Minimálisan 1-szívós gráfok minimális fokszámai

TDK dolgozat

Varga Kitti
BME TTK, Matematika MSc, II. évfolyam

Témavezető:
Dr. Katona Gyula Y.
egyetemi docens
BME SZIT

2014

Kivonat

A dolgozatban szívós gráfokkal foglalkozunk. Egy G gráf t-szívós, ha tetszőleges S elvágó ponthalmaz esetén S-t elhagyva a gráf legfeljebb $|S|/t$ részre esik szét, ahol t pozitív valós szám. A definícióból könnyen láthatóan következik, hogy egy t-szívós gráf mindig $2t$-szeresen összefüggő, viszont ez fordítva nem feltétlenül igaz. Látható, hogy minél több éle van egy gráfnak, annál nagyobb lesz az összefüggőségi és szívóssági számuk is, ezért érdemes vizsgálni, mit lehet tudni azon gráfokról, amiből bármely élet elhagyva csökken az összefüggőségi illetve szívóssági számuk, azaz minimálisan k-összefüggőek illetve minimálisan t-szívósak. Mader belátta, hogy egy minimálisan k-szorosan összefüggő gráfnak van k-adfokú csúcsa. Ennek analógiájaként Kriesell megfogalmazta a következő sejtést: minden minimálisan 1-szívós gráf tartalmaz másodfokú pontot.

A dolgozatban először áttekintünk néhány szívóssággal kapcsolatos ismert tételt, majd konstruálunk tetszőlegesen nagy nemtriviális minimálisan 1-szívós gráfokat. Kriesell sejtéséről eddig nem ismert semmilyen eredmény, még olyan sem, amiben valamely gyengébb felső korlátot adnának a minimális fokszámra. Belátjuk, hogy minden minimálisan 1-szívós gráfnak van legfeljebb $(n/3+3)$-adfokú csúcsa. Végül néhány érdekes összefüggést vizsgálunk a $K_{1,3}$-mentes gráfok szívósságáról, és bebizonyítjuk, hogy a minimálisan 1-szívós $K_{1,3}$-mentes gráfok kizárólag a körök, így Kriesell sejtése ebben az esetben nyilvánvalóan fennáll.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. Alapfogalmak

A dolgozatban $G = (V, E)$ egy véges, irányítatlan egyszerű gráf, $d(v)$ a v csúcs fokszámát jelöli, $\alpha(G)$ a független pontok maximális számát, $\omega(G)$ az összefüggő komponensek számát.

1.1. Definíció. Egy G gráfot k-szorosan (pont)összefüggőnek nevezünk, ha legalább $k+1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad.

A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k-szorosan összefüggő, $\kappa(G)$-vel jelöljük, és G összefüggőségi számának nevezzük.

1.2. Definíció. A G gráfot minimálisan k-szorosan összefüggőnek nevezzük, ha $\kappa(G) = k$, és bármely $e \in E(G)$ él esetén $\kappa(G - e) < k$ teljesül.

Mader 1971-ben belátta a következőt.

1.3. Tétel ([9])**.** *Ha a G gráf minimálisan k-szorosan összefüggő, akkor létezik benne k-adfokú csúcs.*

A szívósság fogalmát Chvátal [3] vezette be annak a mérésére, hogy a gráf különböző részei milyen szorosan kapcsolódnak egymáshoz.

1.4. Definíció. Legyen t pozitív valós szám. Azt mondjuk, hogy a G gráf t-szívós, ha tetszőleges $S \subseteq V(G)$ elvágó ponthalmaz esetén

$$\omega(G - S) \leq \frac{|S|}{t}.$$

A legnagyobb olyan t számot, amelyre G még t-szívós $\tau(G)$-vel jelöljük, és $n \geq 1$ esetén $\tau(K_n) = \infty$.

1.5. Definíció. Legyen G egy t-szívós gráf. Az $S \subseteq V(G)$ elvágó ponthalmazt szeparáló halmaznak nevezzük, ha

$$\tau(G) = \frac{|S|}{\omega(G - S)}.$$

A minimális összefüggőséghez hasonlóan definiálható a minimális szívósság is.

1.6. Definíció. A G gráfot minimálisan t-szívósnak nevezzük, ha $\tau(G) = t$, és bármely $e \in E(G)$ él esetén $\tau(G - e) < t$ teljesül.

Egy minimálisan t-szívós gráf általában nem minimálisan összefüggő. Kriesell azt sejti, hogy Mader tétele minimálisan 1-szívós gráfokra is fennáll.

1.7. Sejtés (Kriesell [8])**.** *Legyen G egy minimálisan 1-szívós gráf. Ekkor G-ben létezik másodfokú csúcs.*

Kriesell sejtéséről még semmilyen részeredmény nem ismert. A dolgozatban belátjuk a következő tételt, aminek a bizonyítását a 3. fejezetben ismertetjük.

1.8. Tétel. *Ha G minimálisan 1-szívós gráf, akkor létezik legfeljebb $\frac{n}{3}+3$-adfokú csúcsa.*

A 4. fejezetben karommentes gráfokkal foglalkozunk.

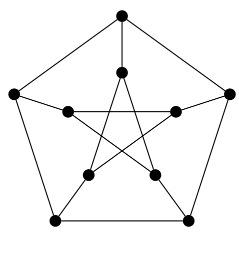
1.9. Definíció. A $K_{1,3}$ gráfot karomnak nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy G gráf karommentes, ha nem tartalmaz feszített $K_{1,3}$-at.

A karommentes gráfok többek között azért érdekesek, mert minden gráf élgráfja karommmentes. Összefüggőségi kérdések esetében a karommentes gráfokkal azért egyszerű dolgozni, mert egy elvágó ponthalmaz egy csúcsából legfeljebb két komponensbe mehet él, így ezekről gráfokról jó eséllyel láthatunk be erősebb állításokat a szívóssággal kapcsolatban. Bebizonyítjuk, hogy a minimálisan 1-szívós karommentes gráfok kizárólag a körök.

1.10. Tétel. *Ha G egy $n \geq 3$ csúcsú minimálisan 1-szívós karommentes gráf, akkor $G = C_n$.*

1.2. Szívósság és Hamilton-körök

A szívósság szorosan kapcsolódik a Hamilton-körök létezéséhez. Nyilvánvalóan, ha egy gráfban létezik Hamilton-kör, akkor a gráf 1-szívós. Fordítva ez azonban nem igaz, ismert ellenpélda erre a Petersen-gráf. Később megmutatjuk, hogy ha egy minimálisan 1-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört, akkor a gráf egy kör. A 2. fejezetben végtelen sok olyan minimálisan 1-szívós gráfot konstruálunk, amelyek nem tartalmaznak Hamilton-kört.



1. ábra. A Petersen-gráf.

Chvátal azt sejtette [3], hogy ha egy G gráfra $\tau(G) > 3/2$ teljesül, akkor G-ben létezik Hamilton-kör. Az már kiderült, hogy ez így nem igaz, de a sejtés az alábbi formájában még mindig nyitott.

1.11. Sejtés (Chvátal). *Létezik olyan t_0 szám, hogy tetszőleges $t \geq t_0$ esetén minden t-szívós gráf tartalmaz Hamilton-kört.*

Amennyiben a sejtés igaz, akkor $t_0 \geq 9/4$ teljesül [1].

1.12. Tétel ([1]). *Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $(9/4-\varepsilon)$-szívós gráf, amelyben nincs Hamilton-út.*

Nyilvánvaló a szívósság és az összefüggőség kapcsolata: az alábbi állítás egyszerűen adódik a szívósság definíciójából.

