



Elfutó elektronok kölcsönhatása az extraordinárius elektron hullámmal

TDK dolgozat

Budai Ádám

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Témavezetők: Dr. Pokol Gergő (BME, Nukleáris Technikai Intézet)
Kómár Anna (California Institute of Technology)

BME
2013

Tokamakokban tapasztaltak nagy energiával rendelkező ún. elfutó elektronokat, amelyek komoly károkat tudnak okozni: tönkreteszik a diagnosztikákat, kilukasztják a falat. Az elfutó elektronok kölcsönhatásba léphetnek egy rezonáns plazmahullámmal. A vizsgált nagyfrekvenciás elektronhullámok közül az extraordinárius elektron hullám (EXEL) a leginstabilabb, ezért ezt a hullámot vizsgáltam. Az elfutó elektronok és az EXEL hullám kölcsönhatása során az elektronok eredetileg nyalábszerű eloszlásfüggvénye izotropizálódik. Ez lecsökkentheti az elfutó elektronok energiáját.

Az EXEL hullámnak az eloszlásfüggvényre gyakorolt hatását csak numerikus módszerek igénybevételével lehet meghatározni, mert az eloszlásfüggvény időbeli fejlődésére nincs zárt analitikus formula. Munkám során rendelkezésemre állt egy kvázi-lineáris kölcsönhatást számoló rutin, melyet Dr. Pokol Gergő és Kómár Anna írtak. A program lassú futása miatt még csak előzetes eredmények álltak rendelkezésemre, melyek a fenti kölcsönhatás bekövetkezését igazolták, azonban csak a hatás első periódusát mutatták, így részletes analízisre nem voltak alkalmasak. A rutin gyorsításának érdekében felderítettem a program legidőigényesebb részeit, és ezeket módosítva a program a többszörösére gyorsult, lehetővé téve a kölcsönhatás további periódusainak szimulációját, és így annak megállapítását, hogy a kapott eredmények hogyan függenek a program numerikus és fizikai paramétereitől. Fontos kérdés volt a program numerikus stabilitásának ellenőrzése a numerikus paraméterek változtatásával. Az eljárás alatt egy tipikus paraméterszettet választottam referenciának és mindig csak egy paramétert változtatva vizsgáltam az eltérést az eredményben. A tapasztaltak alapján új optimális paraméterszettet állítottam be, és ezzel végeztem a további vizsgálatokat, mint az eredményeknek a plazmaparaméterektől való függését. A mágneses tér, a termikus elektronsűrűség, az elektromos tér és a plazmahőmérséklet változtatásával az elmélet alapján várt eredményeket kaptam, a közelítések határain belül.

A munkám második felében az eljárásunk azon hiányosságának kiküszöbölése volt a célom, hogy az általunk használt kezdeti eloszlásfüggvény csak nagyon nagy, állandó elektromos tér fennállása esetén érvényes. Ennek érdekében a CODE nevű kinetikus egyenlet megoldó rutinba integráltam az EXEL hullámmal történő kvázi-lineáris diffúziós kölcsönhatást. Ezzel lehetővé vált fizikailag valóságosabb eloszlásfüggvények előállítás.

Tartalomjegyzék

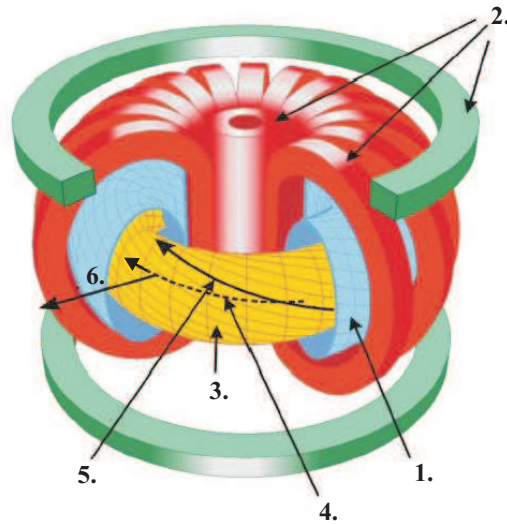
1	Elméleti bevezető	3
1.1	A plazma	3
1.2	Az elfutó elektronokról	4
1.3	Az elfutó elektronok eloszlásfüggvénye	5
1.4	A plazmahullámok	6
1.5	Diszperziós reláció, EXEL hullám	6
1.6	Az elfutó elektronok szuszceptibilitása	7
1.7	A növekedési ráta fogalma	8
1.8	A kvázi-lineáris kölcsönhatás	9
1.9	A kvázi-lineáris kölcsönhatást számoló rutin	10
1.9.1	A program változókészlete	10
1.9.2	A meghívott függvények	12
1.9.3	A program vázlatos működése	12
2	A kvázilineáris kölcsönhatást számoló rutin gyorsítása és tesztelése	14
2.1	A program felgyorsítása	14
2.2	A program numerikus stabilitásának tesztelése	15
2.3	A fizikai paraméterektől való függés	27
2.4	Alkalmazás az ITER paramétereire	32
3	Egyesítés a CODE-dal	34
3.1	Az összekapcsolás elméleti háttere	34
3.1.1	A CODE működésének alapelve	34
3.1.2	Az összekapcsolás lehetőségei	35
3.2	Gyakorlati megvalósítás	36
3.3	Konvergencia problémák, további lehetőségek	38
4	Összefoglalás	39
5	Függelék	41
5.1	Romberg-módszer	41
5.2	Diffúziós operátor a Legendre-polinomok bázisán	41

1. Elméleti bevezető

1.1. A plazma

A plazma egy részben vagy teljes mértékben ionizált gáz. Pontosabban olyan gáz, amiben az ionizáció foka (α = ionizált részecskék száma/összes részecske száma) lényegesen nagyobb, azaz $\alpha \sim 1$, mint egy szoba-hőmérsékletű gáz halmazállapotú anyagban, ahol $\alpha \ll 1$. Egy ilyen sokrészecske-rendszerben a rövidtávú molekuláris kölcsönhatások helyett a hosszabb távú elektrosztatikus kölcsönhatások dominálnak. Ezért a plazma folyadékszerűen viselkedik (turbulenciák, hullámok figyelhetők meg), innen származik a neve "képlékeny". Plazmát állítanak elő például kisülési csövekben vagy fúziós berendezésekben: tokamakokban, sztellarátorokban, ugyanis magas hőmérsékleten a gázmolekulák az ütközések következtében elvesztik az elektronjaikat, és ionizálódnak.

Ennek a dolgozatnak a motivációját a fúziós berendezések adják, melyekben lehetséges a fúziós reakció létrehozása, ami arányaiban sok energia termelését teszi lehetővé kevés üzemanyag felhasználásával. A fúziós energiatermelés jelentőségét tovább növeli, hogy a jelenlegi energiatermelő eljárásokkal ellentétben alig terheli a környezetet káros anyagokkal vagy sugárzással stb. A fúziós energiatermelés létrehozása csak nagyon magas hőmérsékleten lehetséges, mert a fúziós reakcióhoz a részecskéknek (általában hidrogén) egymáshoz elegendően közel kell kerülniük, hogy az alagút effektus fellépjen és egyesülhessenek. A közel kerüléshez le kell győzni az elektromos Coulomb-taszítást, ehhez pedig nagy kinetikus energia kell. Ennek köszönhető, hogy a fenti reakció ideális közege a plazma. Az energiatermeléshez a plazmát huzamosabb ideig össze kell tartani. Erre többféle módszer van, melyek közül a legígéretesebb a mágneses összetartás. Ez konyha nyelven annyit tesz, hogy mágneses tér segítségével a plazmát egy tórusz alakú csőbe kényszerítjük (lásd 1.1 ábra). Ilyen elven működnek a tokamakok is [1]. A mi vizsgálataink középpontjában ezek a berendezések állnak.

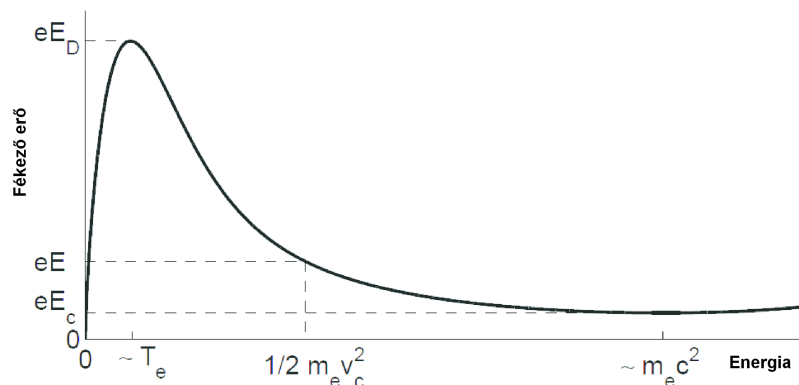


1.1. ábra. A mágneses összetartás egyik gyakorlati megvalósítását jelentő berendezés vázlata. 1. vákuumkamra fala, 2. mágneses tekercsek, 3. plazma, 4. plazmaáram, 5. helikálisan megcsavart mágneses erővonal, 6. radiális irány

Ha a plazma átlép egy stabilitási határt (sűrűség, plazmaáram), akkor a létrejövő instabilitás miatt a plazmát határoló objektumokat nagy részecske- és hőfluxus éri. Ekkor a falról leváló szennyezők bejuthatnak a plazmába. Ekkor a plazma energiája a fékezési sugárzás miatt csökkenni kezd. A hőmérséklet csökkenés miatt megnő az ellenállás. Az áram csökkenni kezd és a Lenz-törvény miatt az eredeti áramot fenntartani igyekvő elektromos tér jön létre. Ez az elektromos tér elfutó elektronokat eredményezhet [2].

1.2. Az elfutó elektronokról

Az elfutó elektronok keletkezésének a kulcsa abban a jelenségben rejlik, hogy a plazmában mozgó elektronra ható fékezési erő a 1.2 ábrán látható módon függ az elektron energiájától [3]. Az alábbiakban vázolt keletkezési mechanizmusok háttérében ez áll.



1.2. ábra. Az ábrán látható, hogy az elektronra ható fékező erő nem monoton növekvő függvénye az elektron energiájának.

Ha az elektromos tér nagyobb a kritikus (E_c) elektromos térnél, akkor van olyan sebességtartomány, hogy az oda tartozó elektronokra ható eredő erő tartós gyorsítást eredményez.

Ekkor az elektronok a létrejövő gyorsulás miatt relativisztikus energiára tehetnek szert. Ezek az elfutó elektronok. Kialakulásukkal kapcsolatban beszélhetünk elsődleges- és másodlagos (lavina)-keletkezésről. Az elsődleges keletkezésbe két mechanizmus sorolható. Az egyik a Dreicer-keletkezés, amely azt jelenti, hogy a kritikus sebességnél nagyobb sebességű elektronok el tudnak futni [4]. Ezek az elektronok pótlódnak a sebességtérben a Maxwell eloszlást létrehozó ütközések során bekövetkező diffúzió által. A másik mechanizmus az ún. forrófarok-keletkezés. Itt arról van szó, hogy a diszrupció során a kialakult Maxwell-eloszlásban a nagy energiájú rész részecskéinek nagyon alacsony az ütközési frekvenciája, így ezek az elektronok a lehűlés során nem tudják követni az eloszlásfüggvény változását. Az elektromos tér megnövekedése után ezek azonnal elfutnak. Tehát az előbbi egy kvázi-stacionárius folyamat, míg az utóbbi egy instacioner. Az elsődleges (primary) keletkezés során létrejött elfutóelektron-magot tovább duzzaszthatja a másodlagos keletkezés, mivel egy elfutó elektron és egy termikus elektron ütközése, feltéve, hogy elegendő energiával rendelkeznek, eredményezhet két elfutó elektront [2].

Ezek a nagy energiájú részecskék kárt tehetnek a berendezésekben. A jelenlegi számítások szerint egy ITER (a ma Cadarache-ban épülő tokamak, ami a valaha épített legnagyobb tokamak lesz majd) méretű berendezésben a lavina keletkezés a sokszorosára növelheti az elfutóelektron-magot [5].

Az általunk vizsgált kölcsönhatás egy olyan folyamatot ír le, ami lehetővé teszi az elfutó elektronok passzív csillapítását. Az interakció a plazmahullámok (1.4-es fejezet) és az elfutó elektronok között zajlik, melynek hatására az elfutóelektron-nyaláb úgymond szétszóródik.

1.3. Az elfutó elektronok eloszlásfüggvénye

Az elfutóelektron-populációt az eloszlásfüggvénye által lehet jól leírni, jellemezni. A formula meghatározása a Boltzmann-egyenlet megoldása alapján lehetséges. A levezetés során feltesszük, hogy az elektromos tér időben állandó és sokkal nagyobb a kritikus értéknél, az elfutó elektronok keletkezését a lavina keletkezés alapján becsüljük, valamint feltesszük, hogy a részecskék energiája nagy és a mágneses térrel párhuzamos impulzus komponens sokkal nagyobb a merőlegesnél, továbbá a plazmát egy végtelen, homogén közegnek tekintjük. Utóbbit az teszi indokolttá, hogy a tokamak mérete ($\sim 1m$) és a vizsgált hullámok hullámhossza ($\sim 0.001m$) nagyságrendekkel eltérnek. Ezek alapján az eloszlás függvényre a következő formulát használtuk [6]:

$$f(p_{\parallel}, p_{\perp}, t) = \frac{n_{r0}a}{2\pi c_Z p_{\parallel}} \exp\left(\frac{(E-1)t/\tau_c - p_{\parallel}}{c_Z} - \frac{ap_{\perp}^2}{2p_{\parallel}}\right), \quad (1.1)$$

ahol:

p_{\parallel} : A mágneses térrel párhuzamos impulzus momentum,

p_{\perp} : A mágneses térre merőleges impulzus momentum,

E: Az elektromos térerősség az E_c -re normálva,

C_Z és τ_c állandók ([6]),

n_{r0} : Az elfutóelektron-mag ami az elsődleges keletkezés során jött létre.

a : Az alábbi módon számolható: $(E - 1)/(1 + Z)$.

A kvázi-lineáris kölcsönhatás meghatározásához ezt a formulát vettük alapul.

1.4. A plazmahullámok

Mivel mágneses összetartást akarunk megvalósítani, valamint a plazma fűtése a plazma-árammal történik ezért nagyon fontos a plazma és az elektromágneses tér kölcsönhatásának tisztázása. Ennek során válik elengedhetetlenné a plazma hullám fogalmának bevezetése. Mielőtt elkezdtem plazmafizikával foglalkozni, az általam ismert jelenségkörök hullámjaihoz képest az volt az érzésem, hogy a plazma hullám sokkal többet jelent. Nem egy konkrét hullámról, még csak nem is egy adott típusú hullámról, hanem hullámok egész kavalkádjáról van szó: elektromágneses-, hang-, longitudinális-, transzverzális-hullámok, valamint a vízhullámokhoz hasonló hullámok stb. A *jelen dolgozatban* használt plazmahullámokra azonban a következő definíció megfelelő: a plazmahullám olyan elektromágneses hullám, ami képes a plazmában tartósan fennmaradni és terjedni. Az következő fejezetben erről pontosabb képet festek majd.

1.5. Diszperziós reláció, EXEL hullám

Mivel ez egy elektromágneses hullám, ezért igazak rá a Maxwell egyenletek, amiből következik a hullámegyenlet. Ennek Fourier-térben felírt alakja:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.2)$$

ahol:

\mathbf{k} jelöli a hullámszám vektort, ω a hullám frekvenciája, \mathbf{K} a dielektromos tenzor, c a vákuumbeli fénysebesség és \mathbf{E} az elektromos térerősség vektor.

A formulát mátrixos alakba átírva:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} - n^2 \cos^2 \theta & \epsilon_{12} & n^2 \cos \theta \sin \theta \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - n^2 & 0 \\ n^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \epsilon_{33} - n^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

ahol:

$n = kc/\omega$, a θ pedig a hullám terjedési iránya és a mágneses tér által bezárt szöget jelenti.

