A hiperbolikus tér egybevágóságainak szintetikus osztályozása

Készítette:

Kiss Csaba

BME Matematika BSc,

III.évfolyam

Témavezető:

Dr. G. Horváth Ákos

egyetemi tanár,

BME GEOM

2021. október 27.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A hiperbolikus sík egybevágóságait minden elérhető irodalom a félsíkmodellen tárgyalja, annak lineáris törtfüggvényei alapján. A hiperbolikus tér izometriáit aszerint kategorizálják, hogy hány végtelen távoli fixpontjuk van a féltérmodellben ([1]). Erre vonatkozólag találunk mozgás leírásokat az előbb említett modellben a komplex Mőbius transzformációkkal, ahol a modellt határoló síkról beterjesztik a féltérbe a törtlineáris transzformációkat. Ez motiválja vizsgálatunkat a hiperbolikus tér egybevágóságainak a szintetikus, analitikus eszközt nem igénylő modellmentes leírását. Megjegyezzük, hogy sem a magyar nyelvű, sem az angol nyelvű irodalomban ilyen osztályozás nem hozzáférhető, amint azt ellenőrízhetjük az alábbi könyvekben: [2], [3], [4], [5], [6], [7].

1. Egybevágóságok szintetikus osztályozása

Az osztályozás lehetősége azon az abszolút tételen alapul, hogy tetszőleges egybevágósága az n-dimenziós abszolút térnek, előáll legfeljebb $n+1$ darab hipersikra tükrözés szorzataként. Így ha ezeket a véges szorzatokat többféleképpen reprezentálhatjuk hipersíkok szorzataként, akkor a reprezentálásnak esetleg véges számú konkrét módja lehet, melyek a típusokat meghatározzák. Átreprezentálásnak fogjuk nevezni azokat az eljárásokat, amikor valamely előre adott síkállásokat úgy változtatunk, hogy közben a generált transzformáció változatlan marad. A [5] könyv 3.fejezetében szereplő eljárást terjesztjük ki a hiperbolikus tér esetére ezért használjuk azokat az állításokat, melyek változtatás nélkül alkalmazhatók a jelen körülmények között is. Ilyen például a 3.3.1 Lemma a metsző illetve ultraparallel síksor esetére vonatkoztatva, de a párhuzamos síksorok esetén újabb vizsgálatok is szükségesek. A következőkben idézzük a könyvben szereplő osztályozási eredményeket.

1.1. Az Euklideszi esetek

Az Euklideszi sík egybevágóságai a következő típusokba sorolhatók ([5, p. 154]

- **identitás:** Minden pont képe saját maga.
- **tükrözés:** Egy egyenesre vonatkozó tükrözés.
- **eltolás:** Párhuzamos egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.
- **forgatás:** Metsző egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.
- **csúsztatva tükrözés:** Eltolás szorzata a közös merőleges egyenesére vonatkozó tükrözéssel.

Az Euklideszi tér egybevágóságai a következő típusokba sorolhatók ([5, p. 158]):

- **identitás:** Minden pont képe önmaga.
- **tükrözés:** Egy síkra való tükrözés.
- **eltolás:** Két párhuzamos síkra való tükrözés szorzata.
- **forgatás:** Két metsző síkra való tükrözések szorzata.
- **csúsztatva tükrözés:** Eltolás szorzata egy olyan tükrözéssel, mely síkja az eltolás irányával párhuzamos.
- **forgatva tükrözés:** Forgatás szorzata egy olyan tükrözéssel, mely síkja merőleges a forgatás tengelyére.
- **csavarmozgás:** Forgatás szorzata tengelyével párhuzamos irányú eltolással.