1.13. Állítás ([3]). *Ha G nem teljes gráf, akkor $\kappa(G) \leq 2\tau(G)$.*

A következő lemma érdekes összefüggést mutat a szívósság és az összefüggőség között [2].

1.14. Állítás ([2]). *Ha $t\alpha(G) \leq \kappa(G)$, akkor a G gráf t-szívós.*

Erősebb állítás is igaz $t = 1$ esetén.

1.15. Tétel (Chvátal-Erdős-tétel [4]). *Legyen G egy gráf legalább három csúcson, és legyen $\alpha(G) \leq \kappa(G)$. Ekkor G-ben létezik Hamilton-kör.*

Az 1.15. tétel megfordítása nem igaz, hiszen az n hosszú körben nyilván létezik Hamilton-kör, de $n \geq 6$ esetén

$$\alpha\left(C_n\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \kappa(C_n) = 2.$$

1.3. Minimálisan 2-szívós gráfok

A szakirodalomban egy cikk foglalkozik minimálisan szívós gráfokkal. Broersma, Engbers és Trommel azt vizsgálták, hogy egy gráf négyzete mikor lehet minimálisan 2-szívós [2].

1.16. Definíció. A G gráf négyzetének azt a G^2 gráfot nevezzük, amelyet G-ből úgy kapunk meg, hogy az összes egymástól 2 távolságra lévő csúcsot összekötjük.

1.17. Definíció. Legyen s egy nemnegatív egész szám. Azt mondjuk, hogy a G gráf a H gráf s-soros bővítése, ha a G gráfot úgy kapjuk meg H-ból, hogy minden uv élet egy úttal helyettesítünk, u és v között legalább s belső csúccsal.

A cikk eredményei a következők.

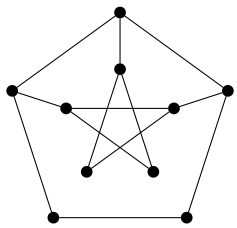
1.18. Tétel ([2]). *Legyen a H gráf egy 2-szeresen összefüggő 3-reguláris gráf 4-soros bővítése, és legyen $G = H^2$. Ekkor G minimálisan 2-szívós.*

1.19. Tétel ([2]). *Legyen H egy 2-szeresen összefüggő gráf és $G = H^2$ minimálisan 2-szívós gráf. Ekkor H minimálisan 2-szeresen összefüggő és nem tartalmaz háromszöget.*

1.20. Tétel ([2]). *Legyen H egy olyan 2-összefüggő gráf, amelynek valamely $u, v \in V(H)$ szomszédos csúcsaira $d_H(u) + d_H(v) \geq 6$ teljesül, és legyen $G = H^2$. Ekkor G nem minimálisan 2-szívós.*

2. Konstrukciók

Minimálisan 1-szívós (Hamilton-kör mentes) gráfokat úgy konstruálhatunk, hogy veszünk egy Hamilton-kör mentes 1-szívós gráfot, és addig hagyunk el éleket, ameddig csak tudunk. A 2. ábrán a Petersen-gráfból hagytunk el éleket, míg az minimálisan 1-szívós nem lett.



2. ábra. A Petersen-gráfból kapott minimálisan 1-szívós gráf.

A fejezetben megmutatjuk, hogy tetszőlegesen nagy minimálisan 1-szívós, Hamilton-kör mentes gráfok is konstruálhatóak az ún. flower snark gráfokból kiindulva.

2.1. Flower snarkok

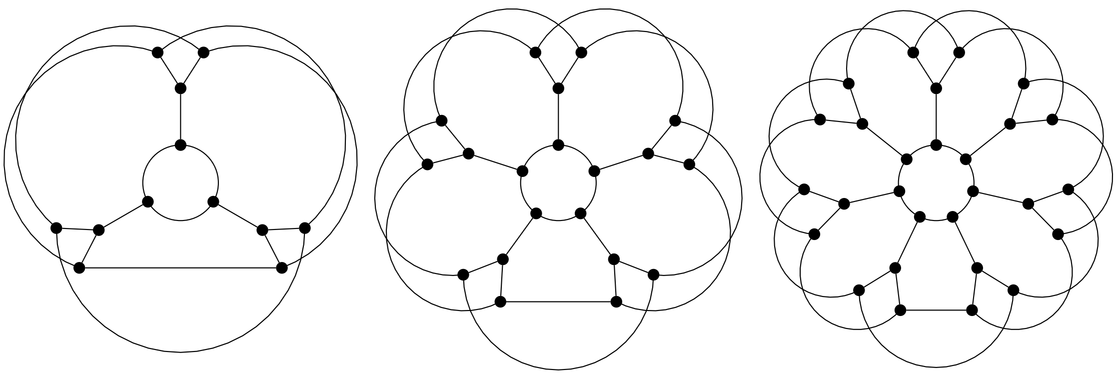
Az alábbi definícióban az indexeket modulo $2n+1$ értjük.

2.1. Definíció. A J_{2n+1} flower snark gráf csúcshalmaza

$$V(J_{2n+1}) = \{a_i, b_i, c_i, d_i \mid i = 0, 1, \ldots, 2n\},$$

élei pedig legyenek

$$E(J_{2n+1}) = \{a_ib_i,\ a_ic_i,\ a_id_i,\ b_ib_{i+1},\ c_id_{i+1}, d_ic_{i+1} \mid i = 0, 1, \ldots, 2n\}.$$

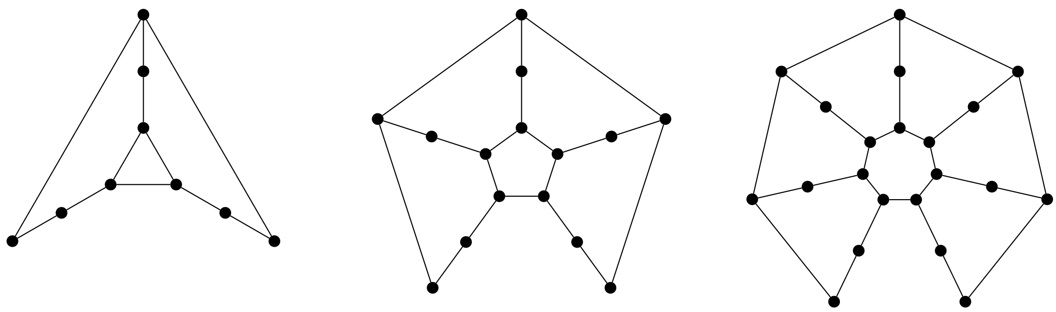


3. ábra. A J_3, J_5, J_7 flower snarkok.

A flower snarkok olyan 3-reguláris, 1-szívós gráfok, melyek nem tartalmaznak Hamilton-kört [7], azonban $k \geq 2$ esetén a J_{2k+1} gráf tetszőleges csúcsát elhagyva, a maradék gráfban már lesz Hamilton-kör [6], és erre a tulajdonságukra nézve minimális élszámúak.

2.2. Minimálisan 1-szívós gráfok

A flower snarkok tehát élek elhagyásával minimális 1-szívóssá tehetők. Az így kapott gráfok (élösszehúzások után) a 4. ábrán láthatók. Be fogjuk látni, hogy ezek tényleg minimálisan 1-szívós gráfok lesznek.



