BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

GEOMETRIA TANSZÉK

MÉRNÖKHALLGATÓK GEOMETRIAI GONDOLKODÁSÁNAK MÉRÉSE VAN HIELE TESZT SEGÍTSÉGÉVEL

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA DOLGOZAT

KÖPECZI-BÓCZ ÁKOS TAMÁS

SZÉLES KATALIN

DOBÁK DÁVID

Konzulensek:

dr. Szilágyi Brigitta

egyetemi docens

Budapest, 2021

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS

1.1. Kihívások a felsőoktatásban

Szerte a világban számos kutatás született és születik, amelyek feltérképezik a középiskola-egyetem átmenet nehézségeit. Sokan dolgoznak azon, miként lehetne ezt a szakadékot könnyebben áthidalhatóvá tenni, csökkentve ezáltal a lemorzsolódást, amely különösen a STEM (mozaikszó, a Science, Technology, Engineering, Mathematics rövidítése) területeken magas még azokban az országokban is, ahol valamiféle felvételi eljárást követően kerülnek a diákok a választott szakra. Az ezen szakokon tanuló hallgatók közül sokan nem megfelelő ütemezésben folytatják tanulmányaikat, de jelentős azok száma is, akik diploma nélkül hagyják el a képzést. Magyarországon a lemorzsolódás a műszaki területen az egyik legmagasabb. Ennek mérséklésére a felsőoktatási intézményekben többféle eljárás alakult ki. Matematikából az egyik jellemző gyakorlat, hogy az őszi szemeszter kezdetén az elsőéves hallgatóknak dolgozatot kell írniuk, amellyel ellenőrzik, hogy rendelkeznek-e a tanulmányok megkezdéséhez szükséges ismeretekkel. A többnyire az első héten megírt dolgozat adott szinten való teljesítése több szakon a kalkulus tárgy elvégzésének szükséges feltétele. Sikertelen dolgozat esetén több felsőoktatási intézményben a hallgatók számára felzárkózási lehetőséget biztosítanak a középiskolai ismereteket felelevenítő kurzussal. Ez mindenképpen hasznos, noha nem könnyű a diáknak azzal szembesülni, hogy még el sem kezdődött igazán a szemeszter, már kudarcot vallott. Vannak olyan egyetemek is, ahol ilyen mérésre nem kerül sor. Ebben az esetben megvan a veszélye annak, hogy a többnyire a szemeszter közepén esedékes első zárthelyi elérkezésekor a diák lemaradása a kezdeti feltételek elégtelensége miatt már olyan tetemes, hogy borítékolható a sikertelenség.

A probléma Európa más országaiban is ismeretes, Braun és munkatársai egy lehetséges megoldást ismertetnek [1]. Jelen munka egy másik, ugyancsak hasznos gyakorlatot ismertet, amely egy bemeneti teszttel segíti az elsőéves hallgatók matematikai gondolkodásának feltérképezését.

Milyen tesztet érdemes végezni? Ha az adott szak nem követel meg emelt szintű érettségit, akkor a bemenő teszt sem haladhatja meg a középszint ismeretanyagát. De vajon az ismeretek mérése elegendő-e? Bizonyos rutin eljárások meglétének ellenőrzése egy-egy bemenő teszten abban mindenképpen segítségünkre lehet, hogy a legproblémásabb eseteket kiszűrjük. Az ilyen mérések azonban nem adnak felvilágosítást arról, hogy a begyakorolt eljárásokon túl a diák birtokában van-e egy olyan matematikai érettségi szintnek, ami lehetővé teszi számára az egyetemi axiomatikus felépítésű anyag megértését, az ott szerzett ismeretek szaktárgyakban való alkalmazását. Azonban van mód arra, hogy megvizsgáljuk, milyen gondolkodási szinten vannak diákjaink, hogy lássuk, a matematikai gondolkodás folyamatának mely állomásánál járnak és hogy az adott állapotból van-e lehetőség az egyetemi tananyag elsajátítására vagy először a megfelelő szint elérését kell megvalósítani. Egy ilyen mérés arról is tájékoztat, honnan kell továbbvinni a hallgatókat, hasznos információkat nyerhetünk a fejlesztést, felzárkóztatást illetően.

Mivel a geometriai és a logikus, elemző gondolkodás erős kapcsolatot mutatnak, érdemes egy a nemzetközi gyakorlatban is elterjedt van Hiele-elméleten alapuló tesztet alkalmazni. Ennek segítségével választ kaptunk kutatásunk egyik fő kérdésére, hogy a Budapesti Corvinus Egyetem elsőéves emberi erőforrás szakos hallgatói a felsőfokú tanulmányaik sikeres teljesítéséhez szükséges megértési szinten vannak-e.

Azokon a szakokon, ahol a lemorzsolódás nem okoz problémát ugyancsak érdemes tájékozódni a tanulmányaikat megkezdő hallgatókról. Ugyan ezeknél a diákoknál a kiváló középiskolai eredmények, sokaknál az emelt szintű matematika érettségi adott, ez mégsem nyújt elegendő információt. Akár a Nemzeti Alaptantervben foglaltak, akár a sikeresen teljesített emelt szintű érettségi garancia lehetne arra, hogy a felvettek jól teljesítsenek az egyetemen, azonban megakadásokat nem egyszer náluk is tapasztalhatunk.

A mérnökoktatás keretei között tárgyalt matematika kurzusokon ritkán esik szó a nemeuklideszi geometriákról. A kalkulus tárgyak felépítése is az alkalmazáshoz közel álló esetek szem előtt tartásával születik. A bizonyítások sok esetben kisebb hangsúlyt kapnak, mint a természettudományos képzésekben. Ennek ellenére a középiskolát követően az egyetemi kurzusokon megtanulandó nagy anyag, a gyors tempó nem kevés hallgatónak okoz nehézséget. A BME GPK mechatronikai mérnök és energetikai mérnök szakának hallgatói jó képességű diákok, akik magas felvételi pontokkal kerültek be az egyetemre és az első szemeszterbeli kalkulus kurzus több részletével már a középiskolában megismerkedtek. Az ő esetükben van mód arra, hogy tágítsuk a kereteket, magasabb absztrakciós készséget igénylő anyagot is tanítsunk. Ez nemcsak a gondolkodásuk fejlődését szolgálja. Némelyek közülük vehetnek fel olyan kurzusokat, amelyek a hagyományos ismereteken túlmutatnak. Ilyen lehet az analízis és a differenciálgeometria mélyebb ismeretét feltételező nemlineáris rezgések, modális analízis vagy a kontinuummechanika.

Ha egy ilyen nehezebb, de izgalmas út bejárására vállalkozunk, mindenképpen szükséges annak ismerete, a geometriai gondolkodás megfelelő szintjén vannak-e a hallgatóink ahhoz, hogy célhoz jussunk. Látnunk kell azt is, honnan, miként érdemes elindulni. Egy ilyen felmérés eredménye, hogy látjuk, diákjaink gondolkodási szintjei miként alakul akkor is hasznos, ha az oktatás hagyományos útjain kívánunk továbbmenni. Jó, ha látjuk, miként jó érvelnünk tanítványainknak, mik azok a logikai lépések, amik feltehetően nehéznek bizonyulnak majd. Ha differenciált oktatást kívánunk megvalósítani, akkor is érdemes az azonos gondolkodási szinten lévőket egy csoportba tenni, hogy a közöttük lévő kommunikáció minél hatékonyabb legyen. A van Hiele-elmélet és az ez alapján készült tesztek alkalmasak arra, hogy segítségükkel a hallgatók gondolkodási szintjét feltérképezzük.

A tanításban a megfelelő tanár-diák kommunikáció kiemelten fontos. Ha nem megfelelő módon (nyelven) közelítjük meg a tanulókat, akkor esély sincs arra, hogy magasabb megértési szintre juttassuk el őket. A hallgatók megértési szintjeit megismerve az adott szinttől kell végeznünk a tanítást, hogy magasabb megértési szintre juttassuk őket. Ha a tanár nincs tisztában a hallgatók megértési szintjével és a kommunikációját nem alakítja annak megfelelően, addig esély sincs arra, hogy a tanítási folyamat sikeres legyen a gondolkodás, problémamegoldó képesség fejlesztését tekintve, legfeljebb a tényanyag átadása valósulhat meg. Ha azonban sikerül feltérképeznie a diákok megértési szintjét, azonos kommunikációval apró lépésekben lehetőség van a fejlesztésre.

1.2. A van Hiele teszt

Pierre van Hiele és Dina van Hiele-Geldorf 1957-ben megalkotott egy elméletet, mely alkalmasnak a geometriai gondolkodás folyamatának megismerésére. Bruner elmélete szerint minden életszakasznak megvannak a fejlődési szintjei ([2], [3], [4]). Ezek a szintek egymásra épülnek, egy diák nem juthat el egy felsőbb szintre az összes korábbi szint birtoklása nélkül. Ez egy olyan szempont, amire mind a felzárkóztatásnál, mind pedig a tananyag felépítésénél tekintettel kell lennünk.

Az eredményes tanítás szükséges feltétele, hogy ismerjük azt, milyen szinten vannak a diákjaink és igyekezzünk őket minél magasabb szintre juttatni. A különböző megértési szinten lévő diákok nehezen vagy egyáltalán nem értik meg egymást, nem képesek elfogadni a másik szinten lévő társuk érveléseit. Egy alsóbb szinten lévő diák fölöslegesnek gondolhatja a fölsőbb szinten lévő indoklását, mert nem érzi szükségesnek, hogy állításait külön alátámassza, számára azok teljesek. Ezzel szemben a fölsőbb szinten lévő nem tekinti teljes értékű indoklásnak az alsóbb szintű által adott magyarázatot. A tanulócsoportok, egyetemi tankörök kialakításakor jó, ha figyelembe vesszük ezt. Azon ismeretek birtokában, hogy ki milyen gondolkodási szinten van, könnyebben valósíthatunk meg differenciált oktatást is.

A van Hiele házaspár munkájában a megértés öt szintjét alakították ki a felismerés szintjétől a formális logika szintjéig. A szintek a következő képességet birtoklását jelentik:

1. szint: A személy képes alakzatok felismerésére. Az alakzatot megjelenése alapján érzékeli, részleteit, tulajdonságait nem képes megfigyelni; enélkül az összefüggések megértésére még nem képes. Például felismeri, hogy az alakzat négyzet, de annak téglalap voltát nem képes megállapítani.

2. szint: A személy az alakzatokat már annak tulajdonságaival képes azonosítani. Például tudja, hogy egy négyszög, amelynek szögei derékszögek, az téglalap. Még nincs olyan mértékű tudás birtokában, hogy a téglalapok és négyzetek halmaza közötti relációt megértse.

3. szint: A személy az alakzatokat annak definíciójával azonosítja, ezáltal képessé válik például annak felismerésére, hogy a négyzet egyben téglalap is. Ezenfelül megért egyszerűbb bizonyításokat, képes érvelni, bizonyítási lépést elvégezni.

4. szint: A személy ismeri az axiómarendszer jelentését, az axiómák és az állítások, definíciók közötti különbséget, de nem feltétlen tudja visszavezetni bizonyítását axiómákra. Le tud vezetni bizonyításokat, de "nyilvánvalónak tűnő" állításokat nem érzi, hogy bizonyítania kellene. Például, ha egy egyenesre merőleges egyenesre merőleges egy harmadik egyenes, akkor első és harmadik egyenes párhuzamosságát bizonyítás nélkül nyilvánvalónak érzi.

5. szint: A személy absztrakt gondolkodásra képes. Képes más axiómarendszerrel dolgozni, így képes nemeuklideszi gometriát, például Bolyai-féle hiperbolikus geometriát használni. Ezt a szint a legmagasabb a Van Hiele-rendszerben, általában csak kivételes tehetségű személyek képesek elérni (középiskolában: többnyire

speciális matematika tagozatra járók, felsőoktatásban: matematikai, műszaki hallgatók).