1.2. A hiperbolikus sík esete

1.1. Tétel. *A hiperbolikus sík egybevágóságai a következő típusokba sorolhatók ([5, p. 156]):*

- **identitás:** *Minden pont képe saját maga.*
- **tükrözés:** *Egy egyenesre vonatkozó tükrözés.*
- **párhuzamos áthelyezés:** *Párhuzamos egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.*
- **eltolás:** *Ultraparallel egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.*
- **forgatás:** *Metsző egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.*
- **csúsztatva tükrözés:** *Eltolás szorzata a közös merőleges egyenesére vonatkozó tükrözéssel.*

2. A hiperbolikus tér egybevágóságai

Az Euklideszi mintát követve ebben a fejezetben osztályozzuk a hiperbolikus tér egybevágóságait. Vizsgálatunk eredményét a dolgozat alábbi fő tétele tartalmazza:

2.1. Tétel (A hiperbolikus tér egybevágóságai)**.** *A hiperbolikus tér egybevágósága identitás, síktükrözés, eltolás, párhuzamos áthelyezés, forgatás, csúsztatva tükrözés, forgatva tükrözés,csavarmozgás, ahol*

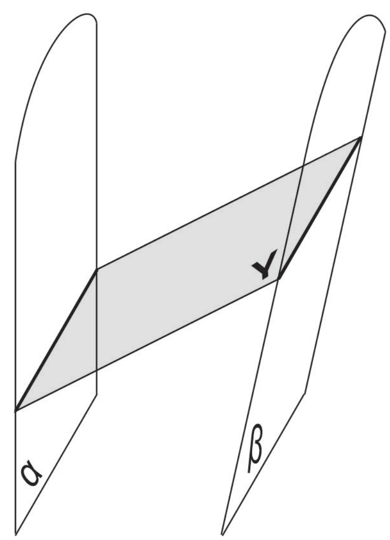
- **eltolás:** *Két ultraparallel síkra vonatkozó tükrözés szorzata.*
- **párhuzamos áthelyezés:** *Párhuzamos síkpárra vonatkozó tükrözések szorzata.*
- **forgatás:** *Metsző síkpárra vonatkozó tükrözések szorzata.*
- **csúsztatva tükrözés:** *Eltolás szorzata olyan tükrözéssel, mely síkja tartalmazza a két sík közös merőlegesének egyenesét.*
- **forgatva tükrözés:** *Forgatás szorzata olyan tükrözéssel, mely síkja a forgatás tengelyére merőleges.*
- **párhuzamosan áthelyezve tükrözés:** *Párhuzamos áthelyezés szorzata olyan tükrözéssel, mely síkja a párhuzamos áthelyezést reprezentáló síkokra merőleges.*
- **csavarmozgás:***Forgatás szorzata olyan eltolással, ahol a forgatás tengelye merőleges az eltolást reprezentáló két sík mindegyikére.*

A bizonyításhoz szükségünk lesz az eszköztár kibővítésére.

2.1. Párhuzamos síkok által meghatározott transzformáció átreprezentálása

A Cayley-Klein modellben α, β párhuzamos síkokhoz tartozó síksort egyértelműen meghatározza egy olyan δ sík, mely merőleges α-ra és β-ra, valamint tartalmazza azt a végtelen távoli pontot, ahol α és β metszik egymást. Legyen ez a pont x.
Ekkor γ sík eleme α, β párhuzamos síkok síksorának akkor és csak akkor, ha δ merőleges γ-ra és $x \in \delta \cap \gamma$
A cél, hogy modell mentesen is találjunk egy ilyen δ síkot, mely merőleges α-ra és β-ra, valamint párhuzamos egyenesekben metszi őket.

