Klasszikus és kvantum átképezhetőségi kérdések

Kolok István Baksa

Fizika MSc

Tudományos Diákköri Konferencia
dolgozat

Témavezető:
dr. Tasnádi Tamás
egyetemi adjunktus
BME Matematika Intézet, Matematikai Analízis Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2021. október 28.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dolgozatban vizsgált téma matematikai hátterének gyökerei a XX. század elejére nyúlnak vissza, amikor a közgazdaságtanban, szociológiában bizonyos javak eloszlásának egyenetlenségének jellemzésére bevezették a majorizáció és az ehhez szorosan kapcsolódó Lorenz-görbe fogalmát [4, 5, 11]. Az 1990-es években szociológiai tárgyú folyóiratokban megjelent a majorizáció többváltozós általánosítása és a Lorenz-zonotóp fogalma is [8].

Az ezredfordulótól a kvantum-információelméletben különböző átképezhetőségi kérdésekben újra fontossá vált a klasszikus majorizáció, illetve annak kvantumos általánosítása [2, 13]. Itt nem javak eloszlását, hanem tipikusan (klasszikus vagy kvantum) állapotok viszonyát jellemzi a majorizáció. Ma már a különböző átképezhetőségi kérdéseket egy közös keretbe foglalja az erőforráselméleti szemlélet. A különböző erőforrások összehasonlítása egy részben rendezést határoz meg (tipikusan valamilyen állapottéren), és sokszor ez a rendezés az állapotok közti majorizációval írható le [3, 12].

A legelső átképezhetőségi vizsgálatokban az egyváltozós majorizáció kapott szerepet, mely ekvivalens állapotok egységtartó átképezhetőségével [5]. Később, a kvantum-termodinamikában kialakult a termális majorizáció fogalma, ahol az átképezés a teljesen kevert állapot helyett egy Gibbs-állapotot őriz meg [7]. Ennél egy még általánosabb fogalom a d-majorizáció, ami adott állapotpárok egymásba képezhetőségével ekvivalens [14].

A d-majorizációt leíró általánosított Lorenz-görbe természetes általánosítása a Lorenz-zonotóp.

A munka fő célkitűzése a Lorenz-zonotóp fogalmának bevezetése erőforráselméleti vizsgálatokba. A zonotóp egyfelől általánosítása a Lorenz-görbének többváltozós esetre, másfelől szemléletes, geometriai képet ad az átképezhetőségi vizsgálatokhoz.

A dolgozat 1. fejezetében bevezetjük a majorizáció fogalmát, illetve annak kétváltozós általánosítását, kimondjuk az ezekre vonatkozó korábbi tételeket. A 2. fejezetben bevezetjük a Lorenz-zonotóp fogalmát, melynek segítségével szükséges feltételt adunk az általános n állapot átképezhetőségre (2.6. és 2.13. tétel), amely egy speciális esetben elégséges is (2.8. tétel). A 3. fejezetben a Koshevoy által bevezetett kiegészített Lorenz-zonotóp segítségével bemutatjuk a Koshevoy-tétel bizonyítását [8]. Ezután kimondjuk és bebizonyítjuk a Koshevoy-tétel kvantum általánosítását (3.13. tétel), amely a dolgozat fő eredménye a kvantumátképezhetőség terén. A 4. fejezetben a Koshevoy-tétel egy másik irányú általánosítását mutatjuk be klasszikus esetben (4.6. tétel). Elhagyjuk azt a megszorítást, hogy a transzformáció során a teljesen kevert állapot invariánsan marad. A fejezet végén a zonotópok geometriai képéből kiindulva kapcsolatot adunk különböző iránymenti átképezhetőségi kérdések és a zonotópok tartalmazása között (4.9. tétel).

A dolgozatban szereplő tételek közül a 3.13., a 4.6. és a 4.9. tétel saját eredmény. Ezek mellett a 2.6. és a 2.13. tétel is saját, de egyszerű megfontolásokkal látható eredmény.

1. Egy- és kétváltozós majorizáció

Ebben a fejezetben bevezetjük a dolgozatban használt alapjelöléseket és fogalmakat. Ezután rátérünk az egy- és kétváltozós majorizáció tárgyalására. Kimondjuk a legfontosabb tételeket az átképezhetőségi kérdések és az egy- és kétváltozós majorizáció kapcsolatáról.

1.1. Matematikai alapfogalmak és jelölések

Általánosan használt alapjelölések:

$\mathrm{B}(\mathcal{H})$: a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren ható korlátos operátorok halmaza,

$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$,

$[n]_0 := \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,

$\mathbf{P}^T, (\mathbf{v}^T)$: a $\mathbf{P}$ mátrix ($\mathbf{v}$ vektor) transzponáltja,

$\mathbf{p}^{\downarrow}$: a $\mathbf{p}$ vektor nemnövekvő rendezése,

$\mathbb{K}^{\mathcal{X}} := \{f \mid f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}\}$,

$\mathbf{0}_{\mathcal{X}} := (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$,

$\mathbf{1}_{\mathcal{X}} := (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$,

$\mathbf{u}_{\mathcal{X}} := (1/d, \ldots, 1/d)^T \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$, ahol $d = |\mathcal{X}|$,

$0_{\mathcal{H}} \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren ható nulloperátor,

$I_{\mathcal{H}} \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren ható identitás.

A dolgozat során klasszikusan és kvantumosan is véges dimenziós rendszereket vizsgálunk. Klasszikusan az állapotok valószínűségi vektorok egy véges ábécén ($\mathcal{X}$). A valószínűségi vektorok halmazának jelölése $\mathcal{X}$-en:

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}) := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} \;\middle|\; \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x = 1,\ \forall x \in \mathcal{X} : p_x \geq 0 \right\}, \tag{1}$$

ahol $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ az $\mathcal{X}$-en értelmezett valós értékű függvények halmaza. A későbbiekben állapot n-esek $(\mathbf{p}^{(i)})_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ átképezhetőségéről lesz szó, ezeket az állapotokat mátrix alakba rendezhetjük:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{pmatrix} \\ \mathbf{p}^{(1)} \\ \\ \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} \\ \mathbf{p}^{(n)} \\ \\ \end{pmatrix} \right]. \tag{2}$$

Bevezethető továbbá a kiegészített mátrix jelölés egy tetszőleges $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ állapotra:

$$\mathbf{P}^{\mathbf{w}} = \left[\begin{pmatrix} \\ \mathbf{p}^{(1)} \\ \\ \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \\ \mathbf{p}^{(n)} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{w} \\ \\ \end{pmatrix} \right], \tag{3}$$

valamint ennek egy speciális esete:

$$\mathbf{P}^{\mathbf{u}} = \left[\begin{pmatrix} \\ \mathbf{p}^{(1)} \\ \\ \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \\ \mathbf{p}^{(n)} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{u}_{\mathcal{X}} \\ \\ \end{pmatrix} \right], \text{ ahol } \quad \mathbf{u}_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1/d \\ \vdots \\ 1/d \end{pmatrix}, \; d = |\mathcal{X}|. \tag{4}$$

Klasszikus esetben a megengedett állapotfejlődéseket, illetve csatornákat a sztochasztikus mátrixokkal tudjuk leírni.

1.1. Definíció. *Adott* $\mathbf{W} : \mathbb{R}^{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$ *mátrix* ***sztochasztikus****, ha:*

$$\forall x \in \mathcal{X} : \sum_{y \in \mathcal{Y}} W_{yx} = 1 \;\; \textit{és} \;\; \forall y \in \mathcal{Y}, \forall x \in \mathcal{X} : \; W_{yx} \geq 0.$$

A sztochasztikus mátrixok halmaza $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ között: $\mathrm{M}^{\text{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$

A majorizáció esetében a bisztochasztikus mátrixok lesznek fontosak.

1.2. Definíció. *Adott* $\mathbf{B} : \mathbb{R}^{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$ *mátrix* ***bisztochasztikus****, ha:*

$$\forall y \in \mathcal{Y} : \sum_{x \in \mathcal{X}} W_{yx} = 1, \, \forall x \in \mathcal{X} : \sum_{y \in \mathcal{Y}} W_{yx} = 1 \;\; \textit{és} \;\; \forall y \in \mathcal{Y}, \forall x \in \mathcal{X} : \; W_{yx} \geq 0.$$

A bisztochasztikus mátrixok halmaza $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ között: $\mathrm{M}^{\text{bistoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$.

1.3. Megjegyzés. *A bisztochasztikus mátrixok az egyenletes eloszlást az egyenletes eloszlásba viszik, azaz ha $\mathbf{B} \in \mathrm{M}^{\text{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$, akkor*

$$\mathbf{B} \in \mathrm{M}^{\text{bistoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \iff \mathbf{B}\mathbf{u}_{\mathcal{X}} = \mathbf{u}_{\mathcal{Y}},$$

ahol $\mathbf{u}_{\mathcal{X}}$ ($\mathbf{u}_{\mathcal{Y}}$) az egyenetes eloszlás $\mathcal{X}$-en ($\mathcal{Y}$-on).

Kvantum esetben az állapotok egy véges dimenziós Hilbert-tér ($\mathcal{H}$) sűrűség operátorai:

$$\mathrm{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathrm{B}(\mathcal{H}) \mid \rho \geq 0,\, \operatorname{Tr} \rho = 1\}. \tag{5}$$

Hasonlóan a klasszikus esethez, kvantumosan is állapot n-esek $(\rho^{(i)})_{i=1}^{n} \subseteq \mathrm{S}(\mathcal{H})$ vizsgálata a cél, melyek egy állapotokból álló vektorba rendezhetők:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho^{(1)} \\ \vdots \\ \rho^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Itt is bevezethető a kiegészített vektor, de kvantum esetben csak a maximálisan kevert állapottal vett kiegészítés az érdekes:

$$\overline{\boldsymbol{\rho}} = \begin{pmatrix} \rho^{(1)} \\ \vdots \\ \rho^{(n)} \\ I/d \end{pmatrix}. \tag{7}$$

A kvantummechanikában a legáltalánosabb állapotfejlődéseket a teljesen pozitív, nyomtartó leképezések adják.

1.4. Definíció. *A $\Phi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{K})$ lineáris leképezés* ***kvantum-állapotfejlődés/ kvantumoperáció/ kvantumcsatorna****, ha:*

(i) teljesen pozitív (completely positive, CP), azaz tetszőleges $\tilde{\mathcal{H}}$ Hilbert-tér esetén $id_{\tilde{\mathcal{H}}} \otimes \Phi$ pozitivitás tartó: $\forall A \in \mathrm{B}(\mathcal{H} \otimes \tilde{\mathcal{H}}),\, A \geq 0 :\, (id_{\tilde{\mathcal{H}}} \otimes \Phi)(A) \geq 0$,

(ii) nyomtartó (trace preserving, TP): $\operatorname{Tr} \Phi(A) = \operatorname{Tr} A$.

Jelölés: $\Phi \in CPTP(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Speciálisan az egységtartó kvantumcsatornákat fogjuk részletesen vizsgálni.

1.5. Definíció. *A $\Phi : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{K})$ lineáris leképezés* ***egységtartó****, ha:*

$$\Phi(I_{\mathcal{H}}) = I_{\mathcal{K}}.$$

A klasszikus elmélet könnyen beágyazható a kvantumformalizmusba. A klasszikus $\mathcal{X}$ rendszernek megfelelő Hilbert-térnek a $\mathbb{C}^{\mathcal{X}}$ választható. A klasszikus állapotoknak a kanonikus bázisban diagonális operátorok felelnek meg, a klasszikus csatornáknak azok a kvantumcsatornák, melyek diagonális operátort diagonálisba visznek. Könnyen látható, hogy tetszőleges $\mathbf{W} \in \mathrm{M}^{\mathrm{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ sztochasztikus mátrixhoz létezik egy $\Phi \in CPTP(\mathbb{C}^{\mathcal{X}}, \mathbb{C}^{\mathcal{Y}})$ kvantumcsatorna amely a kanonikus bázisban a diagonális mátrixokat a sztochasztikus mátrix szerint transzformálja diagonális mátrixba, azaz:

$$W_{yx} = \langle e_y, \Phi(|e_x\rangle\langle e_x|)e_y\rangle. \tag{8}$$

Valamint minden Φ CPTP leképezés, amely a digaonális mátrixot diagonálisba visz, meghatároz egy $\mathbf{W}$ sztochasztikus mátrixot a (8) formula szerint. Továbbá $\mathbf{W}$ akkor és csak akkor bisztochasztikus, ha Φ egységtartó.

1.2. Egyváltozós majorizáció

A XX. század elején több tanulmány is vizsgálta a különböző gazdasági javak egyenetlenségét, közgazdasági és szociológiai vonatkozásban. Az egyenetlenségek jellemzésére vezette be M. O. Lorenz a Lorenz-görbe fogalmát [11].

