



## TDK DOLGOZAT

# Áramok az integrálható spinláncokban egy kvázi-klasszikus közelítésben

**Borsi Márton**

Fizikus MSc I. évfolyam  
Természettudományi kar

Témavezető: **Dr. Pozsgay Balázs**  
*tudományos munkatárs*  
BME Fizika Intézet  
Elméleti Fizika Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
2018

## Kivonat

Az alacsony dimenziós mágnesesség vizsgálatában fontos szerepet játszanak a Heisenberg nevét viselő kvantummechanikai spinláncmodellek. Ezen rendszerek kvantum-integrálhatónak számítanak: Hamilton-operátoruk sajátérték-problémája egzakt módon megoldható, továbbá rendelkeznek a rendszermérettel arányos mennyiségű, lokális, felcserélhető, valamint időállandó töltésoperátorokkal. Ezen töltésekre kontinuitási egyenletek írhatók fel, melyekben a hozzájuk tartozó áramoperátorok jelennek meg.

Az általam vizsgált Heisenberg-típusú spinláncmodellek sok más modellhez hasonlóan a Bethe-ansatz módszerrel oldhatók meg egzakt módon. Az ilyen modellekre vonatkozóan létezik egy általános érvényű sejtés, amely kapcsolatot teremt a modellben szereplő töltés- és áramoperátorok várható értékei között. Munkám során sikerült a vizsgált spinláncok sajátállapotaihoz kialakítani egy kvázi-klasszikus képet, mely képes fizikai értelmezést adni a sejtésnek. Egy korábbi munkámban megmutattam, hogy a szabad XX modellben, a klasszikus fizikához hasonlóan, az áramok megegyeznek a hozzájuk tartozó töltések, valamint az adott sajátállapothoz társítható sebesség szorzatával. Jelenlegi dolgozatom azt mutatja be, hogy az összefüggés a kölcsönható modellekben is igaz, amennyiben a kölcsönhatásnak megfelelően módosított átlagsebességgel számolunk.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
1.1. A Heisenberg-modell . . . . .	2
1.2. Kvantum-integrálható rendszerek . . . . .	3
1.3. Sejtés a megmaradó töltések és áramaik várható értékeire . . . . .	4
<b>2. A kölcsönhatásmentes XX modell</b>	<b>6</b>
2.1. A sajátérték-probléma megoldása . . . . .	6
2.2. Töltések és áramok várható értékei . . . . .	7
<b>3. A kölcsönható XXX modell sajátállapotai</b>	<b>9</b>
3.1. Egyrészesekés sajátállapotok . . . . .	10
3.2. Kétrészesekés sajátállapotok . . . . .	11
3.3. A rapiditás-paraméterezés . . . . .	12
3.4. N-részesekés sajátállapotok . . . . .	15
<b>4. A kvázi-klasszikus kép felépítése</b>	<b>16</b>
4.1. Egyrészesekés eset . . . . .	16
4.2. A kölcsönhatás értelmezése két részesekére . . . . .	17
4.3. Az általános eset igazolása . . . . .	21
<b>5. Összefoglalás</b>	<b>25</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>26</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

Az alacsony dimenziós mágnesesség vizsgálatának kezdete Ernst Ising és Hans Bethe a XX. század elején végzett munkájához köthető. Ising 1925-ben kezdett foglalkozni a mára ő nevét viselő modellel, Bethe pedig 1931-ben tette közzé az egzakt megoldások megtalálására kidolgozott Bethe-ansatz módszerét.

