt [PT10], [GV09]. Szintén fontos még vizsgálni a felbonthatósági feltételek közötti eddig ismeretlen összefüggéseket.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek Tóth Gézának a sok segítséget, a közös munkát és a sok konzultációt. Nélküle ez a dolgozat nem jött volna létre. Remélem még sok érdekes összefüggést fogunk feltárni.

Hivatkozások

[BMP05] P. Brass, W. Moser and J. Pach: Research Problems in Discrete Geometry, Springer-Verlag, New York, 2005.

[CK92] C. C. Chang, H. J. Keisler: Model Theory, *North-Holland, Elsevier* (1992), 214., Proposition 4.1.3

[EMS09] M. Elekes, T. Mátrai, L. Soukup On splitting infinite-fold covers, arXiv:0911.2774v1

[E89] Ryszard Engelking: General Topology, *Berlin: Heldermann* (1989)

[FTK93] G. Fejes Tóth and W. Kuperberg: A survey of recent results in the theory of packing and covering, in: *New Trends in Discrete and Computational Geometry* (J. Pach, ed.), *Algorithms Combin.* **10**, Springer, Berlin, 1993, 251–279.

[F53] L. Few: The double packing of spheres, *J. London Math. Soc.* **28** (1953), 297–304.

[GV09] M. Gibson and K. Varadarajan: Decomposing Coverings and the Planar Sensor Cover Problem, arXiv:0905.1093v1

[H55] A. Heppes: Über mehrfache Kreislagerungen (German), *Elem. Math.* **10** (1955), 125–127.

[MP87] P. Mani-Levitska and J. Pach: Decomposition problems for multiple coverings with unit balls, manuscript, 1987 `http://www.math.nyu.edu/ pach/publications/unsplittable.pdf`.

[P80] J. Pach: Decomposition of multiple packing and covering, *2. Kolloquium über Diskrete Geometrie*, Salzburg (1980), 169–178.

[P86] J. Pach: Covering the Plane with Convex Polygons, *Discrete and Computational Geometry* **1** (1986), 73–81.

[PTT07] J. Pach, G. Tardos, G. Tóth: Indecomposable coverings, in: Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory, The China–Japan Joint Conference (CJCDGCGT 2005), *Lecture Notes in Computer Science* **4381**, Springer-Verlag, Berlin, 2007, 135–148. Also in: *Canadian Mathematical Bulletin* **52** (2009), 451–463.

[P10] D. Pálvölgyi: Indecomposable Coverings with Concave Polygons, *Discrete and Computational Geometry* **44**, (2010), 577–588.

[PT10] D. Pálvölgyi, G. Tóth: Convex polygons are cover-decomposable, *Discrete and Computational Geometry* **43** (2010), 483–496.

[TT07] G. Tardos and G. Tóth: Multiple coverings of the plane with triangles, *Discrete and Computational Geometry* **38** (2007), 443–450.

[V12] M. Vizer, kézirat.