1.6. Definíció. *Legyen $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ valószínűségi vektor. Ekkor a $\mathbf{p}$ eloszláshoz tartozó $\mathcal{L}(\mathbf{p})$* ***Lorenz-görbe*** *a $(k/d, \sum_{i=1}^{k} p_i^{\downarrow})$, $k \in [n]_0$ pontokat összekötő töröttvonal, ahol $\mathbf{p}^{\downarrow}$ a $\mathbf{p}$ vektor nemnövekvő rendezése és $[n]_0 = \{0, 1, \ldots, d\}$.*

A definícióból könnyen látható, hogy a Lorenz-görbe mindig konkáv és az egységnégyzetben az átló fölött halad. H. Dalton különböző átképezhetőségi problémákat vizsgált hasonló kontextusban (Robin Hood transzformációk [4]). Lorenz és Dalton az eloszlások egyenletlenségének vizsgálata során, egymástól függetlenül, azonos egyenlőtlenségekkel definiált relációra jutottak. Ez a reláció a majorizáció, melynek terminológiáját G. H. Hardy, J. E. Littlewood és G. Pólya vezette be átképezhetőségi kérdések vizsgálata során [5].

1.7. Definíció. *Legyen* $\mathbf{p}$ *és* $\mathbf{q}$ *valószínűségi vektorok* $\mathcal{X}$*-en. Ekkor* $\mathbf{p}$ ***majorálja*** $\mathbf{q}$*-t, ha:*

$$\forall k \in [n] : \sum_{i=1}^{k} q_i^{\downarrow} \leq \sum_{i=1}^{k} p_i^{\downarrow},$$

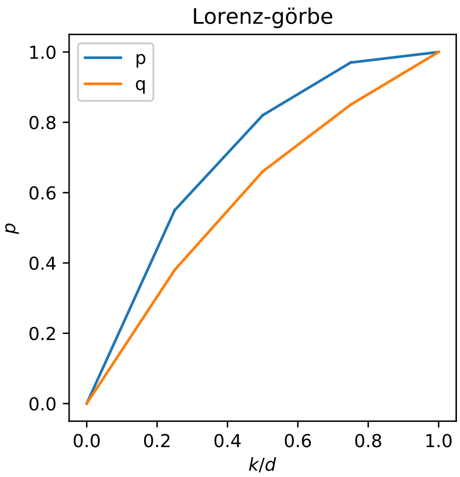
ahol $\mathbf{p}^{\downarrow}$ $(\mathbf{q}^{\downarrow})$ *a* $\mathbf{p}$ $(\mathbf{q})$ *vektor nem növekvő rendezése. Jelölése:* $\mathbf{q} \prec \mathbf{p}$.

1.8. Megjegyzés. *A majorizációs reláció általánosítható különböző halmazokon értelmezett valószínűségi vektorok között is. Ebben az esetben, ha a vektorok dimenziója nem egyezik meg, akkor a kisebb dimenziós vektort nullákkal kell kiegészíteni, hogy azonos dimenziósak legyenek. Sőt tetszőleges vektorok között is definiálható, ha a két vektor komponenseinek összege egyenlő.*

1.9. Megjegyzés. *A majorizációs relációt, a definícióból következően, a Lorenz-görbe karakterizálja:*

$$\mathbf{q} \prec \mathbf{p} \iff \mathcal{L}(\mathbf{q}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{p}).$$

1.10. Példa. *Legyen* $\mathbf{p} = (0.03, 0.55, 0.15, 0.27)^T$ *és* $\mathbf{q} = (0.13, 0.4, 0.19, 0.28)^T$. *Ekkor az eloszlásokhoz tartozó Lorenz-görbékből (1. ábra) leolvasható, hogy* $\mathbf{q} \prec \mathbf{p}$.



1. ábra. A $\mathbf{p}$ vektorhoz tartozó Lorenz-görbe dominálja a $\mathbf{q}$ vektorhoz tartozó Lorenz-görbét.

A majorizáció segítségével Hardy, Littlewood és Pólya karakterizálni tudta a bisztochasztikus átképezhetőséget.

1.11. Tétel. *(Hardy–Littlewood–Pólya, [5]) Legyen* $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *és* $\mathbf{q} \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ *valószínűségi eloszlások. Ekkor*

$$\exists \mathbf{B} \in \mathrm{M}^{\text{bistoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} : \mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{p} \iff \mathbf{q} \prec \mathbf{p}.$$

1.12. Megjegyzés. *A definícióhoz hasonlóan, az 1.11. tétel is általánosítható vektorokra, ahol a vektorok komponenseinek összege egyenlő.*

Az 1.11. tétel könnyen általánosítható kvantumátképezhetőségre is. Ebben az esetben a bisztochasztikus átképezhetőség kvantumosan egységtartó átképezhetőségnek felel meg. Az egységtartó egyállapot átképezhetőség mindig visszavezethető a klasszikus esetre hiszen az unitérrel való konjugálás egységtartó CPTP leképezés. Azaz a kiindulási és cél sűrűségoperátorokat diagonalizálni tudjuk egy-egy bázisban egységtartó kvantumcsatornákkal. A digonális operátorok átképezhetősége pedig ekvivalens a diagonálisban szereplő vektorok átképezhetőségével. Ez motiválja a majorizáció általánosítását kvantumállapotokra.

1.13. Definíció. *Legyen ρ és σ önadjungált operátor $\mathcal{H}$-n és $\mathcal{K}$-n. Ekkor ρ* ***majorálja*** *σ-t, ha:*

$$\mathbf{s}(\rho) \prec \mathbf{s}(\sigma),$$

ahol $\mathbf{s}(\rho)$ $(\mathbf{s}(\sigma))$ a ρ (σ) sajátértékeiből álló vektor. Jelölése: $\sigma \prec \rho$.

Ezzel a definícióval könnyen kimondható az 1.11. tétel kvantum verziója.

1.14. Tétel. *Legyen ρ és σ kvantumállapot $\mathcal{H}$-n és $\mathcal{K}$-n. Ekkor*

$$\exists \Phi \in CPTP(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \ \textit{egységtartó}: \ \sigma = \Phi(\rho) \iff \sigma \prec \rho.$$

1.15. Megjegyzés. *A klasszikus esethez hasonlóan a kvantum-majorizáció is általánosítható. Kimondható önadjungált operátorok között, teljesen analóg módon. Továbbá az 1.14. tétel is teljesül önadjungált operátorokra.*

A majorizáció már korábban is megjelent a kvantum-információelméletben. M. A. Nielsen a lokális operáció, klasszikus kommunikáció erőforráselméletében használta a majorizációt [13]. Ebben az elrendezésben adott egy két részrendszerből álló összetett rendszer. A kérdés. hogy egy adott állapot milyen más állapotokba transzformálható lokális operációk (szorzat alakú kvantumcsatornák) és klasszikus kommunnikáció segítségével.

1.16. Tétel. *(Nielsen [13]) Adott $|\psi\rangle\langle\psi|$ és $|\phi\rangle\langle\phi|$ tiszta állapot $\mathcal{H}_\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{B}$-n. Ekkor*

$$|\psi\rangle\langle\psi| \xrightarrow{LOCC} |\phi\rangle\langle\phi| \iff \boldsymbol{\lambda}(\phi) \prec \boldsymbol{\lambda}(\psi),$$

ahol $\boldsymbol{\lambda}(\psi)$ ($\boldsymbol{\lambda}(\phi)$) a ψ (ϕ) vektor Schmidt-együtthatóinak négyzetéből álló vektor.

1.3. Kétváltozós majorizáció

A bisztochasztikus átképezhetőség felfogható sztochasztikus kétállapot átképezhetőségként is, ha az egyik kiindulási- és célállapot is az egyenletes eloszlás. Így a bisztochasztikus egyállapot átképezhetőség általánosítása a sztochasztikus kétállapot átképezhetőség. A kétállapot átképezhetőséget a majorizációs reláció általánosítása karakterizálja, melyhez be kell vezetni az általánosított Lorenz-görbe fogalmát.

1.17. Definíció. *Adott $\mathbf{p}^{(1)}$ és $\mathbf{p}^{(2)}$ valószínűségi vektor $\mathcal{X}$-en. Legyen π egy permuáció $\mathcal{X}$-en, melyre:*

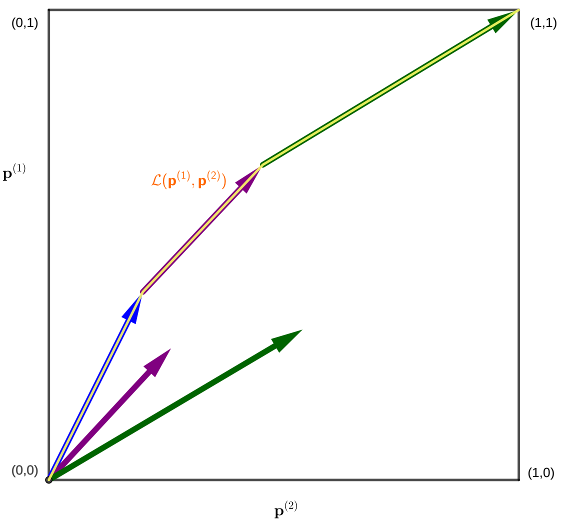
$$\frac{p^{(1)}_{\pi(x_1)}}{p^{(2)}_{\pi(x_1)}} \geq \frac{p^{(1)}_{\pi(x_2)}}{p^{(2)}_{\pi(x_2)}} \geq \cdots \geq \frac{p^{(1)}_{\pi(x_d)}}{p^{(2)}_{\pi(x_d)}},$$

ahol a nullával való osztás eredményét végtelennek tekintjük. A $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ eloszlásokhoz tartozó $\mathcal{L}(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$ ***általánosított Lorenz-görbe*** *a $(\sum_{i=1}^k p^{(2)}_{\pi(x_i)}, \sum_{i=1}^k p^{(1)}_{\pi(x_i)})$, $k \in [d]_0$ pontokat összekötő töröttvonal.*

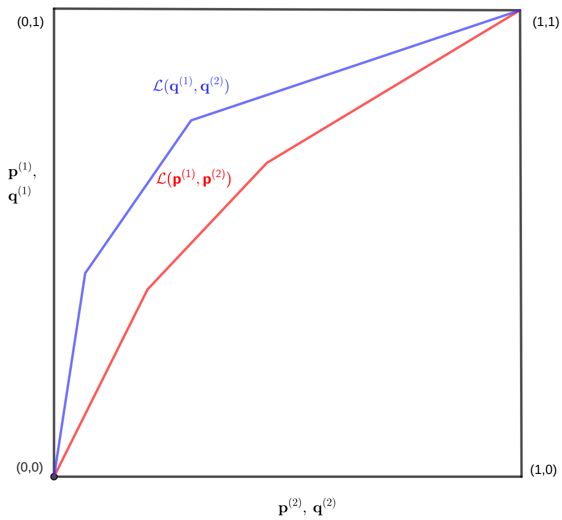
1.18. Definíció. *Adott $(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$ és $(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$ valószínűségi vektor pár $\mathcal{X}$-en és $\mathcal{Y}$-on. Ekkor $(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$* ***d-majorálja*** *$(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$-t, ha*

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}). \tag{9}$$

Jelölése: $(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}) \prec (\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$.



2. ábra. A $(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$ eloszlás párhoz tartózó Lorenz-görbe megkonstruálása. A $(p_x^{(1)}, p_x^{(2)})$ vektorokat kell meredekség szerint rendezni és összeadni.



3. ábra. A $(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$ és $(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$ eloszlás párhoz tartózó Lorenz-görbék. $\mathcal{L}(\mathbf{q}^{(1)},\mathbf{q}^{(2)}) \geq \mathcal{L}(\mathbf{p}^{(1)},\mathbf{p}^{(2)})$, tehát az 1.18. definíció szerint $(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}) \prec (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$.

Az 1.11. tétel általánosítható kétállapotátképezhetőségre [14].

1.19. Tétel. *Adott $(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$ és $(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$ valószínűségi vektor pár $\mathcal{X}$-en és $\mathcal{Y}$-on. Ekkor*

$$\exists \mathbf{W} \in \mathrm{M}^{\text{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} : \mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{W}\mathbf{p}^{(i)},\ \forall i \in \{1,2\} \iff (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}) \prec (\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}).$$

Ennek a tételnek nincs ismert, kvantumállapotokra vonatkozó általánosítása.

1.20. Megjegyzés. *A nemegyensúlyi termodinamika klasszikus tárgyalásában az úgynevezett Gibbs-stochasztikus átképezés, illetve a termális Lorenz-görbe, termális majorizáció játszik fontos szerepet [12]. Ebben az esetben az 1.17. és az 1.18. definícióban a $\mathbf{p}^{(2)}$ és $\mathbf{q}^{(2)}$ állapotokat az adott rendszerhez tartozó, adott hőmérsékletű Gibbs-állapotra kell cserélni. Az 1.19. tétel természetesen ebben az esetben is érvényes marad, hiszen a Gibbs-sztochasztikus átképezéshetőség a két állapot átképezhetőség egy speciális esete.*

2. Többállapotú átképezhetőségi vizsgálatok Lorenz-zonotópok segítségével

Az előző fejezetben kétállapot átképezhetőségi problémákat vizsgáltunk a majorizáció és az ahhoz kapcsolódó általánosított Lorenz-görbe segítségével. Természetesen adódik a kérdés, hogy a teljesen általános n állapot átképezhetőség karakterizálható-e a Lorenz-görbe valamilyen n dimenziós általánosításával. Ebben a fejezetben bevezetjük a Lorenz-zonozóp fogalmát klasszikus és kvantum esetben is. Ennek segítségével adunk egyszerű szükséges (de nem elégséges) feltételt az átképezhetőségre.