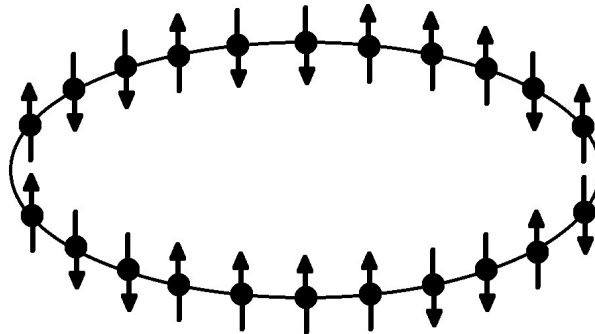
A terület jelentős vonzereje, hogy a vizsgált modellek sok esetben kínálnak egzaktul megoldható problémákat, miközben elkerülik a magasabb dimenziós rendszerek vizsgálatakor fellépő bonyodalmakat. Az idetartozó klasszikus és kvantumrendszerek teret adnak továbbá térelméleti és perturbatív megközelítéseknek, valamint különböző numerikus módszereknek.

Egészen az 1970-es évekig kellett várni, hogy kiderüljön, a terület nem csak elméleti kutatás lehetőségét rejti magában. Neutron szórásos kísérletekkel mára már számos lánc vizsgálatára sor került. A legtöbb kutatás tárgyát az  $1/2$  spinű  $\text{Cu}^{2+}$  és az  $1$  spinű  $\text{Ni}^{2+}$  ionokat tartalmazó minták jelentik [1].

Az alacsony dimenziós mágnesesség azóta is kutatott terület, mivel egyszerű modelljei kapcsán lényeges fizikai folyamatok egzakt leírása vizsgálható. A következőkben egy alapvető modellt mutatom be.

### 1.1. A Heisenberg-modell

A terület egyik leggyakrabban vizsgált modellje az egydimenziós spinláncokat leíró Heisenberg-modell. A rendszert  $L$  darab periodikus határfeltétellel összekötött rácspont alkotja, melyeken  $1/2$  spinek helyezkednek el az 1.1. ábrán szemléltetett módon.



1.1. ábra. Periodikus határfeltétellel összekötött spinlánc.

A rácspontokhoz a szokásos  $\mathbb{C}^2$ -n ható  $S^{x,y,z}$  operátorok tartoznak, melyekkel a modell  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$  tenzorszorzattéren ható Hamilton-operátora a következő módon írható fel:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^L (J_x S_j^x S_{j+1}^x + J_y S_j^y S_{j+1}^y + J_z S_j^z S_{j+1}^z) \quad (1.1)$$

A kifejezésben a spinoperátorok alsó indexei jelölik, melyik rácsponthoz tartoznak. A modellben jól látható módon az első szomszéd kölcsönhatások kapnak szerepet, melyek erősségét a  $J_{x,y,z}$  együtthatók adják meg. Ezek speciális értékei szerint különböztetjük meg a modell egyes fajtáit, melyeket az 1.1. táblázatban foglaltam össze.

együtthatók kapcsolata	modell
nincs	XYZ
$J_x = J_y$	XXZ
$J_x = J_y = J_z$	XXX
$J_x = J_y, J_z = 0$	XX

1.1. táblázat. A kölcsönhatási együtthatók kapcsolatai alapján megkülönböztetett modellek.

Az egyes modellek különböző módszerekkel, még az együtthatók tetszőleges értékei esetén is egzaktul megoldhatók [2], azaz megadhatók a rendszer sajátállapotai és a hozzájuk tartozó energiák. Jelen dolgozat szempontjából különösen fontos az XXX modell Bethe-ansatz [3] módszerrel történő megoldása, a 2. fejezetben áttekintett korábbi munkámban pedig az XX modell fermionrendszerre való transzformációval [4] kapott megoldása játszik fontos szerepet.

## 1.2. Kvantum-integrálható rendszerek

A kvantummechanikai rendszerek integrálhatóságára nincs egyértelműen elfogadott definíció, az irodalomban több, nem teljesen ekvivalens megfogalmazással is találkozhatunk [5]. Itt a leggyakrabban használt, a klasszikus integrálhatósághoz legközelebb álló definíciót mutatom be, és a dolgozatom további részében is ez értendő alatta.