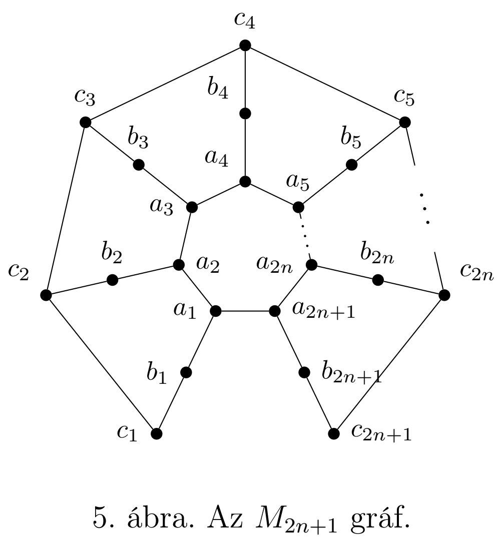
4. ábra. A J_3, J_5, J_7 flower snarkokból kapott minimálisan 1-szívós gráfok.

2.2. Definíció. Legyen az M_{2n+1} gráf csúcshalmaza

$$V(M_{2n+1}) = \{a_i, b_i, c_i \mid i = 1, 2, \ldots, 2n+1\},$$

az élhalmaza pedig

$$\begin{aligned} E(M_{2n+1}) = \{&a_ib_i,\ b_ic_i \mid i = 1, 2, \ldots, 2n+1\} \cup \\ &\cup \{c_ic_{i+1},\ a_ia_{i+1} \mid i = 1, 2, \ldots, 2n\} \cup \{a_1a_{2n+1}\}. \end{aligned}$$



5. ábra. Az M_{2n+1} gráf.

2.3. Állítás. *Minden $n \geq 1$ szám esetén az M_{2n+1} gráf 1-szívós.*

Bizonyítás. Mivel

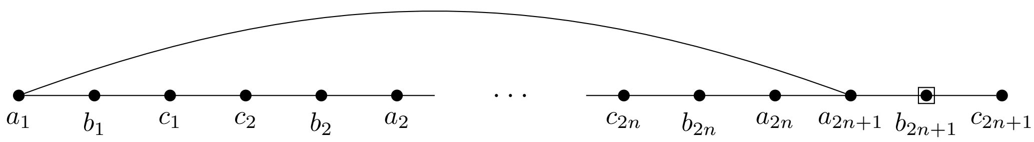
$$H_1 = a_1, b_1, c_1, c_2, b_2, a_2, \ldots, c_{2n}, b_{2n}, a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+1}, c_{2n+1},$$

illetve

$$H_2 = a_{2n+1}, b_{2n+1}, c_{2n+1}, c_{2n}, b_{2n}, a_{2n}, \ldots, c_2, b_2, a_2, a_1, b_1, c_1$$

két Hamilton-út, ezért a gráfból tetszőleges k csúcsot elhagyva legfeljebb $k+1$ komponens keletkezhet.

Indirekt tegyük fel, hogy valamely k csúcs elhagyása után a gráf $k+1$ részre esik szét. Ekkor ez a k csúcs a H_1 illetve a H_2 Hamilton-úton páronként nemszomszédos belső csúcsok. Ahhoz, hogy a H_1 Hamilton-út két végpontja különböző komponensbe kerüljön, az a_{2n+1} és a b_{2n+1} csúcsok közül legalább egyet el kell hagyni. Ha az a_{2n+1} csúcsot nem hagynánk el, akkor az a_1 és a_{2n+1} csúcsok egy komponensben maradnának, vagyis $k = 1$-nek kellene teljesülnie, ez azonban nem lehetséges a gráf 2-szeres összefüggősége miatt (6. ábra). Tehát az a_{2n+1} csúcsot el kell hagyni, viszont így a H_2 Hamilton-út miatt a gráf nem eshet $k+1$ részre, hiszen a_{2n+1} a H_2 egy végpontja. □



6. ábra. Ha az a_{2n+1} csúcsot nem hagynánk el, akkor $k = 1$-nek kellene teljesülnie.

2.4. Állítás. *M_{2n+1} gráf minimálisan 1-szívós.*

Bizonyítás. Tetszőleges

$$e \in \{a_i b_i,\ b_i c_i,\ c_1 c_2,\ c_{2n} c_{2n+1} \mid i = 1, \ldots, 2n+1\}$$

esetén a $G - e$ gráfnak lesz elsőfokú csúcsa, tehát $\tau(G - e) < 1$.

Legyen $e = a_1 a_{2n+1}$. Ekkor az $S = \{a_2, c_2\}$ halmazra $|S| = 2$ és $\omega((G-e)-S) = 3$ teljesül, tehát $\tau(G - e) < 1$ (7.a ábra).

Legyen $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ tetszőleges és $e = a_i a_{i+1}$. Ha i páros, akkor az

$$S = \{a_1, c_2, a_3, c_4, \ldots, a_{i-1}, c_i\}$$

halmazra $|S| = i$ és $\omega((G-e)-S) = i+1$ teljesül, tehát $\tau(G-e) < 1$ (7.b ábra). Ha i páratlan, akkor az

$$S = \{a_{2k+1}, c_{2k}, a_{2k-1}, c_{2k-2}, \ldots, a_{i+2}, c_{i+1}\}$$

halmazra $|S| = 2k+1-i$ és $\omega((G-e)-S) = 2k+2-i$ teljesül, tehát $\tau(G-e) < 1$ (7.c ábra).

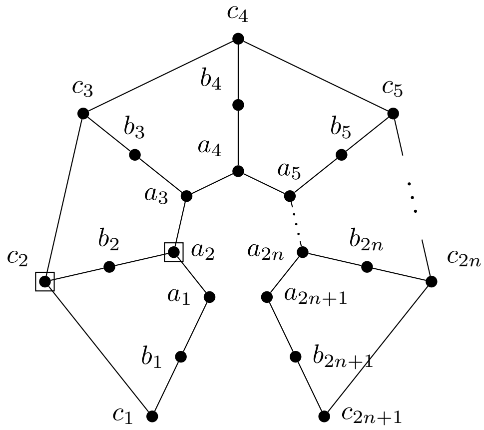
Legyen $i \in \{2, \ldots, 2n-1\}$ tetszőleges és $e = c_i c_{i+1}$. Ha i páros, akkor az

$$S = \{a_{2k+1}, c_{2k}, a_{2k-1}, c_{2k-2}, \ldots, a_{i+1}\}$$

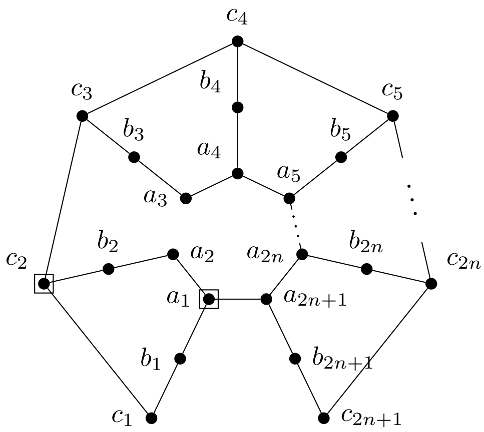
halmaz (7.d ábra), ha pedig i páratlan, akkor az

$$S = \{a_1, c_2, a_3, c_4, \ldots, a_i\}$$

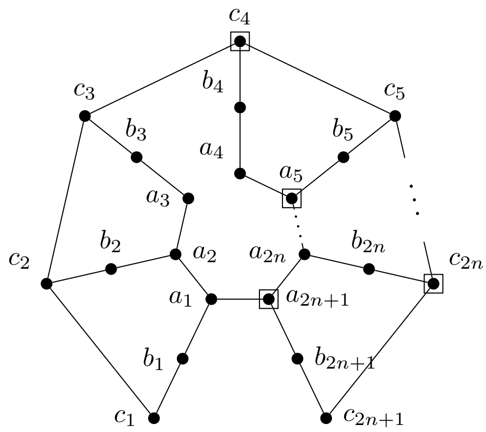
halmaz mutatja, hogy $\tau(G-e) < 1$ (7.e ábra). $\square$