2.1. Klasszikus eset

Klasszikus esetben a probléma a következő. Adott n valószínűségi eloszlás pár $(\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{q}^{(i)})$ az $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ eseménytereken (ábécéken), létezik-e olyan $\mathbf{W} \in \mathrm{M}^{\text{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$, hogy a

$$\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{W}\mathbf{p}^{(i)}, \tag{10}$$

egyenlet teljesüljön minden $i \in [n]$ esetén? A (10) egyenletek átfogalmazása az eloszlásokból felépített mátrixok nyelvén, használva a (2) jelölést:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}\mathbf{P}. \tag{11}$$

Ezt a kérdést válaszolja meg az 1.18. tétel $n = 2$-re az általánosított Lorenz-görbe segítségével. A Lorenz-görbe n dimenziós általánosításához bevezetjük a klasszikus egységkocka fogalmát (az információelméletben ez a tesztfüggvények halmaza), illetve annak speciális részhalmazait:

$$\mathscr{t}(\mathcal{X}) := [0,1]^{\mathcal{X}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{X}}, \quad \mathscr{t}_k(\mathcal{X}) := \left\{ \mathbf{t} \in \mathscr{t}(\mathcal{X}) \,\middle|\, \sum_{x\in\mathcal{X}} t_x = k \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{X}},\ k \in [d]_0 \tag{12}$$

$$\mathscr{p}(\mathcal{X}) := \{0,1\}^{\mathcal{X}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{X}}, \quad \mathscr{p}_k(\mathcal{X}) := \left\{ \mathbf{t} \in \mathscr{p}(\mathcal{X}) \,\middle|\, \sum_{x\in\mathcal{X}} t_x = k \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{X}},\ k \in [d]_0, \tag{13}$$

ahol $d = |\mathcal{X}|$. A bevezetett halmazokra nyilvánvalóan fennállnak a következő tartalmazási relációk minden k-ra:

$$\mathscr{p}_k(\mathcal{X}) \subseteq \mathscr{t}_k(\mathcal{X}) \subseteq \mathscr{t}(\mathcal{X}), \tag{14}$$

$$\mathscr{p}_k(\mathcal{X}) \subseteq \mathscr{p}(\mathcal{X}) \subseteq \mathscr{t}(\mathcal{X})\,. \tag{15}$$

2.1. Lemma. $\forall k \in [d]_0 :\ \mathscr{t}_k(\mathcal{X})$ *konvex, és*

$$\operatorname{Ext} \mathscr{t}_k(\mathcal{X}) = \mathscr{p}_k(\mathcal{X}), \tag{16}$$

ahol $d = |\mathcal{X}|$.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\mathscr{t}_k(\mathcal{X})$ valóban konvex. Továbbá $\mathscr{p}_k(\mathcal{X}) \subset \operatorname{Ext} \mathscr{t}_k(\mathcal{X})$, hiszen $\mathscr{p}_k(\mathcal{X})$ extremális az egységkockában. Belátjuk, hogy nincs más extremális pont $\mathscr{t}_k(\mathcal{X})$-ban. Vegyünk egy tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathscr{t}_k(\mathcal{X}) \setminus \mathscr{p}_k(\mathcal{X})$ vektort. Ekkor $\exists\, x_i, x_j \in \mathcal{X}$ úgy, hogy v_{x_i} és v_{x_j} benne van a $(0,1)$ nyílt intervallumban. Tehát $\exists\, \varepsilon > 0 : v_{x_i} \pm \varepsilon, v_{x_j} \pm \varepsilon \in (0,1)$. Legyen $\mathbf{v}^{\pm} = (v_{x_1}, \ldots, v_{x_i} \pm \varepsilon, \ldots, v_{x_j} \mp \varepsilon, \ldots, v_{x_n})^T \in \mathscr{t}_k(\mathcal{X})$. Ekkor $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-)$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{v}$ nem egy extremális pont. $\square$

2.2. Következmény. $\mathscr{t}_k(\mathcal{X}) = \operatorname{Conv} \mathscr{p}_k(\mathcal{X})$, *a Krein–Milman-tétel miatt [9, 10].*

Az egységkocka fogalmával bevezethető a Lorenz-zonotóp fogalma, ami a Lorenz-görbe általánosítása n állapotra.

2.3. Definíció. *Legyen* $(\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)})$ *valószínűségi eloszlás* $\mathcal{X}$*-en,* $d = |\mathcal{X}|$. *Ekkor az eloszlásokhoz tartozó* ***Lorenz-zonotóp****:*

$$\mathcal{LZ}(\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)}) = \mathcal{LZ}(\mathbf{P}) = \left\{ \mathbf{P}^T \mathbf{t} \,\middle|\, \mathbf{t} \in \mathscr{t}(\mathcal{X}) \right\} = \mathbf{P}^T \mathscr{t}(\mathcal{X}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}\,. \tag{17}$$

Hasonlóan bevezethetőek a további halmazok:

$$\mathscr{v}_k(\mathbf{P}) := \left\{ \mathbf{P}^T \mathbf{t} \,\middle|\, \mathbf{t} \in \mathscr{p}_k(\mathcal{X}) \right\} = \mathbf{P}^T \mathscr{p}_k(\mathcal{X}), \quad \mathscr{v}(\mathbf{P}) := \bigcup_{k \in [d]_0} \mathscr{v}_k(\mathbf{P}) = \mathbf{P}^T \mathscr{p}(\mathcal{X})\,.$$

*$\mathscr{v}(\mathbf{P})$ és $\mathscr{v}_k(\mathbf{P})$ a $\mathbf{P}$-hez tartozó Lorenz-zonotóp **csúcsainak**, illetve **k súlyú csúcsainak** halmaza.*

2.4. Megjegyzés. *A Lorenz-zonotópra igazak a következő állítások:*

(i) Hasonlóan a (15) *relációhoz (és abból következően): $\mathscr{v}_k(\mathbf{P}) \subseteq \mathscr{v}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P})$. Sőt $\mathcal{LZ}(\mathbf{P})$ konvex és a 2.2. következmény miatt*

$$\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) = \operatorname{Conv} \mathscr{v}(\mathbf{P}).$$

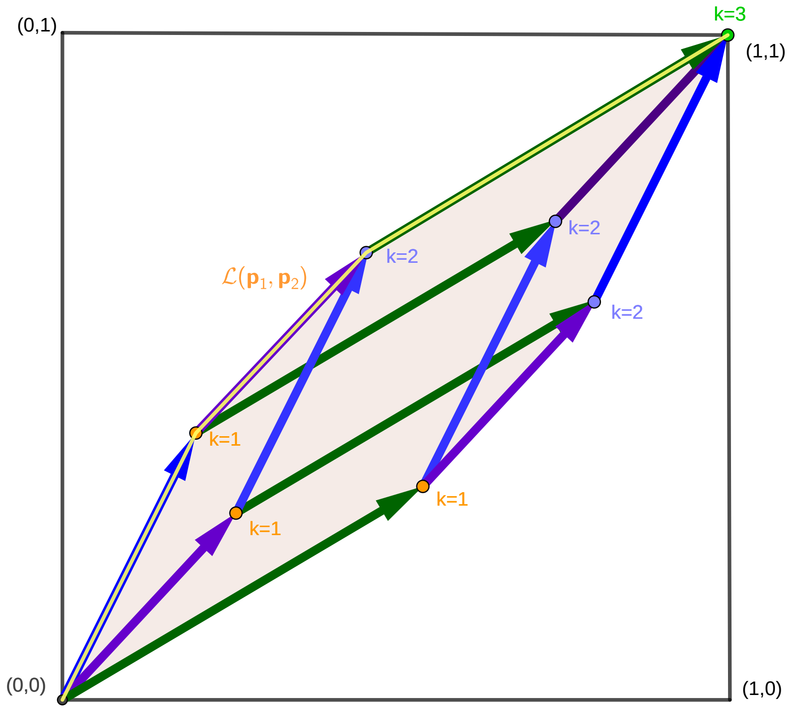
(ii) Az egységkockában van: $\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) \subseteq \mathscr{t}(n) = [0,1]^n$. Továbbá $\mathbf{0}_n = \mathbf{P}^T\mathbf{0}_{\mathcal{X}} \in \mathcal{LZ}(\mathbf{P})$ és $\mathbf{1}_n = \mathbf{P}^T\mathbf{1}_{\mathcal{X}} \in \mathcal{LZ}(\mathbf{P})$, ahol $\mathbf{0}_n = (0,\ldots,0)^T \in \mathscr{t}(n)$, $\mathbf{0}_{\mathcal{X}} = (0,\ldots,0)^T \in \mathscr{t}(\mathcal{X})$ és $\mathbf{1}_n = (1,\ldots,1)^T \in \mathscr{t}(n)$, $\mathbf{1}_{\mathcal{X}} = (1,\ldots,1)^T \in \mathscr{t}(\mathcal{X})$. (A $\mathbf{P}$ sztochasztikus, ezért $\mathbf{P}^T\mathbf{1}_{\mathcal{X}} = \mathbf{1}_n$.)

(iii) Középpontosan szimmetrikus az egységkocka középpontjára, azaz

$$\mathbf{p} \in \mathcal{LZ}(\mathbf{P}) \iff \mathbf{1}_n - \mathbf{p} \in \mathcal{LZ}(\mathbf{P}),$$

hiszen $\mathbf{t} \in \mathscr{t}(\mathcal{X}) \iff \mathbf{1}_{\mathcal{X}} - \mathbf{t} \in \mathscr{t}(\mathcal{X})$.

(iv) Két állapot esetén a zonotóp felső határoló görbéje a két állapothoz tartozó általánosított Lorenz-görbe (1.17. definíció), ahogy a 4. ábrán is látható.



4. ábra. Két háromdimenziós eloszláshoz tartozó Lorenz-zonotóp a kétdimenziós egységkockában. Az ábrán látható a két eloszláshoz tartozó $\mathcal{L}(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$ általánosított Lorez-görbe, mint a zonotóp felső határgörbéje. Különböző színnel jelöltük a $k = 1, 2, 3$ súlyú csúcsokat.

2.5. Következmény. *Adott* $(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})$ *és* $(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})$ *eloszlás pár* $\mathcal{X}$*-en és* $\mathcal{Y}$*-on, ekkor a a 2.4. megjegyzés (iii) és (iv) pontja miatt:*

$$\mathcal{LZ}(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}) \iff \mathcal{L}(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}),$$

azaz a Lorenz-zonotóp tényleg egy jó általánosítása a Lorenz-görbének.

A Lorenz-zonotópok segítségével könnyen adható egy szükséges (de nem elégséges) feltétel az átképezhetőségre.

2.6. Tétel. *Adott* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *sztohasztikus mátrix* n *valószínűségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en és* $\mathcal{Y}$*-on. Ekkor*

$$\exists \mathbf{W} \in \mathrm{M}^{\text{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} : \ \mathbf{Q} = \mathbf{WP} \implies \mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P}).$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz a 2.4. megjegyzés (ii) állítását használjuk ki. Azaz:

$$\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T\, t(\mathcal{X}) = \mathbf{P}^T\mathbf{W}^T\, t(\mathcal{X}) \subseteq \mathbf{P}^T\, t(\mathcal{X}) = \mathcal{LZ}(\mathbf{P}),$$

hiszen $\mathbf{W}^T\, t(\mathcal{X}) = \mathcal{LZ}(\mathbf{W}) \subseteq t(\mathcal{X})$ a 2.4. megjegyzés (ii) állítása alapján. □

Általános esetben azonban már klasszikusan sem igaz visszafelé a tétel. Ezt igazolja a 2.7. példa [8].