Az 1980-as években született meg az a legismertebb teszt, amely a fent említett szinteket hivatott mérni és a magyar közoktatás szerkezete miatt a magyar hallgatók mérésére jól alkalmazható (Usiskin 1982), ezért mi is ezt használtuk. A magyarországi közoktatás Nemzeti Alaptantervében (NAT) megfogalmazott célokat a kerettanterv tárgyalja részletesen. Magyarországon az oktatás központosított - a NAT lazábban, a kerettanterv szorosabban meghatározza az oktatás tartalmát. Elvárható tehát, hogy Magyarországon a geometriai megértés térképe egységes legyen.

Szabó Csaba vezetésével folyt kutatás, amely vizsgálta, hogy a közoktatásban elsajátított ismeretekhez adott életkorban milyen geometriai megértési szint társul [9]. Megállapították, hogy az egyes van Hiele-szintek jól párosíthatók az általános iskola, illetve a középiskola megfelelő osztályaival. Az általános iskola alsó tagozata számára előírt tanagyag, például a háromszög, négyzet és téglalap felismerése, ezek előállítása rajzolással szabadon vagy egy-két tulajdonság megadásával az 1. szinttel azonosítható. Az 5-6. osztályosoknak ismernie kell síkidomok, sokszögek (háromszögek, négyszögek) szemléletes fogalmát, azaz a 2. szinttel kell rendelkezniük, majd képesnek kell lenniük különböző alakzatokat tulajdonságok szerint csoportosítani, azaz elvárható, hogy eljussanak hatodik osztály végére a 3. szintre. Később, 7-8. osztály befejeztével már a diákok közelítenek a 4. szinthez azzal, hogy képesnek kell lenniük tételek megfogalmazására megfigyelés alapján és rendelkezniük kell a bizonyítási igénnyel.

Összességében tehát elmondható, hogy a diákoknak az általános iskola 8 éve alatt a 3., középiskola végére pedig a 4. van Hiele-szintre kellene eljutniuk a NAT előírásai szerint.

A BME GPK mechatronikai és energetikai mérnök képzésén és a Corvinus Egyetem Emberi erőforrás képzésén elvégzett mérésekkel a célunk az volt, hogy megvizsgáljuk, milyen hányadban rendelkeznek a diákjaink a 4. van Hiele-szinttel. Ha ez fennáll, akkor ennek megfelelően kidolgozva a kalkulus tárgy oktatását, lehetőség van arra, hogy diákjainknak magasabb absztrakciós szintet megkövetelő ismereteket is megtanítsunk, az új anyag magyarázatakor, az egyes tételek bizonyításakor a gondolkodási szintjeiknek megfelelő módon járjunk el. Esetleges hiányosságok felismerése esetén pedig a tananyagot úgy tudjuk alakítani, hogy segítsük a hallgatókat eljutni erre a szükséges szintre.

A Nemzeti Alaptantervben foglaltak ismeretében arra gondolhatunk, hogy semmi akadálya annak, hogy akár a mérnökoktatásban, akár a gazdasági oktatásban is a 4. szint meglétét feltételezve lehetővé válik a formális logikai műveletek, következtetések megértése, elvégzése a konkrét geometriai interpretációtól függetlenül. Nem okoz majd gondot az általános logikai törvények felismerése, a különböző axiómarendszerek közötti összefüggések megértése.

Ami azonban aggodalomra adott okot, hogy Magyarországon a tanító- és tanárképzésben elvégzett vizsgálatok és Szabó Csaba kutatásai azt mutatták, hogy az elméleti, előírt elvárások és a valóságos elvárások között nagy szakadék tátong [9], [10]. Ennek pedig az a következménye, hogy sok diák a 4. szintnél alacsonyabb megértési szinttel fejezi be a középiskolai tanulmányait. Ezek ismeretében szükségesnek láttuk egy olyan vizsgálatok elvégzését, amelyek a magyar műszaki és gazdasági felsőoktatásban elit szakokon tanuló hallgatók gondolkodási szintjeit vizsgálja. Dolgozatunkban az így kapott eredményeket vetjük össze a hazai egyéb kutatások eredményeivel, és hasonlítjuk össze egymással is.

2. ADAT, MÓDSZER

2.1. Az alkalmazott teszt

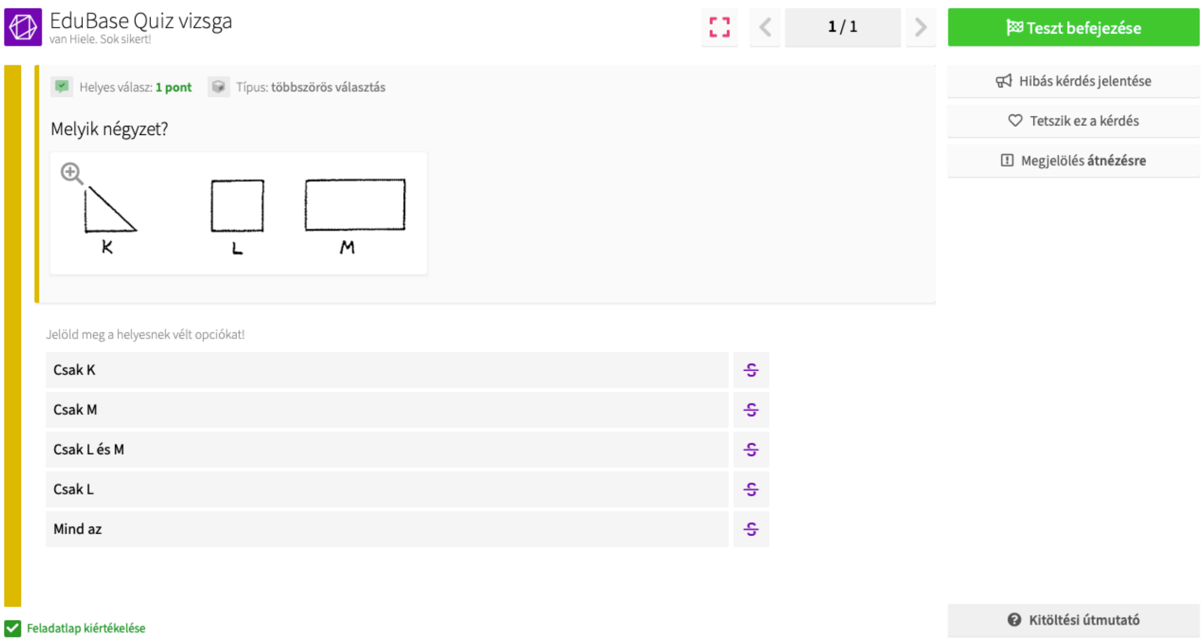
A van Hiele-elmélet állításainak igazolására később több tanulmány is született ([5], [6], [7], [8]). Az 1980-as években született meg a legismertebb teszt, amely ezeket a szinteket hivatott mérni és a közoktatás szerkezete miatt a magyar hallgatók mérésére jól alkalmazható, ezért mi is ezt használtuk ([8]).

Az Usiskin-féle feladatsor 25 kérdésből áll, 5 egymásra épülő kompetenciát mér és minden kompetenciát 5 kérdés hivatott mérni. A kérdések tesztfeladatok, öt válaszlehetőségből pontosan egy helyes. Életkortól, iskolai végzettségtől függetlenül 35 perc áll rendelkezésre a megoldáshoz. A teszt eredménye alapján a kitöltő vagy besorolható valamelyik van Hiele szintbe, vagy lehet nem besorolható is. A besorolhatók szintje 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 lehet, 0 jelenti a kompetenciák teljes hiányát, 5 pedig a legmagasabb szintű kompetencia meglétét.

A van Hiele-elmélet szerint csak akkor tudhatja magáénak valaki egy szinthez tartozó kompetenciát, ha birtokában van a szintet megelőző összes kompetenciának is. Például, ha valaki a teszt során teljesítette az 1-es, 2-es, 3-as és 4-es szintekhez tartozó kritériumot, akkor az ő Van Hiele szintje 4-es. Viszont, ha valaki teljesítette az 1-es, 2-es és 4-es szintekhez tartozó kritériumot, de a 3-as szinthez tartozót nem, akkor ő nem sorolható semelyik szinthez sem, mert a négyes szinthez teljesítenie kellett volna a hármas szintet is (annyit azonban elmondhatunk róla, hogy a van Hiele-szintje eléri a kettőt). A továbbiakban az ilyen nem besorolható személyekre a „not fit” kifejezéssel hivatkozunk. Kétféle módszer létezik a teszt kiértékelésére: az egyik szerint akkor van birtokában a kitöltő egy szinthez tartozó kompetenciának, ha az adott kompetenciára vonatkozó 5 feladatból legalább hármat old meg helyesen (továbbiakban megengedő van Hiele-szint), a másik módszer esetén ez a szám 4 (továbbiakban szigorú van Hiele-szint).

2.2. A teszt megírására használt rendszer

A tesztet már egy általunk jól ismert és régóta használt rendszerben valósítottuk meg. Az EduBase rendszer egy magyar fejlesztésű online felhő alapú platformfüggetlen oktatási rendszer, amely lehetőséget nyújt az oktatáshoz kapcsolódó tevékenységek digitalizálásához. A rendszer lehetőséget nyújt a digitális osztályterem létrehozásától a vizsgáztatásig minden oktatási tevékenységre szinte. A digitális osztályteremben a tanulókkal megoszthatunk oktatási tartalmakat, legyen szó akár egyszerű fájlokról vagy videós tananyagokról is. Ezen felül létrehozhatunk tanulást segítő anyagokat, mint például házi feladatokat és gyakorló feladatsorokat. Ezeknek a kitöltését folyamatosan ellenőrizhetjük és a rendszer automatikusan kijavítja a tanulók beadott megoldásait. A megoldások helyességén felül lehetőségünk van a teljesítmény figyelésére is, mint például az egyes feladatokkal eltöltött idő mennyiségét. A rendszer platform független, ami azt jelenti, hogy szinte bármilyen elektromos eszközről azonnal elérhető, amennyiben annak van internet elérése.



1. ábra: Az EduBase vizsgarendszer egy kérdése

2.3. Populáció

Magyarországon az egyetemi felvételi eljárás rendje részben hasonló több közép- és kelet-európai országéhoz, ugyanis a diákok a középiskola lezárásaként egy országosan egységes érettségi vizsgát tesznek. A vizsgatárgyak: magyar nyelv és irodalom, matematika, történelem, egy idegen nyelv és egy választott tárgy. Minden felsőoktatási intézmény meghatározza, hogy mely tantárgy eredményét fogadja el választott tárgyként. A műszaki felsőoktatásban ez jellemzően fizika, informatika, kémia. Az érettségi vizsga célja tehát az, hogy a választott felsőoktatási programhoz szükséges ismeretek meglétét ellenőrizze. Az érettségi vizsga történhet emelt vagy közép szinten. Minden egyetem meghatározza azokat a tantárgyakat, amelyekből szerzett emelt szintű érettségit elfogadja. 2020-tól minden magyarországi felsőoktatásban továbbtanuló diák köteles legalább egy emelt szintű érettségi vizsgát tenni. Az érettségi vizsgák eredményét pontokká konvertálják. Az érettségi eredményekből legfeljebb 200 pont szerezhető. További 200 pont jár a középiskola utolsó két évében elért érdemjegyekre kapott pontokból. Ez tulajdonképpen az általános ismereteket számszerűsíti. További legfeljebb 100 extra pont szerezhető az egyetemi tanulmányok szempontjából releváns emelt szintű érettségi vizsgáért, tanulmányi-, művészeti-, sportversenyeken elért eredményekért, nyelvvizsgáért. Extra pontként jelenhetnek meg az esélyegyenlőséget biztosító pontok is, ami pl. fogyatékosság, hátrányos helyzet esetén kerül beszámításra. A svéd modellhez hasonlóan azoknak a tanulóknak, akik az érettségin jól teljesítenek, de a középiskolai tanulmányaikból számított pontjaik alacsonyak, van módjuk az érettségin elért eredményük duplázására.