Kvantum-integrálhatónak nevezünk egy rendszert, amennyiben az rendelkezik a rendszer méretével arányos mennyiségű, egymással és a Hamilton-operátorral is felcserélhető, lokális operátorok összegéként előálló töltésoperátorokkal. Léteznek tehát olyan lokális töltésoperátorok, melyek teljes tartományra vett integrálja (összegzése) időfüggetlen lesz, azaz kommutál a Hamilton-operátorral. Ezen töltésekre kontinuitási egyenletek írhatók fel: található olyan lokális áramoperátor, melynek egy adott tartomány két végpontján vett különbsége megegyezik a tartományra integrált lokális töltésoperátorok időbeli megváltozásával:

$$i \left[ \int_{x_1}^{x_2} dx Q(x), \mathcal{H} \right] = J(x_2) - J(x_1) \quad (1.2)$$

ahol  $Q(x)$  a lokális töltésoperátor,  $J(x)$  a hozzá tartozó áramoperátor,  $\mathcal{H}$  a Hamilton-operátor,  $x_1$  és  $x_2$  pedig a tartomány két határát jelöli. Itt és a továbbiakban is  $\hbar = 1$  egységrendszerben dolgozom.

Az integrálható kvantumrendszerek speciális viselkedést mutatnak bizonyos fizikai folyamatok során.

Egyrészt nem termalizálódnak Gibbs-sokasághoz, egyensúlyi viselkedésüket az általánosított Gibbs-sokaság (GGE) írja le [6], melyben megjelennek a fent említett időfüggetlen töltésoperátorok is. A termalizáció hiánya integrálható rendszerekben kísérletileg is kimutatható [7].

Másrészt az integrálható rendszerek transzportfolyamatai is egyedülállóak. Szemben az általános rendszerekkel, ahol a nemegyensúlyi transzportfolyamatok diffúzívák, az integrálható

rendszerek megmaradó kvázirészecskéinek jelenléte ballisztikus transzportozhoz vezetnek [8, 9]. Ballisztikus transzport megjelenhet más rendszerekben is, ha a szabad úthossz nagyobb, mint a minta hossza, az integrálható rendszerek sajátossága azonban, hogy nem lép fel disszipáció. A kölcsönhatás megváltoztathatja a részecskék sebességét, de az egyes részecskék és gerjesztések nem veszhetnek el. A jelenség egzakt leírása az általánosított hidrodinamika (GHD) tárgykörébe tartozik, melynek fontos része az áramoperátorok vizsgálata. Az integrálható rendszerek folyadékjellegű viselkedését vizsgáló elmélet viszonylag újnak mondható, de már léteznek kísérleti bizonyítékai [10].

Dolgozatom szempontjából lényeges, hogy a Heisenberg-modellek, melyekkel munkám során én is foglalkoztam, mind integrálható rendszerek.

### 1.3. Sejtés a megmaradó töltések és áramaik várható értékeire

Létezik egy általános érvényű sejtés tetszőleges Bethe-ansatz módszerrel megoldható integrálható modell esetén, mely kapcsolatot teremt a rendszer megmaradó töltéseinek és azok áramainak várható értékei között. A sejtésnek létezik egy változata végtelen rendszer méret esetén [8], a véges eset pedig témavezetőm jelenlegi kutatásának tárgyát képezi.

Legyen tehát a rendszer véges  $L$  méretű! Ekkor  $L$  darab sajátállapotra tekinthetünk úgy, mint egyrészecskés állapotokra (3. fejezet), az ezekhez tartozó kvázirészecskék impulzusa legyen  $p_j$  ( $j=1,2,\dots,L$ )! Ezen impulzusok egy halmazával így egyértelműen meghatározhatunk egy adott,  $N$  részecskés sajátállapotot:  $|p_1\dots p_N\rangle$ . A Bethe-egyenletek ekkor a következő alakba írhatók:

$$O_j(p_1\dots p_L) = e^{ip_j L} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N S(p_j, p_k) = 1 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.3)$$

ahol  $S(p_j, p_k)$  egy fázistolás. Választható olyan  $p_j = p_j(\lambda_j)$  úgynevezett rapiditás-paraméterezés, mellyel előbbi csak az új paraméterek különbségétől függ:  $S(p_j, p_k) = S(\lambda_j - \lambda_k)$ . A Bethe-egyenletek így:

$$O_j(\lambda_1\dots \lambda_L) = e^{ip_j(\lambda_j)L} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^L S(\lambda_j - \lambda_k) = 1 \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