2.7. Példa. *Vegyük a következő sztochasztikus mátrixokat:*

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{18}{44} & \frac{3}{32} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{44} & \frac{9}{32} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{22} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{15}{44} & \frac{5}{32} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{22} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{15}{88} & \frac{21}{64} & \frac{1}{4} \\ \frac{15}{88} & \frac{21}{64} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

valamint a

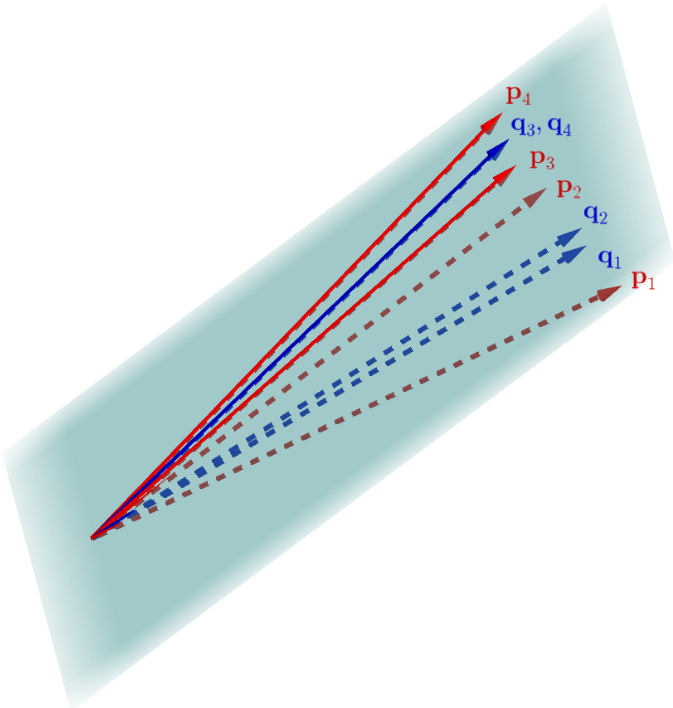
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrixot. Ekkor $\mathbf{Q} = \mathbf{TP}$, amiből egyszerű számításokkal megkapható, hogy $\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P})$. Tegyük fel, hogy létezik egy $\mathbf{W}$ sztochasztikus mátrix, hogy $\mathbf{Q} = \mathbf{WP}$. Azaz a $\mathbf{W}$ mátrix egyes $\mathbf{w}_i \in [0,1]^4$ sorával megkaphatjuk a $\mathbf{Q}$ mátrix megfelelő sorát a $\mathbf{P}$ mátrix sorainak segítségével:

$$\mathbf{q}_i = \sum_{j=1}^{4} w_{ij}\mathbf{p}_j,$$

ahol w_{ij} a $\mathbf{w}_i$ vektor j-edik komponense és $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_j$ a $\mathbf{Q}$ illetve $\mathbf{P}$ mátrix sorvektorai. A $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{P}$ mátrixok sorvektorait ábrázoltuk az 5. ábrán. Ahogy az az ábrán is látszik a $\mathbf{Q}$ mátrix harmadik és negyedik sorvektora egy síkban van a $\mathbf{P}$ mátrix harmadik és negyedik sorvektorával ($\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)$), míg a többi vektor ezen sík által szeparált térrészek közül azonosban van. Ebből következik, hogy ahhoz hogy megkapjuk a $\mathbf{q}_3$, $\mathbf{q}_4$ vektorokat mint a $\mathbf{P}$ mátrix sorvektorainak $0,1$ közötti együtthatós lineáris kombinációja csak a $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ vektorokat használ-

hatjuk. Azaz a $\mathbf{W}$ *mátrix utolsó két sora a* $(0, 0, 1/2, 1/2)$ *sorvektor lesz. Tehát ahhoz hogy* $\mathbf{W}$ *sztochasztikus legyen a* $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ *vektorok* $0, 1$ *közötti lineáris kombinációjához, csak a* $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ *vektorokat használhatjuk. Egyszerű számításokkal ellenőrizhető, hogy ez nem lehetséges, tehát nem létezik ilyen sztochasztikus mátrix.*



5. ábra. A $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ mátrix sorvektorai. A $\mathbf{q}_3$, $\mathbf{q}_4$ és a $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$ vektor egy síkban fekszik, míg a $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ és a $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ vektor a sík alatti térrészben.

Sikerült viszont olyan speciális esetet találni, amikor klasszikusan visszafelé is teljesül a 2.6. tétel.

2.8. Tétel. *Adott* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *sztohasztikus mátrix* n *valószínűségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en és* $\mathcal{Y}$*-on, továbbá* $\operatorname{Ran}\mathbf{P} = \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$*, ahol* $\operatorname{Ran}\mathbf{P}$ *a* $\mathbf{P}$ *mátrix képtere. Ekkor*

$$\exists \mathbf{W} \in \mathrm{M}^{\text{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} : \; \mathbf{Q} = \mathbf{W}\mathbf{P} \iff \mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P}).$$

Bizonyítás. A balról jobbra irányt megadja a 2.6. tétel. Nézzük a másik irányt. Ha $\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P})$, akkor mindig létezik egy $\mathbf{T}$ mátrix, hogy $\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$: $T_{yx} \in [0, 1]$ és

$$\mathbf{T}\mathbf{P} = \mathbf{Q}. \tag{18}$$

Valóban, hiszen a (18) egyenlet kielégíthető soronként $\mathbf{T}$-re az adott feltételek mellett. Azaz a

$$\mathbf{t}^T\mathbf{P} = \mathbf{q}_y$$

egyenlet kielégíthető minden $y \in \mathcal{Y}$ esetén úgy, hogy $\mathbf{t} \in \mathcal{t}(\mathcal{X})$, ahol $\mathbf{q}_y$ a $\mathbf{Q}$ mátrix sorvektora, hiszen $\mathbf{q}_y \in \mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P})$. Továbbá

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} : \sum_{y\in\mathcal{Y},\, x\in\mathcal{X}} T_{yx}v_x = \sum_{y\in\mathcal{Y},\, x\in\mathcal{X}} \sum_{i=1}^{n} T_{yx}P_{xi}\tilde{v}_i = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \sum_{i=1}^{n} Q_{yi}\tilde{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i,$$

ahol $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$, amelyre $\mathbf{v} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{v}}$, ahol kihasználtuk, hogy $\mathbf{Q}$ sztochasztikus, valamint $\mathbf{P}$ szürjektív. Továbbá $\sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i = \sum_{x\in\mathcal{X}} v_x$, hiszen $\mathbf{P}$ sztochasztikus. Vagyis összességében:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} : \sum_{y\in\mathcal{Y},\, x\in\mathcal{X}} T_{yx}v_x = \sum_{x\in\mathcal{X}} v_x,$$

amiből következik, hogy $\mathbf{T}$ sztochasztikus. □

2.9. Megjegyzés. *A* $\operatorname{Ran}\mathbf{P} = \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ *feltétel a dimenziótétel miatt átírható úgy is, hogy* $\ker \mathbf{P}^T = \{0\}$.

2.2. Kvantum eset

Kvantumállapotok esetén a kérdésfeltevés megfogalmazása: adott n kvantumállapot pár $(\rho^{(i)}, \sigma^{(i)})$ a $\mathcal{H}$ és $\mathcal{K}$ Hilbert-tereken. Mikor létezik $\Phi \in CPTP(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, hogy a

$$\sigma^{(i)} = \Phi(\rho^{(i)}), \tag{19}$$

egyenlet teljesüljön minden $i \in [n]$ esetén? A (19) egyenletek felírása egy kompakt formába a sűrűségoperátorokból felépített vektorok nyelvén, használva a (6) jelölést:

$$\boldsymbol{\sigma} = \Phi(\boldsymbol{\rho}). \tag{20}$$

A kvantum eset vizsgálatához használhatóak a korábban bevezetett klasszikus fogalmak kvantum általánosításai. Az egységkocka fogalmának kiterjesztése kvantum esetre (ez a teszt operátorok halmaza a kvantum-információelméletben), illetve annak részhalmazai:

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid 0 \leq T \leq I\} \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H}), \tag{21}$$

$$\mathcal{T}_k(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \mid \operatorname{Tr} T = k\} \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H}),\ k \in [d]_0, \tag{22}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{H}) := \left\{P \in \mathrm{B}(\mathcal{H}) \,\middle|\, P = P^* = P^2\right\} \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H}), \tag{23}$$

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{H}) := \{P \in \mathrm{B}(\mathcal{H}) \mid \operatorname{Tr} P = k\} \subseteq \mathrm{B}(\mathcal{H}),\ k \in [d]_0, \tag{24}$$

ahol $d = \dim \mathcal{H}$.

A klasszikus esethez hasonlóan a kvantumkocka esetében is felírhatóak különböző tartalmazási relációk minden k esetén:

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{T}_k(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{H}), \tag{25}$$

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{H}). \tag{26}$$

A 2.1. lemma kvantum verziója is teljesül.

2.10. Lemma. *Minden $k \in [d]_0$ esetén $\mathcal{T}_k(\mathcal{H})$ konvex, és*

$$\operatorname{Ext} \mathcal{T}_k(\mathcal{H}) = \mathcal{P}_k(\mathcal{H}), \tag{27}$$

ahol $d = \dim \mathcal{H}$.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\mathcal{T}_k(\mathcal{H})$ valóban konvex. Ismert, hogy $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ extremális $\mathcal{T}(\mathcal{H})$-ban. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}_k(\mathcal{H}) \subseteq \operatorname{Ext} \mathcal{T}_k(\mathcal{H})$. Legyen $T \in \mathcal{T}_k(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{P}_k(\mathcal{H})$ tetszőleges. T egy pozitív szemi-definit operátor, tehát felírható a következőképpen:

$$T = \sum_{\lambda \in \operatorname{spect}(T)} \lambda P(\lambda).$$

Ekkor $\exists\, \lambda_i, \lambda_j \in \operatorname{spect}(T)$ úgy, hogy λ_i és λ_j a $(0,1)$ nyílt intervallumban van. Ekkor $\exists\, \varepsilon > 0$:

$\lambda_i \pm \varepsilon, \lambda_j \pm \varepsilon \in (0,1)$. Legyen $T^{\pm} = T \pm \varepsilon P(\lambda_i) \mp \varepsilon P(\lambda_j) \in \mathcal{T}_k(\mathcal{H})$. Ekkor $T = \frac{1}{2}(T^+ + T^-)$, amiből következik, hogy T nem extremális, vagyis $\operatorname{Ext} \mathcal{T}_k(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{P}_k(\mathcal{H})$. □

A Lorenz-zonotóp fogalma könnyen általánosítható kvantumállapotokra.

2.11. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{\rho} = (\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(n)})^T \in \mathrm{S}(\mathcal{H})^n$ egy kvantumállapotokból álló vektor. Ekkor az állapotokhoz tartozó* ***kvantum-Lorenz-zonotóp****:*

$$\mathcal{QLZ}(\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(n)}) = \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}) = \{\operatorname{Tr} \boldsymbol{\rho} T \mid T \in \mathrm{B}(\mathcal{H}),\ 0 \leq T \leq I\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \tag{28}$$

ahol $\operatorname{Tr} \boldsymbol{\rho} T = (\operatorname{Tr} \rho^{(1)} T, \dots, \operatorname{Tr} \rho^{(n)} T)^T$. *Hasonlóan a klasszikus esethez, bevezethetőek a további halmazok:*

$$\mathcal{V}_k(\boldsymbol{\rho}) := \{\operatorname{Tr} \boldsymbol{\rho} P \mid P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})\}, \quad \mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}) := \bigcup_{k \in [d]_0} \mathcal{V}_k(\boldsymbol{\rho}),$$

ahol $\mathcal{V}(\boldsymbol{\rho})$ és $\mathcal{V}_k(\boldsymbol{\rho})$ a $\boldsymbol{\rho}$-hoz tartozó kvantum-Lorenz-zonotóp ***csúcsainak****, illetve* ***k súlyú csúcsainak*** *halmaza.*

2.12. Megjegyzés. *A kvantum-Lorenz-zonotópra , a klasszikus esethez hasonlóan, a következő állítások igazak:*

(i) Hasonlóan a (26) *relációhoz (és abból következően): $\mathcal{V}_k(\boldsymbol{\rho}) \subseteq \mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}) \subseteq \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho})$. Sőt $\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho})$ konvex és a 2.10. lemma miatt*

$$\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}) = \operatorname{Conv} \mathcal{V}(\boldsymbol{\rho}).$$

(ii) Az egységkockában van: $\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}) \subseteq \mathcal{t}(n) = [0,1]^n$. Továbbá $\mathbf{0}_n = \operatorname{Tr} \boldsymbol{\rho}\, 0_{\mathcal{H}} \in \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho})$ és $\mathbf{1}_n = \operatorname{Tr} \boldsymbol{\rho} I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho})$, ahol $\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0)^T \in \mathcal{t}(n)$, $0_{\mathcal{H}} \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér nulloperátora és $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^T \in \mathcal{t}(n)$, $I_{\mathcal{H}} \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ az identitás.

(iii) Középpontosan szimmetrikus az egységkocka középpontjára, azaz

$$\mathbf{p} \in \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}) \iff \mathbf{1}_n - \mathbf{p} \in \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}),$$

hiszen $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \iff I_{\mathcal{H}} - T \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

A 2.6. tételben megadott elégséges feltétel kvantum esetben is érvényes marad.

2.13. Tétel. *Adott $\boldsymbol{\rho}$ és $\boldsymbol{\sigma}$ vektor n sűrűségoperátorral $\mathcal{H}$-n és $\mathcal{K}$-n. Ekkor*

$$\exists \Phi \in CPTP(\mathcal{H},\mathcal{K}) : \boldsymbol{\sigma} = \Phi(\boldsymbol{\rho}) \implies \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}).$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz azt az ismert tényt használjuk ki, hogy ha $\Phi \in CPTP(\mathcal{H},\mathcal{K}) \implies \Phi^* : \mathrm{B}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathrm{B}(\mathcal{H})$ egységtartó és teljesen pozitív, ahol Φ^* a Φ operátor adjungáltja a Hilbert–Schmidt skalárszorzat szerint. Vagyis $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\sigma})$, $\mathbf{p} = \operatorname{Tr} \boldsymbol{\sigma} T$ valamilyen $T \in \mathcal{T}(\mathcal{K})$ tesztoperátorra, továbbá:

$$\mathbf{p} = \operatorname{Tr} \boldsymbol{\sigma} T = \operatorname{Tr} \Phi(\boldsymbol{\rho}) T = \operatorname{Tr} \boldsymbol{\rho} \Phi^*(T) \in \mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}),$$

hiszen $\Phi^*(T) \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, mivel Φ^* egységtartó és pozitív. □

Mivel a tétel már klasszikusan sem igaz visszafelé (2.7. példa) ezért természetesen kvantum esetben sem.