2.1. Definíció. *A hiperbolikus térben α és β síkok párhuzamosak, ha nem metszők és $\exists\gamma$ sík, melyre $\alpha \cap \gamma$ és $\beta \cap \gamma$ egyenesek párhuzamosak.*



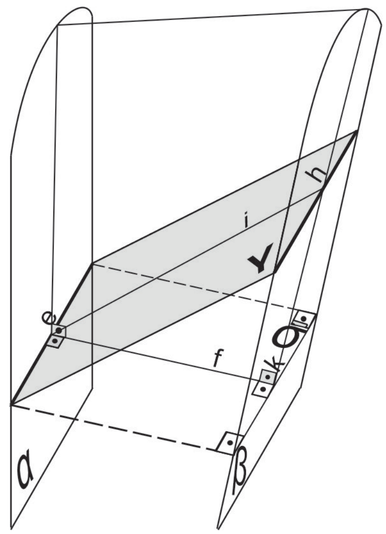
1. ábra.

2.2. Tétel. $\forall$ *párhuzamos síkpárhoz a hiperbolikus térben található egy olyan δ sík, mely merőleges mindkettőre és párhuzamos egyenespárban metszi őket. Ekkor ez a δ sík és az adott végtelen távoli pont már meghatározza α és β*

síksorát, amelyen belül átreprezentálható az általuk meghatározott transzformáció.

Bizonyítás. Legyen α és β sík párhuzamos, γ az a sík, mely párhuzamos egyenespárban metszi őket. Tegyük fel, hogy γ nem merőleges α-ra és β-ra (különben kész lennénk).
$e := \alpha \cap \gamma$, $h := \beta \cap \gamma$, e merőleges vetülete β-n legyen k. Tudjuk, hogy e és k nem metsző.
Tegyük fel, hogy ultraparallelek. Legyen $\delta := (e, k)$ sík.
Ekkor $\exists f \in \delta$ egyenes, amely merőleges e-re és k-re. Legyen y olyan sík, mely tartalmazza f-et, és merőleges δ-ra. Ekkor y merőleges β-ra, és e-re, tehát merőleges γ-ra is.
Legyen $i := y \cap \gamma$, i merőleges e-re és h-ra, ez viszont ellentmondás, mivel e és h párhuzamos egyenesek.
Ebből következik, hogy e és k is párhuzamosak (2. ábra).

Most lássuk be, hogy k ugyanabban a végtelen távoli pontban metszi $e-t$, mint h.
Tegyük fel, hogy nem igaz. Viszont tudjuk, hogy k és h egysíkúak, ha k nem ugyanabban a végtelen távoli pontban metszi $e-t$, mint h, akkor k, h, e is egysíkúak, ami ellentmondás.



2. ábra.

Bolyai: Appendix 9.&-ának tétele szerint:

"Két párhuzamos egyenes egyikén az egyenesek síkjára állított merőleges sík és a másik egyenesre állított olyan sík, mely az egyenesek közös síkjával (a merőleges irányából nézve) derékszögnél kisebb szöget zár be mindig metsző."

Tudjuk, hogy δ merőleges β-ra, és párhuzamos egyenespárban metszi α-t és β-t, melyek nem metsző síkok, tehát Bolyai tétele miatt ekkor δ merőleges α-ra is.

□

A tétel bizonyítása előtt két lemmát vizsgálunk meg a hiperbolikus térben, melyek megkönnyítik a diszkussziót.

2.2. Definíció. *Két kitérő egyenes merőlegesek egymásra a hiperbolikus térben, ha az egyik merőleges a másik és a normáltranszverzális által kifeszített* *síkra.*

2.3. Definíció. *Egyenesre való tükrözés olyan forgatás, melyben a forgatás reprezentáló két sík merőleges egymásra és az adott egyenesben metszik egymást.*

2.3. Lemma. *Két kitérő egyenesre való tükrözés szorzata csavarmozgás.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen analóg az euklideszi esettel ([5, p. 159]), mégpedig:
Abszolút tétel, hogy a három dimenziós térben minden kitérő egyenespárnak létezik normáltranszverzálisa. Legyen a két kitérő egyenesünk e és f, illetve a normáltranszverzálisuk n. Legyen $\alpha = (e, n)$, $\beta = (f, n)$, γ olyan, hogy $e \in \gamma$ és γ merőleges n-re, és legyen δ olyan, hogy $f \in \delta$ és δ merőleges n-re. Ekkor $\alpha \cap \beta = n$, α és β merőlegesek γ-ra és δ-ra., valamint γ és δ ultraparellek. Ekkor a transzformáció: $f \circ e = \delta \circ \beta \circ \gamma \circ \alpha = \delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$. Ami így egy csavarmozgást definiál. $\square$