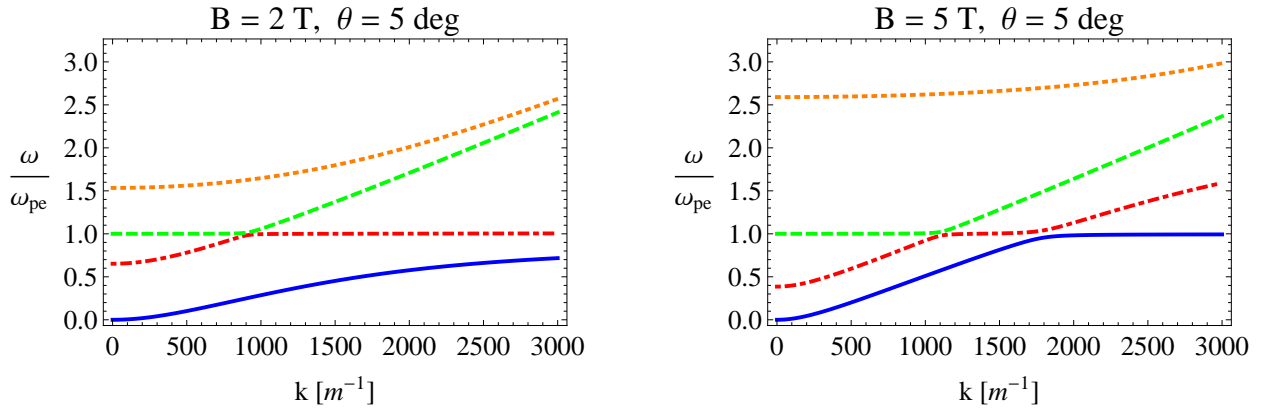
Mivel ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, melynek a nem triviális megoldásait keressük, ezért a mátrix determinánsának nullának kell lennie. Behelyettesítve a dielektromos tenzor elemeit (megfelelő közhelítések mellett) kapjuk a diszperziós relációt [7, 8]:

$$\begin{aligned}
& \omega^8 - \omega^6 (2k^2 c^2 + \omega_{ce}^2 + 3\omega_{pe}^2) + \\
& \omega^4 [k^4 c^4 + 2k^2 c^2 (\omega_{ce}^2 + 2\omega_{pe}^2) + \omega_{pe}^2 (\omega_{ce}^2 + 3\omega_{pe}^2)] - \\
& \omega^2 [k^4 c^4 (\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2) + k^2 c^2 \omega_{pe}^2 (3/2\omega_{ce}^2 + 2\omega_{pe}^2 + 1/2\omega_{ce}^2 \cos 2\theta) + \omega_{pe}^6] + \\
& 1/2k^4 c^4 \omega_{ce}^2 \omega_{pe}^2 (1 + \cos 2\theta) = 0. \quad (1.4)
\end{aligned}$$

ahol:

ω_{ce} az elektron ciklotronfrekvenciája, míg az ω_{pe} az elektron plazmafrekvenciája.

Mint látható ez egy negyedfokú egyenlet az ω négyzetére, aminek 4 megoldása van: egy füttyülő-elektron hullám, az általunk vizsgált EXEL hullám (extraordinárius elektron hullám) és még két optikai hullám amellyel nem foglalkozunk (ezek nem destabilizálhatóak az elfutó elektronok által).



1.3. ábra. A képen eltérő mágneses terek mellett láthatók az egyes hullámok. A kék a füttyülő elektron hullám, míg a piros az EXEL hullám.[7]

Kimutatható, hogy ezek közül a leginstabilabb hullám az EXEL (nagyságrendekkel kevesebb elfutó elektron szükséges a destabilizációjához, mint a füttyülő-elektron hullámnál), ezért különösen érdemes vele foglalkozni, mivel komoly hatást lehet remélni általa [7].

1.6. Az elfutó elektronok szuszceptibilitása

Az elfutó elektronok hatása a hullámra a szuszceptibilitásukon keresztül vehető figyelembe. A szuszceptibilitásokat végtelen, homogén plazmára a következő formulák adják meg [8]:

$$\chi^r = \frac{\omega_{pr}^2}{\omega \omega_{cr}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{\Omega_e \mathbf{S}_n}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\Omega_e}, \quad (1.5)$$

ahol

$$\mathbf{S}_n = \begin{bmatrix} \frac{n^2 J_n^2}{z^2} p_{\perp} U & in \frac{J_n J'_n}{z} p_{\perp} U & \frac{n J_n^2}{z} p_{\perp} W \\ -in \frac{J_n J'_n}{z} p_{\perp} U & (J'_n)^2 p_{\perp} U & -i J_n J'_n p_{\perp} W \\ \frac{n J_n^2}{z} p_{\parallel} U & i J_n J'_n p_{\parallel} U & J_n^2 p_{\parallel} W \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

$$U = \frac{\partial f_r}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel}{\omega} \left(v_\perp \frac{\partial f_r}{\partial p_\parallel} - v_\parallel \frac{\partial f_r}{\partial p_\perp} \right), \quad (1.7)$$

$$W = \left(1 - \frac{n\Omega_e}{\omega} \right) \frac{\partial f_r}{\partial p_\parallel} + \frac{n\Omega_e p_\parallel}{\omega p_\perp} \frac{\partial f_r}{\partial p_\perp}, \quad (1.8)$$

ahol:

n a rezonancia foka, f_r az elfutóelektronok eloszlásfüggvénye az elfutóelektron-mag sűrűségére normálva, $\Omega_e = \omega_{ce}/\gamma$ és $z = k_\perp v_\perp / \Omega$.

A következő referenciában [7] megtalálhatók azok a ultra-relativisztikus feltétel mellett érvényes számítások, melyek elvégzésével kapjuk a keresett szuszceptibilitásokat. Az említett feltétel annyit tesz, hogy az elektron impulzusa nagyon nagy, vagyis $\gamma \sim p$, ahol $\gamma = \sqrt{1 + p^2}$ [7].

1.7. A növekedési ráta fogalma

A fenti szuszceptibilitások segítségével megperturbáljuk a diszperziós relációra felírt (1.4) formulát azáltal, hogy az eredeti szuszceptibilitáshoz hozzáadjuk a jóval kisebb elfutóelektron szuszceptibilitásokat. A nagyságrendi eltérés miatt az új ω megoldás eltérése az előzőhöz képest kicsi, így elsőrendű perturbációval jó közelítéssel meghatározható. A kapott $\delta\omega$ egy komplex szám, melynek imaginárius része a lineáris növekedési ráta (γ_i).

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_i}{\omega^6 (\omega^2 - \omega_{ce}^2)} = & \text{Im} \left\{ -\chi_{11} \left(\epsilon_{22} - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} \right) \left(\epsilon_{33} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} \right) - 2\chi_{12}\epsilon_{12} \left(\epsilon_{33} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} \right) - \right. \\ & \chi_{22} \left[\left(\epsilon_{11} - \frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} \right) \left(\epsilon_{33} - \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} \right) - \frac{k_\parallel^2 k_\perp^2 c^4}{\omega^4} \right] - \\ & \left. \chi_{33} \left[\epsilon_{11}^2 - \epsilon_{11} \left(\frac{k_\parallel^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_\perp^2 c^2}{\omega^2} \right) + \frac{k_\parallel^2 k_\perp^2 c^4}{\omega^4} + \epsilon_{12}^2 \right] \right\} / P(\omega, k, \theta), \end{aligned} \quad (1.9)$$

ahol

$$\begin{aligned} P(\omega, k, \theta) = & 8\omega^7 - 6\omega^5 (2k^2 c^2 + \omega_{ce}^2 + 3\omega_{pe}^2) + 4\omega^3 [k^4 c^4 + 2k^2 c^2 (\omega_{ce}^2 + 2\omega_{pe}^2) + \omega_{pe}^2 (\omega_{ce}^2 + 3\omega_{pe}^2)] - \\ & 2\omega [k^4 c^4 (\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2) + k^2 c^2 \omega_{pe}^2 (3/2\omega_{ce}^2 + 2\omega_{pe}^2 + 1/2\omega_{ce}^2 \cos 2\theta) + \omega_{pe}^6]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ekkor a síkhullám egyenletbe ezt beírva:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = E_0 \cdot \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega \cdot t - \delta\omega \cdot t)] \quad (1.11)$$

Látható, hogy az amplitúdó csillapodását vagy növekedését eredményezi a $\delta\omega$ imaginárius része előjeltől függően. A hullám energiája (W_k) az amplitúdó ($E_0 \cdot \exp(t \cdot \text{Im}\delta\omega)$) négyzetével arányos, ezért a hullámenergia időbeli fejlődését a következő differenciálegyenlet írja le:

$$\frac{dW_k}{dt} = 2 \cdot \gamma_i \cdot W_k \quad (1.12)$$

A kezdeti feltétel a plazmaháttér termikus fluktuációinak energiája:

$$W_{k0} = k_B \cdot T \quad (1.13)$$

Azaz a növekedési ráta lényege, hogy jellemzi a hullám energiájának változását. Ha a növekedési ráta pozitív, akkor a hullám energiája nő és ekkor azt mondjuk, hogy az elfutó elektronok destabilizálják a hullámot. Ellenkező esetben a hullám elhal [9].

1.8. A kvázi-lineáris kölcsönhatás

A perturbációs analízis során kiderült, hogy az (1.5) fejezetben említett hullámok közül a leginstabilabb hullám az EXEL hullám, mert ennek a legnagyobb növekedési rátája [7]. A legfontosabb kérdés, hogy ez a hullám keletkezése után milyen módon hat az elfutó elektronok eloszlásfüggvényére. A hullám és a részecskék között lezajló folyamat az ún. hullám-részecske kölcsönhatás, ami egy rezonánás kölcsönhatás. Ezt matematikailag az (1.14) egyenletben levő Dirac-delta függvény jelez. A számításaink során elegendő volt csak az $n = -1$ rezonancia fokú Doppler-rezonanciát figyelembe venni. A hullám hatását egy részecske-eloszlásra vizsgáljuk, ezért rezonáns hullámok egy tartománya keletkezik, amik az elfutóelektron-eloszlás egy impulzustartományával hatnak kölcsön. A kölcsönhatás eredménye a sebességtérbeli diffúzió, ami az elfutó elektronok kiszóródását eredményezi merőleges irányba az impulzus térben. A részletesebb számítások elvégzésével kaphatunk egy félanalitikus formulát az eloszlásfüggvény időfejlődésére [10]. A megfelelő összefüggések:

Diffúziós operátor:

$$D(p_{\parallel}, t) = \frac{\pi e^2 \omega_{ce}^2}{2\varepsilon_0 m_e^2 c^2 p_{\parallel}^2} \int d^3k \frac{W_k(t)}{\omega^2} P(\omega_0, k, \theta, p_{\parallel}) \delta(\omega + \omega_{ce}/p_{\parallel} - k_{\parallel}c) \quad (1.14)$$

ahol:

a δ a Dirac-delta függvényt jelöli, a többi változó jelentését már a korábbiakban megadtam.

A következő mennyiség bevezetésével:

$$\tau(p_{\parallel}, t) = \int_0^t dx D(p_{\parallel}, x) \quad (1.15)$$

kapjuk az eloszlásfüggvényt [10]:

$$f(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \frac{n_{r0}\alpha}{2\pi C_Z \phi(p_{\parallel}, t)} \exp\left(\frac{(E-1)t/\tau_c - p_{\parallel}}{C_Z} - \frac{\alpha p_{\perp}^2}{2\phi(p_{\parallel}, t)}\right) \quad (1.16)$$

A munkám során a fent leírt kölcsönhatást modellező rutin felgyorsítása és továbbfejlesztése volt a cél. Ezt a programot Dr. Pokol Gergő és Kómár Anna írta. Az alábbiakban ennek a programnak a működését ismertetem.

1.9. A kvázi-lineáris kölcsönhatást számoló rutin

A kölcsönhatás miben létének megértéséhez és vizsgálatához szabad szemmel láthatóvá kell tenni az eloszlás függvényben, valamint a releváns mennyiségekben (növekedési ráta, hullámenergia stb.) végbemenő változások időbeli fejlődését. Ugyanis az időbeli evolúcióra nem áll rendelkezésre olyan egzakt formula, ami biztosítaná, hogy bármely időpontban pusztá behelyettesítéssel megkapjuk a vágyott értékeket. Ennek megoldásához szükséges az említett rutin. A program legfontosabb része az 1.15 -ös formula numerikus interpretációja és helyes kezelése numerikus módszerek által (nevezetesen Romberg-módszer, erről részletesebben a függelékben). Mivel egy program ismertetése reménytelen csupán a programsorok megmutatásával, ezért az elméletre erősen támaszkodva végig megyünk a főbb részekben és megemlítem hol milyen eljárásokat alkalmaztunk.

1.9.1. A program változókészlete

Alapvetően nagyon fontos azt megemlíteni, hogy a program elég sok önálló függvényt hív meg (ezekről bővebben lásd később). Az egyes függvények közötti információ cserét biztosítani kell, aminek az egyik legjobb módja a globális változók használata. Az átláthatóságot megkönnyítendő a program változóit osztályozom: fizikai változók, technikai paraméterek és operatív változók. Vegyük ezeket sorra!

Fizikai változók

Ide azokat a változókat sorolom, amelyek a plazma fizikai jellemzéséhez szükségesek. Milyen mennyiségeket veszünk figyelembe? (Kapcsos zárójelben egy szám könnyíti a megjegyzés nevű rész jobb megértését.)

Hőmérséklet (ion hőmérséklet, elektron hőmérséklet) (1)

Sűrűség (ion sűrűség, elektron sűrűség) (2)

Mágneses tér (külső tér, ezzel hat kölcsön a plazma) (3)

Elektromos tér (külső tér, ezzel kölcsönhat a plazma) (4)

A fenti paraméterek adják a program bemenetét. A fizikai változók közé sorolom még az univerzális állandókat, mert egyes mennyiségek számolásához ezek is kellenek (pl.: vákuum permittivitás,-permeabilitás, Boltzmann- állandó stb.).

Megjegyzés:

(1) Az ion hőmérsékletet és az elektron hőmérsékletet egyenlőnek tekintjük. Ennek magyarázata, hogy az általunk vizsgált hőmérséklet tartományban (20 eV-30 keV) az elektronok és az ionok között elég sok ütközés zajlik, ezért az energia ugyanúgy oszlik el az ionokon és az elektronokon, így ebből a szempontból nem kell őket megkülönböztetni.

(2) A megjelölt sűrűségek azonosak. Egyszeres ionizációt tételezünk fel. Jellemző érték: $10^{18} - 10^{20} 1/m^3$

(3) Jellemző értékek: 2 – 5 T.

(4) Tipikus érték: 40V/m.

Technikai paraméterek

A program ismertetésének az elején kiemeltem egy fontos szót, nevezetesen a formulákat helyesen kell kezelni, mivel kielégítő pontosságú eredményeket kívánunk kapni. Ennek megvalósításához kellene az említett paraméterek. Most felsorolom ezeket annak érdekében, hogy később hivatkozhasak rájuk. Egyelőre csak homályos utalást teszek a jelentésükre.

integráló paraméter (interr): A Romberg-szabály segítségével elvégzett integrálás pontosságát szabályozza.

időlépés p.: A fizikai időben való haladás sebessége hogyan aránylik a növekedési ráta reciprokához.

maxidőlépés: A fizikai időben ennél nem engedünk gyorsabb haladást az iterációk során.

pozitív növekedési rátát biztosító p. (factor): Az időfejlődés az időspórolás végett attól az időponttól indul, ahol már az egyik párhuzamos impulzus esetén a növekedési ráta pozitív. Ennek megadása zérushely kereséssel történik, de numerikus hiba miatt nem kereshetünk pontosan nullát. Az eltérést jellemzi annak az ütközéses csillapításhoz való viszonyán keresztül.

zérushely keresés kiindulópontja (mintime0): A fent említett függvény ennek az időpontnak a közelében keresi a zérushelyet.

dkderiv: A k (hullámszám) szerinti deriváláshoz szükséges érték a differencia képzésben.

dthetaderiv: A θ szerinti deriváláshoz szükséges az előzőhöz hasonlóan.

deltatheta: A rezonáns k értékeket kiszámolva egy adott felbontású griden (p_{\parallel} és a θ által kifeszített rácsozat) egy mátrixot kapunk. A θ felbontását ez szabályozza.

thetastep: A program által használt szögtartomány finomságát szabályozza.

Operatív változók

Kétségtelenül a legfontosabbak. Tulajdonképpen adatokat tárolnak, annak érdekében, hogy az egyes iterációk során bekövetkező változásokat kezelni lehessen.

hullámenergia (wk): Cella amely elraktározza minden p_{\parallel} (párhuzamos [B-vel] impulzus) és minden időlépésre a hullám energiáját egy mátrixban. A mátrix elemei az egyes hullámszám és terjedési szög értékekhez tartozó hullámenergia.

növekedési ráta mátrix (growthresmtx): A növekedési ráta vektorok gyűjteménye, idő és p_{\parallel} alapján.

szögtartomány vektor (theta): Az iterációk során a kvázi-lineáris kölcsönhatáshoz azon irányú hullámokat kell számba venni, amelyeknek pozitív a növekedési rátája vagy legalább elegendően nagy hullámenergiával rendelkeznek. Ez a vektor azokat a szögeket tartalmazza megfelelő lépésközzel (az integrálás pontosságához) amelyek teljesítik e kritériumot.

a rezonáns k értékeket tartalmazó mátrix (*resmatrix*): Adott p_{\parallel} -ra és θ szögekre tartalmazza a rezonáns k értékeket.

Vannak még egyéb segéd vektorok, amelyek a fentiek kezeléséhez (kiszámítás, értékátadás, összehasonlítás) szükségesek. Ezeket nem részletezem.