3. Iránymenti egységtartó átképezhetőség

A korábbi fejezetben láttuk, hogy a Lorenz-zonotópok tartalmazása nem karakterizálja a teljesen általános átképezhetőségi kérdést. Ezért rátérünk az úgynevezett iránymenti átképezhetőségre. Ebben az esetben nem az n darab állapotot szeretnénk átképezni, hanem az ezekből képzett tetszőleges lineáris kombinációkat. Ebben a fejezetben leszűkítjük a tárgyalást egységtartó csatornákra. Ismertetjük Koshevoy eredményét [8], illetve annak bizonyítását. Ezután általánosítjuk az általa bevezetett fogalmakat kvantum esetre és megmutatjuk, hogy a tétel kvantumállapotokra is igaz marad.

3.1. Klasszikus eset

Az iránymenti egységtartó átképezhetőségi kérdés klasszikusan úgy fogalmazható meg, hogy adott n valószínűségi eloszlás pár $(\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{q}^{(i)})$ az $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ eseménytereken (ábécéken). Mikor létezik minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén egy $\mathbf{B_v} : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ bisztochasztikus leképezés, melyre igaz, hogy

$$\mathbf{B}\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{q}^{(i)}, \tag{29}$$

ahol v_i a $\mathbf{v}$ vektor i-edik komponense? Ennek speciális esete, amikor $n = 1$, ez esetben a $\mathbf{v}$ vektor egy skalár és az átképezhetőséget a majorizáció karakterizálja az 1.11. tétel alapján. Általános esetben a (29) formula átfogalmazható a következőképpen:

$$\mathbf{B_v}\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{v}, \tag{30}$$

ahol $\mathbf{P}$ illetve $\mathbf{Q}$ a (2) szerint bevezetett jelölés. Mostantól az egyszerűség kedvéért $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, a fejezet végén térünk majd vissza az általános esetre.

Bevezetjük a kiegészített Lorenz-zonozóp fogalmát, amely a bisztochasztikus iránymenti átképezhetőség problémáját, illetve annak általánosításait karakterizálja.

3.1. Definíció. *Legyen* $(\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(n)})$ *és* $\mathbf{w}$ *valószínűségi eloszlás* $\mathcal{X}$*-en. Ekkor az eloszlásokhoz* *tartozó* ***w-Lorenz-zonotóp****:*

$$w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(n)}) = w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) = \mathcal{LZ}(\mathbf{P}^{\mathbf{w}}), \tag{31}$$

ahol $\mathbf{P}^{\mathbf{w}}$ *a* (3) *formula szerint bevezetett kiegészített mátrix. Speciálisan az* ***u-Lorenz-zonotóp****:*

$$u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) = \mathcal{LZ}(\mathbf{P}^{\mathbf{u}}), \tag{32}$$

ahol $\mathbf{u}$ *az egyenletes eloszlás* $\mathcal{X}$*-en.*

3.2. Lemma. *Adott* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *sztohasztikus mátrixok* n *valószínüségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en,* $d = |\mathcal{X}|$*. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(i) $u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P})$*,*

(ii) $\forall k \in [d]_0 : \, \mathscr{v}_k(\mathbf{Q}^{\mathbf{u}}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathscr{v}_k(\mathbf{P}^{\mathbf{u}})$*,*

(iii) $\forall k \in [d]_0 : \, \mathscr{v}_k(\mathbf{Q}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathscr{v}_k(\mathbf{P})$*.*

Bizonyítás. A következő ekvivalenciák egyenesen következnek a definíciókból:

$$u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) \iff \mathscr{v}(\mathbf{Q}^{\mathbf{u}}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathscr{v}(\mathbf{P}^{\mathbf{u}}) \iff$$

$$\iff \forall k \in [d]_0 : \, \mathscr{v}_k(\mathbf{Q}^{\mathbf{u}}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathscr{v}(\mathbf{P}^{\mathbf{u}}).$$

A (ii) $\implies$ (i) irány triviális. Az (i) $\implies$ (ii) irány bizonyításához vegyünk egy tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathscr{v}_k(\mathbf{Q}^{\mathbf{u}})$ vektort. Ekkor létezik egy $\mathbf{c} \in \mathscr{p}_k(\mathcal{X})$ úgy, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{Q}^{\mathbf{u}T}\mathbf{c}$. Valamint, mivel $\mathbf{v} \in u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P})$, ezért létezik egy $\mathbf{t} \in [0,1]^{\mathcal{X}}$ úgy, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{P}^{\mathbf{u}T}\mathbf{t}$. Vessük össze a $\mathbf{Q}^{\mathbf{u}T}\mathbf{c} = \mathbf{P}^{\mathbf{u}T}\mathbf{t}$ egyenletben szereplő vektorok utolsó koordinátáit:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \sum_{x \in \mathcal{X}} c_x Q^u_{xn+1} = \sum_{x \in \mathcal{X}} c_x u_x = \frac{1}{d} \sum_{x \in \mathcal{X}} c_x = \frac{k}{d} = \sum_{x \in \mathcal{X}} t_x P^u_{xn+1} = \frac{1}{d} \sum_{x \in \mathcal{X}} t_x \implies \mathbf{t} \in \mathscr{t}_k(\mathcal{X})$$

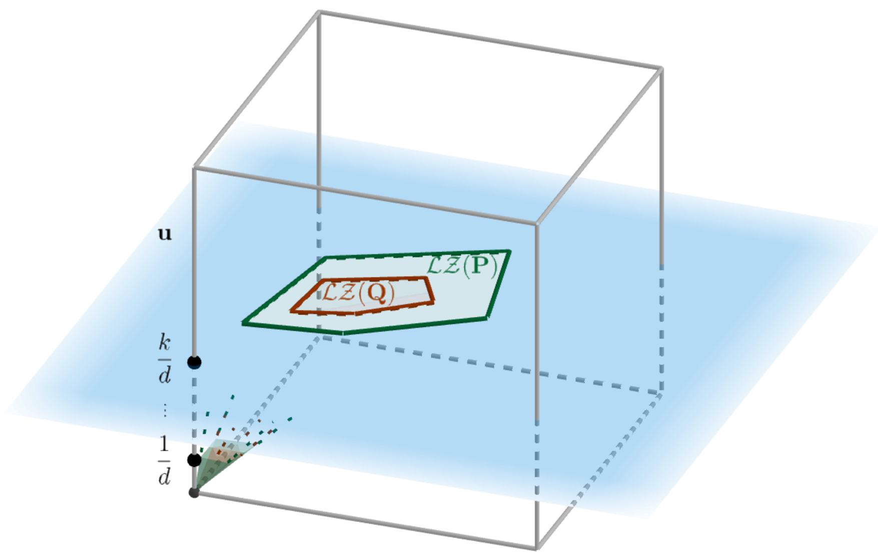
A 2.1. lemma miatt $\mathbf{t}$ felírható egy konvex kombinációként:

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{c}_i,$$

ahol $\forall i \in [r]:\ \mathbf{c}_i \in \mathscr{p}_k(\mathcal{X})$, $\lambda_i \in [0,1]$ és $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$. Tehát:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P^u}^T \mathbf{t} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{P^u}^T \mathbf{c}_i \in \operatorname{Conv} \mathscr{v}_k(\mathbf{P^u}).$$

A (ii) $\implies$ (iii) irány triviális, hiszen csak el kell hagyni az utolsó dimenziót. A másik irányhoz legyen $\mathbf{v} \in \mathscr{v}_k(\mathbf{Q^u})$ tetszőleges. Ekkor felírható a következő formulával $\mathbf{v} = \mathbf{Q^u}^T \mathbf{c}$, ahol $\mathbf{c} \in \mathscr{p}_k(\mathcal{X})$. Ekkor $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{c} \in \mathscr{v}_k(\mathbf{Q}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathscr{v}_k(\mathbf{P})$. A korábbiakhoz hasonlóan $\tilde{\mathbf{v}}$ felírható kovex kombinációként $\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{P}^T \mathbf{c}_i$. Ugyanezt a konvex kombinációt használhatjuk $\mathbf{v}$ felírásához is $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{P^u}^T \mathbf{c}_i$. $\square$



6. ábra. A 3.2. lemma alapján akkor és csak akkor tartalmazza a $\mathbf{P}$-hez tartozó kiegészített zonotóp a $\mathbf{Q}$-hoz tartozót, ha minden k egész számra az $x_{n+1} = k/d$ síkkal vett metszetek között is fennáll a tartalmazási reláció. A zonotópok ilyen síkmetszete a k súlyú csúcsok konvex burka.

Bevezetjük az iránymenti majorizáció fogalmát, ami az 1.11. tétel alapján ekvivalens az iránymenti egységtartó átképezhetőséggel.

3.3. Definíció. *Legyen* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *sztohasztikus mátrixok* n *valószínűségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en,* $d = |\mathcal{X}|$*. Ekkor* $\mathbf{P}$ ***irány mentén majorálja*** $\mathbf{Q}$*-t, ha:*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n:\ \mathbf{Qv} \prec \mathbf{Pv}, \tag{33}$$

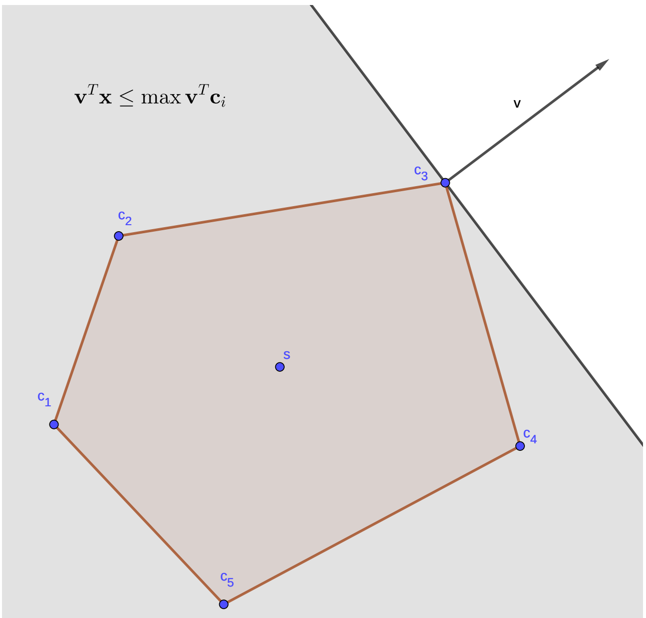
ahol $\prec$ az egyváltozós majorizáció vektorok között (1.7. definíció és 1.8. megjegyzés). Az iránymenti majorizáció jelölése: $\mathbf{Q} \prec^D \mathbf{P}$.

3.4. Megjegyzés. *A 3.3. definíció általánosabban is megfogalmazható úgy, hogy a* $\mathbf{Q}$ *oszlopvektorai különböző halmazon vannak definiálva, mint a* $\mathbf{P}$ *oszlopvektorai.*

3.5. Lemma. *Legyen* $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ *és* $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^n$. *Ekkor:*

$$\mathbf{s} \in \mathrm{Conv}(\mathbf{c}_i)_{i=1}^k \iff \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v}^T\mathbf{s} \leq \max_{i\in[k]} \mathbf{v}^T\mathbf{c}_i \tag{34}$$

Bizonyítás. A precíz bizonyítás a Hahn–Banach-tétel [10] alapján adható meg. Szemléletesen az $\mathbf{x}$ változóra vonatkozó $\mathbf{v}^T\mathbf{x} \leq K$ egyenlőtlenség valamilyen $K \in \mathbb{R}$ esetén egy $\mathbf{v}$ normálisú hipersíkkal leválasztott fél térrészt határoz meg. Ez alapján a (34) ekvivalencia jobb oldala azt jelenti, hogy tetszőleges $\mathbf{v}$ irány esetén található egy optimális hipersík, amely esetén $\mathbf{s}$ és az összes $\mathbf{c}_i$ pont is egy térrészbe kerül. Ez ekvivalens azzal, hogy $\mathbf{s}$ benne van a $\mathbf{c}_i$ pontok konvex burkában. $\square$



7. ábra. A $\mathbf{v}^T\mathbf{s} \leq \max_{i\in[k]} \mathbf{v}^T\mathbf{c}_i$ egyenlőtlenség geometriai ábrázolása.