2.4. Lemma. *Két merőleges, kitérő tengelyű forgatás szorzata csavarmozgás.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen analóg az euklideszi esettel ([5, p. 160]), mivel csak a normáltranszverzális létezését használjuk ki, illetve, hogy kitérő egyenesekre vonatkozó tükrözések szorzata csavarmozgás, amit az előbb bizonyítottunk.

$\square$

2.2. A tétel bizonyítása

Abszolút tétel, hogy a térben minden egybevágóság előáll legfeljebb 4 síkra tükrözés szorzataként ([5, p. 152]), tehát a hiperbolikus térben is igaz. A következő részekben ezt használjuk ki, hogy az összes egybevágóságot meghatározzuk. Az egybevágóságok vizsgálatát a reprezentáló tükrözések száma alapján végezzük.

A diszkussziónkat az adott egybevágóságot megadó síktükrözések száma alapján végezzük. Mivel a legfeljebb két tükrözés szorzatai külön nevesítve vannak a tétel kimondásában, bizonyítani valónk itt nincs, azonban használjuk a következő elnevezéseket:

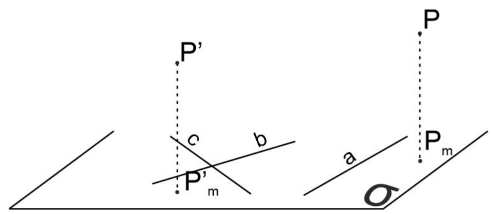
- **identitás:** Nulla síkra tükrözés
- **tükrözés:** Egy síkra tükrözés
- **eltolás:** Két ultraparallel síkra vonatkozó tükrözés szorzata.
- **párhuzamos áthelyezés:** Párhuzamos síkpárra vonatkozó tükrözések szorzata.
- **forgatás:** Metsző síkpárra vonatkozó tükrözések szorzata.

2.3. 3 síkra tükrözés szorzata

Legyen a három sík α, β és γ, azaz a leképezésünk $(\gamma \circ \beta \circ \alpha)$ alakú összetett leképezés, ahol α jelöli az α síkra vonatkozó tükrözést is.

2.3.1. Van a 3 síknak közös merőleges síkja:

Legyen ez δ. Ekkor tetszőleges pont (P) képe úgy kapható meg, hogy vesszük a merőleges vetületét δ-n (P_m). δ síkban végrehajtjuk rajta a $c \circ b \circ a$ egybevágóságot, ahol $a = \delta \cap \alpha$, $b = \delta \cap \beta$, $c = \delta \cap \gamma$. Ekkor kapjuk P'_m pontot. Majd megkeressük P'-t úgy, hogy δ-ra nézve azonos féltérben legyen, mint P és ugyanolyan távolságra δ-tól, valamint a merőleges vetülete éppen P'_m legyen (3. ábra). A síkbeli eseteknek megfelelően ez a transzformáció vagy elfajul tükrözéssé, vagy csúsztatva tükrözés.



3. ábra.

2.3.2. A kiindulási tükörsíkok kölcsönös helyzete alapján a következő esetek adódnak:

Tegyük fel először, hogy az első két sík α és β metszik egymást egy m egyenesben. Ekkor a következő esetek adódnak

- $m := \alpha \cap \beta$ **és** γ **ultraparallel :** $\alpha \cap \beta = m$, ha γ olyan, hogy m ultraparallel γ-ra vett merőleges vetületével, akkor m-re merőleges sík merőleges γ-ra is, tehát van α, β, γ-nak közös merőleges síkja. Előző eset.