A sajátállapothoz tartozó energia  $E(\lambda_1\dots \lambda_L)$ , mely előáll az egyes részecskékhez társítható energiák összegeként:

$$E(\lambda_1\dots \lambda_N) = \sum_{j=1}^N e(\lambda_j) \quad (1.5)$$

Legyen  $Q$  a modell egy megmaradó töltése,  $J$  pedig a hozzá tartozó, teljes tartományra integrált áramoperátor! A sejtés a következőt állítja a várható értékekről:

$$\langle \lambda_1\dots \lambda_N | J | \lambda_1\dots \lambda_N \rangle = \sum_{jk=1}^N \frac{\partial E}{\partial \lambda_j} G_{jk}^{-1} \langle \lambda_k | Q | \lambda_k \rangle \quad (1.6)$$

ahol  $\underline{G}^{-1}$  az  $N \times N$ -es Gaudin-mátrix inverze, melyet a következő kifejezés definiál:

$$G_{jk} = -i \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln O_j$$

Az (1.4) egyenlet segítségével ezt kifejtethetjük:

$$G_{jk} = -i \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln \left( e^{ip(\lambda_j)L} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N S(\lambda_j - \lambda_l) \right) =$$

$$G_{jk} = L \frac{dp(\lambda_j)}{d\lambda_j} \delta_{jk} - i \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln \left( S(\lambda_j - \lambda_l) \right) \quad (1.7)$$

Itt  $\delta_{jk}$  a Kronecker-szimbólum. A mátrixot Michel Gaudin vezette be, és a Bethe-sajátállapotok normájához kapcsolható [11].

A sejtés (1.6) állítása rövidebb alakba írható, ha bevezetjük az  $e'_j := \frac{\partial E}{\partial \lambda_j} = \frac{de(\lambda_j)}{d\lambda_j}$  és  $q_j := \langle \lambda_j | Q | \lambda_j \rangle$  összefüggésekkel definiált  $N$  hosszú oszlopvektorokat:

$$\langle \lambda_1 \dots \lambda_N | J | \lambda_1 \dots \lambda_N \rangle = \underline{e}^T \underline{G}^{-1} \underline{q} \quad (1.8)$$

Dolgozatom fő célja bemutatni azt, hogy a fenti sejtésnek létezik szemléletes értelmezése. Klasszikusan megszokott dolog, hogy az áramsűrűség arányos a sebesség és a szállított töltés szorzatával:  $j \sim qv$ . Az (1.8) egyenlet tehát akkor értelmezhető fizikailag, ha a  $\underline{e}^T \underline{G}^{-1}$  vektornak sebességszerű jelentéstartalom tulajdonítható.

Magának a sejtésnek a bizonyítása a kutatócsoportom egyik jelenlegi célja, és ehhez a munkához tesz hozzá az, hogy szemléletes fizikai megfontolások alapján lehet érvelni annak érvényessége mellett.

Dolgozatom 2. fejezetében ismertetem korábbi munkám eredményét, az XX spinlánc vizsgálatát. Rávilágítok arra, hogy ez lényegében a kölcsönhatásmentes kvázirészecskék esetének felel meg és megmutatom, hogy azok sebessége valóban megjelenik a várható értékek közti összefüggésben. A 3. fejezetben a Bethe-ansatz segítségével megoldható, kölcsönható XXX modell sajátállapotait tárgyalom, majd a 4. fejezetben megmutatom, hogy az XX modell kapcsán levezetett összefüggés itt is érvényben marad, ha a sebességeket a kölcsönhatás miatt módosuló átlagsebességekre cseréljük.