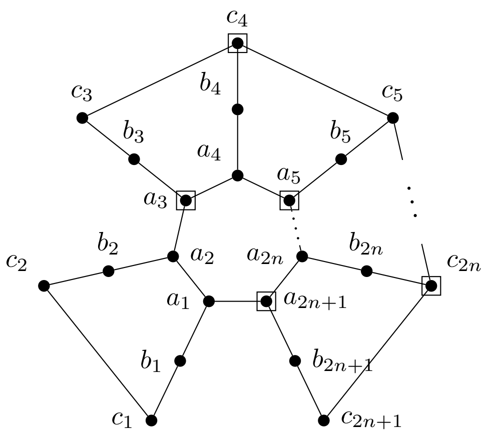
(a) Az a_1a_{2n+1} él elhagyása.



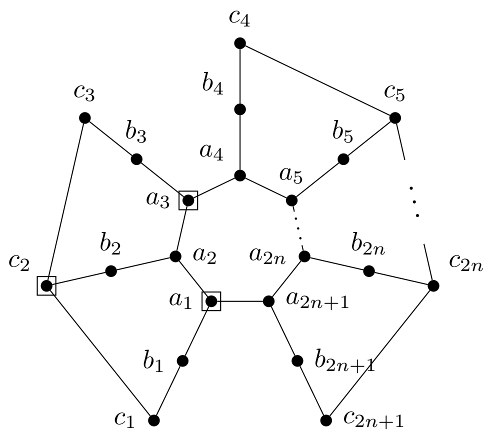
(b) Az a_ia_{i+1} él elhagyása, ha i páros.
Az ábrán $i = 2$.



(c) Az a_ia_{i+1} él elhagyása, ha i páratlan.
Az ábrán $i = 3$.



(d) A c_ic_{i+1} él elhagyása, ha i páros.
Az ábrán $i = 2$.

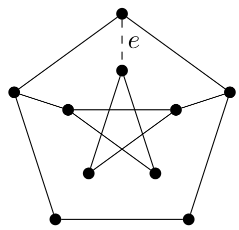


(e) A c_ic_{i+1} él elhagyása, ha i páratlan.
Az ábrán $i = 3$.

7. ábra. Az M_{2n+1} gráf minimálisan 1-szívós.

3. Minimális fokszámok $t = 1$ esetben

A minimálisan 1-szívós gráfok minimális fokszámára szeretnénk felső korlátot adni. Mivel egy 1-szívós gráf 2-szeresen összefüggő, ezért minden csúcs fokszáma legalább 2. Viszont nem minden minimálisan 1-szívós gráf lesz minimálisan 2-szeresen összefüggő, ezért Mader tétele nem alkalmazható. Ilyen például a 2. ábrán látható gráf, mert egy él elhagyása után még 2-szeresen összefüggő marad (8. ábra).



8. ábra. Az e él elhagyása után még 2-szeresen összefüggő marad a gráf.

A dolgozat Kriesell sejtésével foglalkozik.

1.7. Sejtés (Kriesell)**.** *Legyen G egy minimálisan 1-szívós gráf. Ekkor G-ben létezik másodfokú csúcs.*

A továbbiakban használni fogjuk Dirac, illetve Menger klasszikus tételeit.

3.1. Tétel (Dirac)**.** *Ha egy $n \geq 3$ csúcsú gráfban minden csúcs fokszáma legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.*

3.2. Tétel (Menger)**.** *Ha G egy irányítatlan gráf, $u, v \in V(G)$ két nem szomszédos pont, akkor az u-ból v-be vezető páronként pontdiszjunkt irányítatlan utak maximális száma megegyezik az összes uv utat u és v felhasználása nélkül lefogó pontok minimális számával.*

Ha egy n csúcsú G gráf minimálisan 1-szívós és tartalmaz Hamilton-kört, akkor $G = C_n$, ellenkező esetben a Hamilton-körbe nem tartozó tetszőleges élet elhagyva a gráf 1-szívós marad. Így Dirac tételéből egyszerűen következik, hogy ha G egy n csúcsú minimálisan 1-szívós gráf, akkor $\delta(G) < \frac{n}{2}$.

3.1. Az 1.8. tétel bizonyítása

Az 1.8. tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmára.

3.3. Lemma. *Ha G minimálisan 1-szívós gráf, akkor tetszőleges $e \in E(G)$ él esetén létezik olyan $k = k(e)$ szám, hogy alkalmas k csúcsot elhagyva a G gráf k részre, a $G - e$ gráf pedig $k + 1$ részre esik szét.*

Bizonyítás. Legyen $e \in E(G)$ tetszőleges. Mivel G minimálisan 1-szívós, ezért $\tau(G-e) < 1$, így létezik olyan $S \subseteq V(G-e) = V(G)$ elvágó ponthalmaz, hogy $\omega((G-e)-S) > |S|$. Másrészt $\tau(G) = 1$ miatt $\omega(G-S) \leq |S|$. Ez csak úgy lehetséges, ha $G-S$-ben az e él két komponenst köt össze, azaz $\omega((G-e)-S) = |S|+1$ és $\omega(G-S) = |S| = k$. $\square$

Most bebizonyítjuk a dolgozat fő eredményét.

1.8. Tétel. *Ha G egy n csúcsú minimálisan 1-szívós gráf, akkor létezik legfeljebb $\frac{n}{3}+3$-adfokú csúcsa.*

Bizonyítás. Legyen $e \in E(G)$ tetszőleges él. Ekkor a 3.3. lemma miatt létezik olyan $k = k(e)$ szám, hogy a $G-e$ gráfban alkalmas k csúcsot elhagyva a gráf $k+1$ részre esik szét. A keletkező komponensek között van olyan, amelyik legfeljebb $\lfloor \frac{n-k}{k+1} \rfloor$ csúcsból áll, vagyis ebben a komponensben minden csúcs legfeljebb $\lfloor \frac{n-k}{k+1} \rfloor - 1$ másikkal szomszédos, így a fokszámuk G-ben legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{n-k}{k+1} \right\rfloor - 1 + k + 1 \leq \frac{n-k}{k+1} + k = \frac{n+k^2}{k+1},$$

hiszen két különböző komponens között az e élen kívül nem fut él.

Legyen

$$f_n(k) = \frac{n+k^2}{k+1}.$$

Ez rögzített n-re, $0 \leq k \leq \sqrt{n+1}-1$ esetén k-ban monoton csökkenő, majd $\sqrt{n+1}-1 < k \leq n-1$ esetén k-ban monoton növő függvény.