- $m := \alpha \cap \beta$ **és** γ **párhuzamos:** $\alpha \cap \beta =: m$, m' m merőleges vetülete γ-n, m és m' párhuzamosak. Ekkor reprezentáljuk át $\beta \circ \alpha$-t úgy, hogy $\beta' = (m, m')$ sík.Legyen m" m' merőleges vetülete α'-re, majd reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta'$-t úgy, hogy $\gamma' = (m", m')$. Ekkor $\beta" \cap \gamma' = m'$ és $\alpha' \cap \gamma' = m"$, valamint m' és m" párhuzamosak. Azt kapjuk, hogy γ' merőleges β"-re és α'-ra, valamint párhuzamos egyenespárban metszi őket. Ez a transzformáció egy párhuzamos áthelyezés, és a párhuzamos áthelyezést reprezentáló síkokra egyszerre merőleges síkre való tükrözés szorzata.(Hívjuk ezt mostantól párhuzamosan áthelyezve tükrözésnek.)

- $m := \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{O\}$**:** Reprezentáljuk át $\beta \circ \alpha$-t úgy, hogy β' merőleges legyen γ-ra, majd $\gamma \circ \beta'$-t úgy, hogy γ' merőleges legyen α'-re. Ekkor γ' α'-t és β"-t vagy párhuzamos, vagy ultraparallel egyenesben metszi, tehát a transzformáció csúsztatva tükrözés, vagy párhuzamosan áthelyezve tükrözés lehet.

Ha α és β nem metszik egymást, de van a három sík között metsző síkpár akkor szintén a fenti esetek lehetségesek. Legyen például:

- **$\beta \cap \gamma = m$, m és merőleges vetülete α-n párhuzamos:** Ekkor alkalmazhatjuk a 2. eset gondolatmenetét: $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ átreprezentálható úgy, hogy $\beta' \circ \gamma' \circ \alpha'$ párhuzamosan áthelyezve tükrözés, és α' merőleges β'-re és γ'-re, tehát $\beta' \circ \gamma' \circ \alpha' = \beta' \circ \alpha' \circ \gamma' = \alpha' \circ \beta' \circ \gamma'$. Ekkor a transzformáció párhuzamosan áthelyezve tükrözés.

Hasonlóképpen adódnak a további esetek, tehát ezek a transzformációk vagy csúsztatva tükrözések, vagy párhuzamosan áthelyezve tükrözések, vagy tükrözések. Vizsgáljuk most azokat az eseteket, amikor a síkok között nincsenek metszők.

- **α, β, γ egy párhuzamos síksorhoz tartoznak:** Reprezentáljuk át $\beta \circ \alpha$-t úgy, hogy $\beta' = \gamma$, ekkor a transzformáció egy síkra (α'-re vonatkozó) tükrözés.

- **α, β, γ páronként párhuzamosak és 3 különböző végtelen távoli pontban metszik egymást:** Reprezentáljuk át $\beta \circ \alpha$-t úgy, hogy β' merőleges legyen γ-ra. Legyen $m := \beta' \cap \gamma$, valamint m merőleges vetülete α'-re m'. Ekkor m és m' párhuzamosak. Reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta'$-t úgy, hogy $\gamma' = (m, m')$. Ekkor γ' merőleges β"-re és α'-re, valamint párhuzamos egyenespárban metszi őket, tehát a transzformáció párhuzamosan áthelyezve tükrözés.

- **α, β párhuzamos, γ, α párhuzamos, γ, β ultraparallel:** Reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta$-t úgy, hogy β' messe α-t, legyen $m := \beta' \cap \alpha$, valamint m' m merőleges vetülete γ'-n. Ekkor m és m' ultraparallel, tehát van a 3 síkra egyszerre merőleges sík, ezt az esetet már tárgyaltuk.