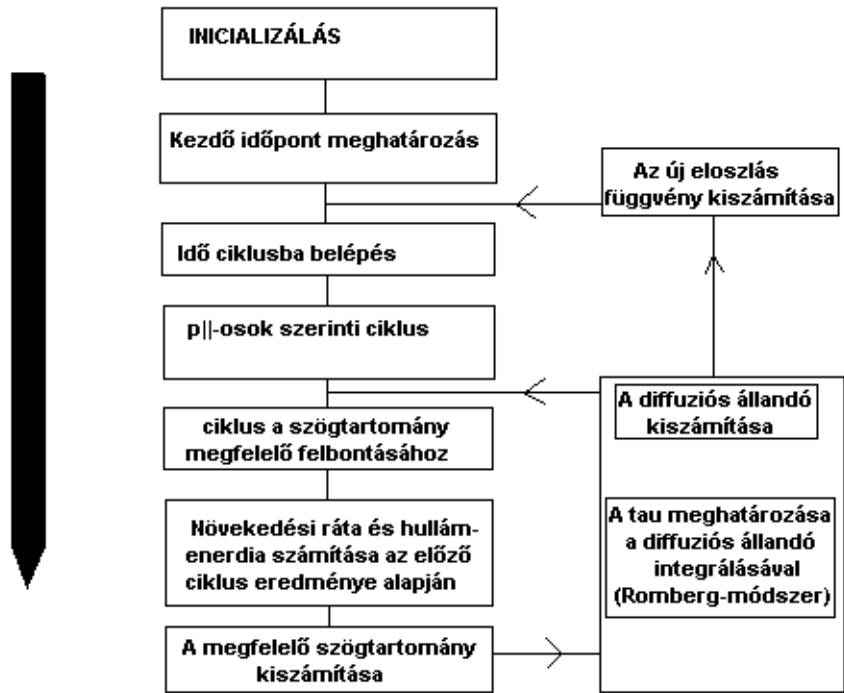
1.9.2. A meghívott függvények

A program meghív egy függvényt a növekedési ráta számításához (*growth*), ami meghív egy függvényt a lineáris növekedési ráta számításához (*gamma*). A diszperziós reláció megoldásához is külön függvény kell (*omegaEX*), valamint a rezonancia feltétel megoldása is egy külön rutin (*resvector*). Az integrálás (*integralDiff2*) és a deriválás (*differentiation*) is külön történik.

1.9.3. A program vázlatos működése

Az alábbiakban ismertetem a program működését.

Az (1.4) ábrán is látható, hogy a programnak a két leglényegesebb ciklusa az idő szerinti iteráció, valamint a p_{\parallel} szerinti iterációk. Az inicializálást követően az első lépés kiszámolni az egyes p_{\parallel} értékekre a destabilizációhoz szükséges időt. Ennek meghatározása után indul el az iterálás. Minden időlépésen belül egy belső ciklus végig megy az összes p_{\parallel} -ra és megnézi, hogy van e már destabilizáció valahol, ha igen, akkor megvizsgálja mely θ értékek esetén teljesül. Fontos szempont, hogy van e releváns hullámenergia (a plazma zizegéséből származó kinetikus energiával minimum azonos nagyságrend). Az így kapott θ tartományhoz a rezonancia feltételt kezelő függvény hozzárendeli a rezonáns k hullámszám értékeket. Ezt követően adott formulák segítségével meghatározzuk a diffúziós állandó vektorát, majd a Romberg-szabály (lásd függelék) segítségével meghatározzuk a τ értékét. Ezzel a belső ciklus véget ér (bár van egy másik belső ciklus, ciklus a szögtartomány megfelelő felbontásához névvel illetem a képen, is ami a pontosságot hivatott biztosítani, ezt a θ felosztásának finomításával éri el). Az analitikus eloszlás függvénybe behelyettesítve, majd azt ábrázolva véget ér az idő szerinti iteráció és az egész kezdődik előről.



1.4. ábra. A program működésének vázlatos rajza. A diffúziós állandó integrálása után két út van attól függően, hogy az integrálás pontossága megfelel e az elvártnak. Ha igen, akkor kiszámolja az új eloszlásfüggvényt, ha nem akkor folytatódik a megfelelő szögtartományt kereső ciklus.

2. A kvázilineáris kölcsönhatást számoló rutin gyorsítása és tesztelése

Dolgozatomban két problémát vizsgáltam. Az egyik, hogy a fent részletezett program nagyon lassú, ezért nem teszi lehetővé a hosszabb futásokat, amik alatt már jól kirajzolódna a kölcsönhatás. A program numerikus stabilitása szintén lényeges kérdés, ehhez sok futtatás kell. A legfontosabb pedig tesztelni a fizikai paraméterek változtatásának következményeit az optimális paraméterek mellett. A másik, hogy az általunk használt eloszlásfüggvény csak nagy és állandó elektromos terek esetén érvényes, ami a valóságban nem igazán teljesül. Ezért a CODE nevű kinetikus egyenlet megoldó programba beleintegráltam a kvázi-lineáris kölcsönhatást. A következőkben ezekről lesz részletesebben szó.

2.1. A program felgyorsítása

Alapvetően háromféle módszert próbáltunk meg a program felgyorsításának elérésére. A következőkben ezeket sorra vesszük. Az 1.9-es fejezetben bevezetett fogalmakat használni fogom, hogy részletesen leírhassem az eljárásokat.

1.módszer

Megkerestük a program leglassabb és legtöbbet meghívott részét. Elsőként az omegaEX függvényre gyanakodtunk. Ezért az omegaEX függvény segítségével kiszámoltam egy k (hullámszám) és θ griden az egyes értékpárokhöz tartozó ω -kat. Az eredményt az omegamtxEX nevű mátrixban tároltam el. Ezt a műveletet még az inicializálás részben elvégeztem. A ciklusokban az omegaEX függvény helyére egy 2D-ós interpoláló rutin került (MATLAB-ban: interp2). Így a sebességcsökkenést az interp2 rutin és az omegaEX függvények futásidőbeli különbségétől vártuk. Ennek vizsgálatához megnéztem, hogy különböző felbontású mátrixok és különböző típusú interpolációk esetén, mennyi a futás ideje és a kapott eredmények pontossága. Utóbbi az omegaEX-hez (ezt vettük pontosnak) való hasonlítással kaptam. Erre egy külön programot írtam optimaliz néven. Az eredmény az lett, hogy a legnagyobb felbontású mátrix (k -ban 50, θ -ban 500-as felbontás) pontossága 3 százalék felett marad, valamint a program nagyságrendileg ugyanannyi idő alatt futott le. A lefutási idő csökkentése érdekében rontottam a mátrix felbontását 10×10 környékére. Ekkor a pontosság romlott 10 százalék körüli értékre, de a legmeglepőbb, hogy a futási idő még mindig az omegaEX futásidejével vetélkedett. Ezért ezt a módszert fel kellett adni.

2.módszer

Az első módszerhez hasonlóan megkerestük a program további olyan részeit, amik lassúnak tűntek. A resvector nevű függvény szintén nagyon lassú volt és nagyon sokszor (1000 – es nagyságrendű lépésszám esetén kb. milliószor) volt meghívva. Az eljárás ugyanaz volt, mint az előbb, így gyakorlatilag csak az előző megoldásban át kellett neveznem az egyes változókat és függvényeket. A függvény jellege miatt csak 1 D-ós interpoláció (interp1) kellett. Az

omegamtxEX helyére a resmatrix került, míg a resvector helyére az interpolRES függvény. Az interpoláció típusa cubic volt, mert pontosságban és sebességben ez adta a legjobb eredményt. Az új függvény futásideje kb. a 10-ed része az eredetinek. Ezért a teljes időciklus futása körülbelül harmadannyi ideig tart. A számítás hibája csak néhány százalék.

3.módszer

Kísérletet tettem az interpoláció megszüntetésére oly módon, hogy a megfelelő szögtartomány kiszámítására alkalmazott programrészben megpróbáltam az egyes θ értékeket előre meghatározni, melyeknél az interpolRES meg lenne hívva. Ez azért tűnt megvalósíthatónak, mert az egyes θ tartományok mindig ugyanannyi részre vannak osztva. A mélyebb vizsgálat azonban rámutatott arra, hogy a tartomány kezdő és végpontja teljesen kiszámíthatatlanul változik, ezért nem lehet előre megmondani, mely értékeket kell kiszámolni. A szögtartomány esetleges kényszerítése egy előre definiálthoz az integrálás pontosságát veszélyezteti, így nem jelent jobb alternatívát.

2.2. A program numerikus stabilitásának tesztelése

A legtöbb esetben a választott numerikus paraméterek értékeinek megválasztása nem triviális. Ezért az elsőre jónak tűnő beállításokat ellenőrizni kell. Ennek érdekében a következő módszert alkalmazzuk. Az eredeti beállítást tekintjük referenciának. Minden egyes futtatás során megváltoztatjuk az egyik (csak az egyik) paraméter értékét. A változtatást a referenciához képest mindkét irányba elvégezzük körülbelül kettős alapú logaritmikus skálán. A kapott eredményeket összehasonlítjuk a referenciával. A cél, hogy a paramétereknek olyan értékeit találjuk meg, ahol a fenti eljárást alkalmazva csak nagyon kicsi a létrejövő eltérés a referenciához képest. Ez lesz az optimális paraméter szett. Az alábbi táblázatban (1. táblázat) megtalálhatók az egyes paraméterek és azok megváltoztatott értékei, amelyekre futtattam.

	referencia	érték1	érték2
mintime0	1e-4	2e-4	5e-5
interr	1e-2	2e-2	5e-3
	1e-2	5e-2	1e-1
factor	1e-3	2e-3	5e-4
	1e-3	1e-5	1e-6
deltatheta	2e-3	5e-3	1e-3
thetastep	5e-3	1e-2	2e-3
dkderiv	1	2	5e-1
dthetaderiv	1e-3	2e-3	5e-4
maximumdt	5e-5	1e-4	1e-5
thetatartom	1.0-1.4	0-1.57	0-3

1. táblázat. A numerikus stabilitás vizsgálata során elemzett paraméterek.

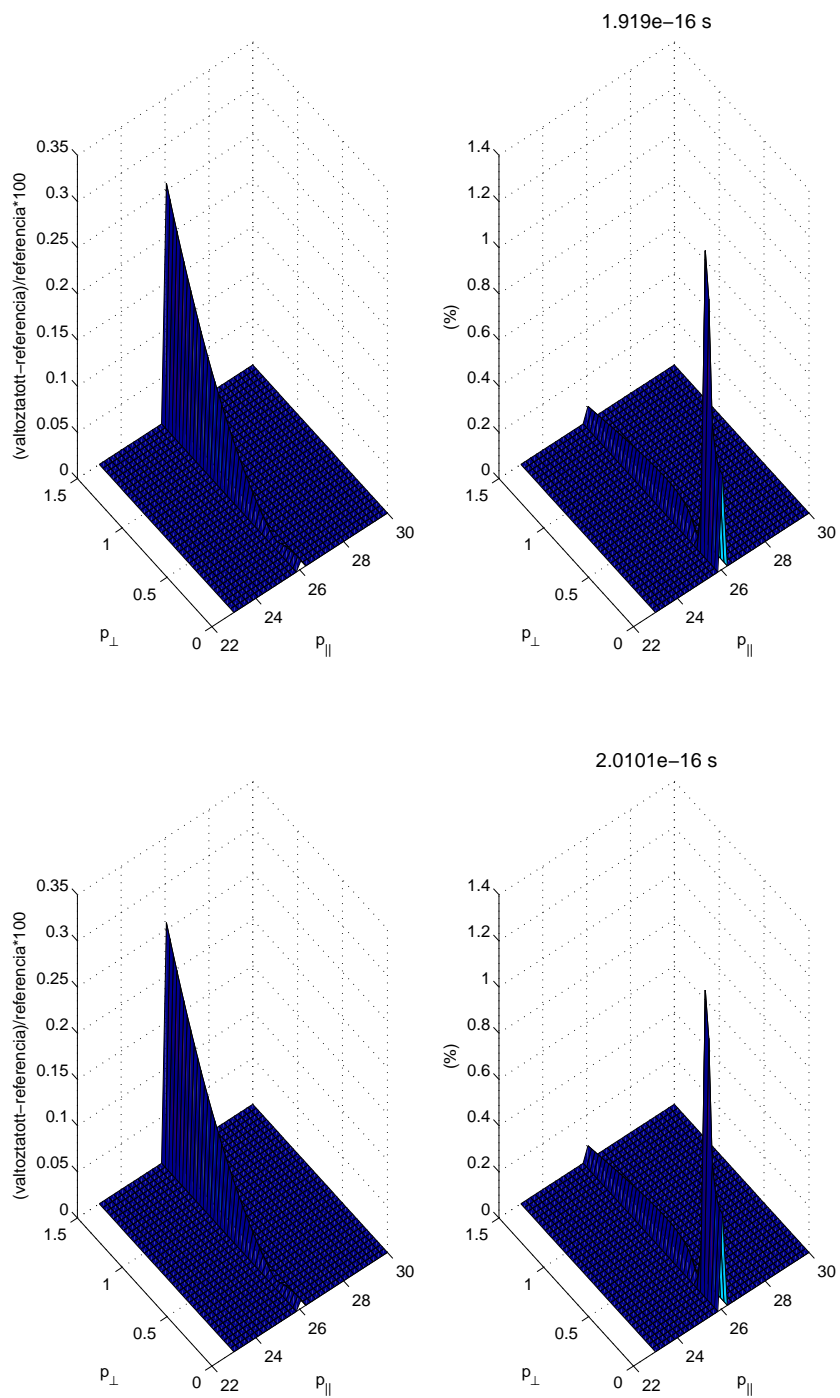
Az alábbiakban sorra vesszük az egyes változók mélyebb jelentését és az eloszlás függvé-

nyeket ábrázoló képek felhasználásával megvizsgáljuk a változás hatását, majd megkeressük az optimumot jelentő paraméter szettet.

Mindegyik programnál: A párhuzamos impulzus momentum maximális értéke 30, a vizsgált tartomány [23, 30], amit 30 részre osztunk egyenletesen. A lépés szám (az időbeli iterációk száma) 500. A merőleges impulzus értéke az következő tartomány 40 részre történő egyenletes felosztásával keletkezik: [0, 1.5]. Az alábbi pontokban mindenhol beszúrtam két-két képet, melyek a referencia értékekhez való viszonyát jelentik az egyes változtatásokkal nyert értékeknek. Mindenhol az eloszlásfüggvényt hasonlítjuk össze. A függőleges tengelyen a számok százalékot jelentenek. Az egyes képeken a bal oldalt a következőképpen kapjuk: $([változtatott - referencia]/referencia) \cdot 100$. A jobb oldalt pedig úgy kapjuk, hogy a változtatott paraméterű futtatás kezdeti és 500 időlépés utáni eloszlásfüggvényét kivonjuk egymásból, majd elosztjuk a kezdetivel és az így kapott függvénnyel elosztjuk a másik függvényt, amit a bal oldalra számoltunk. A kapott eredményt 100-zal szorozva százalékban kapjuk a változást. Tehát egy paraméter akkor nem okoz releváns eltérést, ha a jobb oldali ábrán látható eltérések lényegesen kisebbek 100%-nál. A grafikonok feletti szám a következőt jelenti: az összehasonlításhoz találni kell két egymáshoz elég közel levő fizikai időpontot, de ez nem lehet pont nulla a matlab numerikus hibái miatt. A két időpont közötti eltérést mutatja az említett szám. Akkor igazán jó, ha $1e - 8$ s alatt van, mert ez egy időlépésnek felel meg.