Lemma. *Ha minden csúcs fokszáma legalább $\frac{n}{3}+3$, akkor $k \geq \frac{n}{3}$.*

Bizonyítás. Mivel $f_n(k)$ felső korlát a minimális fokszámra, ezért csak azokat az eseteket kell tovább vizsgálnunk, amikor $f_n(k) > \frac{n}{3}+3$.

$$f_n(1) = \frac{n+1}{2}, \qquad f_n(2) = \frac{n+4}{3}, \qquad f_n(3) = \frac{n+9}{4}, \qquad \dots,$$

$$f_n\left(\frac{n-1}{3}\right) = \frac{n^2+7n+1}{3n+6}, \qquad f_n\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n^2+9n}{3n+9}.$$

Mivel $n \geq 16$ esetén $f_n(1) > \frac{n}{3}+3$, ezt az esetet külön fogjuk kezelni, de $2 \leq k \leq \frac{n}{3}$ esetén $f_n(k) < \frac{n}{3}+3$, ugyanis a függvény fent leírt tulajdonságai miatt elég az intervallum végpontjaira megvizsgálni a felső korlátot, azaz elég, hogy

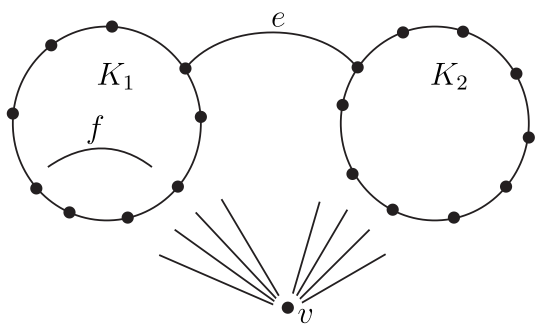
$$\frac{n}{3}+3 > f_n(2), \qquad f_n(\frac{n}{3}) < \frac{n^2+9n}{3n} = \frac{n}{3}+3.$$

Most belátjuk, hogy $k = 1$ esetén jobb felső becslés adható a minimális fokszámra: ha létezik olyan e él és v csúcs, hogy a $(G-e)-\{v\}$ gráf pontosan 2 részre esik szét, akkor G-ben létezik legfeljebb $\frac{n+4}{3}$ fokú csúcs.

Indirekt tegyük fel, hogy minden csúcs fokszáma legalább $\frac{n+5}{3}$. Tekintsük a $(G-e)-\{v\}$ gráfot. Ekkor minden csúcs fokszáma legalább $\frac{n+5}{3}-2 = \frac{n-1}{3}$. Mivel minden csúcsnak csak a saját komponensén belül lehetnek a szomszédai, ezért mindkét komponens mérete legalább $\frac{n-1}{3}+1 = \frac{n+2}{3}$. Másrészt a két komponensben összesen $n-1$ csúcs van, tehát mindkét komponens mérete legfeljebb $n-1-\frac{n+2}{3} = \frac{2n-5}{3}$.

Ekkor Dirac tétele miatt (3.1. tétel) mindkét komponensben van Hamilton-kör és még legalább egy-egy él, amelyeket ezek a Hamilton-körök nem tartalmaznak, legyen az egyik f. Belátjuk, hogy a $G-f$ gráf 1-szívós, azaz G nem lehet minimálisan 1-szívós.

Indirekt tegyük fel (a 3.3. lemma alapján), hogy létezik ℓ darab csúcs, amelyet elhagyva $G-f$ $\ell+1$ darab komponensre esik szét. Legyen a $(G-e)-\{v\}$ gráf két komponense K_1 és K_2, és legyen ℓ_1 a K_1 komponensből ℓ_2 a K_2 komponensből elhagyott csúcsok száma, lásd 9. ábra. A K_1, illetve K_2 komponensek legfeljebb ℓ_1, illetve ℓ_2 részre esnek szét, hiszen tartalmaznak Hamilton-kört.



9. ábra. A $k = 1$ eset.

1. eset: $\ell_1+\ell_2+1 = \ell$, azaz a v csúcsot is elhagyjuk $G-f$-ből. Ekkor a keletkező komponensek száma legfeljebb $\ell_1+\ell_2 < \ell+1$, ami ellentmondás.

2. eset: $\ell_1+\ell_2 = \ell$, azaz a v csúcsot nem elhagyjuk $G-f$-ből. $\ell_1+\ell_2+1 = \ell+1$ komponens csak úgy keletkezhet, ha a v csúcs összes szomszédja a K_1 és K_2 komponensekben lévő Hamilton-körökben nem szomszédosak, és mindegyiket elhagyjuk. Ekkor $\ell \geq d_G(v) \geq \frac{n+5}{3}$ és ezért a keletkező $\ell+1$ komponensek között lesz legalább 7 olyan, amely egyetlen csúcsból áll. Ugyanis legalább $\frac{n+5}{3}$ darab csúcsot elhagytunk, a keletkező legalább $\frac{n+5}{3}+1$ darab komponens mindegyikébe kell egy-egy csúcs, a maradék legfeljebb $n-\frac{n+5}{3}-\left(\frac{n+5}{3}+1\right) = \frac{n-13}{3}$ darab csúcs legfeljebb

$\frac{n-13}{3}$ komponens méretét növelheti egynél nagyobbra. Tehát lesz legalább

$$\left(\frac{n+5}{3}+1\right)-\left(\frac{n-13}{3}\right)=7$$

darab olyan komponens, ami egyetlen csúcsból áll. Ezek között létezik legalább egy olyan $w \neq v$ csúcs, amely nem végpontja az e élnek. Feltehető, hogy $w \in V(K_1)$. Ekkor w szomszédai csak a K_1-ből elhagyott

$$\ell_1 \leq \frac{|K_1|}{2} \leq \frac{\frac{2n-5}{3}}{2} \leq \frac{n-2}{3}$$

darab csúcs lehet, azaz $d_G(w) \leq \frac{n-2}{3}$, ami ellentmond annak, hogy minden csúcs fokszáma legalább $\frac{n+5}{3}$.

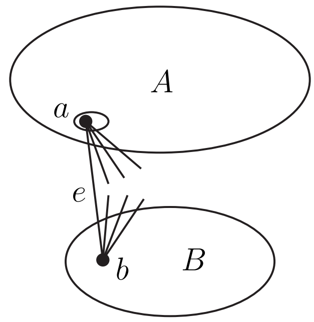
Vagyis $G-f$-ből akárhogyan hagyunk el ℓ darab csúcsot nem keletkezik $\ell+1$ darab komponens, tehát G nem minimálisan 1-szívós. □

Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan G minimálisan 1-szívós gráf, amelyben minden fokszám legalább $\frac{n}{3}+3$. Ekkor a fentiek alapján minden $e \in E(G)$ él esetén $k(e) \geq \frac{n}{3}$. Így a 3.3. lemma alapján G-ből el tudunk hagyni $\frac{n}{3}+x$ csúcsot úgy, hogy a gráf $\frac{n}{3}+x$ részre essen szét. Ekkor $3 \leq x < \frac{n}{6}$, hiszen legalább $\frac{n}{2}$ csúcs elhagyásával nem keletkezhet a maradék csúcsok számánál, azaz legfeljebb $\frac{n}{2}$-nél több komponens az élelhagyás után. Jelölje A a megmaradt csúcsok, B az elhagyott csúcsok halmazát. Ekkor $|A| = \frac{2n}{3} - x$ és $|B| = \frac{n}{3} + x$.