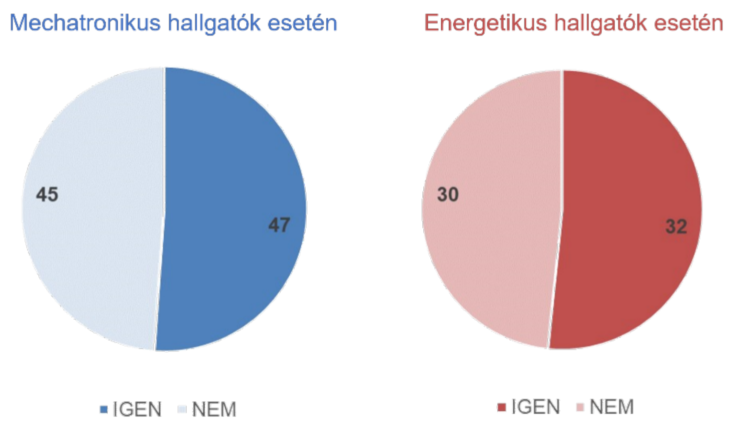
Láthatjuk, hogy egy viszonylag komplex, összetett eljárást követően nyernek felvételt a magyar diákok a magyarországi egyetemekre.

2.3.1. A Budapesti Corvinus Egyetemen elvégzett mérés hallgatóinak bemutatása

A tesztet 98 elsőéves, emberi erőforrás szakos hallgató töltötte ki, közülük 76 nő, 22 férfi volt. Ők egy jellemzően magas felvételi ponthatárokkal (400 feletti) rendelkező egyetem elsőéves hallgatói voltak. A vizsgált szakon a felvételi ponthatár meghaladja a 430 pontot, ami magasnak számít a magyar, maximum 500 pontos felvételi rendszerben. A hallgatóknak csak egy csekély hányada érettségizett emelt szinten matematikából, többen azonban jártak matematika fakultációra, tehát 11. és 12. osztályban heti öt órában tanulták a matematikát. A fakultációra járók megismerkedhettek a differenciál- és integrálszámítás alapjaival, számukra az első féléves egyetemi matematika tananyag nagyon sok ismerős elemet tartalmaz. A matematikát középszinten tanulók azonban nincsenek könnyű helyzetben az egyetemen, mert nagyon gyorsan nagyon sok új fogalommal kell megismerkedniük és azokat a szakmai tárgyakban biztonsággal használniuk.

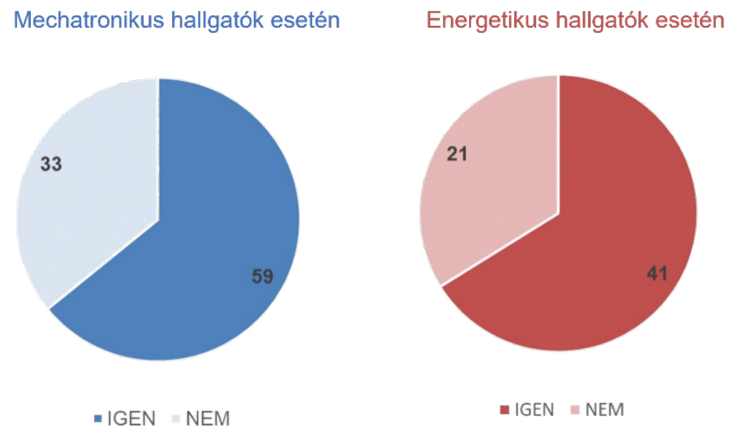
2.3.2. A BME GPK-n a van Hiele- tesztet kitöltők hallgatók bemutatása

A tesztet 130 elsőéves hallgató töltötte, akik a BME Gépészmérnöki Karának elsőéves mechatronikus és energetikus hallgatói. Az általunk vizsgált diákok Magyarország vezető műszaki intézményének két legmagasabb felvételi pontszámú szakára nyertek felvételt. 2020-ban mechatronika szakra 433 pont, energetikus szakra 349 pont volt a felvételi ponthatár [11]. A tesztet kitöltő mechatronikusok felvételi átlagpontszáma 459 pont, a szórás: 15, míg az energetikus hallgatók esetén 421,5 az átlagpontszám és 33 pont a szórás. A diákok nagy hányada érkezett olyan középiskolából, ahol a matematikát, vagy a természettudományos tárgyakat magasabb óraszámban tanulta 32 (51,6 %) fő az energetikusok közül, 47 (51,1 %) fő a mechatronikus hallgatók közül. Nekik a középiskolai tananyagukban szerepelt a differenciál- és integrálszámítás.



2. ábra: Hallgatók megoszlása emelt szintű oktatás terén

Matematikából emelt szintű érettségit a mechatronikusok közül 59 fő (64,1 %), míg az energetikusok közül 41 (66,1 %) hallgató tett.



3. ábra: Hallgatók megoszlása emelt szintű érettségi terén

3. EREDMÉNYEK

3.1. A Budapesti Corvinus Egyetemen elvégzett mérés eredményei

A 98 kitöltő eredményeinek megoszlása megengedő értékeléssel az *1. táblázatban* látható, míg a szigorú értékeléssel kapott eredményeket a 2. táblázat mutatja.

Van Hiele szint	Megengedő van Hiele szint	Szigorú van Hiele szint
5	17	3
4	15	3
3	25	29
2	7	14
1	0	11
0	0	1
not fit	34	34

1.Táblázat: van Hiele szintek a BCE kitöltőknél (not fit)

A két különböző számítással kapott eredmények átlaga és szórása a *2. táblázatban* található.

	Megengedő van Hiele	**Szigorú van Hiele**
Átlag	3,656	2,508
Szórás	0,996	1,059

2. táblázat: A van Hiele szintek adatai (not fit)

Az eredményekből az látszik, hogy a megengedő és szigorú kiértékeléssel is sok kitöltő a nem besorolható ("not fit") kategóriába került. Sok tanulmányban az ilyen eredményt elérő személyeket is beosztják valamelyik szintre. Ezt úgy teszik, hogy veszik a kitöltő által sikeresen teljesített van Hiele szintek azon legbővebb halmazát, ami alapján már besorolható. Például az 1, 2, 4 szinteket sikeresen teljesítő, alapesetben nem besorolható személy van Hiele szintje az előbb leírtak alapján 2, mivel a 4-es szintet elhagyva az 1, 2 szintek teljesítését kapjuk, ami már az eredeti definíció alapján 2-es van Hiele szintnek felel meg. Vannak olyan tanulmányok, amik ilyen esetben azt mondják, a kitöltő legalább 2. szinten van. Ezt a fajta csoportosítást mi is elvégeztük, így eredményeinket módunk lesz összehasonlítani ezen kutatások eredményeivel is. Ennek a beosztásnak az eredménye megengedő értékeléssel a *3. táblázatban*, szigorú értékeléssel az *4. táblázatban* látható.

Van Hiele szint	Megengedő van Hiele szint	Szigorú van Hiele szint
5	17	3
4	15	4
3	44	43
2	8	16
1	13	24
0	1	8

3. táblázat: van Hiele szintek a BCE kitöltőknél

A két különböző számítással kapott - minden kitöltőt besoroló - eredmények átlaga és szórása a 6. táblázatban található.

	Megengedő van Hiele	**Szigorú van Hiele**
Átlag	3,122	2,204
Szórás	1,246	1,192

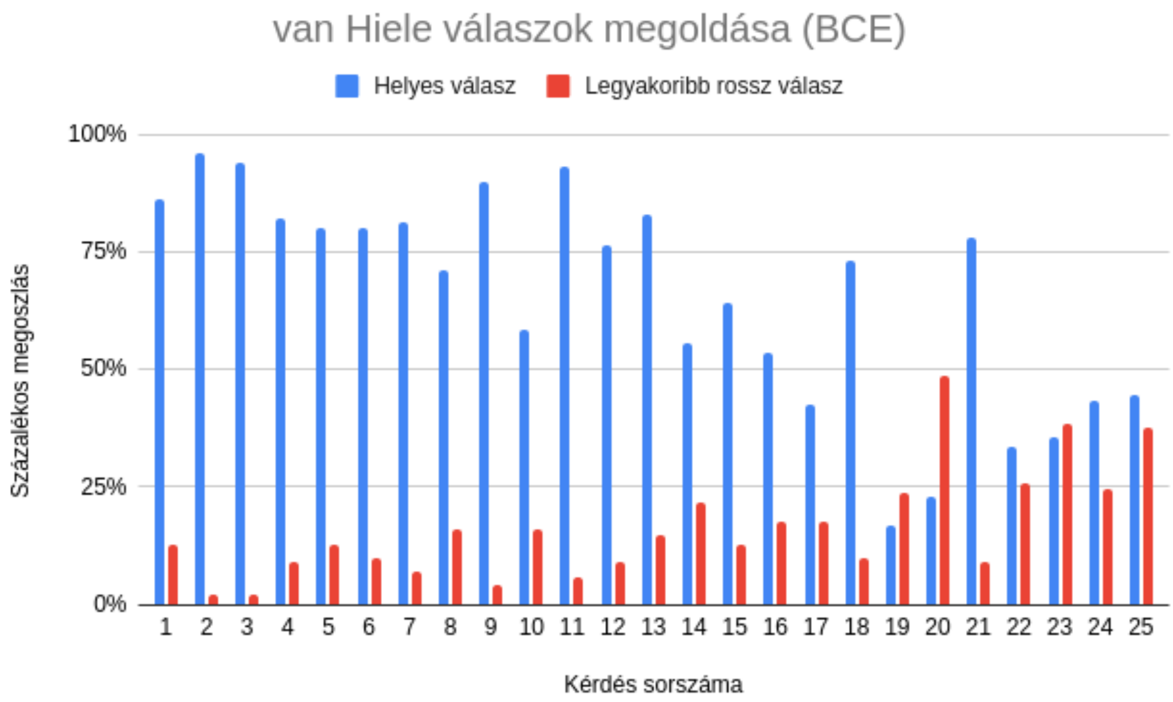
4. táblázat: A van Hiele szintek adatai (not fit)

A van Hiele-teszt eredményei mellett az EduBase rendszerének köszönhetően a kitöltés idejét is mérni tudjuk. Az egyes feladatokra adott válaszok százalékos megoszlását a *5.táblázat* tartalmazza.