## 2. fejezet

# A kölcsönhatásmentes XX modell

A fejezetben korábbi munkám [12] eredményeit mutatom be röviden az XX spinlánc vizsgálatát illetően. Az áttekintés azért lényeges, mert jelen dolgozat egyfajta továbblépésnek tekinthető a kölcsönhatásmentes rendszerekről a kölcsönhatókra.

### 2.1. A sajátérték-probléma megoldása

Az XXZ modell Hamilton operátorából indulunk ki, és megmutatjuk, melyik ponton kell elhagyni a kölcsönhatásért felelős tagokat, hogy a probléma megoldható legyen. Az (1.1) egyenlet szerint,  $J_x=J_y=1$  és  $J_z=: \Delta$  választással a Hamilton-operátor:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^L (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + \Delta S_j^z S_{j+1}^z) \quad (2.1)$$

A probléma megoldásához fermionrendszerre transzformáljuk a spinmodellt, melynek egyik lehetséges módja a Jordan-Wigner-reprezentáció [13] (a nehézség abban rejlik, hogy a spinoperátorok kommutációs relációit kell megvalósítani a fermionok antikommutáló operátoraival). A spin két állapotának ekkor a 0 vagy 1 betöltöttségű állapotok feleltethetők meg, a Hamilton-operátorban pedig a  $\psi^\dagger$  fermionkeltő és  $\psi$  -eltüntető operátorok jelennek meg. A Hamilton-operátor ezekkel kifejezve:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \left( \psi_j^\dagger \psi_{j+1} + \psi_{j+1}^\dagger \psi_j - 2\Delta \psi_j^\dagger \psi_j + 2\Delta \psi_{j+1}^\dagger \psi_{j+1} \psi_j^\dagger \psi_j \right) + \frac{1}{4} \Delta L \quad (2.2)$$

Érdemes áttérni a fermionoperátorok Fourier-transzformálásával kapott operátorokra:

$$\tilde{\psi}_p^\dagger = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^L \psi_j^\dagger e^{ipj} \quad (2.3)$$

$$\tilde{\psi}_p = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^L \psi_j e^{-ipj}$$

ahol  $p=1 \cdot \frac{2\pi}{L}, 2 \cdot \frac{2\pi}{L} \dots L \cdot \frac{2\pi}{L}$ . A továbbiakban a  $q$ -ra és  $p$ -re történő, a határokat nem jelölő szummák alatt ezen értékekre történő összegzést értünk.

Belátható, hogy ezen operátorok teljesítik a megfelelő antikommutációs relációkat, így maguk



is fermionoperátorokként hatnak. Az általuk keltett kvázirészecskékre a továbbiakban spinhulámokként tekintünk, a fermionoperátorok  $p$  indexére pedig a keltett részecske impulzusaként, amely a megengedett kvantált értékeket veheti fel.

A Hamilton-operátort ezen operátorokkal kifejezve a következőt kapjuk:

$$\mathcal{H} = \sum_p \tilde{\psi}_p^\dagger \tilde{\psi}_p (\cos p - \Delta) + \frac{\Delta}{L} \sum_{pp'q} \tilde{\psi}_{p+q}^\dagger \tilde{\psi}_{p'-q}^\dagger \tilde{\psi}_{p'} \tilde{\psi}_p \cos q + \frac{1}{4} \Delta L \quad (2.4)$$

Jól látható, hogy a második tag felelős a részecskék közti kölcsönhatásért, ez teremt kapcsolatot a különböző impulzusú állapotok között. Az ebben a fejezetben ismertetett módszerrel ezen tag miatt az XXZ modell nem is oldható meg, a kölcsönható rendszert a 3. fejezettől tárgyaljuk. A továbbiakban tehát a  $\Delta=0$  esetben kapott XX modellt vizsgáljuk.