Megmutatjuk, hogy létezik olyan $b \in B$ csúcs, amelynek van legalább $\frac{n+1}{3}$ A-beli szomszédja és ezen szomszédok között van olyan a csúcs, ami B elhagyása után egy legfeljebb 2 méretű komponensben (kis komponensekben) van (10. ábra). Ez azért jó, mert a 3.3. lemma szerint az $e = \{a, b\}$ élet elhagyva létezik $k \geq \frac{n}{3}$ csúcs, amelyet elhagyva a gráf $k+1$ komponensre esik szét. Ehhez kell $G-e$-ben $k+1 \geq \frac{n}{3}+1$ darab független csúcs, melyek közül kettő biztosan a és b. A többi csúcs nem lehet sem a, sem b szomszédja (mert a kis komponensben van). Az ilyen csúcsokból legfeljebb

$$n-\left(\frac{n}{3}+2\right)-\left(\frac{n+1}{3}\right)=\frac{n}{3}-\frac{7}{3}<\frac{n+1}{3}+1$$

van, hiszen az a csúcsnak legalább $\frac{n}{3}+2$ B-beli szomszédja, a b csúcsnak pedig legalább $\frac{n+1}{3}$ A-beli szomszédja van. Vagyis $G-e$ 1-szívós lenne.



10. ábra. Egy e él keresése, amelyre $G - e$ 1-szívós.

Az ilyen a és b csúcsok létezését A és B halmazok között menő élek számának becslésével mutatjuk meg úgy, hogy ha nem léteznének ilyen csúcsok, akkor ezen élek számának egy alsó becslése nagyobb lenne a felső becslésnél. Először adjunk alsó becslést.

Lemma. *Egy n csúcsú, k komponensű gráfnak legfeljebb $\binom{n-k+1}{2}$ éle lehet.*

Bizonyítás. Ha a gráfban $k - 1$ izolált csúcs van, akkor a maradék $n - (k - 1)$ csúcs között legfeljebb $\binom{n-k+1}{2}$ él lehet behúzva.

Tegyük fel, hogy a gráfnak legalább két komponensében van él. Feltehető, hogy a komponensek teljesek. Ekkor egy legkisebb komponensből egy csúcsot áttéve egy tetszőleges másikba, a kapott gráfnak legalább eggyel több éle lesz. $\square$

Így az előző lemma alapján az A-n belüli élek száma legfeljebb

$$\binom{\left(\frac{2n}{3} - x\right) - \left(\frac{n}{3} + x\right) + 1}{2} = \binom{\frac{n}{3} - 2x + 1}{2}.$$

Mivel minden A-beli csúcsnak legalább $\frac{n}{3} + 3$ a fokszáma, a következő alsó becslés adódik az A és B között menő élek számára.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2n}{3} - x\right)\left(\frac{n}{3} + 3\right) - 2 \cdot \binom{\frac{n}{3} - 2x + 1}{2} &= \\ = \left(\frac{2n}{3} - x\right)\left(\frac{n}{3} + 3\right) - \left(\frac{n}{3} - 2x + 1\right)\left(\frac{n}{3} - 2x\right) &= \\ = \frac{n^2}{9} + nx + \frac{5n}{3} - 4x^2 - x\end{aligned}$$

Egy felső becslést is adunk ugyanezen élek számára.

Lemma. *B elhagyása után legalább $\left(\frac{n}{6} + 2x\right)$ darab kis (legfeljebb 2 méretű) komponens keletkezik.*

Bizonyítás. Minden komponensbe kell egy-egy csúcs, a maradék

$$\left(\frac{2n}{3} - x\right) - \left(\frac{n}{3} + x\right) = \frac{n}{3} - 2x$$

csúcs legfeljebb

$$\frac{\frac{n}{3} - 2x}{2} = \frac{n}{6} - x$$

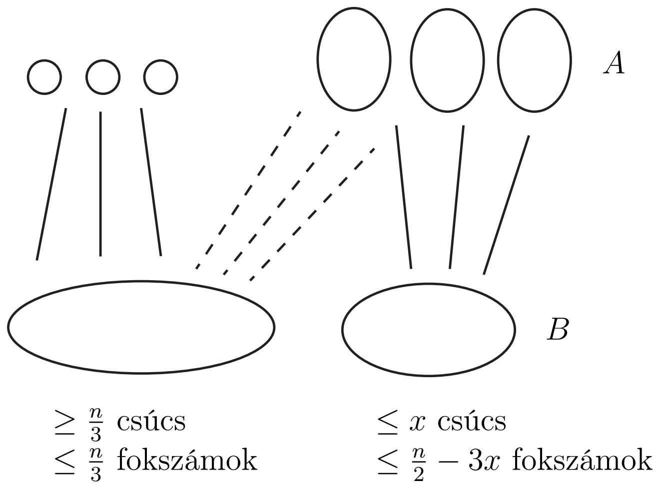
komponens méretét növelheti legalább 3-ra, vagyis a kis komponensek száma legalább $\left(\frac{n}{3} + x\right) - \left(\frac{n}{6} - x\right) = \left(\frac{n}{6} + 2x\right)$. □

Indirekt tegyük fel, hogy a fent leírt (a, b) él nem létezik, azaz hogy B elhagyása után a kis komponensek B-beli szomszédainak (ezekből legalább $\frac{n}{3}$ darab van) legfeljebb $\frac{n}{3}$ A-beli szomszédjuk van. Ekkor B-ben a többi, legfeljebb x darab csúcsnak minden A-beli szomszédja legalább 3 méretű komponensben van, azaz mindegyiknek legfeljebb

$$\left(\frac{2n}{3} - x\right) - \left(\frac{n}{6} + 2x\right) = \frac{n}{2} - 3x$$

A-beli szomszédja lehet. (Legalább $\frac{n}{6} + 2x$ csúcs található egy kis komponensekben.)

Így adhatunk az A és B között menő élek számára egy felső becslést is: a B-beli csúcsok közül legalább $\frac{n}{3}$ darabnak van legfeljebb $\frac{n}{3}$ A-beli szomszédja, és legfeljebb x darabnak van legfeljebb $\frac{n}{2} - 3x$ A-beli szomszédja.



11. ábra. Felső becslés az A és B halmazok között menő élek számára.

Ebből akkor kapunk felső becslést, ha $\frac{n}{2} - 3x > \frac{n}{3}$ teljesül. Ez az alábbi lemma következménye.

Lemma. *A B-beli csúcsoknak átlagosan legalább $\frac{n}{3} + 1$ darab A-beli szomszédjuk van.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy az A és B halmazok között menő élek száma legalább

$$\left(\frac{2n}{3}-x\right)\left(\frac{n}{3}+3\right)-2\cdot\binom{\frac{n}{3}-2x+1}{2}\geq\left(\frac{2n}{3}-x\right)\left(\frac{n}{3}+1\right)-$$
$$-\left(\frac{n}{3}-2x+1\right)\left(\frac{n}{3}-2x\right)=\frac{n^2}{9}+nx+\frac{n}{3}+x-4x^2.$$

Azt kellene belátni, hogy

$$\frac{n^2}{9}+nx+\frac{n}{3}+x-4x^2>|B|\left(\frac{n}{3}+1\right)=\left(\frac{n}{3}+x\right)\left(\frac{n}{3}+1\right).$$

A következők ezzel ekvivalensek.

$$\frac{n^2}{9}+nx+\frac{n}{3}+x-4x^2>\frac{n^2}{9}+nx+\frac{n}{3}+\frac{n}{3}x+x,$$
$$\frac{2n}{3}x>4x^2,$$
$$\frac{n}{6}>x,$$

ami igaz. □

Ha $\frac{n}{2}-3x>\frac{n}{3}$ nem teljesülne, akkor B minden csúcsából legfeljebb $\frac{n}{3}$ él menne A-ba, ami ellentmond az előbbi lemmának.