Sorszám	A válasz	B válasz	C válasz	D válasz	E válasz	Nincs válasz	Átlagos idő
1	0,00%	**86,14%**	0,00%	12,87%	0,00%	0,99%	0:00:18
2	0,00%	0,99%	1,98%	**96,04%**	0,00%	0,99%	0:00:19
3	0,99%	0,99%	**94,06%**	0,99%	1,98%	0,99%	0:00:18
4	1,98%	**82,18%**	1,98%	8,91%	3,96%	0,99%	0:00:28
5	1,98%	3,96%	12,87%	0,00%	**80,20%**	0,99%	0:00:28
6	4,95%	**80,20%**	9,91%	4,95%	0,00%	0,99%	0:01:11
7	6,93%	0,99%	5,94%	3,96%	**81,19%**	0,99%	0:00:56
8	**71,29%**	4,95%	5,94%	0,99%	15,84%	0,99%	0:00:55
9	1,98%	0,99%	**90,10%**	1,98%	3,96%	0,99%	0:00:40
10	8,91%	3,96%	11,88%	**58,42%**	15,84%	0,99%	0:01:45
11	0,00%	0,00%	**93,07%**	0,00%	5,94%	0,99%	0:00:45
12	1,98%	**76,24%**	8,91%	4,95%	6,93%	0,99%	0:01:15
13	**83,17%**	0,00%	0,00%	0,99%	14,85%	0,99%	0:00:19
14	**55,45%**	12,87%	6,93%	1,98%	21,78%	0,99%	0:00:48
15	5,94%	**64,36%**	5,94%	9,90%	12,87%	0,99%	0:01:18
16	7,92%	6,93%	**53,47%**	17,82%	11,88%	1,98%	0:01:54
17	13,86%	10,89%	**42,57%**	17,82%	13,86%	0,99%	0:01:13
18	9,90%	8,91%	3,96%	**73,27%**	2,97%	0,99%	0:01:26
19	38,61%	23,76%	17,82%	**16,83%**	1,98%	0,99%	0:01:00

20	**22,77%**	1,98%	8,91%	48,51%	16,83%	0,99%	0:02:15
21	6,93%	**78,22%**	8,91%	1,98%	1,98%	1,98%	0:01:37
22	22,77%	11,88%	3,96%	25,74%	**33,66%**	1,98%	0:01:27
23	38,61%	8,91%	7,92%	**35,64%**	7,92%	0,99%	0:01:13
24	10,89%	24,75%	10,89%	**43,56%**	8,91%	0,99%	0:01:06
25	4,95%	37,62%	2,97%	**44,55%**	8,91%	0,99%	0:01:18

5. táblázat: a van Hiele-teszt eredményeinek feladatonkénti megoszlása és a feladatonkénti idők



4. ábra: A válaszok megoszlása BCE kitöltők esetén.

3.2. A BME GPK-n elvégzett mérés eredményei

Az alábbi táblázat az általunk vizsgált diákok megengedő és szigorú van Hiele szintjeit mutatja.

Van Hiele szint	Megengedő van Hiele szint	Szigorú van Hiele szint
5	67	27
4	15	12
3	6	26
2	0	1
1	0	2
0	0	3
not fit	42	59

6. táblázat: van Hiele szintek a BME kitöltőknél (not fit)

A két különböző számítással kapott eredmények átlaga és szórása a *7. táblázatban* található.

	Megengedő van Hiele	**Szigorú van Hiele**
Átlag	4,693	3,732
Szórás	0,594	1,298

7. táblázat: A van Hiele szintek adatai (not fit)

Amennyiben nem használjuk a not fit kategóriát, a megengedő és a szigorú van Hiele szintek az alábbi módon alakulnak.

Van Hiele szint	Megengedő van Hiele szint	Szigorú van Hiele szint
5	67	27
4	15	12
3	40	65

2	1	1
1	5	21
0	2	4

8. táblázat: van Hiele szintek a BME kitöltőknél

A két különböző számítással kapott eredmények átlaga és szórása a 9. táblázatban található.

	Megengedő Van Hiele	Szigorú Van Hiele
Átlag	4,015	3,085
Szórás	1,207	1,364

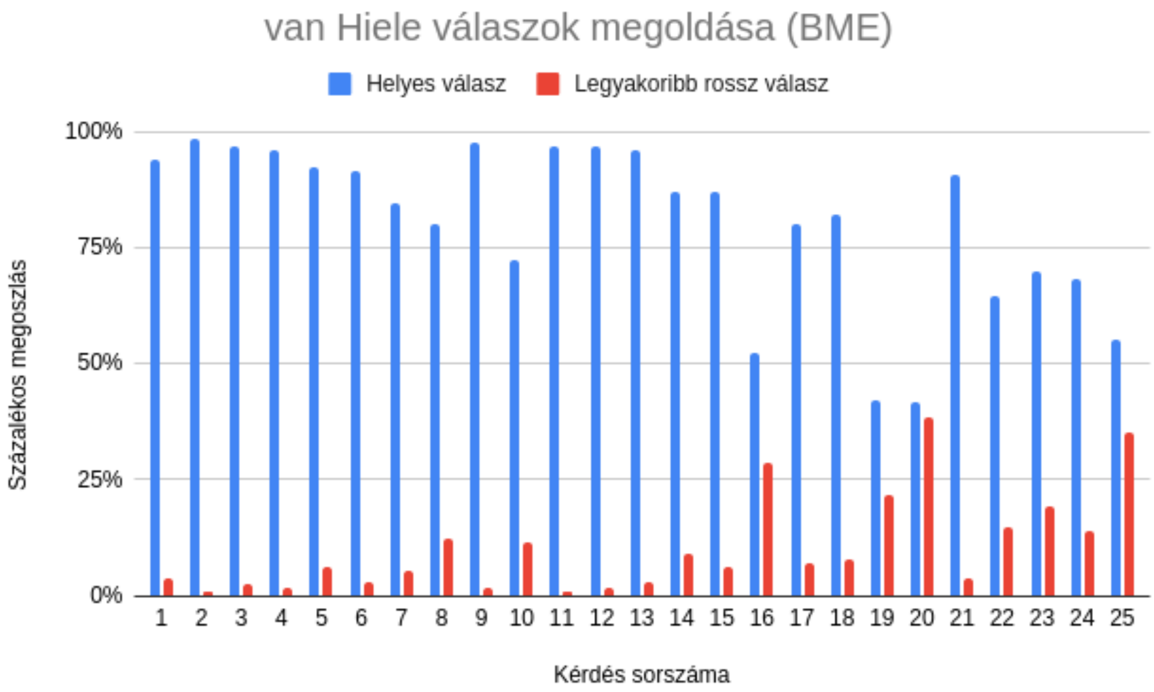
9. táblázat: A van Hiele szintek adatai

Megállapíthatjuk, hogy a not fit kategóriát is használva az 5% alatti azon hallgatók aránya, akik a szigorú van Hiele szintekkel számolva nem érték el a magyar középszintű érettségi által megkövetelt szintet. Itt nem szükségképpen hiányosságra kell gondolnunk. Az is előfordulhat, hogy mivel ennek a tesztnek nem volt tétje, néhányan komolytalanul végezték el a kitöltést. A megengedő van Hiele szinteket tekintve minden diák elérte legalább a harmadik szintet. Amennyiben a not fit kategóriát nem használjuk, megengedő van Hiele szintek esetén ez az arány közel 8 %, míg szigorú van Hiele szintek esetén már 18%. Megengedő van Hiele szinteket használva a kitöltők 64%-a legalább a negyedik van Hiele szinten van. A szigorú van Hiele szinteket használva ugyanez az érték 32 %. Az alábbi ábra a kitöltések egy gráfos megjelenítését szolgálja. A csúcsok a feladatok, amelyeket súlyozott színezett élek kötnek össze. Két csúcs közötti él súlyát a kitöltők száma adja. Jelentéssel bírnak az élek hosszai is. A gráf szélein lévő csúcsok azok a feladatok, amelyeket kevesen oldottak meg. A teszt kérdéseire adott válaszok százalékos megoszlása, illetve a kérdésekre fordított átlagos idő a 10. táblázatban látható.

Sorszám	A válasz	B válasz	C válasz	D válasz	E válasz	Nincs válasz	Átlagos idő
1	0,00%	**93,85%**	0,77%	3,85%	0,77%	0,77%	0:00:14
2	0,00%	0,00%	0,77%	**98,46%**	0,00%	0,77%	0:00:15
3	0,00%	0,00%	**96,92%**	0,00%	2,31%	0,77%	0:00:13
4	0,00%	**96,15%**	0,00%	1,54%	1,54%	0,77%	0:00:14
5	0,77%	0,00%	6,15%	0,00%	**92,31%**	0,77%	0:00:21
6	1,54%	**91,54%**	3,08%	3,08%	0,00%	0,77%	0:00:50
7	5,38%	1,54%	1,54%	3,08%	**84,62%**	3,85%	0:00:59
8	**80,00%**	0,77%	2,31%	3,85%	12,31%	0,77%	0:00:47
9	0,00%	0,00%	**97,69%**	0,00%	1,54%	0,77%	0:00:31
10	5,38%	3,85%	6,15%	**72,31%**	11,54%	0,77%	0:01:31
11	0,00%	0,77%	**96,92%**	0,77%	0,77%	0,77%	0:00:35
12	0,00%	**96,92%**	1,54%	0,00%	0,77%	0,77%	0:01:02
13	**96,15%**	0,00%	0,00%	0,00%	3,08%	0,77%	0:00:14
14	**86,92%**	3,08%	0,00%	0,00%	9,23%	0,77%	0:00:40
15	3,85%	**86,92%**	0,77%	1,54%	6,15%	0,77%	0:00:56
16	7,69%	6,15%	**52,31%**	28,46%	4,62%	0,77%	0:02:10
17	6,92%	6,15%	**80,00%**	3,08%	3,08%	0,77%	0:01:12
18	7,69%	5,38%	1,54%	**82,31%**	2,31%	0,77%	0:01:16
19	17,69%	15,38%	21,54%	**42,31%**	1,54%	1,54%	0:00:55
20	**41,54%**	2,31%	7,69%	38,46%	9,23%	0,77%	0:02:05
21	3,85%	**90,77%**	1,54%	0,00%	3,08%	0,77%	0:01:32
22	14,62%	3,08%	5,38%	11,54%	**64,62%**	0,77%	0:01:23
23	19,23%	1,54%	3,08%	**70,00%**	5,38%	0,77%	0:01:05
24	3,08%	13,85%	7,69%	**68,46%**	6,15%	0,77%	0:01:04
25	0,00%	35,38%	0,77%	**55,38%**	6,92%	1,54%	0:01:38

10. táblázat: a van Hiele-teszt eredményeinek feladatonkénti megoszlása és a feladatonkénti idők

Az alábbi oszlopdiagram a helyesen válaszolók arányát mutatja, minden helyes válasz mellett feltüntetve a leggyakoribb hibás válasz arányát is.



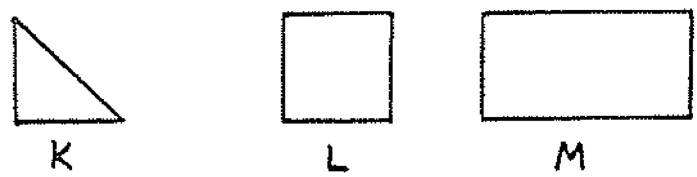
5. ábra: A válaszok megoszlása a BME kitöltők esetén

3.3. Összehasonlítás

3.3.1. A kérdések és a leggyakoribb hibák elemzése

1. Melyik négyzet?

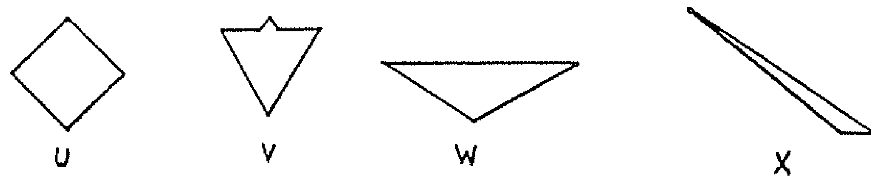
a. Csak K.
b. Csak L.
c. Csak M.
d. Csak L és M.
e. Mind az.



A D válasz helyesként való megjelenése lehet egy félreolvasás következménye, a négyzet és a négyszög szavak első szótagja ugyanis a magyar nyelvben megegyezik.

2. Melyik háromszög?

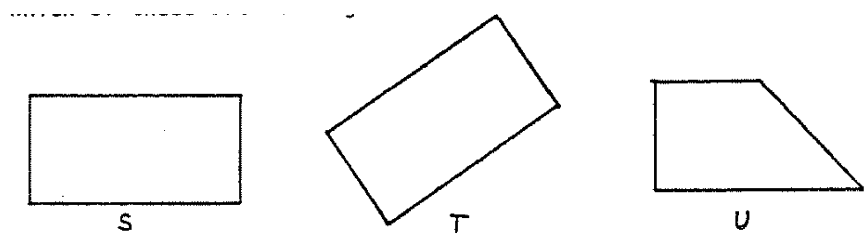
a. Egyik sem.
b. Csak V.
c. Csak W.
d. Csak W és X.
e. Csak V és W.