A modell Hamilton-operátora tehát a következő:

$$\mathcal{H} = \sum_p \tilde{\psi}_p^\dagger \tilde{\psi}_p \cos p \quad (2.5)$$

Innen ránézésből megállapítható, hogy a sajátállapotokhoz úgy jutunk el, ha az üres vákuumállapotba  $N \leq L$  darab különböző impulzusú részecskét keltünk a  $\psi_p^\dagger$  operátorokkal, hiszen egy ilyen állapoton a  $\psi_p^\dagger \psi_q$  operátor csupán  $\cos q$  szorzóként hat. Jelöljük  $|p_1 \dots p_N\rangle$ -nel azt a sajátállapotot, amikor a vákuumba  $p_1 \dots p_N$  impulzusú részecskéket kelttünk. Ehhez az állapothoz a következő energia tartozik:

$$\langle p_1 \dots p_N | \mathcal{H} | p_1 \dots p_N \rangle = \sum_{j=1}^N \cos p_j \quad (2.6)$$

Az energia tehát előáll az egyes jelenlévő részecskék energiajárulékainak összegeként.

## 2.2. Töltések és áramok várható értékei

A Heisenberg-féle XX modell kvantum-integrálható, tehát tartalmaz az 1. fejezetben bemutatott tulajdonságokkal rendelkező töltésoperátorokat. Belátható, hogy a következő operátorok egymással és a (2.5) Hamilton-operátorral is felcserélhetők:

$$Q^{(\varphi)} = \sum_{j=1}^L Q_j^{(\varphi)} = \sum_{j=1}^L \psi_j^\dagger \psi_{j+\varphi} = \sum_q e^{i \frac{2\pi}{L} q \varphi} \tilde{\psi}_q^\dagger \tilde{\psi}_q \quad \varphi = 1, 2 \dots L \quad (2.7)$$

valamint látható módon lokális operátorok összegeként állnak elő. Ezek lesznek tehát az XX modell megmaradó töltései, melyekhez az (1.2) egyenletnek megfelelő áramoperátorok tartoznak. Levezethető, hogy a  $Q^{(\varphi)}$  töltéshez tartozó áramoperátor a következő alakú:

$$J_k^{(\varphi)} = 2i(Q_k^{(\varphi+1)} - Q_{k+1}^{(\varphi-1)}) \quad \varphi = 1, 2 \dots L \quad (2.8)$$

A lokális áramoperátort a teljes láncra összegezve a következőt kapjuk:

$$J^{(\varphi)} = \sum_{k=1}^L j_k = 2i(Q^{(\varphi+1)} + Q^{(\varphi-1)}) \quad \varphi = 1, 2 \dots L \quad (2.9)$$

Mind a (2.7) töltések, mind a (2.9) áramok esetében igaz, hogy a kapott operátorok nem önadjungáltak, viszont adjungáltjaikra fennáll a következő azonosság:

$$\left[Q^{(\varphi)}\right]^\dagger = Q^{(-\varphi)} \quad (2.10)$$

$$\left[J^{(\varphi)}\right]^\dagger = J^{(-\varphi)}$$

A fizikai mennyiségeket reprezentálni képes önadjungált operátorok a következők lesznek:

$$\begin{aligned} Q^{(\varphi)} + Q^{(-\varphi)} \\ J^{(\varphi)} + J^{(-\varphi)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

A (2.11) töltések és áramok várható értékeire a következő egyenlőség vezethető le:

$$\langle p_1 \dots p_N | J^{(\varphi)} + J^{(-\varphi)} | p_1 \dots p_N \rangle = \sum_{k=1}^N \frac{d \langle p_k | \mathcal{H} | p_k \rangle}{dp_k} \langle p_k | Q^{(\varphi)} + Q^{(-\varphi)} | p_k \rangle \quad (2.12)$$

Az egyenlet formailag hasonlít a (1.6) összefüggésre. Valójában azt is kaptuk meg, csak a Gaudin-mátrix ebben a modellben diagonális, így egyszerűsödik a kifejezés. Magát a mátrixot külön nem állítottuk elő, mivel az XX lánc sajátérték-problémájának megoldásához nem szükséges a Bethe-ansatz módszert használni. Mindenesetre ebben az esetben is szemléletes jelentéstartalmat várunk az összefüggéstől.