3.6. Következmény. *Legyen* $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvex halmaz. Ekkor*

$$\mathbf{s} \in \mathcal{C} \iff \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \exists \mathbf{c} \in \mathcal{C} : \mathbf{v}^T\mathbf{s} = \mathbf{v}^T\mathbf{c}$$

3.7. Tétel. *(Koshevoy, [8]) Legyen* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *sztohasztikus mátrixok* n *valószínűségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en,* $d = |\mathcal{X}|$*. Ekkor*

$$\mathbf{Q} \prec^D \mathbf{P} \iff u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}).$$

Bizonyítás. A 3.2. lemma miatt

$$u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) \iff \forall k \in [d]_0 : \ \mathscr{v}_k(\mathbf{Q}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathscr{v}_k(\mathbf{P}).$$

A 3.5 lemmát használva:

$$\mathscr{v}_k(\mathbf{Q}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathscr{v}_k(\mathbf{P}) \iff \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \max_{\mathbf{c} \in \mathscr{p}_k(\mathcal{X})} \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{c} \leq \max_{\mathbf{c}' \in \mathscr{p}_k(\mathcal{X})} \mathbf{v}^T \mathbf{P}^T \mathbf{c}.$$

Emellett $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{c} = (\mathbf{Q}\mathbf{v})^T \mathbf{c} = \sum_{x \in C} (Qv)_x$, ahol $C := \{x \in \mathcal{X} \mid c_x = 1\}$. Tehát összességében

$$u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) \iff \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \forall k \in [d]_0 : \max_{C \subseteq \mathcal{X}, |C|=k} \sum_{x \in C} (Qv)_x \leq \max_{C \subseteq \mathcal{X}, |C|=k} \sum_{x \in C} (Qv)_x.$$

Az ekvivalencia jobb oldala az egyváltozós majorizáció definíciója $\mathbf{Qv}$ és $\mathbf{Pv}$ vektorokra. □

3.8. Megjegyzés. *A 3.7. tétel kimondható általánosan is, különböző kiindulási és cél állapotterekre. Ez az eset következik a 4.6. tételből, amelyet majd később bizonyítunk.*

3.2. Kvantum eset

Az iránymenti egységtartó átképezhetőség kvantum esetben is megfogalmazható. Adott n kvantumállapot pár $(\rho^{(i)}, \sigma^{(i)})$ $\mathrm{S}(\mathcal{H})$-ban és $\mathrm{S}(\mathcal{K})$-ban. Mikor létezik $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ egy egységtartó CPTP leképezés $\Phi_{\mathbf{v}} : \mathrm{S}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathrm{S}(\mathcal{K})$, ami az állapotokat a

$$\Phi_{\mathbf{v}} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \rho^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \sigma^{(i)}, \tag{35}$$

módon transzformálja, ahol v_i a $\mathbf{v}$ vektor i-edik komponense? A (35) formula tömör megfogalmazása a (6) jelöléssel:

$$\Phi_{\mathbf{v}} \left(\mathbf{v}^T \boldsymbol{\rho} \right) = \mathbf{v}^T \boldsymbol{\sigma}. \tag{36}$$

Kvantum esetben is bevezethető a kiegészített zonotóp, amely segítségével majd jellemezni tudjuk az iránymenti egységtartó átképezhetőséget.

3.9. Definíció. *Legyen* $\boldsymbol{\rho} = (\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(n)})^T \in \mathrm{S}(\mathcal{H})^n$ *egy kvantumállapotokból álló vektor és* $d = \dim \mathcal{H}$*. Ekkor az állapotokhoz tartozó* ***u-kvantum-Lorenz-zonotóp****:*

$$u\text{-}\mathcal{QLZ}(\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(n)}) = u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}) = \mathcal{QLZ}(\overline{\boldsymbol{\rho}}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \tag{37}$$

ahol $\overline{\boldsymbol{\rho}} = (\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(n)}, I/d)^T$.

A 2.1. lemma kvantum esetben is kimondható.

3.10. Lemma. *Legyen* $\boldsymbol{\rho}$ *és* $\boldsymbol{\sigma}$ *n kvantumállapotból álló vektor. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho})$,

(ii) $\forall k \in [d]_0 : \mathcal{V}_k(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) \subseteq \mathrm{Conv}\, \mathcal{V}_k(\overline{\boldsymbol{\rho}})$,

(iii) $\forall k \in [d]_0 : \mathcal{V}_k(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq \mathrm{Conv}\, \mathcal{V}_k(\boldsymbol{\rho})$.

Bizonyítás. A bizonyítás menete teljesen analóg a klasszikus esettel. A következő ekvivalenciák triviálisan következnek a definíciókból:

$$u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}) \iff \mathcal{V}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) \subseteq \mathrm{Conv}\, \mathcal{V}(\overline{\boldsymbol{\rho}}) \iff \forall k \in [d]_0 : \mathcal{V}_k(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) \subseteq \mathrm{Conv}\, \mathcal{V}(\overline{\boldsymbol{\rho}}).$$

Az (i) $\Longleftarrow$ (ii) irány triviális. Az (i) $\Longrightarrow$ (ii) irány bizonyításához legyen $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_k(\overline{\boldsymbol{\sigma}})$ tetszőleges. Ekkor létezik egy $P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})$ úgy, hogy $\mathbf{v} = \mathrm{Tr}\, \overline{\boldsymbol{\sigma}} P$. Szintén, mivel $\mathbf{v} \in u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho})$, létezik egy $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ úgy, hogy $0 \leq T \leq I$ és $\mathbf{v} = \mathrm{Tr}\, \overline{\boldsymbol{\rho}} T$. Vizsgáljuk a $\mathrm{Tr}\, \overline{\boldsymbol{\sigma}} P = \mathrm{Tr}\, \overline{\boldsymbol{\rho}} T$ egyenletben szereplő vektorok utolsó komponenseit:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{1}{d} \mathrm{Tr}\, P = \frac{k}{d} = \frac{1}{d} \mathrm{Tr}\, T \implies T \in \mathcal{T}_k(\mathcal{H})$$

A 2.10. lemma miatt T felírható konvex kombinációként:

$$T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i,$$

ahol $\forall i \in [r] : \; P_i \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})$, $\lambda_i \in [0,1]$ és $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$. Ezért:

$$\mathbf{v} = \operatorname{Tr} \overline{\boldsymbol{\rho}} T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \operatorname{Tr} \overline{\boldsymbol{\rho}} P_i \in \operatorname{Conv} \mathcal{V}_k(\overline{\boldsymbol{\rho}}).$$

A (ii) $\iff$ (iii) ekvivalencia könnyen látható, balról jobbra egy vetítéssel megkapjuk az állítást. Visszafelé legyen $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_k(\overline{\boldsymbol{\sigma}})$. Ekkor létezik egy $P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})$ úgy, hogy $\mathbf{v} = \operatorname{Tr} \overline{\boldsymbol{\sigma}} P$. Továbbá $\tilde{\mathbf{v}} = \operatorname{Tr} \boldsymbol{\sigma} P \in \mathcal{V}_k(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathcal{V}_k(\boldsymbol{\rho})$. Vagyis felírható egy konvex kombinációként. Hasonlóa a klasszikus esethez, ez a konvexkombináció jó lesz a kiegészített esetben is. □

Kvantum esetben is bevezethető az iránymenti majorizáció, mely az 1.14. tétel alapján ekvivalens az iránymenti egységtartó átképezhetőséggel.

3.11. Definíció. *Legyen $\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{S}(\mathcal{H})^n$ és $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})^n$ kvantumállapotokból álló vektor. Ekkor $\boldsymbol{\rho}$* ***irány mentén majorálja $\boldsymbol{\sigma}$****-t, ha:*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \; \mathbf{v}^T \boldsymbol{\sigma} \prec \mathbf{v}^T \boldsymbol{\rho}, \tag{38}$$

ahol $\prec$ az egyváltozós kvantum-majorizáció önadjungált operátorok között (1.13. definíció és 1.15. megjegyzés) és $\mathbf{v}^T \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} v_i \sigma^{(i)}$. Az iránymenti majorizáció jelölése $\boldsymbol{\sigma} \prec^D \boldsymbol{\rho}$.

3.12. Lemma. *Legyen $A \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ önadjungált. Legyen $A = \sum_{i=1}^{d} a_i \, |e_i\rangle\langle e_i|$ az operátor diagonális felírása az $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{d}$ bázisban. Ekkor*

$$\max_{P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})} \operatorname{Tr} AP = \max_{S \subseteq [d], |S| = k} \sum_{i \in S} a_i. \tag{39}$$

Bizonyítás. Bármely projekció felírható egy $P = \sum_{i=1}^{k} |f_i\rangle\langle f_i|$ alakban, ahol $(f_i)_{i=1}^{k} \subset \mathcal{H}$ egy ortonormált rendszer. Ezért a (39) egyenlet bal oldala átírható:

$$\max_{P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})} \operatorname{Tr} AP = \max_{(f_i)_{i=1}^{k} \subset \mathcal{H}, \mathrm{ONS}} \sum_{i=1}^{k} \langle f_i, A f_i \rangle.$$

Ekkor (39) következik a Schur–Horn tételből [6]. □

A Koshevoy-tétel (3.7. tétel) általánosítható kvantumállapotokra. Ez a tétel a dolgozat legfontosabb eredménye a kvantumátképezhetőség témakörében.

3.13. Tétel. *Legyen* $\boldsymbol{\rho} \in \mathrm{S}(\mathcal{H})^n$ *és* $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{S}(\mathcal{K})^n$ *kvantumállapotokból álló vektor. Ekkor*

$$\boldsymbol{\sigma} \prec^D \boldsymbol{\rho} \iff u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}).$$

Bizonyítás. A 3.10. lemma alapján

$$u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho}) \iff \forall k \in [d]_0 : \mathcal{V}_k(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathcal{V}_k(\boldsymbol{\rho}).$$

A 3.5. lemma miatt

$$\mathcal{V}_k(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq \operatorname{Conv} \mathcal{V}_k(\boldsymbol{\rho}) \iff \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \max_{P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})} \mathbf{v}^T \operatorname{Tr} \boldsymbol{\sigma} P \leq \max_{P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})} \mathbf{v}^T \operatorname{Tr} \boldsymbol{\rho} P.$$

Valamint a 3.12. lemma miatt

$$\forall k \in [d] : \max_{P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})} \operatorname{Tr}\big(\mathbf{v}^T \boldsymbol{\sigma} P\big) \leq \max_{P \in \mathcal{P}_k(\mathcal{H})} \operatorname{Tr}\big(\mathbf{v}^T \boldsymbol{\rho} P\big) \iff \mathbf{v}^T \boldsymbol{\sigma} \prec \mathbf{v}^T \boldsymbol{\rho}.$$

□

4. Klasszikus iránymenti általános átképezhetőségi vizsgálatok

Ebben a fejezetben Koshevoy-tételét (3.7. tétel) általánosítjuk. A Koshevoy-tétel a bisztochasztikus átképezést jellemezte, amelyben kitüntetett szerepet kap a teljesen kevert állapot. Az itt megfogalmazott általánosításban ezt az állapotot cseréljük le tetszőleges teljes tartójú, racionális komponensű állapotra, vagy akár kiindulási és cél állapotpárra.

4.1. Vizsgálatok beágyazó leképezéssel

Az előző fejezetben bevezetett bisztochasztikus átképezhetőség könnyen általánosítható. Az egyenletes eloszlás helyett kitüntetünk valamilyen más eloszlást és megköveteljük ennek invarianciáját. Ez a kitüntetett eloszlás lehet például egy adott Hamilton-függvényhez tartozó Gibbs-állapot. Az is tudott, hogy tetszőleges állapot esetén létezik olyan Hamilton-függvény, amelyre az adott állapot a Gibbs-állapot valamilyen hőmérsékleten. Így általánosan a következő kérdés tehető fel. Adott n valószínűségi eloszlás pár $(\mathbf{p}^{(i)}, \mathbf{q}^{(i)})$ és egy általános $\mathbf{w}$ eloszlás $\mathcal{X}$-en. Mikor létezik egy sztochasztikus $\mathbf{W} : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{X})$ leképezés, amely az eloszlásokat a következő módon transzformálja:

$$\forall i \in [n] : \; \mathbf{W}\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{q}^{(i)}, \quad \mathbf{W}\mathbf{w} = \mathbf{w}. \tag{40}$$

Ennek egy ekvivalens átírása:

$$\mathbf{W}\mathbf{P}^{\mathbf{w}} = \mathbf{Q}^{\mathbf{w}}, \tag{41}$$

ahol $\mathbf{P}^{\mathbf{w}}$ a (3) formulával definiált kiegészített mátrix. Bevezethető egy beágyazó leképezés, amely ezt az általános kérdéskört összeköti a bisztochasztikus átképezhetőséggel [1].

4.1. Definíció. *Adott egy teljes tartójú állapot* $\mathbf{w} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *racionális komponensekkel. Ekkor az általánosság elvesztése nélkül*

$$\mathbf{w} = \left(\frac{W_{x_1}}{W}, \ldots, \frac{W_{x_d}}{W} \right)^T, \tag{42}$$

ahol $\forall x_i \in \mathcal{X}: \; W_{x_i} \in \mathbb{N}$ *és* $W = \sum_{i=1}^{d} W_{x_i}$.