Ez a kérdés alapvetően nem okozott problémát.

3. Melyik téglalap?

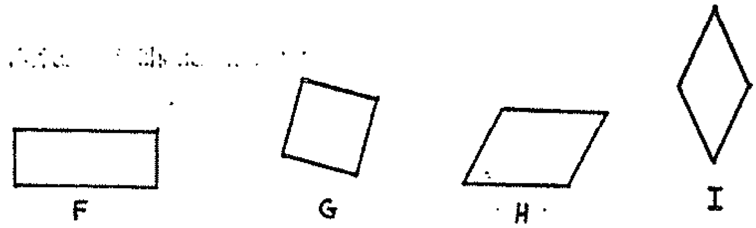
a. Csak S.
b. Csak T.
c. Csak S és T.
d. Csak S és U.
e. Mind az.



Ez a kérdés alapvetően nem okozott problémát.

4. Melyik négyzet?

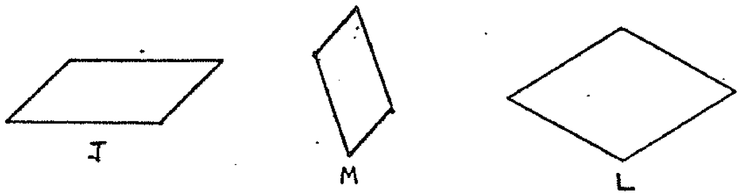
a. Egyik sem.
b. Csak G.
c. Csak F és G.
d. Csak G és I.
e. Mind az.



Melyik négyzet? Itt az E választ magyarázhatja az előbb említett félreolvasás.

5. Melyik paralelogramma?

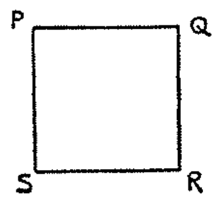
a. Csak J.
b. Csak L.
c. Csak J és M.
d. Egyik sem.
e. Mind az.



Ha csak kevesen is, de elkövették azt a hibát, hogy a rombuszt nem tekintették paralelogrammának.

6. PQRS egy négyzet (lásd ábra). Melyik állítás igaz rá?

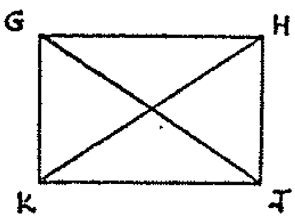
a. PR és RS ugyanolyan hosszúságú.
b. QS és PR merőlegesek egymásra.
c. PS és QR merőlegesek egymásra.
d. PS és QS ugyanolyan hosszúságú.
e. A Q-nál lévő szög nagyobb, mint az R-nél lévő szög.



Ez a kérdés alapvetően nem okozott problémát.

7. GHJK egy téglalap, GJ és HK az átlói (lásd ábra). Melyik állítás nem igaz rá a-d közül?

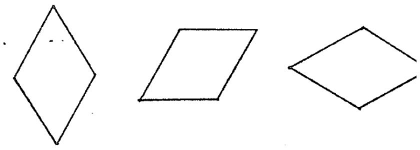
a. Négy derékszöge van.
b. Négy oldala van.
c. Átlói egyenlő hosszúságúak.
d. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak.
e. a-d közül mind igaz rá.



A hamis választ kell megjelölni, de néhányan bizonyára figyelmetlenségből megjelölték az első igazat.

8. Melyik állítás nem igaz egy tetszőleges rombuszra (lásd ábra) a-d közül?

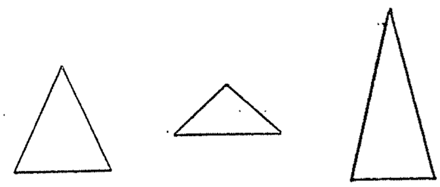
a. A két átlója egyenlő hosszúságú.
b. Mindkét átlója felezi a rombusz két-két szögét.
c. A két átlója merőleges egymásra.
d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
e. a-d közül mind igaz.



Az egyetlen hibás választ kell megjelölni. Többen az E választ jelölték meg, mely szerint minden állítás igaz. Nem vették észre az egyetlen hibását, ami az átlók hosszára vonatkozott.

9. Melyik állítás igaz egy egyenlő szárú háromszögre (lásd ábra) a-d közül?

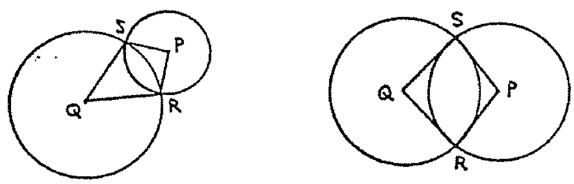
a. Mindhárom oldala egyenlő hosszúságú kell, hogy legyen.
b. Az egyik oldalának kétszer akkorának kell lennie, mint egy másiknak.
c. Legalább két szöge egyenlő nagyságú kell, hogy legyen.
d. Három szögének egyenlő nagyságúnak kell lennie.
e. a-d közül egyik sem igaz.



Ez a kérdés alapvetően nem okozott problémát.

10. Egy P és egy Q középpontú kör metszéspontjai R és S. Ezek a pontok meghatározzák a PQRS alakzatot. Két példát meg is adtunk (lásd ábra). a-d közül melyik állítás nem mindig igaz?

a. PQRS-nek van két egyenlő hosszúságú oldalpárja.
b. PQRS-nek legalább két szöge egyenlő nagyságú.
c. A PQ és RS egyenesek merőlegesek egymásra.



d. A P-nél és Q-nál lévő szögek egyenlő nagyságúak.
e. a-d közül mind igaz.

A körök metszéspontjai és középpontjai által meghatározott deltoidra vonatkozó állítások közül kellett kiválasztani, melyik az, amelyik nem mindig igaz. Ugyan az E válasz nem mindig igaz, de a feladat úgy szólt, hogy a választást az A, B, C és D válaszok közül kell megtenni.

11. Tekintsük a következő két állítást:

i. Az F alakzat téglalap.
ii. Az F alakzat háromszög.

Melyik igaz az alábbiak közül?

a. Ha i igaz, akkor ii is az.
b. Ha i hamis, akkor ii igaz.
c. i és ii egyszerre nem lehet igaz.
d. i és ii nem lehet egyszerre hamis.
e. a-d közül egyik sem igaz.

Ez a kérdés alapvetően nem okozott problémát.

12. Tekintsük a következő két állítást:

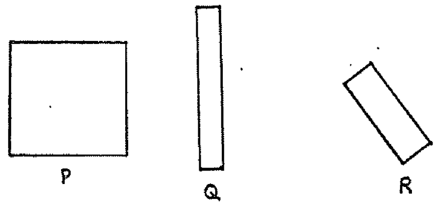
i. Az ABC háromszögnek van három egyenlő hosszúságú oldala.
ii. Az ABC háromszögben a B-nél, illetve a C-nél lévő szögek egyenlő nagyságúak.

Melyik igaz az alábbiak közül?

a. i és ii egyszerre nem lehet igaz.
b. Ha i igaz, akkor ii is az.
c. Ha ii igaz, akkor i is az.
d. Ha i hamis, akkor ii is hamis.
e. a-d közül egyik sem igaz.

Ez a kérdés alapvetően nem okozott problémát.

13. Az alábbiak közül melyik téglalap?



a. Mind az.
b. Csak Q.
c. Csak R.
d. Csak P és Q.
e. Csak Q és R.

A megválaszolásakor volt olyan hallgató, aki a négyzetet nem sorolta a téglalapok közé.

14. Melyik igaz?

a. A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes négyzetnek is.
b. A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes téglalapnak is.
c. A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
d. A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
e. a-d közül egyik sem igaz.

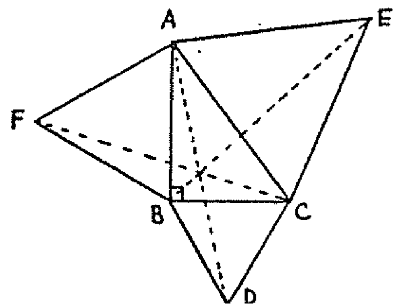
Ez a kérdés arra világít rá, helyesen értelmezik-e a diákok a részhalmaz fogalmát. Akik az E választ jelölték meg helyesnek, azok nem értik a "Minden négyzet téglalap, de nem minden téglalap négyzet." típusú kijelentéseket.

15. Az alábbiak közül melyik az, ami minden téglalapra igaz, de bizonyos paralelogrammákra nem?

a. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak.
b. Átlói egyenlő hosszúságúak.
c. Szemközti oldalai párhuzamosak.
d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
e. a-d közül egyik sem igaz.

Ez a kérdés alapvetően nem okozott problémát.

16. Az alábbi ábrán az ABC háromszög derékszögű (a B-nél lévő szöge a derékszög), míg a CBD, ACE és BAF háromszögek szabályosak:



Ezen információk alapján meg lehet mutatni, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át. Mit mondana számodra ez a bizonyítás?

a. Csak a fent megrajzolt háromszög esetén lehetünk biztosak abban, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
b. Néhány, de nem mindegyik derékszögű háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak á.
c. Bármelyik derékszögű háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
d. Bármelyik háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
e. Bármelyik szabályos háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.

A feladatban megfogalmazott állítás tetszőleges háromszögre igaz, valószínűleg többeket ez zavart meg, amikor a D választ jelölték meg. A feladat szövegéből azonban csak az következik, hogy az állítás bármely derékszögű háromszög esetén igaz.

17. Adott három tulajdonság egy alakzatról:

i. Vannak egyenlő hosszúságú átlói.
ii. Az alakzat négyzet.
iii. Az alakzat téglalap.

Melyik igaz?

a. i-ből következik ii, amiből pedig iii.
b. i-ből következik iii, amiből pedig ii.
c. ii-ből következik iii, amiből pedig i.
d. iii-ből következik i, amiből pedig ii.
e. iii-ből következik ii, amiből pedig i.

Itt egy gyakran tapasztalható hibát követtek el többen, nem értették, mi a feltétel, mi az állítás, mit jelent egy kijelentés megfordítása.

18. Van két állításunk:

i. Ha egy alakzat téglalap, akkor átlói felezik egymást.

ii. Ha egy alakzat átlói felezik egymást, akkor téglalap.

Melyik igaz?

a. i helyességének bizonyításához elég belátni, hogy ii igaz.
b. ii helyességének bizonyításához elég belátni, hogy i igaz.
c. ii helyességének bizonyításához elég találni egy téglalapot, melynek átlói felezik egymást.
d. ii hamisságának bizonyításához elég találni egy olyan alakzatot, amely nem téglalap és átlói felezik egymást.
e. a-d közül egyik sem igaz.

Itt egy gyakran tapasztalható hibát követtek el többen, nem értették, mi a feltétel, mi az állítás, mit jelent egy kijelentés megfordítása.

19. A geometriában:

a. minden fogalom definiálható, és minden igaz állításról bizonyítható helyességük.
b. minden fogalom definiálható, de bizonyos állításokról szükségszerű feltenni, hogy igazak.
c. bizonyos fogalmaknak definiálatlanoknak kell lenniük, de minden igaz állításról bizonyítható annak helyessége.
d. bizonyos fogalmaknak definiálatlanoknak kell lenniük, de szükségszerűen vannak olyan állítások, melyekről fel van téve, hogy igazak.
e. a-d közül egyik sem igaz.

Az axiomatikus felépítés lényeges tulajdonságaira kérdez rá. A feladat valóban nem könnyű, a sok hibás válasz azt mutatja, a diákok nem értették meg az axiomatikus tárgyalásmód lényegét. Ez talán nem olyan meglepő, hiszen ez a fajta szigorú felépítés nem jelenik meg erősen a középiskolai matematika oktatásban.