A (2.12) egyenlet alapján az egyrészecskes sajátállapotok energiáinak a részecske impulzusa szerinti deriváltját kellene sebességként értelmeznünk. Az energia impulzus szerinti deriváltja pedig valóban a sebességet adja:  $v = \partial_p E(p)$  (a hullámcsomag koncepció segítségével történő érvelés a 4. fejezetben található). Tehát értelmezhető fizikailag a várható értékek közötti kapcsolat, ha ily módon tekintünk a sebességre.

Dolgozatom következő fejezetei azt tárgyalják, milyen formában érvényesül az összefüggés kölcsönható modell esetén.

### 3. fejezet

## A kölcsönható XXX modell sajátállapotai

A (2.4) egyenlet kapcsán megmutattam azt, hogy a (2.1) XXZ Hamilton-operátor  $\Delta$  együtt-hatójú tagja felelős a modellben megjelenő kölcsönhatásért. A továbbiakban a  $\Delta = 1$  egyszerűsítéssel (izotrópikus eset) a kölcsönható XXX modell sajátérték-problémáját vizsgáljuk, még hozzá a Bethe-ansatz módszer segítségével [3]. A Hamilton-operátor tehát a következő:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^L (S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + S_j^z S_{j+1}^z) \quad (3.1)$$

Definiálhatók a szokásos spinléptető operátorok:

$$S_j^{\pm} = S_j^x \pm S_j^y \quad (3.2)$$

melyek segítségével átírható a (3.1) Hamilton-operátor:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^L \left( \frac{1}{2} (S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+) + S_j^z S_{j+1}^z \right) \quad (3.3)$$

A kapott operátorról megállapítható, hogy azt egy állapotra hattanva nem képes megváltoztatni a felfelé és lefelé mutató spinek számát, hiszen az első két tag lefordít egy spint és fel egy másikat, a harmadik tag pedig az identitással arányos. A sajátállapotokra nézve levonhatjuk tehát azt a következtetést, hogy elegendő azokat az adott számú felfelé és lefelé mutató spinekhez tartozó altereken keresni, mivel azok invariáns alterei az operátornak.

Kiindulunk az állapotból, mikor minden spin felfelé mutat:  $|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle$ . Ez sajátállapota lesz a rendszernek, hiszen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle &= \sum_{j=1}^L \left( \frac{1}{2} (S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+) + S_j^z S_{j+1}^z \right) |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^L S_j^z S_{j+1}^z |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle = L \frac{1}{4} |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle \end{aligned}$$

Innen az energia is leolvasható:

$$E_0 = \frac{L}{4} \quad (3.4)$$

Ezen állapotból kiindulva a további invariáns alterekhez egy-egy spin lefordításával jutunk. Az egy lefelé mutató spinű sajátállapotokra mint kvázirészecskékre tekintünk, a többi sajátállapotot pedig úgy interpretáljuk, hogy a lefelé néző spinek számának megfelelő mennyiségű részecske van jelen egyszerre a rendszerben. Egy  $N$  részecskés invariáns altér dimenziója így  $\binom{L}{N}$ .