Ekkor $\mathbf{\Gamma_w} : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{P}([W])$*:*

$$\mathbf{\Gamma_w p} = \left(\underbrace{\frac{p_{x_1}}{W_{x_1}}, \ldots, \frac{p_{x_1}}{W_{x_1}}}_{W_{x_1}\ db}, \underbrace{\frac{p_{x_2}}{W_{x_2}}, \ldots, \frac{p_{x_2}}{W_{x_2}}}_{W_{x_2}\ db}, \ldots, \underbrace{\frac{p_{x_d}}{W_{x_d}}, \ldots, \frac{p_{x_d}}{W_{x_d}}}_{W_{x_d}\ db} \right)^T \tag{43}$$

a $\mathbf{w}$ *állapothoz tartozó* ***beágyazó leképezés****. Ezt a leképezést egyértelműen kiterjeszthetjük a teljes lineáris terekre. Az így kiterjesztett* $\mathbb{R}^{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{R}^{W}$ *lineáris leképezést és mátrixát is* $\mathbf{\Gamma_w}$*-vel jelöljük.*

Tetszőleges ilyen $\mathbf{w}$ esetén $\mathbf{\Gamma_w}$ sztochasztikus, hiszen eloszlást eloszlásba visz. Könnyen látható, hogy $\mathbf{\Gamma_w}$ bal inverzére a következő leképezés:

$$\mathbf{\Gamma_w^{-1} q} = \left(\sum_{i=1}^{j_1} q_i, \sum_{i=j_1+1}^{j_2} q_i, \ldots, \sum_{i=j_{d-1}+1}^{W} q_i \right)^T, \tag{44}$$

ahol $j_k = \sum_{l=1}^{k} W_l$. $\mathbf{\Gamma_w^{-1}}$ szintén sztochasztikus, továbbá látható az is, hogy

$$\mathbf{\Gamma_w w} = \mathbf{u}_W, \qquad \mathbf{\Gamma_w^{-1} u}_W = \mathbf{w}, \tag{45}$$

ahol $\mathbf{u}_W = \left(\frac{1}{W}, \ldots, \frac{1}{W}\right)^T$.

4.2. Megjegyzés. *Minden* $\epsilon > 0$ *esetén tetszőleges* $\mathbf{w}$ *valószínűségi vektor közelíthető* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *teljes tartójú, racionális komponensű valószínűségi vektorral úgy, hogy:*

$$||\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}|| \leq \varepsilon,$$

tetszőleges $||.||$ *norma esetén, hiszen véges dimenzióban minden norma ekvivalens.*

A fentebb definiált beágyazó leképezéssel könnyen általánosítható a 3.7. tétel. Ehhez először az iránymenti majorizáció fogalmának általánosítása szükséges.

4.3. Definíció. *Legyen* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *sztohasztikus mátrix* n *valószínüségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en és*

$\mathcal{Y}$*-on. Ekkor* $\mathbf{P}$ ***irány mentén w-majorálja*** $\mathbf{Q}$*-t, ha:*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : \ \mathbf{Q}\mathbf{v} \prec_w \mathbf{P}\mathbf{v}, \tag{46}$$

ahol $\prec_w$ *az egyváltozós w-majorizáció (termális majorizáció, 1.18. definíció és 1.20. megjegyzés) vektorok között. Az iránymenti w-majorizáció jelölése:* $\mathbf{Q} \prec_w^D \mathbf{P}$.

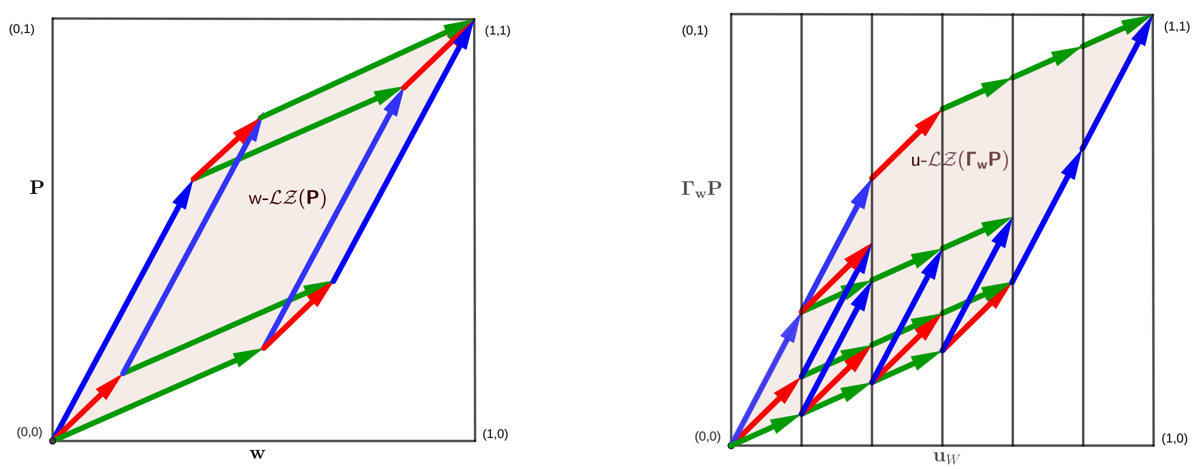
4.4. Lemma. *Legyen* $\mathbf{P}$ *sztohasztikus mátrix n valószínűségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en, valamint* $\mathbf{w}$ *teljes tartójú, racionális komponensű eloszlás szintén* $\mathcal{X}$*. Ekkor*

$$w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) = u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{\Gamma_w P}). \tag{47}$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{t} \in \mathcal{t}(\mathcal{X})$, ekkor $\mathbf{P^w}^T\mathbf{t} \in w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P})$. Valamint

$$\mathbf{P^w}^T\mathbf{t} = \mathbf{P^w}^T\mathbf{\Gamma}_\mathbf{w}^T(\mathbf{\Gamma}_\mathbf{w}^{-1})^T\mathbf{t} = \mathbf{P^w}^T\mathbf{\Gamma}_\mathbf{w}^T\tilde{\mathbf{t}} = (\mathbf{\Gamma_w P^w})^T\tilde{\mathbf{t}} \in \mathcal{LZ}(\mathbf{\Gamma_w P^w}) = u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{\Gamma_w P}),$$

ahol $\tilde{\mathbf{t}} = (\mathbf{\Gamma}_\mathbf{w}^{-1})^T\mathbf{t} \in \mathcal{t}(W) = [0,1]^W$, hiszen $\mathbf{\Gamma}_\mathbf{w}^{-1}$ sztochasztikus. Tehát $\forall \mathbf{t} : \mathbf{P^w}^T\mathbf{t} \in u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{\Gamma_w P})$. Hasonlóan $\forall \mathbf{t} \in \mathcal{t}(W) : \mathbf{P^w}^T\mathbf{\Gamma}_\mathbf{w}^T\mathbf{t} = \mathbf{P^w}^T\hat{\mathbf{t}}$, ahol $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{\Gamma}_\mathbf{w}^T\mathbf{t} \in \mathcal{t}(\mathcal{X})$, hiszen $\mathbf{\Gamma_w}$ sztochasztikus. Vagyis $\forall \mathbf{t} : \mathbf{P^w}^T\mathbf{\Gamma}_\mathbf{w}^T\mathbf{t} \in w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P})$ □



8. ábra. A $w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) = \mathcal{LZ}(\mathbf{P^w})$ az ábra bal oldalán és az $u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{\Gamma_w P}) = \mathcal{LZ}(\mathbf{\Gamma_w P^w})$ az ábra jobb oldalán. Látható, hogy a $\mathbf{\Gamma_w}$ leképezés a zonotópot nem változtatja meg, csak a csúcsokat sűríti úgy, hogy a kitüntetett $\mathbf{w}$ állapothoz tartozó komponensek a beágyazás után egyenlőek legyenek.

4.5. Lemma. *Legyen* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *sztohasztikus mátrix* n *valószínüségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en és* $\mathcal{Y}$*-on,* $\mathbf{w}$ *és* $\mathbf{w}'$ *teljes rangú, racionális komponensű eloszlás* $\mathcal{X}$*-en és* $\mathcal{Y}$*-on. Ekkor* $\Gamma_{\mathbf{w}'}$ *és* $\Gamma_{\mathbf{w}}$ *definiálható egy közös* W *nevezővel, mely leképezésekre:*

$$\Gamma_{\mathbf{w}'}\mathbf{Q} \prec^D \Gamma_{\mathbf{w}}\mathbf{P} \iff \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : \ (\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{w}') \prec (\mathbf{P}\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Bizonyítás. ($\Longrightarrow$): Legyen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor $\exists \mathbf{B}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^W \longrightarrow \mathbb{R}^W$ bisztochasztikus:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}'}\mathbf{Q}\mathbf{v}.$$

Amivel definiálható $\mathbf{W}_{\mathbf{v}} := \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}'}^{-1} \circ \mathbf{B}_{\mathbf{v}} \circ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}}$. $\mathbf{W}_{\mathbf{v}}$ bisztochasztikus, mert bisztochasztikus mátrixok szorzata is bisztochasztikus és

$$\mathbf{W}_{\mathbf{v}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{v} \ \text{ és } \ \mathbf{W}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} = \mathbf{w}'.$$

($\Longleftarrow$): Ugyanez az érvelés elmondható a másik irányra is, csak most minden $\mathbf{W}_{\mathbf{v}}$-hez definiálható egy bisztochasztikus leképezés $\mathbf{B}_{\mathbf{v}} := \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}'} \circ \mathbf{W}_{\mathbf{v}} \circ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}}^{-1}$. A bizonyítás egy kommutatív diagramon összefoglalható:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{P}\mathbf{v}, \mathbf{w}) \arrow[r, mapsto, "\mathbf{W}_{\mathbf{v}}"] \arrow[d, mapsto, "\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}}"] & (\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{w}') \arrow[d, mapsto, "\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}'}"] \\
(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}}\mathbf{P}\mathbf{v}, \mathbf{u}) \arrow[r, mapsto, "\mathbf{B}_{\mathbf{v}}"] & (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{w}}\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{u}).
\end{tikzcd}$$

□

A 4.4. lemma segítségével a Koshevoy-tétel (3.7. tétel) általánosítható teljes rangú, racionális komponensű vektorokkal kiegészített zonotópokra és átképezhetőségre.

4.6. Tétel. *Legyen* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *sztohasztikus mátrix* n *valószínüségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en és* $\mathcal{Y}$*-on,* $\mathbf{w}$ *és* $\mathbf{w}'$ *teljes rangú, racionális komponensű eloszlások* $\mathcal{X}$*-en és* $\mathcal{Y}$*-on. Ekkor*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : \ (\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{w}') \prec (\mathbf{P}\mathbf{v}, \mathbf{w}) \iff w'\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}).$$

Bizonyítás. A 4.4., 4.5. lemmák és a 3.7. tétel miatt

$$\begin{gathered} w'\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) \iff u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{\Gamma_{w'}Q}) \subseteq u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{\Gamma_w P}) \iff \mathbf{\Gamma_{w'}Q} \prec^D \mathbf{\Gamma_w P} \\ \mathbf{\Gamma_{w'}Q} \prec^D \mathbf{\Gamma_w P} \iff \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : \ (\mathbf{Qv}, \mathbf{w}') \prec (\mathbf{Pv}, \mathbf{w}). \end{gathered} \tag{48}$$

□

4.7. Következmény. *A 4.6. tétel egy speciális esete ha* $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$. *Ekkor*

$$\mathbf{Q} \prec_w^D \mathbf{P} \iff w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P})$$

4.8. Megjegyzés. *A 4.6. tételt kiegészített zonotópok segítségével mondtuk ki, de átfogalmazható az egyszerű zonotópok nyelvére is, hiszen* $w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P}) = \mathcal{LZ}(\mathbf{P^w})$. *Azaz, ha* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *teljes rangú, racionális komponensű oszlopvektorokból épül fel, akkor a következő állítások ekvivalenciája következik a tételből:*

(i) $\exists k \in [n]$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, *melyre* $v_k = 0 : \ (\mathbf{Qv}, \mathbf{q}^{(k)}) \prec (\mathbf{Pv}, \mathbf{p}^{(k)})$,

(ii) $\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P})$

(iii) $\forall k \in [n]$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, *melyre* $v_k = 0 : \ (\mathbf{Qv}, \mathbf{q}^{(k)}) \prec (\mathbf{Pv}, \mathbf{p}^{(k)})$,

4.2. Lorenz-zonotópok tartalmazásának jellemzése

Az előző alfejezetben a Koshevoy-tételt (3.7) használva jutottunk új eredményekre és általánosabb átképezhetőségi kérdéseket jellemeztünk. A következő tételben pusztán geometriai megfontolásokat használva jutunk új állításokra a zonotópok és átképezhetőségi kérdések kapcsolatáról.