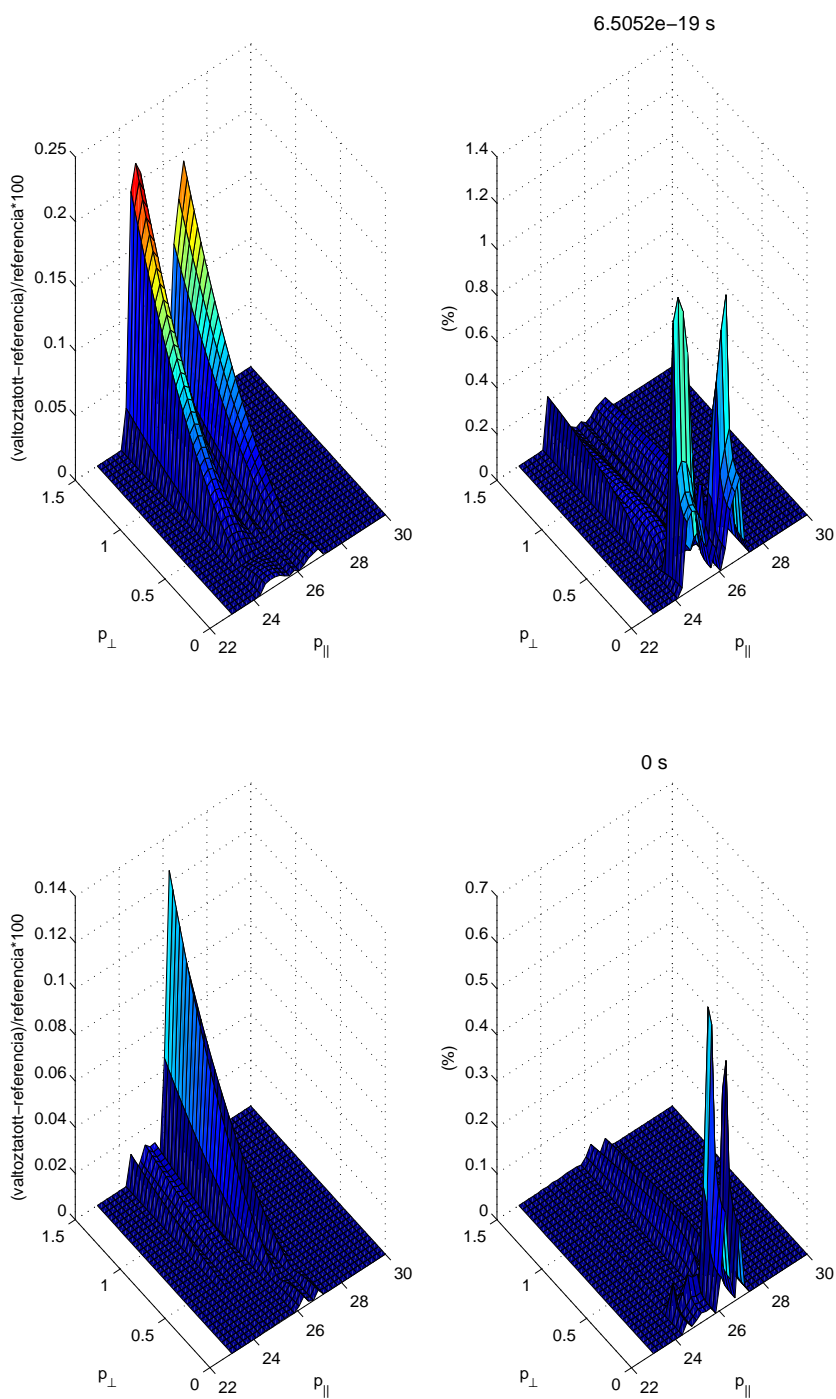
mintime0 (zérushelykeresés kiinduló pontja)

A kvázi-lineáris diffúzióhoz szükség van a pozitív növekedési rátára vagy legalább arra, hogy a hullám energiája elegendően nagy legyen. Amikor a folyamatot időben szemléljük, akkor a program futásának időtartamát lényegesen csökkenthetjük, ha meghatározzuk az egyes p_{\parallel} értékekhez tartozó azon időpontokat amikor a növekedési ráta már pozitív. Azt a p_{\parallel} értéket, amire a legkisebb ez az időpont, a legrezonánsabb p_{\parallel} -ként fogjuk emlegetni. A fenti értékek meghatározása a matlab fzero nevű függvénye segítségével történik, amelyben be kell állítani egy értéket (mintime0), hogy minek a közelében keresse a vizsgált függvény zérushelyét. Ebből a gondolatmenetből arra következtethetünk, hogy ez a paraméter nem okozhat változást. Ez az alábbi ábrák alapján igazolást nyer. Hiszen a jobb oldalon a maximális érték az 1,4%, és ez a különbség kis p_{\perp} -nél van körülbelül a legrezonánsabb p_{\parallel} -nél, ahol a legnagyobb érzékenység várható. A többi helyen az eltérés nagyon kicsi, ezért erre a paraméterre stabil.

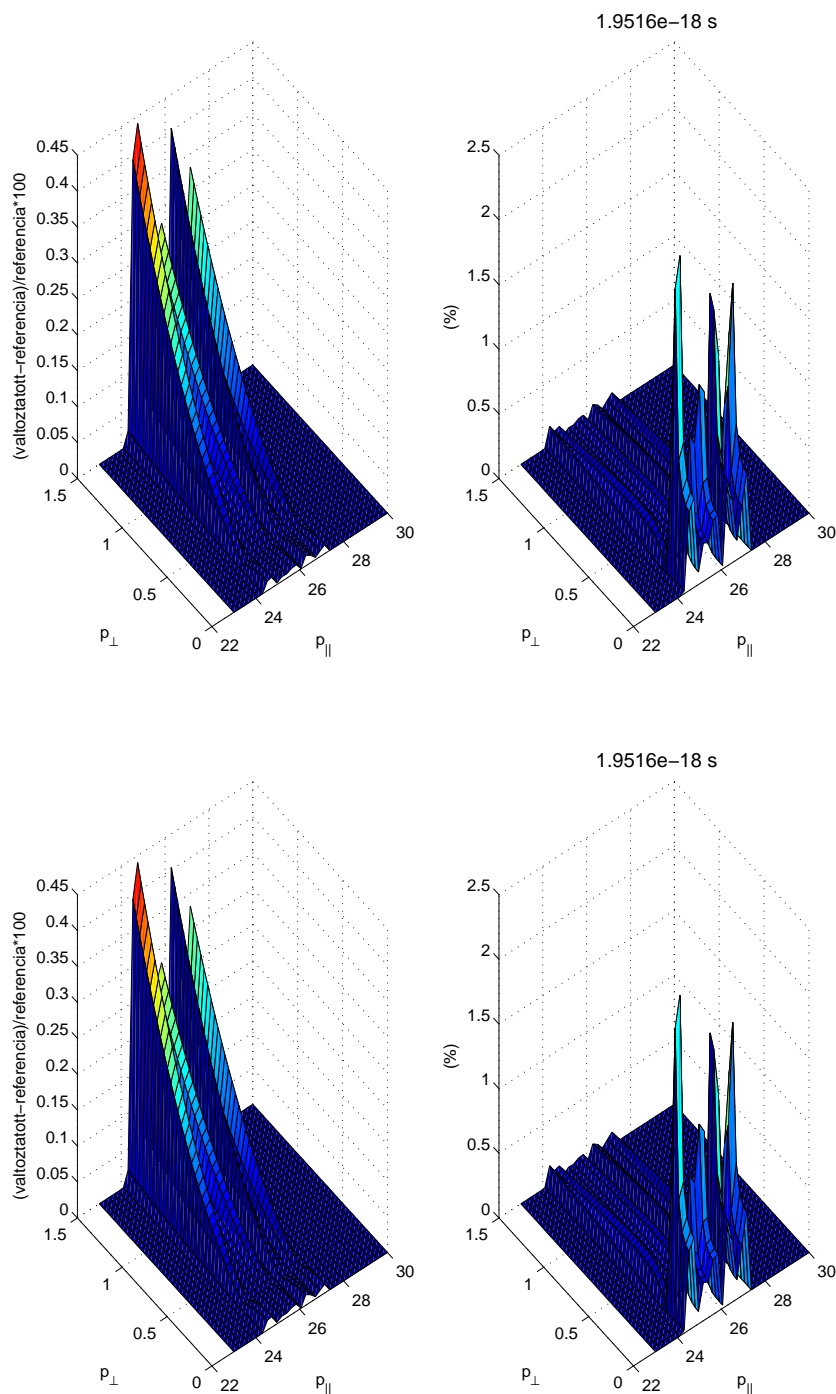


2.1. ábra. A referenciában mintime0 = 1e-4, a felső ábrán: 2e-4, az alsó ábrán 5e-5.

interr (integrálóparaméter)



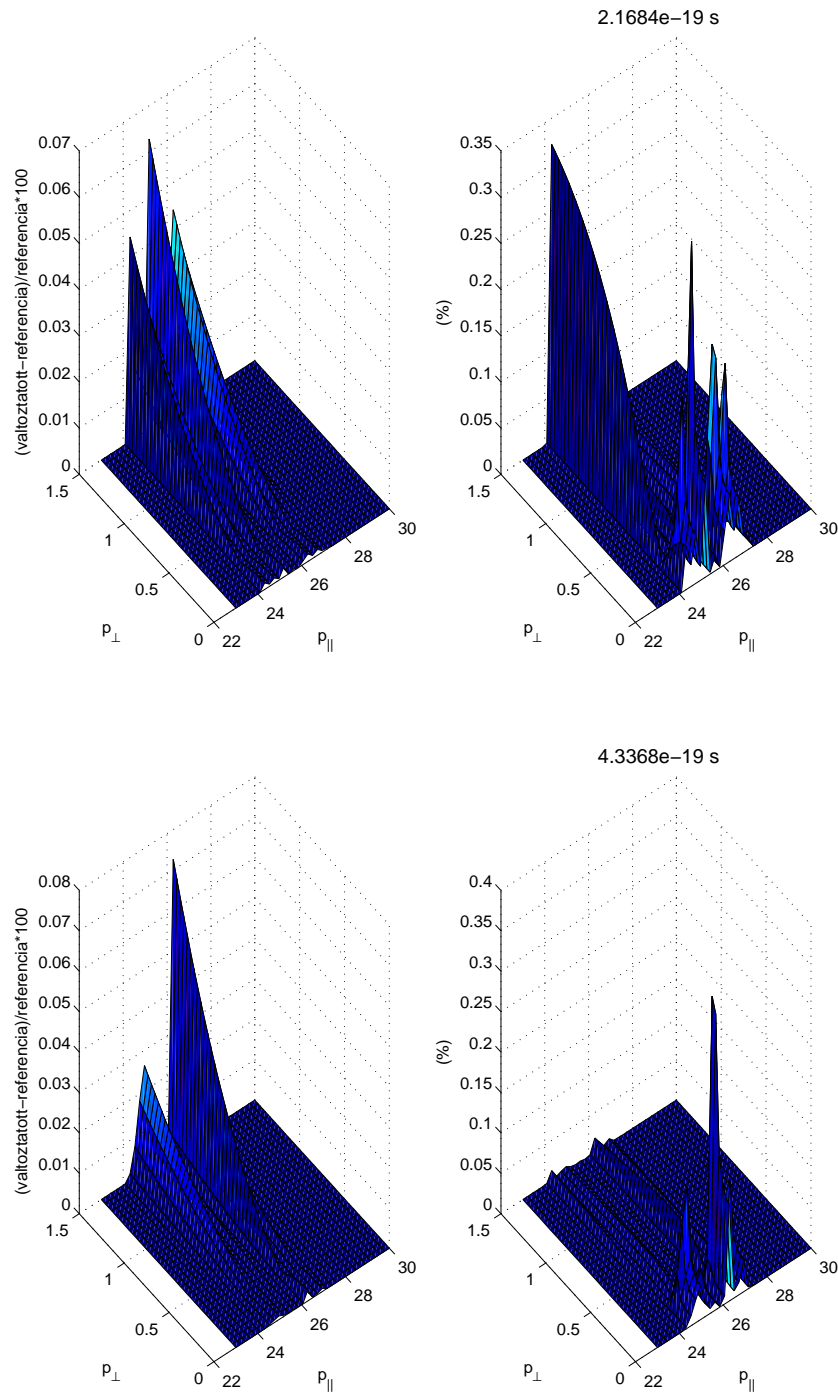
2.2. ábra. A referenciában $\text{interr} = 1e-2$, a felső ábrán: $2e-2$, az alsó ábrán $5e-3$.



2.3. ábra. A referenciában $\text{interr} = 1\text{e-}2$, a felső ábrán: $5\text{e-}2$, az alsó ábrán $1\text{e-}1$.

Az (1.15) egyenlet numerikus implementációja a Romberg-szabály alkalmazásával történik. Az integrál kiszámításának pontosságára ad megkötést ez a paraméter, ezért fontos a jó beállítás. A Romberg-szabály leírásáról bővebben a függelékben lehet olvasni. Az ábrák alapján a fenti gondolatmenethez hasonlóan elmondható, hogy itt sem történt releváns változás. Az is feltűnő, hogy a paramétert nagy értékekre beállítva sem kapunk drasztikus eltérést, ami a későbbiekben a CODE-nál előnyt jelenthet, mivel ennek a programnak a bemeneti paraméterekre jóval nagyobb az érzékenysége.

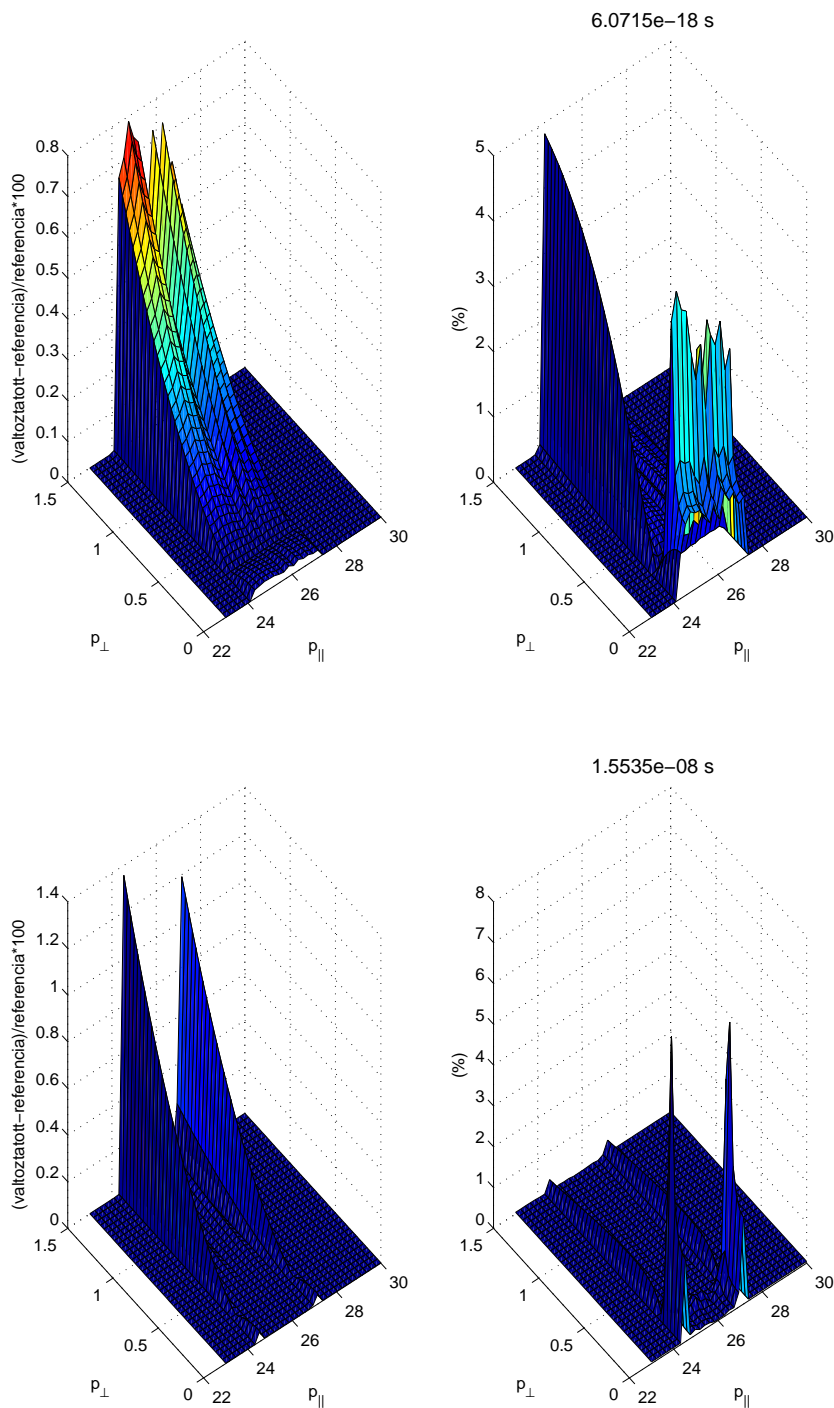
deltatheta



2.4. ábra. A referenciában $\delta\theta = 2e-3$, a felső ábrán: $5e-3$, az alsó ábrán $1e-2$.

Ez a paraméter az interpolRES függvény resmatrix nevű mátrixában a θ vektor felbontását szabályozza. Ez minél kisebb, annál rövidebb lehet a program futásideje. Ezért megpróbáltunk minél nagyobb értéket találni, amelyre még nincs jelentős változás. Az eddigi paramétereknél megszokott eltérésekhez képest a 0.1 már nem tekinthető jónak. A többinél gyakorlatilag semmi sem történik.