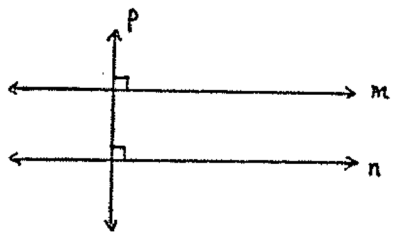
20. Tekintsük a következő síkban megfogalmazott állításokat:

i. Két, ugyanarra az egyenesre merőleges egyenes párhuzamos.

ii. Egy egyenes, amelyik merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, merőleges a másikára is.

iii. Ha egy egyenes minden pontja egyenlő távolságra van egy másik egyenestől, akkor a két egyenes párhuzamos.

Az alábbi ábrán az m és a p egyenesek merőlegesek egymásra, az n és a p egyenesek is merőlegesek egymásra.



A fenti állítások közül melyikből következhet, hogy m és n párhuzamosak?

a. Csak i-ből.
b. Csak ii-ből.
c. Csak iii-ből.
d. i-ből vagy ii-ből.
e. ii-ből vagy iii-ből.

Azoknak a diákoknak, akik a nemeuklideszi geometriákat ismerik könnyű, a többieknek azonban nehéz. A magyar közoktatásban nem kerülnek tárgyalásra a nemeuklideszi geometriák.

21. Egy F-geometriában (ami különbözik attól, amihez hozzá vagy szokva) pontosan négy pont van és hat egyenes. Minden egyenesnek pontosan két pontja van. Ha a pontok P, Q, R, S, akkor az egyenesek {P; Q}, {P; R}, {P; S}, {Q; R}, {Q; S}, {R, S}.

Ebben a geometriában a metszi és a párhuzamos a következőt jelenti: például {P; Q} és {P; R} metszik egymást, hiszen P közös pontjuk, míg például {P; Q} és {R; S} párhuzamosak, mivel nincs közös pontjuk.

Az alábbiak közül melyik helyes?

a. {P; R} és {Q; S} metszik egymást.
b. {P; R} és {Q; S} párhuzamosak.
c. {Q; R} és {R; S} párhuzamosak.
d. {P; S} és {Q; R} metszik egymást.
e. a-d közül egyik sem igaz.

Ez a kérdés alapvetően nem okozott problémát.

22. 1847-ben P. L. Wantzel általánosan bebizonyította, hogy csak körzővel és jelöletlen (azaz távolságmérésre alkalmatlan) vonalzóval nem lehet szöget harmadolni. Milyen következtetéseket tudsz ebből leszűrni?

a. Általánosan igaz, hogy csak körzővel és jelöletlen vonalzóval nem lehet szöget felezni.

b. Általánosan igaz, hogy csak körzővel és jelölt (azaz távolságmérésre alkalmas) vonalzóval nem lehet szöget harmadolni.

c. Általánosan igaz, hogy semmilyen rajzolási eljárással nem lehet szöget harmadolni.

d. Még lehetséges, hogy a jövőben valaki talál egy általános eljárást arra, hogy hogyan lehet csak körzővel és jelöletlen vonalzóval szöget harmadolni.

e. Soha senki nem fog tudni általános eljárást adni arra, hogy hogyan lehet csak körzővel és jelöletlen vonalzóval szöget harmadolni.

Talán a figyelmetlenség az oka annak, hogy többen az A választ jelölték nem figyeltek arra, hogy a mondat a szögfelezésről szó. A szögfelelző szerkesztése pedig általános iskolai tananyag és nem is szokott problémát okozni a diákoknak.

23. Létezik olyan J által felfedezett geometria, melyben érvényes az alábbi állítás:

A háromszögek belső szögeinek összege kisebb, mint 180°.

Melyik helyes az alábbiak közül?

a. J hibát követett el a háromszögek szögeinek mérése során.

b. J hibázott a logikai érvelése során.

c. J-nek rossz képzete volt a „helyes” fogalmát illetően.

d. J a szokásos geometria feltevéseitől különböző feltételekből indult ki.

e. a-d közül egyik sem igaz.

Könnyen válaszolnak azok, akik hallottak már a hiperbolikus geometriáról. Ez a középiskolában Magyarországon nem tananyag, bár sokszor említésre kerül a létezése, hiszen a magyar Bolyai Jánosnak, akinek keresztnevére a feladatbeli J is utal talán fontos eredményei voltak ezen geometria felfedezésében.

24. Két geometriakönyv különböző módon definiálja a téglalap szót. Melyik helyes az alábbiak közül?

a. A könyvek egyikében hiba van.

b. Az egyik definíció hibás, hiszen a téglalapnak nincs két definíciója.
c. Az egyik könyvbeli téglalapoknak más tulajdonságai kell, hogy legyenek, mint a másik könyvbelinek.
d. Az egyik könyvbeli téglalapoknak ugyanazon tulajdonságai vannak, mint a másik könyvbelinek.
e. Elképzelhető, hogy a különböző könyvekben a téglalapoknak más tulajdonságaik vannak.

A matematika egy sokkal általánosabb szemléletét feltételezi, mint amit a középiskolások zöme elsajátít.

25. Tegyük fel, hogy az i és ii állítás be van bizonyítva.

i. Ha p, akkor q.
ii. Ha s, akkor nem q.

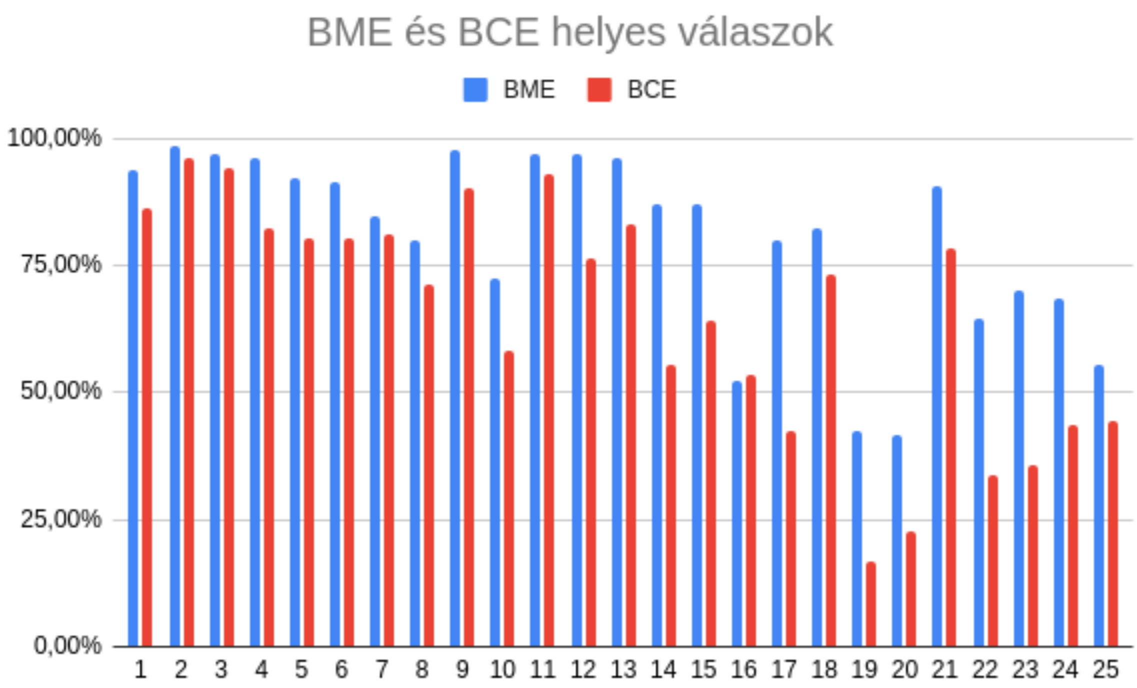
Melyik állítás következik i-ből és ii-ből?

a. Ha p, akkor s.
b. Ha nem p, akkor nem q.
c. Ha p vagy q, akkor s.
d. Ha s, akkor nem p.
e. Ha nem s, akkor p.

A leggyakoribb hibás válasz (B) egy típushibát szemléltet: tudjuk, hogy p implikálja q-t, ebből helytelenül többen arra következtettek, p negáltja implikálja q negáltját.

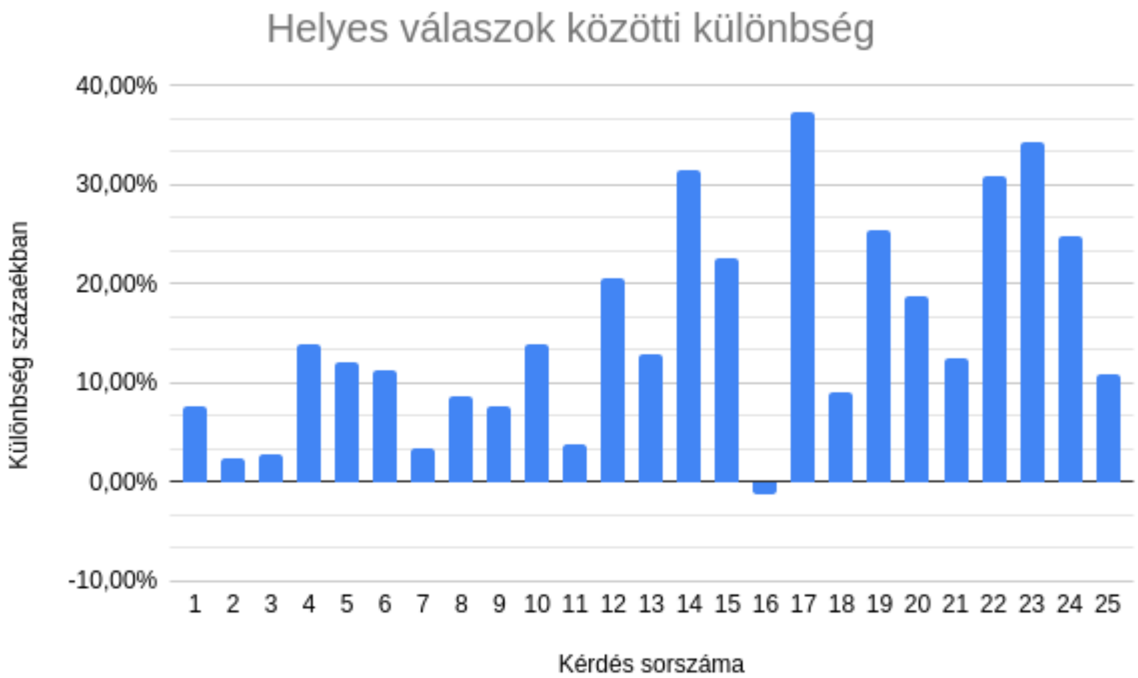
3.3.2. A helyes válaszok aránya

Az *6. ábrán* látszódik, hogy a két csoport esetében a helyes válaszok tendenciája azonos. A kérdések zömében a Corvinusos hallgatók kis mértékben alul teljesítettek a BME hallgatókhoz képest, viszont fontos megjegyezni, hogy a BME.re érkező hallgatók magasabb tlagpontszámmal érkeznek.



6. ábra: A BME és BCE kitöltők válaszainak megoszlása

A két csoport közötti helyes válaszok százalékos különbsége látható az *6. ábrán*. Látható, hogy a teszt vége fele növekszik főleg a különbség. Az 1-10. kérdésig a különbség 10% alatti. Azonban a harmadik van Hiele szinttől (11. kérdéstől) látható a különbség kialakulása. Egyedül a 16-os kérdés esetében teljesítettek ugyanúgy a két csoport hallgatói. Mindkettő esetben nem egy kifejezett kérdés volt megtévesztő, hanem maga az alapprobléma igényelt sok időt. Ez látszódik azon is, hogy a BME hallgatók ezzel töltötték a legtöbb időt, míg a BCE hallgatók a második legtöbbet.