Vagyis az A és B halmazok között legfeljebb

$$\frac{n}{3}\cdot\frac{n}{3}+x\left(\frac{n}{2}-3x\right)$$

él megy.

Nyilván az alsó becslés nem lehet nagyobb, mint a felső becslés, azaz

$$\frac{n^2}{9}+nx+\frac{5n}{3}-4x^2-x\leq\frac{n}{3}\cdot\frac{n}{3}+x\left(\frac{n}{2}-3x\right)$$
$$0\leq x^2-\frac{nx}{2}+x-\frac{5n}{3}$$
$$0\leq 6x^2-(3n-6)x-10n.$$

Ekkor

$$x_1=\frac{3n-6-\sqrt{(3n-6)^2+240n}}{12}<0$$

és

$$x_2=\frac{3n-6+\sqrt{(3n-6)^2+240n}}{12}>\frac{n}{2}-1.$$

Vagyis $x<0$ vagy $x>\frac{n}{2}$ adódik, ami ellentmondás. □

4. Karommentes gráfok szívóssága

A fejezetben t legyen olyan, hogy $2t$ egész. A következő tétel szerint a karommentes nem teljes gráfok pontosan akkor t-szívósak, ha $2t$-szeresen összefüggőek.

4.1. Tétel ([10])**.** *Egy G karommentes nem teljes gráfra $\kappa(G) = 2\tau(G)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $S \subseteq V(G)$ olyan elvágó ponthalmaz, amelyre $\tau(G) = \frac{|S|}{\omega(G-S)}$ teljesül. Legyenek $C_1, C_2, \ldots, C_k$ a $G-S$ gráf komponensei, valamint legyen $\kappa(G) = n$.

Mivel G n-szeresen összefüggő, ezért tetszőleges $i \neq j$ indexek és $u_i \in V(C_i)$, $u_j \in V(C_j)$ csúcsok esetén Menger tétele szerint u_i és u_j között vezet legalább n pontdiszjunkt út. Mivel S elvágja ezeket az utakat, ezért minden komponensből megy legalább n különböző S-beli csúcsba él.

Mivel G nem tartalmaz feszített $K_{1,3}$-at, így minden S-beli csúcsból legfeljebb két különböző komponensbe mehet él.

A komponenseket egy-egy csúcsba húzzuk össze, és töröljük az S-en belüli éleket. Az előbbi meggondolások alapján ennek a gráfnak legalább kn és legfeljebb $2|S|$ éle van. Vagyis S választása miatt ekkor

$$\kappa(G) = n \leq 2\frac{|S|}{k} = 2\tau(G)$$

teljesül. Így az 1.13. állításból következik, hogy $\kappa(G) = 2\tau(G)$. □

Az előző bizonyítás alapján többet is mondhatunk egy karommentes gráf struktúrájáról.

4.2. Következmény. *Legyen G egy t-szívós gráf, S egy szeparáló halmaz, és $C_1, \ldots, C_k$ a $G-S$ gráf komponensei. Ekkor G-ben minden S-beli csúcsból pontosan két C_i komponensbe megy él, illetve minden C_i komponensből pontosan $2t$ darab S-beli csúcsba megy él.*

Bizonyítás. A 4.1. tétel bizonyításából következik, mivel minden becslésben egyenlőség teljesült. □

Ebből egyszerűen következik az alábbi állítás.

4.3. Következmény. *Ha G egy karommentes, minimálisan $2t$-szeresen összefüggő, nem teljes gráf, akkor minimálisan t-szívós.*

Bizonyítás. Nyilván a 4.1. tétel értelmében G t-szívós. Mivel tetszőleges $e \in E(G)$ esetén $\kappa(G-e) < 2t$, ezért az 1.13. állítás miatt $\tau(G-e) < t$, vagyis G minimálisan t-szívós. □

Azt sejtjük, hogy a 4.3. következmény megfordítása is igaz, de mivel egy él elhagyásakor keletkezhet a gráfban karom, ezért ez nem következik azonnal a 4.1. tételből. Viszont könnyen adódna, hogy egy $\{K_{1,3}, K_{1,3}+e\}$-mentes nem teljes gráf pontosan akkor minimálisan $2t$-szeresen összefüggő, ha minimálisan t-szívós. Azonban $t > 1$ esetén ez a gráfosztály nem túl gazdag.

4.4. Állítás. *Ha G egy n csúcsú $\{K_{1,3}, K_{1,3}+e\}$-mentes gráf és $\kappa(G) = 2t$, ahol $t > 1$, akkor G-t egy K_{2t+2} teljes gráfból kapjuk független élek elhagyásával.*

Bizonyítás. Legyen S egy $2t$ méretű elvágó ponthalmaz. A 4.1. tétel miatt $\omega(G-S) = 2$. Mivel G 2t-szeresen összefüggő, ezért minden S-beli csúcsból mindkét komponensbe megy él, azonban ha valamelyik komponensbe legalább két él is menne, akkor a gráfban lenne $K_{1,3}$ vagy $K_{1,3}+e$. Mivel a gráf $2t$-szeresen összefüggő, ezért minden csúcs fokszáma legalább $2t$, vagyis minden S-beli csúcs legfeljebb egy S-beli csúccsal nem szomszédos. Viszont ha két S-beli csúcs össze van kötve, akkor ugyanazokkal a csúcsokkal szomszédosak a $G-S$-beli komponensekben, különben a gráfban lenne $K_{1,3}$ vagy $K_{1,3}+e$. Mivel S összefüggő, a két komponens csak egy-egy csúcsból áll, és ezek a csúcsok minden S-beli csúccsal szomszédosak. Így G-nek $2t+2$ csúcsa van, és minden csúcsa legfeljebb egy csúccsal nem szomszédos. □

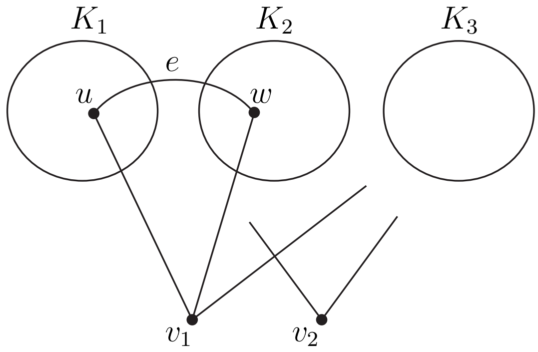
A következő tétel szerint minimálisan 1-szívós gráfokra a karommentesség egy nagyon erős feltétel.

1.10. Tétel. *Ha G egy $n \geq 3$ csúcsú minimálisan 1-szívós karommentes gráf, akkor $G = C_n$.*

Bizonyítás. Mivel G egy 1-szívós karommentes gráf, ezért a 4.1. tétel szerint $\kappa(G) = 2$.

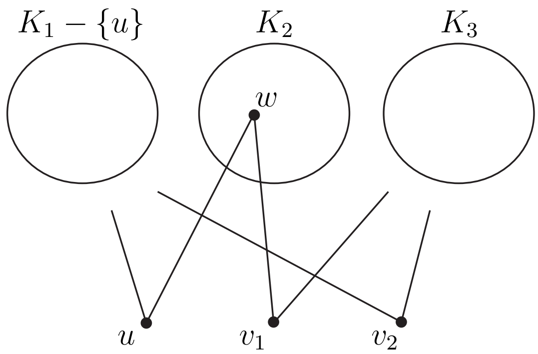
Ha a G gráfnak nincs harmadfokú csúcsa, akkor $G = C_n$. Indirekt tegyük fel, hogy G-ben van legalább harmadfokú csúcs. Ekkor a karommentesség miatt a gráfban van háromszög. Először azt fogjuk megmutatni, hogy minden háromszögnek legalább két csúcsa másodfokú.