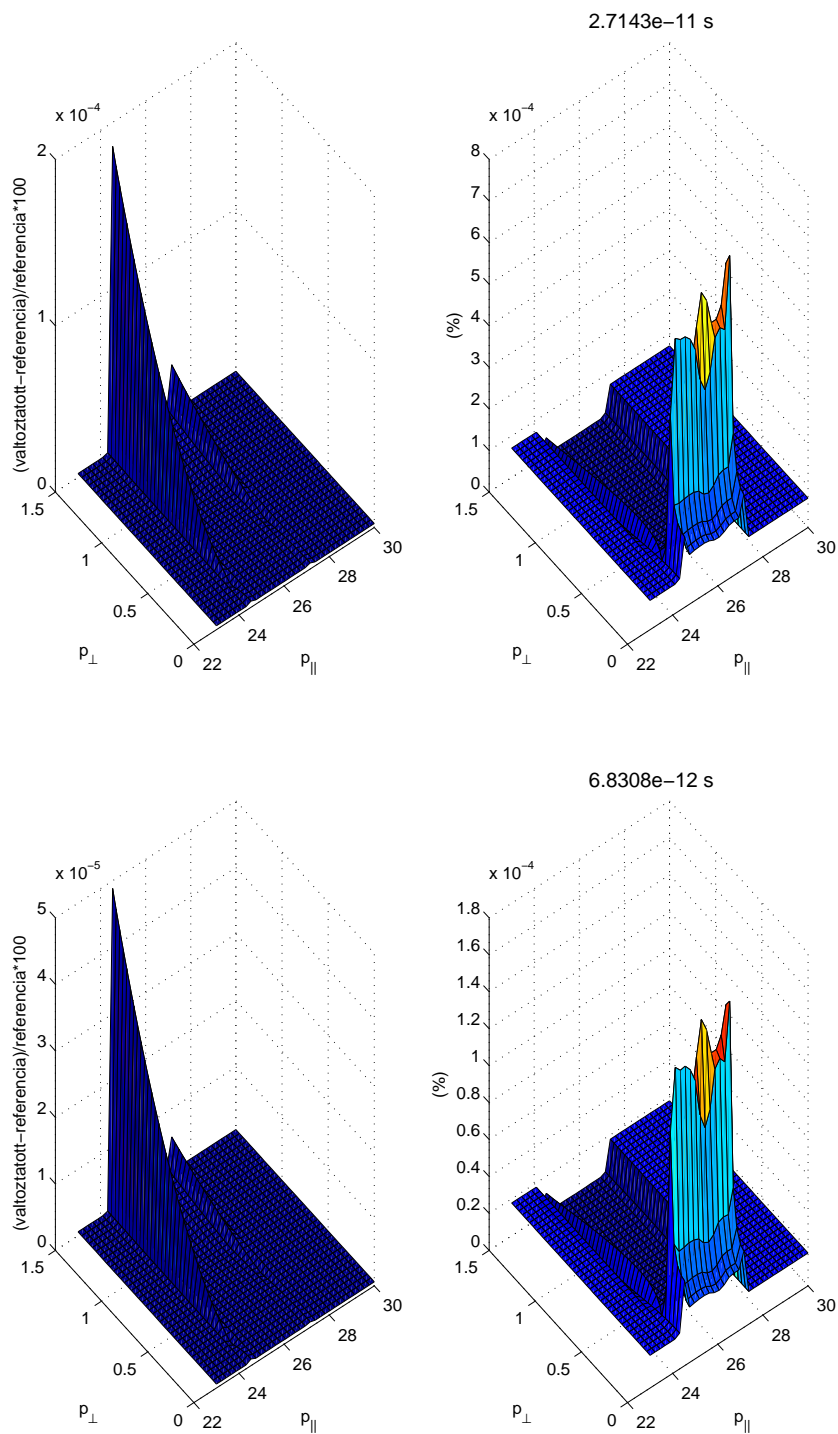
thetastep



2.5. ábra. A referenciában $\text{thetastep} = 5 \times 10^{-3}$, a felső ábrán: 1×10^{-2} , az alsó ábrán 2×10^{-3} .

A program által figyelembe vett szögtartomány lépésközeinek nagyságát adja meg. A θ csökkenése során nem látunk változást, eltekintve egy kicsi tartománytól. Azonban fontos, hogy itt az összehasonlító program elég távoli időpontokat talált csak ($1,5 \times 10^{-8}$ s), mert ez az érték egy iteráció időlépésének felel meg. A növekedés eredményez komolyabb, nagyobb tartományra kiterjedő változást, ezért ezt a paramétert az optimálisra való hangolás során nem érdemes tovább növelni.

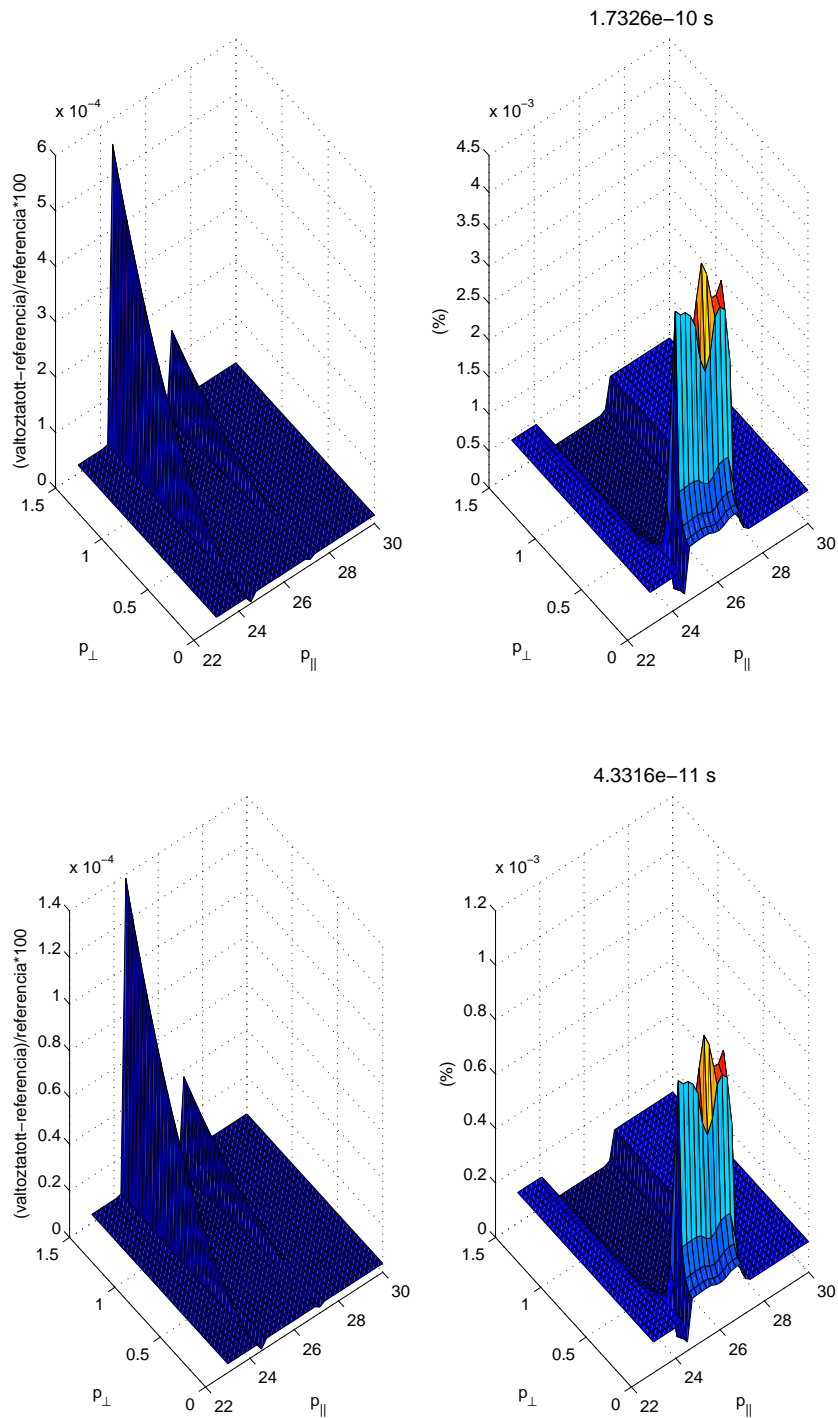
dkderiv



2.6. ábra. A referenciában $dkderiv = 1$, a felső ábrán: 2, az alsó ábrán 0.5.

A k szerinti deriváláshoz kell. Itt nem veszünk észre változást.

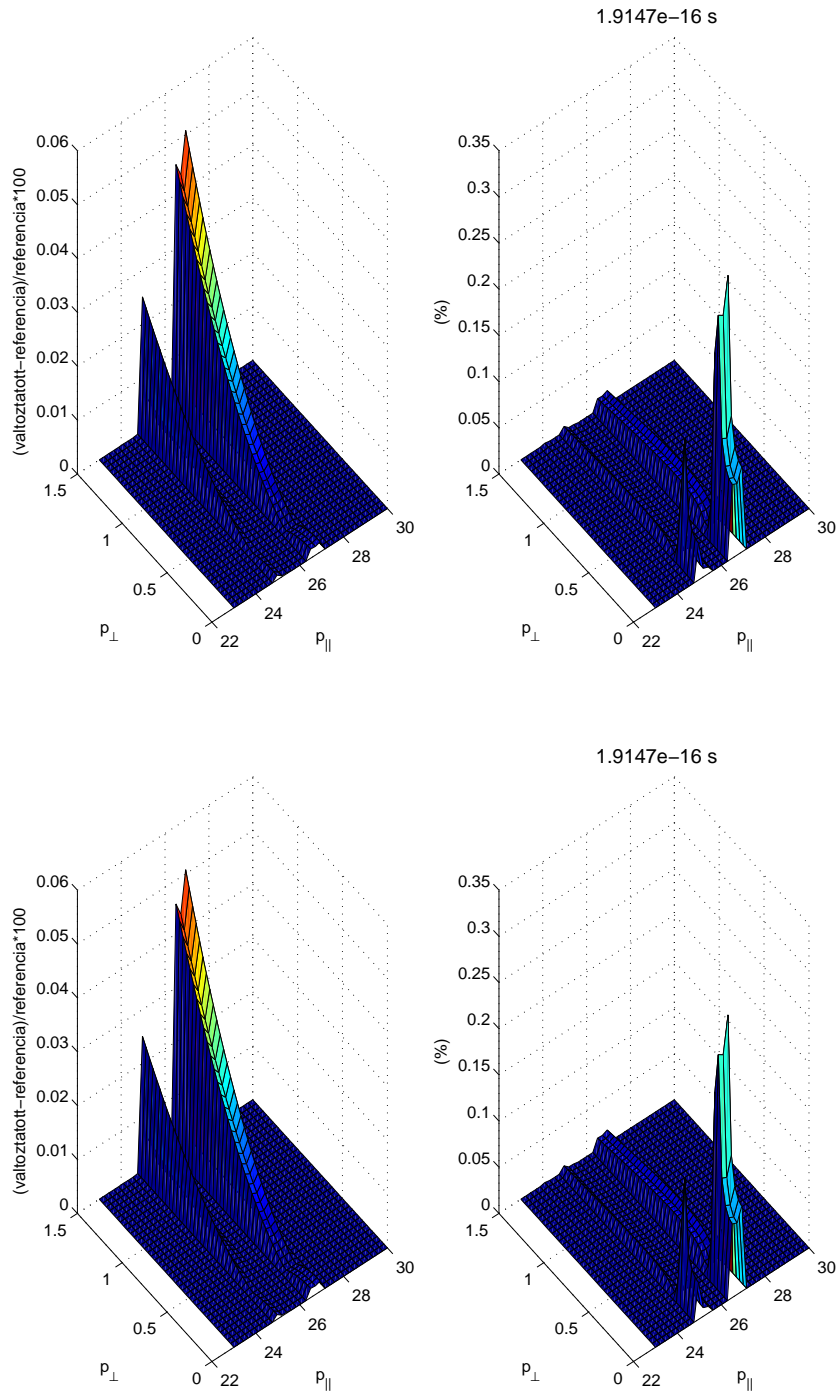
dthetaderiv



2.7. ábra. A referenciában $d\theta_{\text{deriv}} = 1e-3$, a felső ábrán: $2e-3$, az alsó ábrán $5e-4$.

A θ szerinti deriválásokhoz kell. Itt sincs változás.

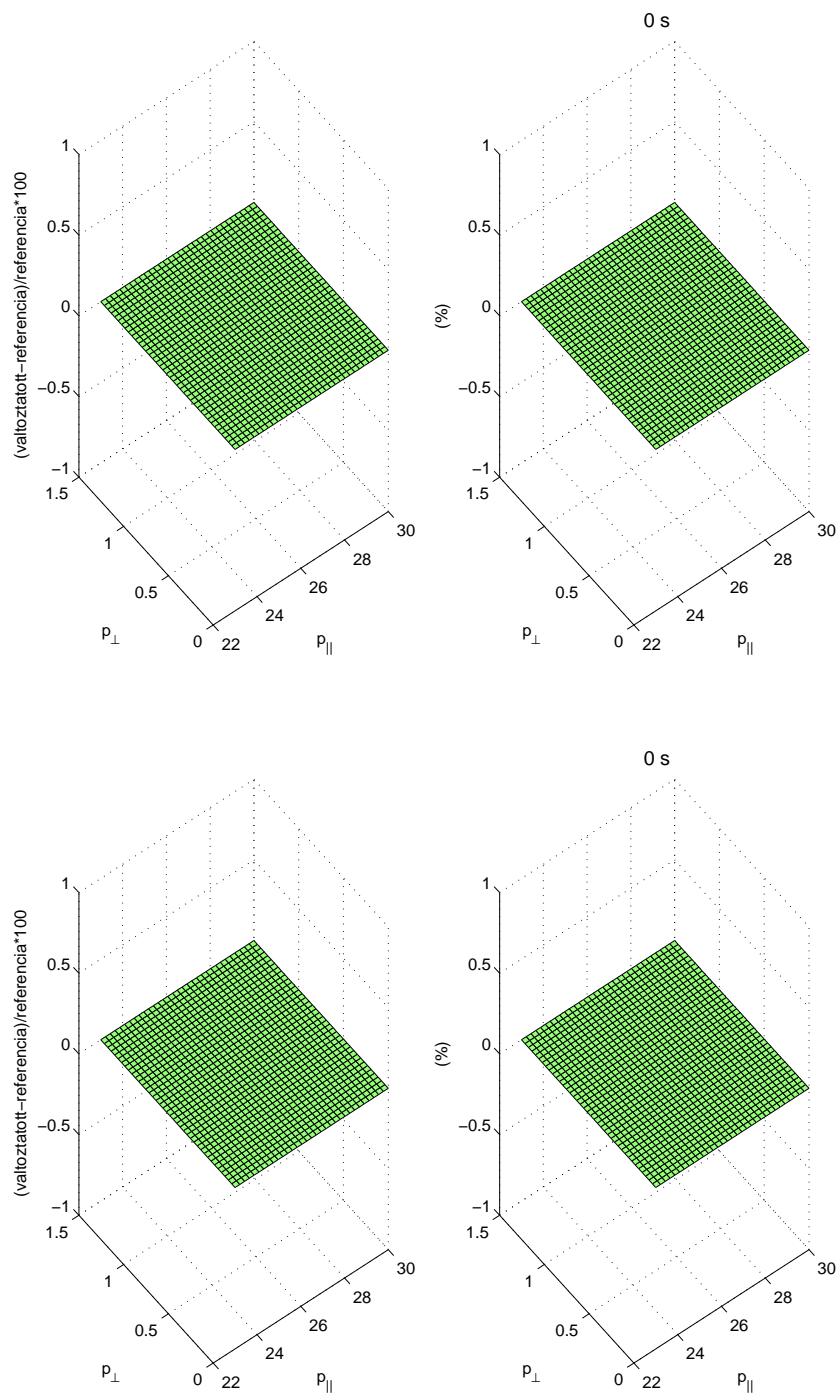
thetatartom



2.8. ábra. A referenciában $\text{thetatartom} = [1.0-1.4]$, a felső ábrán: $[0-1.57]$, az alsó ábrán: $[0-3]$.

A figyelembe vett szögtartományt ezzel állítjuk be. A hullámenergiánál előfordulhat, hogy szélesebb szögtartományban lesz releváns, mint amit figyelembe vettünk. Itt nem látunk változást, de a későbbiekben ezt szélesre kell választani. Elsőre furcsának tűnhet, hogy a két kép ugyanannak tűnik, de ennek az a magyarázata, hogy az első szélesítés során egy-két helyen bekövetkezett az előző sorban említett jelenség, de már a még szélesebb tartományon nem volt további változás. A szélesítés hátránya, hogy ahányszor szélesebb ez a tartomány, annyszor tovább fut a program.