4.9. Tétel. *Adott* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *sztohasztikus mátrix n valószínüségi oszlopvektorral* $\mathcal{X}$*-en és* $\mathcal{Y}$*-on. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P})$

(ii) $\forall \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}([n]) \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : \ \exists \mathbf{W}_{\boldsymbol{\lambda\mu}} \in \mathrm{M}^{\mathrm{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} : \ \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{W}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}$ *és* $\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{W}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}\mathbf{P}\boldsymbol{\mu}$

(iii) $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n_+ : \ \exists \mathbf{W}_{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} \in \mathrm{M}^{\mathrm{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} : \ \mathbf{Qv}_1 = \mathbf{W}_{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}\mathbf{Pv}_1$ *és* $\mathbf{Qv}_2 = \mathbf{W}_{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}\mathbf{Pv}_2$

(iv) $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : \exists \mathbf{W}_{\mathbf{v}} \in \mathrm{M}^{\mathrm{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} : \mathbf{Qv} = \mathbf{W}_{\mathbf{v}}\mathbf{Pv}$,

Bizonyítás. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Legyen $E_{\boldsymbol{\lambda\mu}} : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $E_{\boldsymbol{\lambda\mu}}(\mathbf{w}) = (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{w})\,\mathbf{e}_1 + (\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{w})\,\mathbf{e}_2$, ahol $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ egy kanonikus bázis $\mathbb{R}^2$-n. $E_{\boldsymbol{\lambda\mu}}$ lineáris, ezért $\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P}) \implies E_{\boldsymbol{\lambda\mu}}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq E_{\boldsymbol{\lambda\mu}}\mathcal{LZ}(\mathbf{P})$. Könnyen látható, hogy $E_{\boldsymbol{\lambda\mu}}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) = \mathcal{LZ}(\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\lambda\mu}})$, és hasonlóan $\mathbf{P}$-re, ahol

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\lambda\mu}} = \left[\begin{pmatrix} \\ \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{P}\boldsymbol{\mu} \\ \\ \end{pmatrix}\right], \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\lambda\mu}} = \left[\begin{pmatrix} \\ \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu} \\ \\ \end{pmatrix}\right].$$

Valóban, bármely $\mathbf{t} \in [0,1]^{\mathcal{X}}$ vektorra:

$$\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}{}^T\mathbf{t} = ((\mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda})^T\mathbf{t})\,\mathbf{e}_1 + ((\mathbf{Q}\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{t})\,\mathbf{e}_2 = (\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{t})\,\mathbf{e}_1 + (\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{t})\,\mathbf{e}_2 = E_{\boldsymbol{\lambda\mu}}(\mathbf{Q}^T\mathbf{t}).$$

Tehát $\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P}) \implies \mathcal{LZ}(\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\lambda\mu}}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P}_{\boldsymbol{\lambda\mu}})$, ami ekvivalens a (ii) állítással az 1.19. tétel és a 2.5. következmény miatt.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Triviális következmény, hiszen csak egy skála faktor köti össze a két állítást.
(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Legyen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ tetszőleges. Ekkor $\exists \mathbf{v}_+, \mathbf{v}_- \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{v} = \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$. Továbbá a (iii) állítás szerint $\exists \mathbf{W}_{\mathbf{v}} \in \mathrm{M}^{\mathrm{stoch.}}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$, hogy $\mathbf{Qv}_+ = \mathbf{W}_{\mathbf{v}}\mathbf{Pv}_+$ és $\mathbf{Qv}_- = \mathbf{W}_{\mathbf{v}}\mathbf{Pv}_-$. Azaz:

$$\mathbf{Qv} = \mathbf{Qv}_+ - \mathbf{Qv}_- = \mathbf{W}_{\mathbf{v}}\mathbf{Pv}_+ - \mathbf{W}_{\mathbf{v}}\mathbf{Pv}_- = \mathbf{W}_{\mathbf{v}}\mathbf{Pv}.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Legyen $\mathbf{q} \in \mathcal{LZ}(\mathbf{Q})$. Ekkor $\exists \mathbf{t} \in [0,1]^{\mathcal{Y}} : \mathbf{q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{t}$. Legyen továbbá $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ tetszőleges. Ekkor létezik $\mathbf{W}_{\mathbf{v}}$ sztochasztikus, hogy $\mathbf{Qv} = \mathbf{W}_{\mathbf{v}}\mathbf{Pv}$, valamint:

$$\mathbf{v}^T\mathbf{q} = \mathbf{v}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{t} = \mathbf{v}^T\mathbf{P}^T\mathbf{W}_{\mathbf{v}}^T\mathbf{t} = \mathbf{v}^T\mathbf{P}^T\tilde{\mathbf{t}},$$

ahol $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{W}_{\mathbf{v}}{}^T\mathbf{t} \in [0,1]^{\mathcal{X}}$. Vagyis $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ és $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) : \exists \mathbf{p} \in \mathcal{LZ}(\mathbf{P}) : \mathbf{v}^T\mathbf{q} = \mathbf{v}^T\mathbf{p}$, ami ekvivalens az (i) állítással a 3.6. következmény miatt. □

4.10. Megjegyzés. *A 4.8. megjegyzés alapján a 4.6. tétel is a Lorenz-zonotópok tartalmazását karaktelizálja. Nyitott kérdés, hogy a két tételt össze lehet-e valahogy kötni, melyik az általánosabb állítás, esetleg melyik következik a másikból.*

5. Összefoglalás

Az átképezhetőségi kérdések az utóbbi évtizedekben fontos szerepet kaptak különböző kvantum-erőforráselméletekben, mint például a kvantumtermodinamikában vagy az LOCC elméletben. A dolgozat keretében általános átképezhetőségi kérdéseket vizsgáltunk a Lorenz-zonotópok segítségével klasszikus és kvantum esetben is.

Az 1. fejezetben összegyűjtöttük az eddigi eredményeket a majorizáció és a kétállapot átképezhetőség területén (1.11., 1.14. és 1.19. tétel). Ezután a következő fejezetben bevezettük a dolgozat központi fogalmát, a Lorenz-zonotópot és ennek segítségével a teljesen általános többállapot átképezhetőséget vizsgáltuk. Az átképezhetőségre szükséges (és egy speciális esetben elégséges) feltételt adtunk. Egy ellenpéldával bemutattuk, hogy a többállapot átképezhetőség jellemzéséhez nem elég a zonotópok tartalmazása. A 3. fejezetben áttértünk az iránymenti átképezhetőségre. Kimondtuk a már korábban is ismert Koshevoy-tételt (3.7. tétel). Ezt felhasználva több irányban is általánosítottuk Koshevoy állítását. Először a bisztochasztikus klasszikus átképezhetőséget terjesztettük ki egységtartó kvantumátképezhetőségre (3.13. tétel). Majd a klasszikus esetben a teljesen kevert állapot helyett tetszőleges teljes tartójú, racionális komponensű állapotok egymásba transzformálását követeltük meg (4.6. tétel). A fejezet végén általános geometriai megfontolásokkal bizonyítottunk egy tételt, amelyben nincs kitüntetett szerepe semmilyen állapotnak, illetve állapotpárnak.

A dolgozatban szereplő legfontosabb tételeket a 9. ábrán foglaltuk össze, a dupla nyilakkal jelezve, hogy mely állítások kaphatóak meg általánosabb tételek speciális eseteként.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=small]
\boxed{\begin{array}{c}\text{3.13. tétel}\\ u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\sigma}) \subseteq u\text{-}\mathcal{QLZ}(\boldsymbol{\rho})\\ \Updownarrow\\ \forall \mathbf{v}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}:\\ (\mathbf{v}^T\boldsymbol{\sigma}, I/d)\to(\mathbf{v}^T\boldsymbol{\rho}, I/d)\end{array}} \arrow[dd, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c}\text{4.6. tétel}\\ w'\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq w\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P})\\ \Updownarrow\\ \forall \mathbf{v}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}:\\ (\mathbf{Qv}, \mathbf{w}')\to(\mathbf{Pv}, \mathbf{w})\end{array}} \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c}\text{4.9. tétel}\\ \mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{LZ}(\mathbf{P})\\ \Updownarrow\\ \forall \boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}([n]):\\ (\mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu})\to(\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{P}\boldsymbol{\mu})\end{array}} \arrow[dd, Rightarrow] \\
 & \boxed{\begin{array}{c}\text{3.7. tétel [8]}\\ u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{Q}) \subseteq u\text{-}\mathcal{LZ}(\mathbf{P})\\ \Updownarrow\\ \forall \mathbf{v}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}:\\ (\mathbf{Qv}, \mathbf{u})\to(\mathbf{Pv}, \mathbf{u})\end{array}} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{1.14. tétel [5]}\\ \mathcal{L}(\mathbf{s}(\sigma)) \leq \mathcal{L}(\mathbf{s}(\rho))\\ \Updownarrow\\ (\sigma, I/d)\to(\rho, I/d)\end{array}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c}\text{1.11. tétel [5]}\\ \mathcal{L}(\mathbf{q}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{p})\\ \Updownarrow\\ (\mathbf{q}, \mathbf{u})\to(\mathbf{p}, \mathbf{u})\end{array}} & \boxed{\begin{array}{c}\text{1.19. tétel [14]}\\ \mathcal{L}(\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}) \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})\\ \Updownarrow\\ (\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)})\to(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)})\end{array}} \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

9. ábra. A dolgozat legfontosabb tételei, illetve az azok közötti kapcsolatok. A $\to$ szimbólum az átképezhetőséget jelöli, klasszikusan sztochasztikus mátrixszal, kvantumosan CPTP leképezéssel.

További munkánk során szeretnénk kapcsolatot találni a 4.9. és a 4.6. tételek között, esetleg egy még általánosabb tételt kimondani, amelyből következnek. Jövőbeli terv a Lorenz-zonotópokkal végzett vizsgálatok kiterjesztése direkt átképezhetőségről approximatív, katalitikus illetve asszimptotikus átképezhetőségre.

Hivatkozások

[1] BRANDAO, F. G. S. L. ; HORODECKI, M. ; NG, N. H. Y. ; OPPENHEIM, J. ; WEHNER, S. : The second laws of quantum thermodynamics: Supplementary Information. In: *Pnas* (2015), Nr. c, S. 1–11. – ISBN 9781137332875

[2] BUSCEMI, F. ; GOUR, G. : Quantum Relative Lorenz Curves. (2017), S. 1–14

[3] CHITAMBAR, E. ; GOUR, G. : Quantum resource theories. In: *Reviews of Modern Physics* 91 (2019), Nr. 2, S. 1–62. http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.91.025001. – DOI 10.1103/RevModPhys.91.025001. – ISSN 15390756

[4] DALTON, H. : The Measurement of the Inequality of Incomes. In: *The Economic Journal* 30 (1920), Nr. 119, 348–361. http://www.jstor.org/stable/2223525

[5] HARDY, G. H. ; LITTLEWOOD, J. E. ; PÓLYA, G. : *Inequalities*. Cambridge University Press https://books.google.hu/books?id=t1RCSP8YKt8C. – ISBN 9780521358804

[6] HORN, A. : Doubly Stochastic Matrices and the Diagonal of a Rotation Matrix. In: *American Journal of Mathematics* 76 (1954), 7, Nr. 3, 620. http://dx.doi.org/10.2307/2372705. – DOI 10.2307/2372705. – ISSN 00029327

[7] HORODECKI, M. ; OPPENHEIM, J. : Fundamental limitations for quantum and nanoscale thermodynamics. In: *Nature Communications* 4 (2013), Nr. May, S. 1–6. http://dx.doi.org/10.1038/ncomms3059. – DOI 10.1038/ncomms3059. – ISSN 20411723

[8] KOSHEVOY, G. : Multivariate Lorenz majorization. In: *Social Choice and Welfare* 12 (1995), 2, Nr. 1, 93–102. http://dx.doi.org/10.1007/BF00182196. – DOI 10.1007/BF00182196. – ISSN 0176–1714

[9] KREIN, M. ; MILMAN, D. : On extreme points of regular convex sets. In: *Studia Mathematica* 9 (1940), Nr. 1, S. 133–138. http://dx.doi.org/10.4064/sm-9-1-133-138. – DOI 10.4064/sm–9–1–133–138. – ISSN 0039–3223

[10] LAX, P. D.: *Functional Analysis*. John Wiley & Sons, 2002. – ISBN 978–0–471–55604–6

[11] Lorenz, M. O.: Methods of Measuring the Concentration of Wealth. In: *American Statistical Association* 9 (1905), Nr. 70, 209–219. `http://www.jstor.org/stable/2276207?origin=crossref`. – ISSN 15225437

[12] Lostaglio, M. : An introductory review of the resource theory approach to thermodynamics. In: *Reports on Progress in Physics* 82 (2019), Nr. 11, S. 1–36. `http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/ab46e5`. – DOI 10.1088/1361–6633/ab46e5. – ISSN 00344885

[13] Nielsen, M. A.: Conditions for a Class of Entanglement Transformations. In: *Physical Review Letters* 83 (1999), 7, Nr. 2, 436–439. `http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.436`. – DOI 10.1103/PhysRevLett.83.436. – ISSN 0031–9007

[14] Ruch, E. ; Schranner, R. ; Seligman, T. H.: Generalization of a theorem by Hardy, Littlewood, and Pólya. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 76 (1980), 7, Nr. 1, 222–229. `http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(80)90075-X`. – DOI 10.1016/0022–247X(80)90075–X. – ISSN 0022247X