Vegyünk egy tetszőleges háromszöget, és legyen e ennek a háromszögnek egy tetszőleges éle. A 3.3. lemma alapján létezik egy olyan S szeparáló halmaz, hogy $\omega(G-S) = |S|$ és $\omega((G-e)-S) = |S|+1$. Mivel S egy szeparáló halmaz, ezért a 4.2. következmény szerint $G-S$ minden komponenséből pontosan két S-beli csúcsba megy él és minden S-beli csúcsból pontosan két komponensbe megy él. Legyen $v_1, v_2 \in E(S)$ az e élet tartalmazó komponens (S-beli) szomszédsága. Feltehető, hogy a választott háromszög harmadik csúcsa v_1. Nyilván $\{v_1, v_2\}$ egy elvágó ponthalmaz, elhagyásuk esetén az 1-szívósság miatt pedig pontosan két komponens keletkezik, vagyis ez a 3.3. lemmában leírtaknak megfelelő szeparáló halmaz. Legyen az e él két végpontja u és w. Legyen a $(G-e)-\{v_1, v_2\}$ gráfban az u csúcs komponense K_1, a w csúcsé K_2, a harmadik komponens pedig legyen K_3. Mivel G 2-szeresen összefüggő, ezért v_1 és v_2 is össze van kötve a K_3 komponenssel (12. ábra).



12. ábra. Az e élhez tartozó szeparáló halmaz.

Indirekt tegyük fel, hogy a K_1 és K_2 komponens mérete is legalább 2. Ekkor $\{v_1, v_2, u\}$ egy szeparáló halmaz, ezért igaz rá a 4.2. következmény. Nyilván v_1 és u össze van kötve a K_2 komponenssel, így v_2 nincs összekötve K_2-vel, tehát v_2 össze van kötve $K_1 - \{u\}$-val (13. ábra).

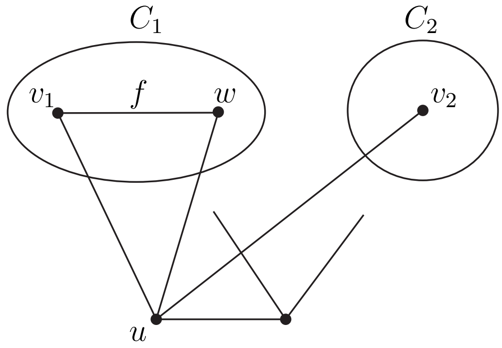


13. ábra. Ha $|K_1| > 1$ teljesülne.

Hasonlóan adódik a w csúcs elhagyásának esetében, hogy v_2 össze van kötve $K_2 - \{w\}$-vel. Ekkor a gráfban van karom, ami ellentmondás. Tehát feltehető, hogy $K_1 = \{u\}$.

Ha a K_2 komponens mérete legalább 2, akkor $\{v_1, v_2, w\}$ egy szeparáló halmaz, ezért a 4.2. következmény miatt v_1 nincs összekötve u-val, tehát u másodfokú.

Ha $K_2 = \{w\}$, akkor megmutatjuk, hogy w másodfokú. Nyilván u szomszédai a $\{w, v_1, v_2\}$ halmazból, w szomszédai pedig az $\{u, v_1, v_2\}$ halmazból kerülnek ki. Tekintsük az $f = wv_1$ élet. Ugyanúgy, mint az e él esetén, létezik a 3.3. lemmában leírtaknak megfelelő, 2 méretű szeparáló halmaz. Legyen az így keletkező két komponens C_1 és C_2, ahol $w, v_1 \in C_1$. Ennek biztosan eleme u. Mivel a gráf kétszeresen összefüggő, ezért az u csúcsnak szomszédosnak kell lennie mindkét komponenssel, ami csak úgy lehetséges, ha $v_2 \in C_2$. Ekkor w nem lehet szomszédos v_2-vel, tehát w másodfokú.



14. ábra. Ha $K_2 = \{w\}$, akkor w másodfokú.

Tehát u és w közül legalább az egyik csúcs másodfokú. Így tetszőleges háromszög tetszőleges élének van másodfokú végpontja.

Megmutatjuk, hogy $G = C_n$. Indirekt tegyük fel, hogy G-ben u egy legalább harmadfokú csúcs. Legyen v_1, v_2, v_3 az u csúcs szomszédai. Mivel a gráf karommentes, feltehető, hogy $v_1v_2 \in E(G)$. Mivel bármely háromszögnek van legalább két másodfokú csúcsa, ezért v_1-nek és v_2-nek nincs több szomszédja. Ekkor az u csúcsot elhagyva szétesik a gráf, ami ellentmondás. $\square$

5. Összefoglalás

A dolgozatban először áttekintettünk néhány szívóssággal kapcsolatos ismert eredményt, majd a 2. fejezetben konstruáltunk tetszőlegesen nagy nemtriviális minimálisan 1-szívós gráfokat. A 3. fejezetben beláttuk, hogy minden minimálisan 1-szívós gráfnak van legfeljebb $(n/3+3)$-adfokú csúcsa. Végül néhány érdekes összefüggést vizsgáltunk a karommentes gráfok szívósságáról, és bebizonyítottuk, hogy a minimálisan 1-szívós karommentes gráfok kizárólag a körök.

További célunk, hogy erősebb felső korlátot adjunk a minimálisan 1-szívós gráfok minimális fokszámára. Továbbá érdekes lehet $t > 1$ esetén a minimálisan t-szívós karommentes gráfok vizsgálata.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Katona Gyulának a sok segítséget, konzultációt.

Hivatkozások

[1] D. Bauer, H.J. Broersma, H.J. Veldman, Not every 2-tough graph is hamiltonian, *Discrete Math.*, 99 (2000) 317-321.

[2] H.J. Broersma, E.A. Engbers, H. Trommel, Various results on the toughness of graphs, *NETWORKS*, 33 (1999) 233-238.

[3] V. Chvátal, Tough graphs and hamiltonian circuits, *Discrete Math.* 5 (1973) 215-228.

[4] V. Chvátal, P. Erdős, A note on hamiltonian circuits, *Discrete Math.*, 2 (1972) 111-113.

[5] S. Goodman, S. Hedetniemi, Sufficient conditions for a graph to be hamiltonian, *J. Combin. Theory*, B 16 (1974) 175-180.

[6] S. Fiorini, Hypohamiltonian snarks. *Graphs and Other Combinatorial Topics, Proc. 3rd Czechoslovak Symp. on Graph Theory, Prague.* (1982) 70-75.

[7] R. Isaacs, Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not tait colorable, *Amer. Math. Monthly*, 82 (1975) 221–239.

[8] T. Kaiser, Problems from the workshop on dominating cycles, http://iti.zcu.cz/history/2003/Hajek/problems/hajek-problems.ps

[9] W. Mader, Eine Eigenschaft der Atome endlicher Graphen, *Arch. Math.*, 22 (1971) 333-336.

[10] M.M. Matthews, D.P. Sumner, Hamiltonian results in $K_{1,3}$-free graphs, *J. Graph Theory*, 8 (1984) 139-146.