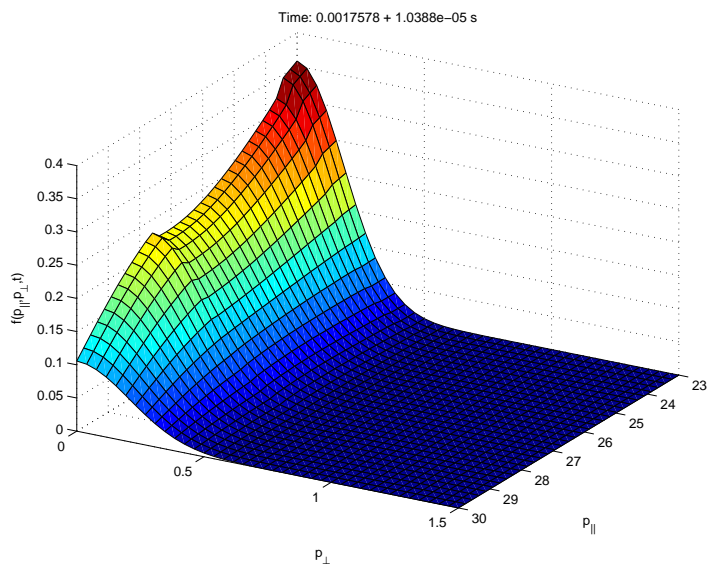
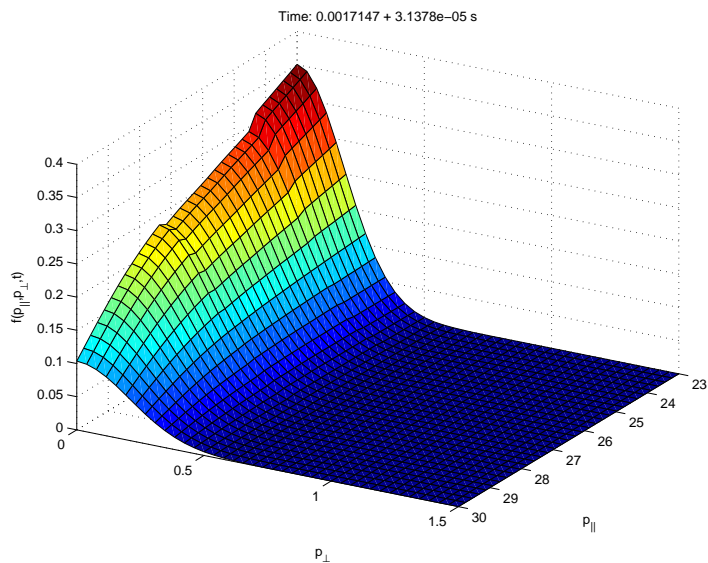
maximumdt (maxidőlépés)



2.9. ábra. A referenciában maximumdt = 5×10^{-5} , a felső ábrán: 1×10^{-4} , az alsó ábrán: 1×10^{-5} .

Meghatározza az időlépés maximális értékét egy iteráció során. Ez egy biztonsági feltétel, hogy a folyamat akkor se menjen túl gyorsan, ha a növekedési ráta nagy. A fentiek alapján, úgy tűnik, hogy ez a paraméter teljesen hatástalan, de a biztonság kedvéért benne hagytuk a programban.

factor (pozitív növekedési rátát biztosító p.)



2.10. ábra. A referenciában factor = $5e-5$, a felső ábrán: $1e-4$, az alsó ábrán: $1e-5$.

Ez a paraméter nagy meglepetést okozott, mert mint az ábrákon látható, a lépcső helyett egy folytonos völgyet kaptunk. Az optimális paraméter szett esetén olyan paramétertartomány kerestem, ahol a végeredmény nem függött a paraméter értékétől és ezen a tartományon lépcső nélküli eloszlásfüggvényt kaptam. Ennek az lehet a magyarázata, hogy a τ -t integráló programrészbe való belépés feltételét ez a paraméter megszabja. Tehát minél kisebb, annál jobban, finomabban tudják követni az egyes p_{\parallel} -ekhez tartozó destabilizációs ciklusokat. Ezért a korábban jellemző platók eltűntek.

2.3. A fizikai paramétereiktől való függés

A munkám talán legfontosabb része volt, hogy megvizsgáljam az egész folyamat fizikai paramétereiktől való függését. Az alábbiakban az optimális technikai paraméterek mellett relatíve hosszú futtatások eredményei láthatóak. Minden paraméternél két irányt vizsgáltam, ha növelem illetve ha csökkentem az egyes paraméterek értékét. Itt is ugyanaz az eljárás, mint a numerikus paramétereiknél, mindig csak egyet változtatok és annak hatását vizsgálom.

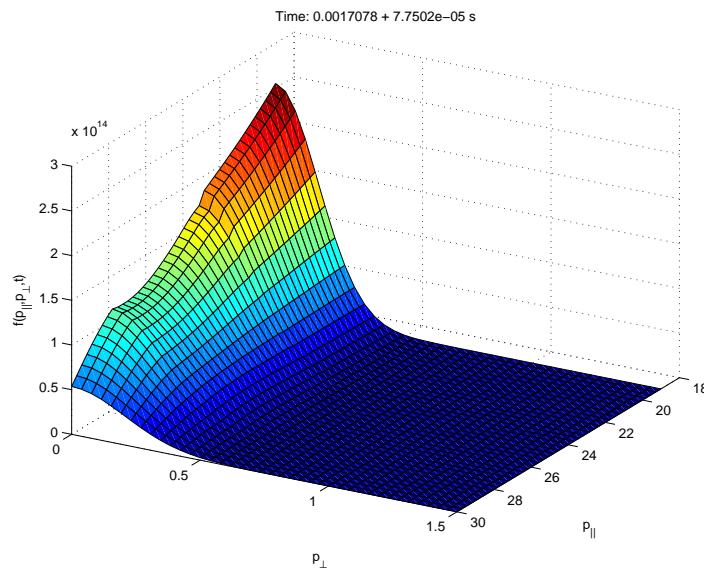
Az egyes paraméterek hatását a folyamatot leginkább jellemző adatok összehasonlításával kapjuk. Mindegyik részben a "tapasztalatok" alatt röviden leírom az észrevételeket és ahol sikerült az "értelmezés" során összevettem az eredményeket a várakozással. A folyamat kvázi-linearitása miatt az egyes paraméterek hatása nem triviális. Ezért ebben a fejezetben többnyire konklúziók lesznek.

Referencia

Az egyes paraméterek kiválasztásában a ma működő fúziós berendezések tipikus értékeit vettük alapul. A referenciának nevezetesen a JET paraméterek szolgáltak. Ezek pedig a következők:

$$B = 2 \text{ T}, n_e = 5e19m^{-3}, T = 20 \text{ eV}, E = 40 \text{ V/m}$$

Az alábbi ábra (2.11 ábra) mutatja a kialakuló eloszlásfüggvényt.



2.11. ábra

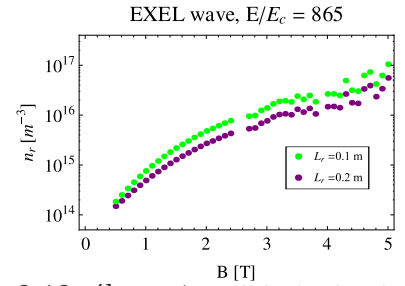
A mágneses tér hatása

Tapasztalat:

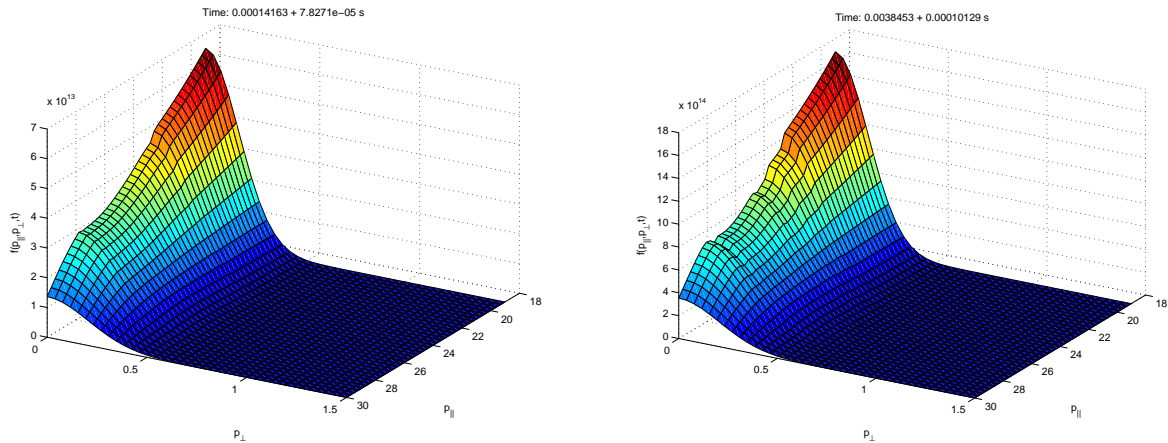
Nagyobb mágneses tér esetén később kezdődik a destabilizáció és több elfutó elektron kell hozzá. A leginstabilabb hullám frekvenciája nagyobb, hullámenergiája kisebb.

Értelmezés:

A ábrán látható, hogy a destabilizációhoz szükséges elfutó elektron sűrűség hogyan függ a mágneses tértől. Ez egyezik tapasztalattal. Ameddig nem kezdődik el a destabilizáció τ értéke nulla az analitikus eloszlás függvényben. Azaz a kezdeti időpontig mind a három esetben ugyanaz a függvény írja le az elfutó elektronok eloszlását. Ennek a függvénynek a jellemzője, mivel az elfutó elektronok lavina keletkezésére helyezi a hangsúlyt, hogy szigorú monoton növekvő. Azaz, ha később kezdődik a destabilizáció az azt jelenti, hogy addig több elfutó elektron fog keletkezni.



2.12. ábra. A stabilitási határok a mágneses tér függvényében különböző sugarú nyalábok esetén [10]

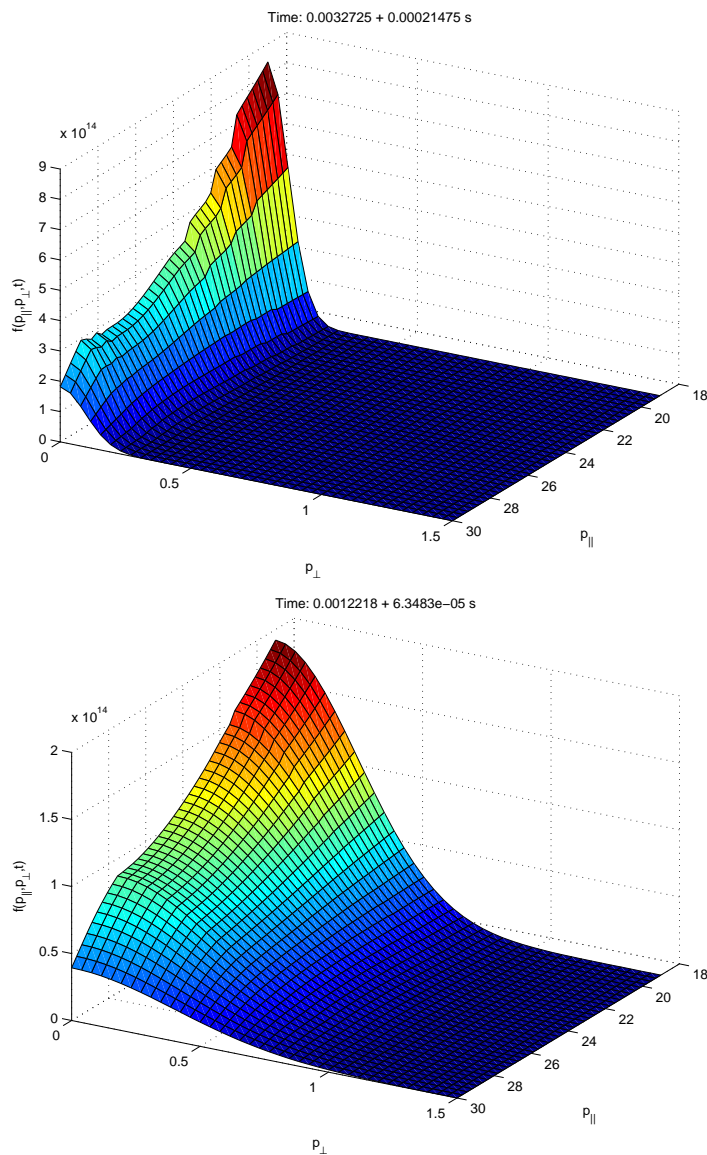


2.13. ábra. A bal oldali ábrán a $B=1$ T-hoz, a jobb oldali ábrán a $B=5$ T-hoz tartozó eloszlás függvények láthatók.

Az elektronsűrűség hatása

Tapasztalat:

Ha nagyobb az elektronsűrűség, akkor hamarabb van a destabilizáció és a várakozásainknak megfelelően kevesebb elfutó elektron kell. A hullám energiája sokkal nagyobb. Alacsony elektronsűrűségnél a kvázi-lineáris kölcsönhatás feltűnően nagy változást okozott.



2.14. ábra. A felső ábrán az $n=1e19 \text{ m}^{-3}$ esete, míg az alsó ábrán az $n=2e20 \text{ m}^{-3}$ esete látható.

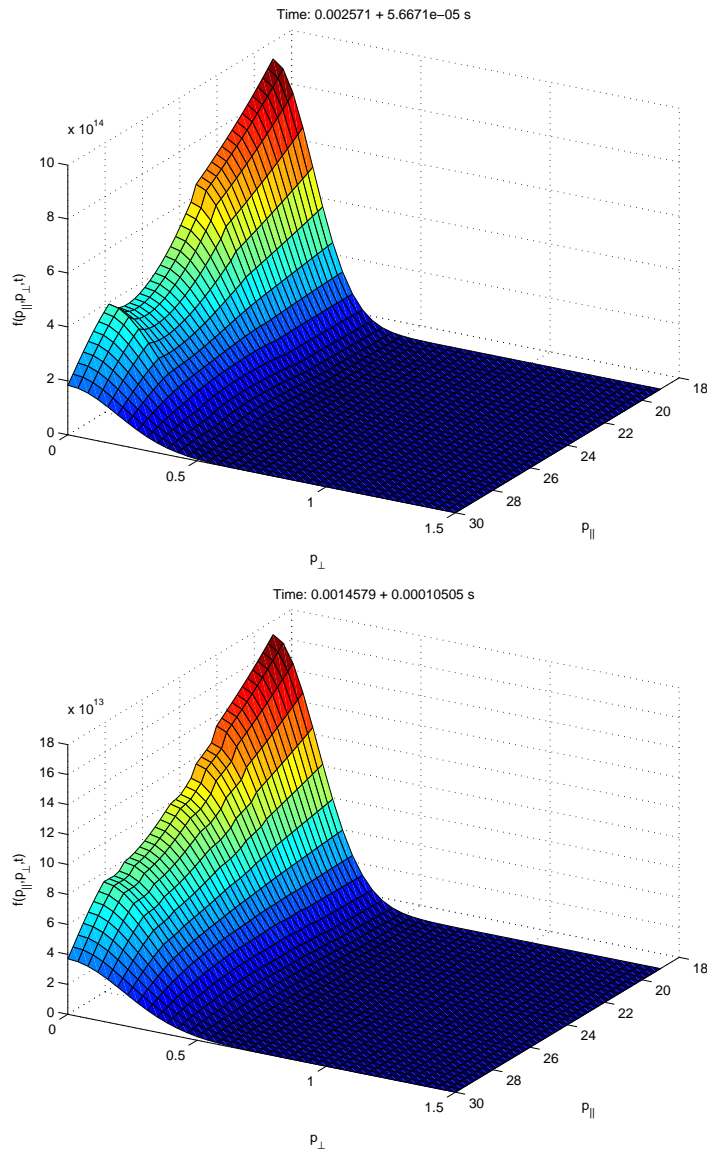
Az elektronhőmérséklet hatása

Tapasztalat:

Nagyobb elektronhőmérséklet hamarabb kezdődik a folyamat és kevesebb elfutó elektron kell. A hullám energiája csökken.

Értelmezés:

A konvektív csillapítás csökken, ha nő a hőmérséklet. Ezért kevesebb idő kell a destabilizációhoz.



2.15. ábra. A felső ábrán a $T=5$ eV esete, míg az alsó ábrán a $T=50$ eV esete látható.