- α, β párhuzamos, γ, α ultraparallel, γ, β párhuzamos: Reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta$-t úgy, hogy β' messe α-t. Legyen $m := \beta' \cap \alpha$, és m' m merőleges vetülete γ-n. Ekkor m és m' párhuzamos, 2. eset.

- α, β **párhuzamos,** γ, α **ultraparallel,** γ, β **ultraparallel:** Reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta$-t úgy, hogy β' messe α-t. Legyen $m := \beta' \cap \alpha$, és m' m merőleges vetülete γ-n. Ekkor m és m' ultraparallel, 1. eset.

- α, β **ultraparallel,** γ, α **párhuzamos,** γ, β **párhuzamos:** Reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta$-t úgy, hogy β' messe α-t. Legyen $m := \beta' \cap \alpha$, és m' m merőleges vetülete γ-n. Ekkor m és m' párhuzamosak, 2.eset.

- α, β **ultraparallel,** γ, α **párhuzamos,** γ, β **ultraparallel::** Reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta$-t úgy, hogy β' messe α-t. Legyen $m := \beta' \cap \alpha$, és m' m merőleges vetülete γ-n. Ekkor m és m' ultraparallelek, 1.eset.

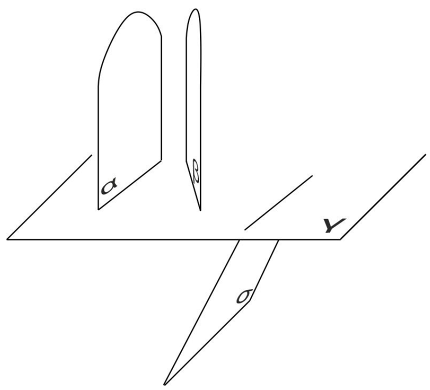
- α, β **ultraparallel,** γ, α **ultraparallel,** γ, β **párhuzamos:** Reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta$-t úgy, hogy β' messe α-t. Legyen $m := \beta' \cap \alpha$, és m' m merőleges vetülete γ-n. Ekkor m és m' párhuzamosak, 2.eset.

- α, β **ultraparallel,** γ, α **ultraparallel,** γ, β **ultraparallel:** Reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta$-t úgy, hogy $\beta' = \alpha$, ekkor $\alpha \circ \beta' \circ \gamma' = \gamma'$ tehát egy síkra tükrözés.

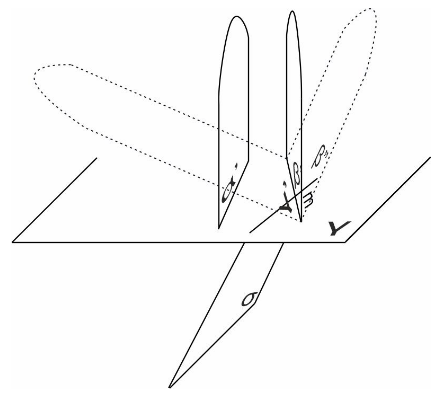
Összefoglalva láthatjuk, hogy legfeljebb 3 síktükrözés szorzataként az általunk az 2.1 Tételben leírt első hat eset valósul meg.

2.4. A 4 síkra tükrözés szorzatának az esete

A továbbiakban feltesszük, hogy a 4 síktükrözés első három leképezésének a szorzata nem egyszerűsödik tükrözéssé, azaz három nagy esetet kell vizsgálnunk, a kiindulási $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ egybevágóság párhuzamosan áthelyezve tükrözés, csúsztatva tükrözés vagy forgatva tükrözés.



4. ábra.



5. ábra.