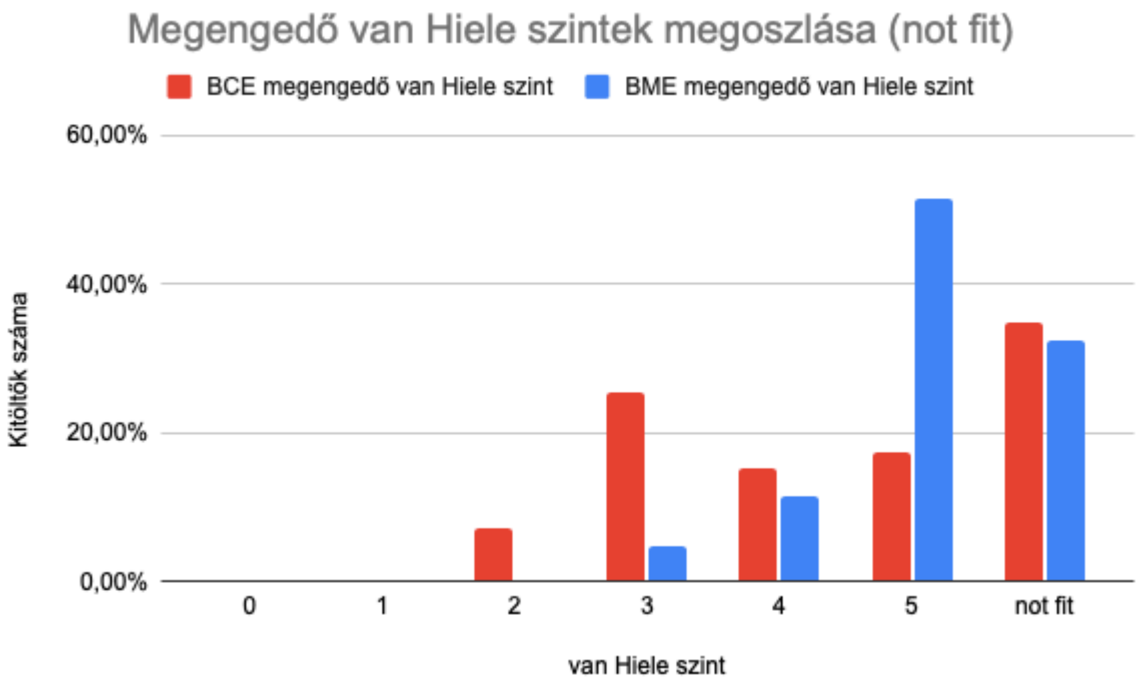
7. ábra: A két csoport közötti százalékos különbségek a helyes válasz tekintetében

3.3.3. A van Hiele szintek megoszlása

Most összehasonlítjuk a korábban besorolt van Hiele szinteket a megfelelő besorolási megoldásoknak megfelelően.

3.3.3.1. A not fit kategóriát használva

Az *8. ábra* mutatja a kitöltők megengedő van Hiele szintjének megoszlását amennyiben használjuk a not fit kategóriát.



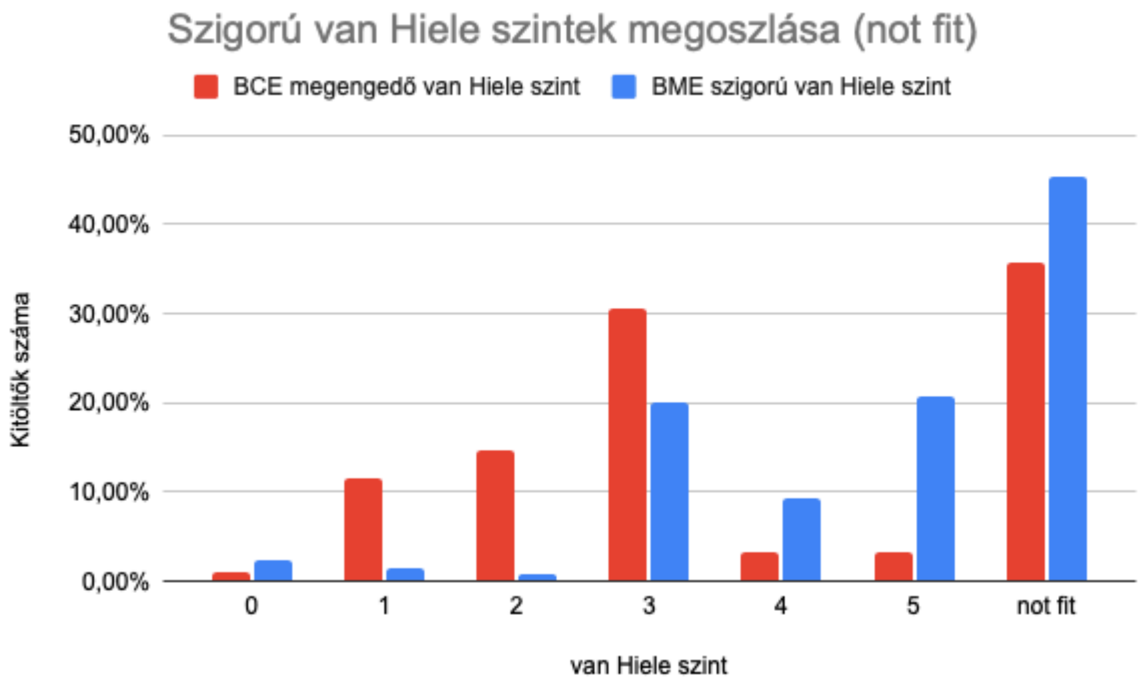
8. ábra: van Hiele szintek összehasonlítása

	BCE megengedő van Hiele (not fit)	BME megengedő van Hiele (not fit)
Átlag	3,656	4,693
Szórás	0,996	0,594

11. táblázat: A két csoport mutatóinak összehasonlítása

Ebben az esetben a mérnökhallgatók közül, akiket be tudtunk sorolni a legtöbben az 5. szintet érték el és 3-as szint alatt nem is található hallgató. A BCE résztvevők esetében viszont egy inhomogén társaságról beszélhetünk, mert bár vannak, akik 5-ös szinten vannak, viszont a legtöbben a 3-as szintre kerültek beosztásra.

Az *9. ábra* mutatja a kitöltők szigorú van Hiele szintjének megoszlását amennyiben használjuk a not fit kategóriát.



9. ábra: van Hiele szintek összehasonlítása

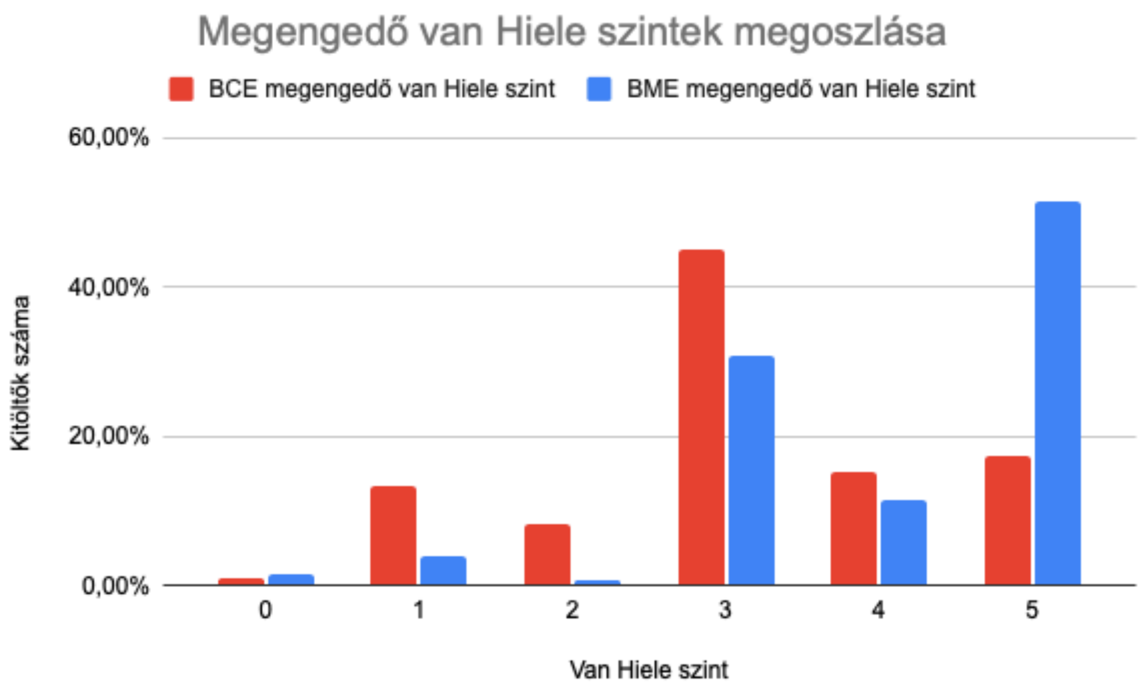
	BCE szigorú van Hiele (not fit)	BME szigorú van Hiele (not fit)
Átlag	2,508	3,732
Szórás	1,059	1,298

12. táblázat: A két csoport mutatóinak összehasonlítása

Ebben az esetben már láthatjuk az inhomogenitás megjelenését a mérnök hallgatók esetében is. Mindkét csoport esetében kevesen vannak a 3-as szint alatt. A mérnökhallgatók esetében nem feltétlen jelent gyengébb csoport képességet a pár 0 és 1 szint megjelenése hiszen, ekkor nagyobb volt a kitöltők száma. A BCE kitöltők esetében a szigorú és megengedő kiértékelés esetén is a megoszlás jellege azonos. Az adatok változásából (mivel a not fit kategória jelentősen megnövekedett és az 5-ös szint lecsökkent) arra következtethetünk, hogy a mérnökhallgatók esetében többen rendelkeznek az 5-ös szinthez szükséges gondolkodási készséggel, de ennek az alapjai néha esetlegesen nehezebben mennek, szóval mindenképp szükséges foglalkozni a 4-es szint fejlesztésével is.

3.3.3.2. *not fit kategória használata nélkül*

Az *10. ábra* mutatja a kitöltők megengedő van Hiele szintjének megoszlását amennyiben nem használjuk a not fit kategóriát.



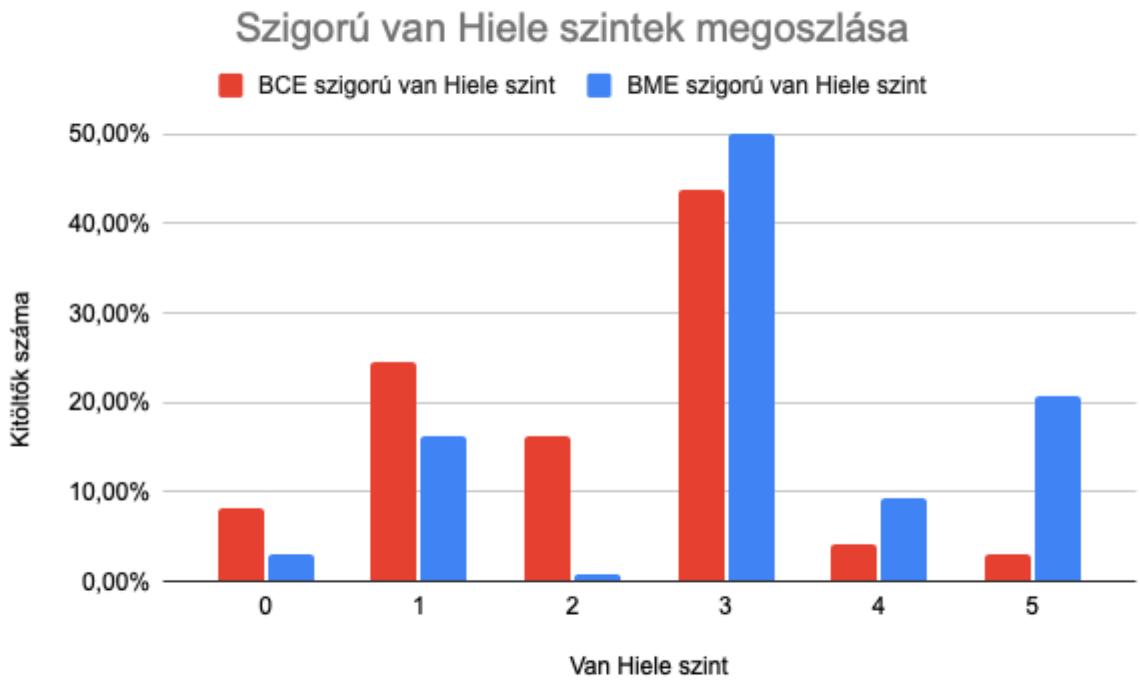
10. ábra: A van Hiele szintek összehasonlítása

	BCE megengedő van Hiele	BME megengedő van Hiele
Átlag	3,122	4,015
Szórás	1,246	1,207

13. táblázat: A két csoport mutatóinak összehasonlítása

Azt láthatjuk, hogyha mindenképp beosztjuk a legközelebbi kategóriába a kitöltőket, akkor a mérnökhallgatók esetén a hallgatóknak csak kis része nem éri el legalább a 3-as szintet és több mint a felük megüti az 5-ös szintet a van Hiele teszten, ha megengedő módon értékeljük ki. A BCE kitöltők esetében viszont a legtöbb hallgató a 3-as szinten van és nem elhanyagolható a 3-as szint alatti kitöltők megjelenése sem. ezzel szemben a 4-es és 5-ös szinten állók összege sem üti meg a 40%-ot.