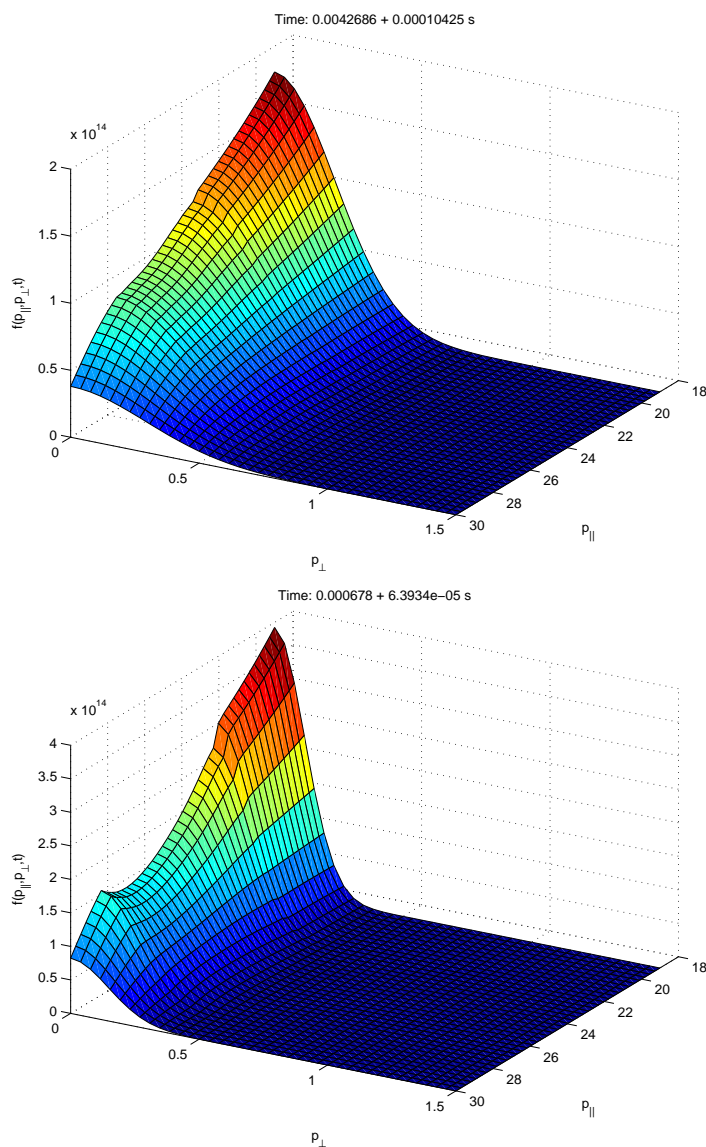
Az elektromos térerősség hatása

Tapasztalat:

Nagyobb elektromos tér esetén kevesebb idő és kevesebb elfutó elektron kell a destabilizációhoz. A hullámenergiája szinte nem változik.

Értelmezés:

Ha nagyobb az elektromos tér, akkor több elfutó elektron keletkezik ugyanannyi idő alatt. Nagyobb lesz a lineáris növekedési ráta, míg a konvektív- és az ütközéses csillapítás elektromos tér független. Ezért hamarabb kezdődik el a folyamat.



2.16. ábra. A felső ábrán az $E=20$ V/m esete, míg az alsó ábrán az $E=80$ V/m esete látható.

A legjellemzőbb adatok

Az alábbi táblázatban (2. táblázat) össze vannak gyűjtve az egyes esetekhez tartozó jellemző adatok, amelyek a referenciával való összehasonlítás alapját szolgálják. A táblázatban levő számokhoz az alábbiak tartoznak:

- (1): A leginstabilabb p_{\parallel} érték. Ehhez tartozik megfelelő k értéknél a leginstabilabb hullám. Ennél kezdődik a leghamarabb a destabilizáció.
- (2): A destabilizáció kezdete a leginstabilabb hullám esetén. Ezt másodpercben mérjük.
- (3): A destabilizációhoz szükséges elfutó elektronok száma a leginstabilabb hullámnál. Ez egy sűrűség érték: m^{-3} .
- (4): A kvázi-lineáris kölcsönhatás utáni eloszlásfüggvény és a kölcsönhatás nélküli eloszlásfüggvény viszonya. Ezt úgy kapjuk, hogy ugyanarra az időpontra kiszámoljuk az analitikus eloszlásfüggvény értékét $\tau = 0$ mellett, majd ebből levonjuk a kvázi-lineáris kölcsönhatás

mellett kapott eloszlásfüggvényt és az így kapott értéket leosztjuk a kölcsönhatás nélküli eloszlásfüggvénnyel (ugyanabban az időpontban). Az eredmény százalékban értendő.

(5): A leginstabilabb hullámot jellemző k és θ érték.

(6): A leginstabilabb hullám maximális energiája.

	B=1 T	B=5 T	$n=1e19 m^{-3}$	$n=2e20 m^{-3}$	T=5 eV	T=50 eV	E=20 V/m	E=80 V/m
(1)	25,8	26,1	26,4	25,3	26,1	25,8	25,8	26,1
(2)	1,4e-4	3,8e-3	3,3e-3	1,2e-3	2,5e-3	1,5e-3	4,3e-3	6,8e-4
(3)	3,4e13	8,4e14	3,8e14	1e14	4,6e14	8,9e13	9,7e13	1,9e14
(4)	14,1	21,1	36,6	11,5	25,6	13	7,6	32,4
(5) θ	1,06	1,24	1,4	0,85	1,14	1,23	1,12	1,26
k	2,92e3	1,01e4	8,2e3	4,2e3	4,15e3	5,28e3	4e3	5,9e3
(6)	7,6e-12	5e-13	3,9e-14	5,5e-11	2,1e-11	1,1e-12	3,4e-12	2,4e-12

2. táblázat. A legjellemzőbb adatok táblázatba gyűjtve.

A referenciára ugyanezek az értékek az alábbi táblázatban (3. táblázat) láthatók.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5) θ	(5) k	(6)
26,1	1,7e-3	1,3e14	16,2	1,2	4,85e3	2,6e-12

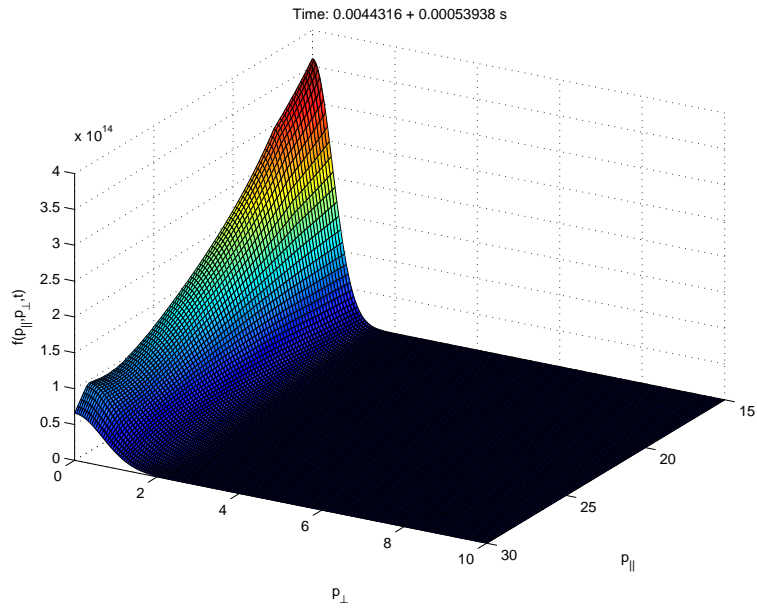
3. táblázat. A referencia paraméterekhez tartozó jellemzők.

A táblázatok alapján még levonhatunk néhány következtetést: a legrezonánsabb $p_{||}$ értékek szinte megegyeznek az egyes esetekben. Gyakorlatilag ugyanez mondható el a terjedési irányról és a hullámszámról. Utóbbinál egyedül a B=5 T -nál tapasztalunk komoly eltérést.

2.4. Alkalmazás az ITER paramétereire

Az ITER jelenti az egyik legfőbb motivációját a dolgozatnak, ezért ennek paramétereire is futtattam. A következők voltak az adatok: B = 5.3 T, T = 300 keV, E = 40 V/m és $n = 3e20 m^{-3}$.

Az eredményül kapott eloszlásfüggvény az alábbi ábrán látható (2.17 ábra):



2.17. ábra. Az ITER paramétereire történt futtatás végén kapott eloszlásfüggvény.

A leginstabilabb hullámot jellemző paraméterek: A legrezonánsabb p_{\parallel} érték: 26,4.
A kvázi-lineáris kölcsönhatás miatt 25,1 százalékkal csökkent az elfutó elektronok száma.
A destabilizációhoz szükséges elektronok száma: $1,2e14 m^{-3}$.
A hullámenergia: $W_k = 6,7e - 12$.
A terjedési iránya: 0,875 J.
A hullám hullámszáma: $6,25e3 1/m$.
A destabilizáció kezdete: 0,0044.

Az adatokból látható, hogy rengeteg idő kell a destabilizáláshoz. Azonban érdekes, hogy a destabilizációhoz szükséges elfutó elektronok száma ugyanabban a nagyságrendben maradt, mint az előző fejezetben tárgyalt esetekben. Ennek oka az elfutó elektronok számára a hőmérséklet- és a sűrűség növelésének gyakorolt hatása, mivel mind a kettő csökkenti, míg a mágneses tér növeli. Így a két hatás gyakorlatilag kompenzálta egymást. Említésre méltó, hogy az előző fejezet végén említett mennyiségek, melyek szinte függetlenek, itt is annak bizonyulnak, mert értékük szinte ugyanannyi.

3. Egyesítés a CODE-dal

A kvázi-lineáris kölcsönhatást számoló rutin, továbbiakban QALIN, és a CODE (Collisional Distribution of Electrons) összekapcsolására először 2013 augusztusában tettem kísérletet Adam Stahl, a svédországi Chalmers University of Technology hallgatójának segítségével, aki a programot legjobban ismerők egyike. A célom az volt, hogy a kvázi-lineáris kölcsönhatást beleintegráljam a CODE-ba, a diffúziós operátor megfelelő átalakításával. Ezt az elkezdett munkát az én svédországi látogatásom során igyekeztem befejezni, bár mint ahogyan látható lesz ez sokkal nehezebbnek és problematikusabbnak adódott, mint azt eleinte hittük.

3.1. Az összekapcsolás elméleti háttere

Az általunk használt eloszlásfüggvény csak irracionálisan magas és időben állandó elektromos terek esetén tekinthető érvényesnek. Bár a CODE még nem tudja kezelni az időben változó elektromos teret, de tetszőleges állandó elektromos térre tud számolni, valamint az elfutó elektronok számát is pontosabban határozza meg. A CODE azért ígérkezik alkalmasnak, mert numerikusan, jóval kevesebb közelítéssel meg tudja oldani a Fokker-Planck egyenletet.

3.1.1. A CODE működésének alapelve

A Fokker-Planck egyenlet (lásd: 3.1) a Boltzmann-egyenlet egy speciális alakja, amelyet akkor kapunk, ha az ütközési operátornak a Fokker-Planck ütközési operátort választjuk. Az összefüggés jobb oldalának S tagja az ún. forrás. A forrás tartalmazza a másodlagos keletkezést, míg az elsődleges keletkezést az ütközési operátor foglalja magába.

Mivel egy ITER méretű tokamakban az elfutó elektronok keletkezésében a másodlagos keletkezés játssza a domináns szerepet, ezért a programot is ennek megfelelően kellett futtatni. Alapvetően háromféleképpen lehet használni: csak elsődleges keletkezést vegyen figyelembe, ekkor van időfüggő- (az eloszlásfüggvény időfejlődését írja le) és időfüggetlen- (stacionárius megoldás keresése) mód. Ha a másodlagos keletkezést is figyelembe akarjuk venni, akkor csak időfüggő módban futtatható [11].

A probléma megoldásának kulcsa a Fokker-Planck egyenlet diszkretizációjában rejlik. Erről az áttekinthetőség megőrzése végett bővebben a függelékben lehet olvasni. Az eredeti egyenlet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + eE\mathbf{e} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = C(f) + S \quad (3.1)$$

Itt a nablás tag a relativisztikus impulzus térbeli gradienst jelenti. A \mathbf{C} az elektron ütközési operátor, míg az \mathbf{S} a forrást jelenti, E az elektromos tér, e az elektron töltése, míg az \mathbf{e} az elektromos térrel antiparalel vektor. A Legendre-polinomok (lásd függelék) segítségével ezt át lehet alakítani és a nyert formulával numerikus eljárást kifejleszteni. A fenti egyenletet dimenzióatlanítva és diszkretizálva:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F_L}{\partial t} + F_l \sum_{l=0}^{\infty} (E \left[\frac{L+1}{2L+3} \delta_{L+1,l} + \frac{L}{2L-1} \delta_{L-1,l} \right] \frac{\partial}{\partial y} \\
& \quad + \frac{E}{y} \left[\frac{(L+1)(L+2)}{2L+3} \delta_{L+1,l} - \frac{(L-1)L}{2L-1} \delta_{L-1,l} \right] \\
& \quad - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\psi(x)}{x} \delta_{L,l} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{2\psi(x)}{y} + \frac{dx}{dy} \frac{d\psi}{dx} \right] \delta_{L,l} \\
& \quad - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left[\frac{1}{x} \frac{dx}{dy} \frac{d\psi}{dx} + \frac{2\psi(x)}{xy} - \frac{\psi(x)}{x^2} \frac{dx}{dy} + 2\psi(x) \right] \delta_{L,l} \frac{\partial}{\partial y} \\
& \quad + \frac{3\sqrt{\pi}}{8xy^2} \left[Z + \phi(x) - \psi(x) + \frac{\delta^4 x^2}{2} \right] L(L+1) \delta_{L,l} = S_L,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

ahol az egyes változók jelentése megtalálható a következő hivatkozás alatt: [11].

A fenti összefüggés (3.2 egyenlet) alapján látható, hogy a parciális differenciálegyenlet differenciálegyenlet-rendszert jelent a diszkretizáció után az egyes Legendre-polinom együtt-hatókra: az F_L -ekre. A differenciálegyenlet-rendszert mátrixos alakba írhatjuk, ha az F_L -eket és az S_L -eket egy-egy vektorba tesszük, akkor a következő formulát adhatjuk meg:

$$\frac{\partial F_v}{\partial t} + \mathbf{M}F_v = S_v \tag{3.3}$$

ahol

F_v az egyes Legendre-polinomok együtt-hatóiból képezett vektor,

S_v az egyes Legendre-polinomok együtt-hatóiból képezett vektor.

Ez a differenciálegyenlet-rendszer többféle módszerrel oldható meg. A programba is választhatunk (Runge-Kutta, trapéz szabály stb.). A megoldás során szükség van a mátrix inverzére, amit a CODE LU-faktorizációval számol, ugyanis ez gyorsabb, mint venni az inverzét. A mátrix időfüggetlen, ezért az előbbi műveleteket csak egyszer az idő szerinti iteráció előtt kell elvégezni. Az időfejlődést ezek után a következő módon határozza meg. Fix időlépésekkel halad és megnézi a forrás értékét, melyet a [11] cikk (19)-es egyenlete adja meg. Ehhez kell az eloszlásfüggvény is. Erre a forrásra megoldja az egyenletet, majd újra számolja a forrást és így tovább. Ha a megoldással előállított Legendre-együtt-hatókat beírjuk az eloszlásfüggvény Legendre-sorfejtésébe, akkor fontos kérdés az így kapott összeg konvergenciája. A CODE különösen érzékeny ebből a szempontból a bemeneti paraméterekre, ami rendkívül megnehezíti a két program összekapcsolását.

3.1.2. Az összekapcsolás lehetőségei

Két program összecsatolásánál a legkézenfekvőbb ötlet az egyes programok egymás utáni alkalmazása felváltva. Ezt nem lehetett megtenni, mert a QALIN csak az analitikus eloszlásfüggvényen tudja a kvázi-lineáris kölcsönhatást szimulálni a τ kiszámításán keresztül. Ezért tetszőleges eloszlásfüggvényre nem tud hatni.

Ezért a járható út az volt, hogy a Fokker-Planck egyenlet ütközési operátorába egyszerűen

beleírtuk a koordináta-transzformált diffúziós operátort. Ezt diszkretizáltuk. Így a kód régi mátrixa helyett kreáltunk egy újat és egyszerűen ezt tesszük a régi helyére. Pontosabban mivel az eredeti mátrix időfüggetlen volt az új pedig már nem az, ezért át kellett tennem a főciklusba (idő szerint iterál). Ezenkívül összehangoltam a változó készletet és a mértékegység-rendszereket. A következő pontban részletesen ismertetem az eljárást.

3.2. Gyakorlati megvalósítás

Először megmutatom a diffúziós operátoron végrehajtott számításokat. Ezt elég részletesen tárgyalom.

A diffúziós operátor:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \left(p_{\perp} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right) \quad (3.4)$$

ahol a τ :

$$\tau(p_{\parallel}, t) = \int_0^t dt' D(p_{\parallel}, t') \quad (3.5)$$

A kvázi-lineáris diffúzió CODE-ba való beillesztéséhez át kell térnünk a QALIN $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ változókészletéről a CODE (y, ξ) változókészletére. A következő egyenletekben a ξ az elektromos (vagy a párhuzamosság miatt a mágneses) tér és a részecske sebesség vektora által bezárt szög koszinuszát jelenti. A CODE-ban és QALIN-ban lévő normálások alapján a kapcsolat:

$$p_{\parallel} = y \cdot \delta \cdot \xi \quad (3.6)$$

$$p_{\perp} = y \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.7)$$

ahol:

$$\delta = \frac{v_e}{c} \quad (3.8)$$

Itt a c a fénysebesség, míg a számláló a termikus elektronok sebessége:

$$v_e = \sqrt{\frac{2T}{m}} \quad (3.9)$$

Fontos a következő átalakítás:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{1}{D} \quad (3.10)$$

Figyelembe véve, hogy az elfutó elektron energiája nagy, használhatjuk az ultra-relativisztikus közelítést, továbbá az eloszlásfüggvény nyaláb jellege miatt igaz, hogy $\xi \simeq 1$. Ezért a következő írható fel:

$$\frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \simeq \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial p_{\perp}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial p_{\perp}} \quad (3.11)$$

A levezetés:

A p_{\parallel} -ra és a p_{\perp} -re adott formulák alapján:

$$y = \sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2} \quad (3.12)$$

$$\xi = \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}} \quad (3.13)$$

A 3.11 formulában látható tagokra a következő írható:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p_{\perp}} = \frac{\xi \sqrt{1 - \xi^2}}{y \cdot \delta} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_{\perp}} = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.15)$$

A $\xi \simeq 1$ miatt, valamint az eloszlásfüggvény nyalábszerűsége miatt, igaz a következő reláció:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \ll \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (3.16)$$

Ezért a 3.11 összefüggés érvényes.