2.4.1. Tegyük fel először, hogy $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ párhuzamosan áthelyezve tükrözés

- Ha γ **és** δ **metszők,** reprezentáljuk át $\beta \circ \alpha$-t úgy, hogy β' messe $\delta \cap \gamma$-t. Ekkor, ha β' tartalmazza $\delta \cap \gamma$-t a transzformáció két síkra tükrözésre redukálódik, ezért most azzal az esettel foglalkozunk, mikor nem tartalmazza. A második lépésben reprezentáljuk át $\gamma \circ \beta'$-t $m := \gamma \cap \beta'$ körül úgy, hogy β'' merőleges legyen δ-ra. Ekkor β'' merőleges γ'-re is, tehát $n := \delta \cap \gamma'$-re is (4.-5. ábra). Innen két esetet különböztetünk meg:

  – α' **és** β'' **metszők:**Legyen $t := \alpha' \cap \beta''$. Ekkor t és n merőleges egyenesek (mivel $t \in \beta''$) és transzformáció felbomlik t és n körüli forgatások szorzatára, tehát a transzformáció csavarmozgás.

  – α' **és** β'' **nem metszők:** Mivel α' és m párhuzamosak, ezért α és β'' csak $\beta' = \beta''$ esetben nem metszők. A transzformáció $\delta \circ \beta' \gamma \alpha'$ alakban írható fel, ahol $\delta \circ \beta'$ valamint $\gamma \circ \alpha'$ egyenesre való tükrözést reprezentálnak, ahol a két egyenes kitérő, tehát a transzformáció csavarmozgás.

- γ **és** δ **ultraparallelek:** Legyen $e := \alpha \cap \gamma$, $f := \beta \cap \gamma$, $g := \beta \cap \delta$. A $\delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$ transzformáció átírható $\delta \circ \beta \circ \gamma \circ \alpha$ alakba, mivel β és γ merőleges egymásra. Tudjuk, hogy β merőleges δ-ra, valamint hogy α merőleges γ-ra. Ekkor a transzformáció átírható a következő alakba: $g \circ e$, ahol g jelenti az g egyenesre való tükrözést, e az e-re valót. Immár csak e és g viszonyát kell meghatározni. Mivel e és f párhuzamosak, és f és g ultraparallelek, illetve ez a három egyenes nem egy síkba esik, ezért e és g csak kitérőek lehetnek. Ebből következik, hogy a transzformáció csavarmozgás.

- γ **és** δ **párhuzamosak:** Először reprezentáljuk át $\beta \circ \alpha$-t úgy, hogy β merőleges legyen δ-ra. Legyen $e := \alpha \cap \gamma$, $f := \beta \cap \delta$, $g := \beta \cap \gamma$. A $\delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$ transzformáció átírható $\delta \circ \beta \circ \gamma \circ \alpha$ alakba, mivel β és γ merőleges egymásra. Tudjuk, hogy β merőleges δ-ra, valamint hogy α merőleges γ-ra. Innen két esetet különböztetünk meg:

  - g **és** f **ugyanabban a végtelen távoli pontban metszik egymást, mint** e **és** g**.** Ekkor e és f is párhuzamos. Reprezentáljuk át $\gamma \circ \alpha$-t úgy, hogy $f \in \gamma'$. Majd reprezentáljuk át $\delta \circ \beta$-t úgy, hogy $\beta' = \gamma'$. A transzformációnk így redukálódik $\delta' \circ \alpha'$-ra. Amik jelen esetben párhuzamos síkok, hiszen az ő sugársorukat meghatározó sík pont γ'. Tehát a transzformáció párhuzamos eltolás.
  - g **és** f **nem ugyanabban a végtelen távoli pontban metszik egymást, mint** e **és** g**.** Ekkor e és f nem lehetnek sem párhuzamosak, sem ultraparallelek, mivel akkor egysíkúak lennének. Tehát kiérő egyenesek így az előzőek szerint a transzformáció csavarmozgás.