Az *11. ábra mutatja* a kitöltők megengedő van Hiele szintjének megoszlását amennyiben nem használjuk a not fit kategóriát.



11. ábra: A van Hiele szintek összehasonlítása

	BCE szigorú van Hiele	BME szigorú van Hiele
Átlag	2,204	3,085
Szórás	1,192	1,364

14. táblázat: A két csoport mutatóinak összehasonlítása

Ha mindenkit besorolunk és szigorú kiértékelési módszert alkalmazunk, akkor látható, hogy a BCE kitöltők esetében a hallgatók nagyon kis része érte el legalább a 4-es szintet. A BME kitöltők esetében még a szigorúbb kiértékelés esetén is a hallgatók harmada elérte a 4-es szintet. A BCE kitöltők esetében a 3-as szintet a kitöltők fele megüti. A megengedő és a szigorú értékelési mód közötti különbség azt mutatja, hogy a BCE kitöltők esetében egyes hiányosságokokra különös figyelmet kell fordítani.

4. DISZKUSSZIÓ (BCE)

Magyarországon Szabó Csaba és munkatársai foglalkoztak legszélesebb körben a geometria megértés szintjeinek vizsgálatával a közoktatásban tanulók esetén ([9]). Megyeri Krisztina a Dr. Ámbédkar Iskola diákjainak gondolkodási szintjét elemezte. Herendiné Kónya Eszter a tanítójelöltek geometria gondolkodási szintjeit elemezte a van Hiele-teszt segítségével ([10]). Szabó és munkatársai egy még nem publikált kutatás keretei között az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika szakos hallgatóit is tesztelték, míg mi a gazdasági képzésben tanuló hallgatók geometriai gondolkodási szintjét igyekeztünk feltérképezni. Minden hazai vizsgálat megállapítja, hogy a diákok geometriai megértési szintje nem a NAT elvárásainak megfelelően alakul.

Egy Csehországban, középiskolásokon végzett kutatás [1] (Jiří Haviger, Iva Vojkůvková: The van Hiele geometry thinking levels: gender and school type differences) arra a következtetésre jutott, hogy az iskoláknak különös figyelmet kell szentelniük annak, hogy melyik Van Hiele-szint elérését tűzik ki célul a diákjaiknak. A tanulmány kitér arra, hogy a fiúk és lányok szintjeinek különbsége nem számottevő; illetve rámutat a különböző típusú (gazdasági szakközépiskola, technikai szakközépiskola, gimnázium) közti különbségekre. Legjobban a hagyományos gimnáziumok tanulói teljesítettek, mivel jellemzően a jobb képességű tanulók járnak ide. A technikai szakközépiskolába járók jobban teljesítettek, mint a gazdasági szakközépiskolába járók, mivel az ő tanulmányaikhoz magasabb geometriai ismeretek szükségesek.

A gazdasági képzési területen Magyarországon még nem végeztek méréseket és a nemzetközi szakirodalomban sem találtunk ilyen kutatást, így munkánk hiánypótló. A kapott eredmények jobbak a többi hazai mérésnél, viszont még a megengedő kiértékelési módszerrel sem éri el a hallgatók átlaga a negyedik szintet, annak ellenére, hogy a középiskolai tananyag erre a szintre készít/készítene fel, illetve, hogy az erre a szakra felvett hallgatók a felvételi pontok alapján a jobb képességűek közé sorolhatók. Bár sokan vannak köztük, akik elfogadható (négyes, ötös) szinten teljesítettek, a magas szórás azonban azt is jelenti, hogy sok gyenge eredmény is született. Az ilyen hallgatók számára gondot jelent a kalkulus tárgy teljesítése, legfeljebb csak megtanulják, de nem értik a matematikát használó tárgyak összefüggéseit, magasabb lemorzsolódás várható a teszten náluk jobban teljesítő társaikhoz képest.

A vizsgált hallgatók feltételezhetően az átlagnál jobbak, ezért az összes magyarországi hallgatóra vett átlag valószínűleg még alacsonyabb lenne. Ezen hipotézisünk alátámasztására érdemes eredményeinket a Students' non-development in high school geometry [9] kutatás 12. osztályos tanulókra vonatkozó eredményeivel összevetni. Szabó és munkatársai öt különböző magyarországi közoktatási intézményben (amelyek között művészeti gimnázium is volt) nézték a geometriai megértés szintjeit, minden iskolában több évfolyamon. A tesztek eredményét a miénkkel azonos módon értékelték ki (a nálunk megengedő náluk "weak", a nálunk szigorú náluk "strong" elnevezést kapta). A nem besorolható kategóriát a szerzők nem alakítottak ki, mindenkit besoroltak valamelyik szintre, ugyanúgy, ahogy mi is megtettük a kompatibilitás érdekében.

12. évfolyamon az általuk kapott eredmények a megengedő értékeléssel a 15. táblázatban, a szigorú értékeléssel a 16. táblázatban láthatók. Az A, B, C, D, E betűk az öt középiskolát jelölik, azok megnevezése nélkül.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**Összesen**
Átlag	2,47	2,75	2,89	1,00	1,17	2,04
Szórás	1,04	1,42	0,60	1,95	1,11	1,34
Résztvevők száma	23	12	9	15	12	71

15. táblázat: Megengedő van Hiele eredmények

	A	B	C	D	E	Összesen
Átlag	0,70	1,75	2,11	0,87	1,00	1,14
Szórás	1,02	1,36	1,05	1,19	1,04	1,21
Résztvevők száma	23	12	9	15	12	71

16. táblázat: Szigorú van Hiele eredmények

5. KONKLÚZIÓ

A magyar felsőoktatási rendszerben elenyésző kivétellel az érettségi vizsga egyben az egyetemi felvételit is jelenti. Emiatt középiskolában az érettségire való felkészítésen nagy hangsúly van. Ebből kifolyólag nem meglepő, ha a diákok gondolkodási szintje az érettségin elvártaknak megfelelően alakul.

A Budapesti Corvinus Egyetemen végzett felmérés eredményeként láthattuk, hogy bár a BCE résztvevői enyhén alul teljesítettek a BME résztvevőihez képest, de ugyanazon tendencia mentén változott a válaszok megoszlása. Látható volt, hogy a különbségek főleg a 3. szinttől kezdődően kezdenek erősödni.

Nagy felvételi pontszámú szakokról lévén szó az eredmények az eddig megjelent hazai és nemzetközi mérésnél jobbak. Mérések alapján különböző konklúzióra juthatunk az összehasonlítás alapján.

Az összehasonlításból látszódott, hogy a BCE-n elvégzett felmérés alapján a hallgatók többségének stabil alapja van a 3-as szinten, viszont a 4-es szint elérésére kell koncentrálni ahhoz, hogy az esetükben a szint alapú fejlődést elérhessük. Azonban sok hallgató van akik esetében a 3-as szint nincsen meg különösen is szigorú kiértékelés esetén. Ez arra utal, hogy esetlegesen, ha a szükséges szint meg is van, de az azt megelőző szintek tudásának stabilitása nem megfelelő. Ennek következtében magasabb absztrakciós szintet igénylő tananyag bevezetése nem javasolt, viszont különös figyelmet kell fordítani azon hallgatók felzárkóztatására akik komoly lemaradással rendelkeznek (0-2. van Hiele szint) és az oktatás célját alapvetően a 3-as szintről 4-es szintre történő fejlesztésre kell kialakítani.

A BME kitöltők között végzett felmérés esetében a hallgatók lemaradása kevésbé volt számottevő és egy jelentős hányaduk érte el az 5-ös van Hiele szintet. Azonban az ő esetükben is látszódott, hogy ez a tudásuk nem áll minden esetben stabil alapon, így lehetőségünk van magasabb absztrakciós képességet igénylő tananyag bevezetésére akár az alaptárgy keretén belül is, de figyelni kell mindeközben a meglévő alapok erősítésére is. Továbbá nem elhanyagolható része a kitöltőknek áll 3-as szinten is.

A fenti eredmények alapján lehetőséget biztosítottunk a hallgatóknak extra gyakorlási lehetőségeken és konzultációs alkalmakon keresztül a felzárkózásra és egy tehetséggondozó tárgyon keresztül pedig a jobb képességű hallgatók fejlődését segítettük, hogy az aktuális szintjükről tudjanak fejlődni és magasabb absztrakciós képességű tananyagot sajátíthassanak el.

Érdekes jövőbeli feladat, hogy a nem besorolható hallgatók esetén megállapítsuk, melyik szinthez is állnak közelebb. Ha kutatásban használjuk a van Hiele teszt eredményeit, kellően sok kitöltő esetén nem probléma, hogy az adatok egy részéről le kell mondanunk, ha azonban differenciált oktatás megvalósítása a cél, azaz "minden diák számít", fontos, hogy pontosan kategorizáljuk. A megfelelő metrika megtalálása az elkövetkező időszak feladata lesz számunkra.

6. BIBLIOGRÁFIA

[1] I. Braun, J. E. Schröder (2014): Cooperation schule hochschule, Baden-Württembergs: Hochschulen Baden-Württembergs.

[2] Bruner, Jerome Seymour (1966): Toward a Theory of Instruction, Mass.: Belkapp Press. Cambridge

[3] Bruner, Jerome Seymour (1986): Actual Minds, Possible Worlds, MA: Harvard University Press. Cambridge

[4] Bruner, Jerome Seymour (1990): Acts of Meaning. MA: Harvard University Press. Cambridge

[5] Mayberry, J. (1983): The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers, Journal for Research in Mathematics Education, 14, 58–69.

[6] Fuys, D., Gedde, D. and Tischler, R. (1988): The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents, Journal for Research in Mathematics Education Monograph No. 3.

[7] Burger, W. F. and Shaughnessy, J. M. (1986): Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education, 17, 31–48.

[8] Usiskin, Z. (1982): Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry, Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project Department of Education, University of Chicago, US.

[9] Szabó, Cs., Bereczky-Zámbó, Cs., Muzsnay, A. Szeibert, J. (2020), Students' non-development in high school geometry, Annales Mathematicae et Informaticae, pp. 309-319.

[10] Kónya, E. (2003), A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei, Iskolakultúra, pp. 51-61.

[11] www.felvi.hu