A függelékben megtalálható az alábbi két formula pontos levezetése. Az elsőt az előzőek összevonásával kapjuk. A diffúziós operátor hatását az eloszlásfüggvényre megadó parciális differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D(y, t)}{y^2 \cdot \delta^2} \cdot \xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi(1 - \xi^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (3.17)$$

Megfelelő aszimptotikus közelítéssel, valamint a diszkretizáció végrehajtásával az előző formula jobb oldalán (lásd 5.2 fejezet) kapjuk azt az alakot, amit a 3.2 egyenlet bal oldalának szummájába írunk:

$$-\frac{D(y, t)}{y^2 \delta^2} (L + 1) L \delta_{L, l} f_l \quad (3.18)$$

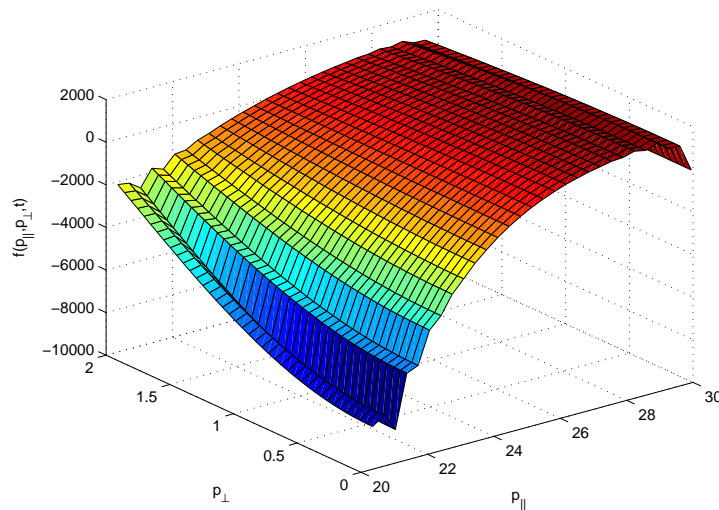
Az új diszkretizált operátor, ami tehát tartalmazza az ütközési- és a kvázi-lineáris diffúzió operátorát, lehetővé teszi a CODE megoldási módszerének eddighez hasonló alkalmazását. Az egyetlen nehézség, amit még meg kellett oldani, hogy a diffúziós együttható időben változik. Ezért a mátrixot minden időlépésben újra kell generálni, azaz a mátrixot építő program részt be kell tenni az időciklusba. A mátrix létrehozása előtt pedig ki kell számítani a QALIN-ból vett diffúziós együtthatót számoló programrésszel a diffúziós együtthatót. Ezt is minden lépésben. Ez egy külön függvény lett, a bemenetek pedig globális változók segítségével vannak biztosítva. Probléma a két program eltérő mértékegység-rendszere, valamint hogy

eltérő módon tárolják az eloszlásfüggvényt, ugyanis a CODE egy vektorban az eloszlás függvény Legendre-polinomok szerinti sorfejtés együtthatóit tartalmazza, míg a QALIN egy 3D-ós mátrixban tárolja az eloszlásfüggvény értékét az egyes p_{\parallel} , p_{\perp} értékekre az egyes időpontokban. Ezért a CODE eloszlásfüggvény reprezentációját meg kellett feleltetni a mi reprezentációnknak. Ezt egy gyakorlatilag a Legendre-sorfejtést megvalósító függvény hajtja végre, azáltal, hogy kiszámolja a QALIN impulzustartomány gridjének pontjaiban a CODE eloszlásfüggvényt tároló vektorából vett együtthatókkal súlyozott Legendre-polinomok összegét. A mértékegység váltásokat elvégeztem a program legelején. A teljesség igénye nélkül felsorolok néhány mértékegységet: statcoulombból coulombba (töltés), ergből joulbba (hőmérséklet), elektronvoltból joulbban (energia), cm-ből m-be (sűrűség) stb.

A fenti módszerek leprogramozása után egy működőképes, eredményeket adó programot kaptam, amelynek a kulcsfontosságú részei is működésbe léptek, vagyis a diffúziós együttható számítására is sor kerül a futás során.

3.3. Konvergencia problémák, további lehetőségek

Azt azonnal le kell szögezni, hogy a CODE sajnos nagyon érzékeny a bemeneti paraméterek helyes megválasztására. Ezért a futtatás eredményét illetően a konvergencia előtérbe kerül. Egyelőre nem sikerült olyan beállítást találnom amire a konvergencia teljesülne. Az alábbi ábra egy eloszlásfüggvényt ábrázol, amelyet a két program összekapcsolásával kaptam.



3.1. ábra. Az összekapcsolt programok által generált eloszlásfüggvény.

A továbbiak szempontjából eredményt jelenhet, ha kihasználjuk, hogy a CODE a konvergencia biztosítására több speciális programrészt is tartalmaz. Ezek jelenleg nincsenek kellőképpen kihasználva, mert olyan feltételek mellett lehet őket csak használni, amik szemben állnak az ultra-relativisztikus közelítéssel. A későbbiekben megoldást jelenthet ezen bonyolult programrészek megértése és esetleges módosítása.

4. Összefoglalás

Az energiatermelés illetve a környezetszennyezés problémáinak az enyhítésére a fúziós berendezések jó lehetőséget nyújtanak. Ennek köszönhető az a nemzetközi összefogás, amely során a franciaországi Cadarache-ban fogják felépíteni a világ valaha volt legnagyobb tokamakját, az ITER -t. A tokamakokban tapasztalható plazmastabilitási problémák aggodalomra adnak okot, mivel a diszrupciók (a plazma összeomlása) során elfutó elektronok jöhetnek létre, amelyek a nagy energiájuk miatt képesek kárt tenni a plazmát határoló elemekben. Az ITER-ben ezeknek a száma a jelenlegi berendezésekhez képest várhatóan sokkal nagyobb lesz, ezért fontos az elfutó elektronokat csillapító hatások vizsgálata.

A munkám során elemzett kölcsönhatás jelentősége abban rejlik, hogy elősegítheti ezen elfutó elektronok alkotta elektronnyaláb szétszórását. Munkám első részében az elfutó elektronok és az extraordinárius elektron hullám (EXEL) között lezajló kvázi-lineáris kölcsönhatást számoló program felgyorsítását, numerikus stabilitásának ellenőrzését, finomhangolását, valamint különböző fizikaiparaméter-szenáriókon való futtatását és az eredmények diszkusszióját végeztem. A második felében az elfutó elektronok eloszlásfüggvényének numerikus szimulációjára alkalmas CODE-ba [11] integráltam a kvázi-lineáris kölcsönhatást.

A program valamint a kölcsönhatás mibenlétének mélyebb vizsgálatához hosszú fizikai időtartam szükséges, ami sok időlépést tartalmazó futtatást igényel. A rendelkezésemre álló program ehhez túl lassú volt, ezért első lépésként felgyorsítottam a leglassabb részek megkeresése és megfelelő átírása által. Az elfutó elektronok impulzusához tartozó rezonáns görbét számoló rutin már nincs minden időlépésben meghívva, ehelyett minden lépésben interpolációval határozom meg az új rezonáns hullámszám és szög értékeket. Ennek eredményeképp körülbelül háromszoros sebesség növekedést értem el.

Ezt követően a numerikus hibákból adódó esetleges hibás következtetések megelőzése végett, teszteltem a numerikus stabilitást, amely –a pozitív növekedési ráta meghatározásában szerepet játszó paramétert kivéve – valamennyi paraméterre fennállt. A stabilitási vizsgálat során tapasztaltak lehetővé tették olyan numerikus paraméterek beállítását, amelyekre a program futása a legstabilabb, azaz az egyes numerikus paraméterek kisebb változtatásától a végeredmény (a fizika) nem függ. A program stabilitása lehetővé tette, hogy hitelesebbnek tekintsük a plazma fizikai paramétereinek változtatása során kapott szimulációs eredményeket.

Az így finomhangolt, felgyorsított program segítségével megvizsgáltam a kölcsönhatásnak az elfutó elektronok eloszlásfüggvényére gyakorolt hatását különböző paraméterű plazmák esetére. A vizsgált paraméterek: mágneses tér, elektromos tér, elektron-hőmérséklet és elektronsűrűség. A fizikai paraméterek változtatása során azt találtam, hogy a mágneses tér növelésével a hullám destabilizációjában szükséges idő nő, azaz később, több elfutó elektron jelenlétében indul csak el a folyamat. A termikus sűrűség, a hőmérséklet és az elektromos tér növelésével azonban ez az időtartam csökkenthető. Így a folyamat elindulása szempontjából az elektromos tér és a sűrűség növelése ellensúlyozni tudja a mágneses tér növeléséből ill. a hőmérséklet csökkenéséből adódó

késleltetett indulást.

Az elfutó elektronok eloszlásfüggvényére használt analitikus formula több, a valóságban ritkán teljesülő feltétel mellett érvényes (túl nagy, időben állandó elektromos tér). Ennek kiküszöbölése végett az elfutó elektronok eloszlását a Fokker–Planck egyenlet numerikus megoldásával szimuláló CODE-ba integráltam a kvázi-lineáris kölcsönhatást, azáltal, hogy az ütközési operátorhoz hozzáadtam a kvázi-lineáris kölcsönhatás diffúziós operátorát.

Amint a CODE és a kvázi-lineáris kölcsönhatást szimuláló rutin egyesítése eredményeképp numerikusan stabil eloszlásfüggvényeket tudunk kapni, rendelkezésünkre fog állni egy, a jelenleginél általánosabb, így a valóságnak jobban megfelelő eredményeket adó rutin, mely képes az elfutóelektron-keletkezés időbeli szimulációjára.

5. Függelék

5.1. Romberg-módszer

Az alábbiakban a kvázi-lineáris kölcsönhatást számoló rutin integrálját megvalósító numerikus eljárást ismertetem. A módszer a következő alakú integrálok számítására alkalmasak:

$$\int_a^b dx F(x) \quad (5.1)$$

Az alábbi lépéseket kell követni az iterációhoz (egy háromszöget hozunk létre szemléletesen, ha egymás mellé írjuk a megfelelő értékeket):

$$R(0, 0) = \frac{1}{2}(b - a) (f(a) + f(b)) \quad (5.2)$$

$$R(n, 0) = R(n - 1, 0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k - 1)h_n) \quad (5.3)$$

$$R(n, m) = R(n, m - 1) + \frac{1}{4^m - 1} (4^m R(n, m - 1) - R(n - 1, m - 1)), \quad (5.4)$$

ahol

$$h_n = \frac{b - a}{2^n} \quad (5.5)$$

Az $R(n, m)$ egy n -ed rendű m -edik extrapolációt jelent. A hiba:

$$O(h_n^{2m+2}) \quad (5.6)$$

Ennek kell kisebbnek lennie az h_n paraméternél.

5.2. Diffúziós operátor a Legendre-polinomok bázisán

A Legendre-polinomok az alábbi *sajátérték probléma* megoldásánál előjövő sajátérték függvényeket jelentik. A jelentőségük hasznos tulajdonságaikban rejlik. Az alábbiakban ezt röviden, bizonyítások nélkül említem. A részletek bármely komolyabb matematikai kézikönyvben fellelhetők.

A Legendre-differenciál egyenlet:

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{df}{dx} \right] + l(l + 1)f(x) = 0 \quad (5.7)$$

Ekkor minden l -hez tartozik egy és csak egy P_l (konstans szorzó erejéig egyértelmű). A számunkra legfontosabb állítás, hogy ezek az $L^2[(-1, 1); \mathbf{R}]$ Hilbert-téren a következő skalárszorzzattal ellátva teljes ortogonális rendszert alkot:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x)g(x) \quad (5.8)$$

Ekkor igaz a következő formula:

$$\langle P_l, P_{l'} \rangle = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \quad (5.9)$$

Ez lehetővé teszi a fenti Hilbert-tér elemeinek (függvények) az általános Fourier-sorfejtését.

A következőkben a kimaradt eljárásokat mutatom be.

A diszkretizáció során (ezt értem a dolgozat minden pontján diszkretizációnak) a következő operátorokat használjuk az alábbi sorrendben:

Sorba fejtjük az $F(y, \xi)$ eloszlás függvényt a $P_L(\xi)$ polinomok szerint:

$$F(y, \xi) = \sum_{L=0}^{\infty} F_L(y) P_L(\xi) \quad (5.10)$$

Majd az alábbi operátort használjuk:

$$\frac{2L+1}{2} \int_{-1}^1 P_L \xi(\cdot) d\xi \quad (5.11)$$

Ha ezeket végre akarjuk hajtani az 3.17 összefüggésen, valamint figyelembe vesszük, hogy a következő azonosság igaz:

$$\frac{2L+1}{2} \int_{-1}^1 d\xi P_L(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (1-\xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} P_l(\xi) = -(L+1)L \delta_{L,l}, \quad (5.12)$$

akkor azt találjuk, hogy érdemes némi átalakítást végezni. Az F -et átírva és behelyettesítve a vizsgált formulába az alábbiakat kapjuk:

$$\sum_{L=0}^{\infty} F_L(y) \frac{D(y, t)}{y^2 \cdot \delta^2} \cdot \xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi(1-\xi^2) \cdot \frac{\partial P_L(\xi)}{\partial \xi} \right) \quad (5.13)$$

Az integrál elvégzése ezen relatíve nehéz, ezért kihasználjuk, hogy a csak ξ -ket tartalmazó része az egyenletnek a $\xi \simeq 1$ miatt aszimptotikusan az alábbival közelíthető:

$$\frac{D(y, t)}{y^2 \cdot \delta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\xi^2) \cdot \frac{\partial P_L(\xi)}{\partial \xi} \right) \quad (5.14)$$

Ezt megtehetjük, ugyanis végezzünk el néhány deriválást és vegyük a $\xi \rightarrow 1$ közelítést:

$$\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi(1-\xi^2) \cdot \frac{\partial P_L(\xi)}{\partial \xi} \right) = \xi(1-\xi^2) \cdot \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1-\xi^2) \cdot \frac{\partial P_L(\xi)}{\partial \xi} \right) \quad (5.15)$$

Az említett közelítés miatt az első tag elhanyagolható a másodikhoz képest, mert $(1-\xi^2) \simeq 0$, továbbá a második tag egyezik az azonosságban fellelhető operátorral, mert $\xi^2 \simeq 1$. Tehát az említett azonosságot használva kapjuk az itt levezetni kívánt összefüggést:

$$-\frac{D(y, t)}{y^2 \delta^2} (L + 1) L \delta_{L, l} f_l. \quad (5.16)$$

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Kómár Annának és Dr. Pokol Gergőnek a rengeteg segítséget és tanácsot az elmúlt hónapokban, amelyek hozzájárultak a tudományos élet mélyebb megismeréséhez. Szeretném megköszönni a szüleim támogatását akik stabil, megbízható háttérrel adtak a számomra.

Hivatkozások

- [1] J. Wesson. *Tokamaks*. Clarendon Press Oxford, 2004.
- [2] G. I. Pokol. *Fúziós berendezésekben fellépo tranziens hullámjelenségek tanulmányozása statisztikus eljárásokkal és elméleti modellekkel*. PhD thesis, Budapest University of Technology and Economics, Hungary, 2009.
- [3] P. Helander and D.J. Sigmar. *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] H. Dreicer. Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. *Physical Review*, 115:238–249, 1959.
- [5] ITER Physics Basis Editors, ITER Physics Expert Groups, ITER Joint Central Team, and Physics Integration Unit. ITER Physics Basis. *Nuclear Fusion*, 39(12):2137 – 2638, 1999.
- [6] T. Fulop, G. Pokol, P. Helander, and M. Lisak. Destabilization of magnetosonic-whistler waves by a relativistic runaway beam. *Physics of Plasmas*, 13(062506), 2006.
- [7] A. Kómár. Msc thesis, 2013.
- [8] T.H. Stix. *Waves in plasmas*. Springer-Verlag New York, 1992.
- [9] A. Kómár. Interaction between runaway electrons and whistler waves in tokamak plasmas, 2011.
- [10] A. Kómár, T. Fulop, and G.I. Pokol. Quasi-linear analysis of the extraordinary electromagnetic wave destabilized by runaway electrons. page P5.170, 2013. 40th EPS Conference on Plasma Physics.
- [11] M. Landreman, A. Stahl, and T. Fulop. Numerical solution of the Fokker-Planck equation with electric field and collisions. *Computer Physics Communications*, 2013. submitted.