2.4.2. Ha $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ csúsztatva tükrözés, akkor megint három nagy esetet kell vizsgálnunk:

- Ha γ **és** δ **metszők**, akkor β-t δ-ra merőleges helyzetbe állítva, majd β'-t γ'-val megcserélve a $\delta \circ \beta' \circ \gamma' \circ \alpha$ szorzathoz jutunk. Vagy γ' metszi α-t egy egyenesben, amikor is merőleges tengelyű forgatások szorzata a teljes leképezés, vagy nem ekkor a 3 sík esetén vizsgált szituációhoz jutunk, azaz ezen szorzat átreprezentálható egy párhuzamosan áthelyezve tükrözéssé így az előző pontban már vizsgált esethez jutunk.

- γ **és** δ **ultraparallelek:** β és γ merőlegessége miatt a transzformáció írható a $\delta \circ \beta \circ \gamma \circ \alpha$ alakban. Reprezentáljuk át $\gamma \circ \alpha$-t úgy , hogy $\delta \cap \beta \in \gamma'$, majd $\delta \circ \beta$-t úgy, hogy $\beta' = \gamma'$. A transzformáció így két síkra tükrözés, nevezetesen $\delta \circ \alpha$ alakra redukálódik.

- γ **és** δ **párhuzamosak:** Ennél s résznél lehet a metsző esetben leírt eljárást használni ami ugyanarra a végeredményre vezet.

2.4.3. $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ forgatva tükrözés

- γ **és** δ **metszők:** Legyen $m := \beta \cap \alpha$, $n := \delta \cap \gamma$. A transzformáció egy m és egy n körüli forgatás szorzata, ahol m és n merőlegesek egymásra, így a végeredmény csavarmozgás.

- γ **és** δ **ultraparallelek:** A transzformáció definíció szerint csavarmozgás.

- γ **és** δ **párhuzamosak:** Reprezentáljuk át $\beta \circ \alpha$-t úgy, hogy β' merőleges legyen δ-ra. Mivel β és γ merőleges egymásra, ezért a transzformáció a következő módon írható: $\delta \circ \beta' \circ \gamma \circ \alpha'$. Legyen továbbá $e := \gamma \cap \alpha'$, $g := \delta \cap \beta'$. Ekkor a transzformáció előáll e és g egyenesekre történő tükrözések szorzataként, ahol a két egyenes kitérő, tehát a transzformáció csavarmozgás.

3. Összefoglalás

A síkok párhuzamosságának definiálásával, majd az esetek diszkussziójával eljutottunk a hiperbolikus tér izometriáinak modellmentes osztályozásához. Összehasonlítva a kapott egybevágóságokat az euklideszi esettel láthatjuk, hogy a párhuzamossági axióma tagadása a háromdimenziós térben két új egybevágósági osztályt eredményez az euklideszivel analóg osztályok mellett. További cél ezen egybevágósági osztályok analitikus leírása, mátrixszal való reprezentálása, ahol felderíthetők az egy-egy egybevágósági osztályra jellemző speciális összefüggőségek az adott mátrix elemi között.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, G. Horváth Ákosnak a rengeteg segítséget, korrekciót, melyekkel irány mutatott számomra, és vezette kutatásomat. Nélküle ez a dolgozat nem jöhetett volna létre. Remélem, hogy a közösen megkapott eredmények elősegítik a hiperbolikus geometria oktatását, valamint könnyebben értelmezhetővé teszik a hiperbolikus tér izometriáit.

Hivatkozások

[1] A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups* vol. 91 of *Graduate Texts in Mathematics*, New York, NY, USA, 1983.

[2] Bolyai, J.: Appendix a tér tudománya, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

[3] Bonola, R.: Non-Euclidean Geometry, Dover, 1955.

[4] H.S.M. Coxeter, *Non-euclidean Geometry*, Math. Exp. 2, Toronto, 1942.

[5] G.Horváth Ákos, *Csodálatos geometria, avagy A kapcsolatteremtés tudománya*, Typotex, Budapest, 2013.

[6] Sommerville, D. M. Y.: The elements of Non-Euclidean Geometry, G.Bell and Sons, Londn, 1914.

[7] Szász Pál, *Bevezetés a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriában*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1973.