### 3.1. Egyrészecskés sajátállapotok

A legelső altérhez egy spin lefordításával jutunk:

$$\left| \uparrow_1 \dots \downarrow_n \dots \uparrow_L \right\rangle = S_n^- |\uparrow \uparrow \dots \uparrow\rangle =: |n\rangle$$

Az altéren lévő tetszőleges  $|\Psi\rangle$  sajátállapot természetesen előáll ezek lineáris kombinációjaként:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^L a_n |n\rangle \quad a_n \in \mathbb{C}$$

A Bethe-ansatz a következőt állítja ezen együtthatókról:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ipn} \quad p = 1 \cdot \frac{2\pi}{L} \dots L \cdot \frac{2\pi}{L} \quad (3.5)$$

Az ansatz szerint tehát sajátállapotok együtthatói síkhullámszerűek: a fázist a lefelé mutató spin  $n$  koordinátájának és a sajátállapotokat indexelő  $p$  impulzusnak a szorzata határozza meg. Utóbbi a megengedett  $L$  darab diszkrét értéket veheti fel. A sajátállapotokra így valóban gondolhatunk kvantált impulzusú kvázirészecskékként.

Az ansatz szerint a (3.5) együtthatóknak a következő egyenletet kell kielégíteniük:

$$2(E - E_0)a_n = -2a_n + a_{n-1} + a_{n+1} \quad a_n = a_{n+L} \quad (3.6)$$

ahol  $E_0$  a kiindulási állapot (3.4) energiáját jelöli. Ez alapján az adott sajátállapothoz tartozó energia levezethető. Behelyettesítve a (3.5) által meghatározott együtthatókat:

$$2 \frac{1}{\sqrt{L}} (E - E_0) e^{ipn} = \frac{1}{\sqrt{L}} (-2e^{ipn} + e^{ip(n-1)} + e^{ip(n+1)})$$

Mindkét oldalt  $\frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ipn}$ -nel szorozva:

$$2(E - E_0) = -2 + e^{-ip} + e^{+ip}$$

$$E = -1 + \cos p + E_0$$

Beírva  $E_0$  értékét (3.4) alapján:

$$E = \cos p - 1 + \frac{L}{4} \quad (3.7)$$

Látjuk, hogy a (3.5) együtthatók valóban kielégítik a (3.6) egyenleteket (nem marad bent  $n$  függés), valamint az egyes impulzusokhoz tartozó energiákat is megkaptuk.

Ebben az egyszerű esetben az ansatz könnyen ellenőrizhető, ha az általa megadott  $p$  impulzusú sajátállapotra hattatjuk a (3.1) Hamilton-operátort:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}|\Psi\rangle &= \sum_{j=1}^L \left( \frac{1}{2}(S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+) + S_j^z S_{j+1}^z \right) \sum_{n=1}^L \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ipn} |n\rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^L e^{ipn} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \underbrace{S_j^+ S_{j+1}^- |n\rangle}_{\delta_{j,n}|j+1\rangle} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \underbrace{S_j^- S_{j+1}^+ |n\rangle}_{\delta_{j+1,n}|j\rangle} + \sum_{j=1}^L \underbrace{S_j^z S_{j+1}^z |n\rangle}_{(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\delta_{j,n} - \frac{1}{2}\delta_{j+1,n})|n\rangle} \right) =
\end{aligned}$$

A Kronecker-szimbólumokkal kiejtve a  $j$ -re történő összegzést:

$$= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^L e^{ipn} \left( \frac{1}{2} |n+1\rangle + \frac{1}{2} |n-1\rangle + (L-2)\frac{1}{4} |n\rangle - \frac{1}{4} |n\rangle - \frac{1}{4} |n\rangle \right) =$$

Az összegzőindex megfelelő eltolásával előállítjuk a sajátállapotot:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{L}} \underbrace{\sum_{n=1}^L e^{ipn} |n+1\rangle}_{e^{-ip} \sum_{n=1}^L e^{ipn} |n\rangle} + \frac{1}{2\sqrt{L}} \underbrace{\sum_{n=1}^L e^{ipn} |n-1\rangle}_{e^{+ip} \sum_{n=1}^L e^{ipn} |n\rangle} + \left( \frac{L-2}{4} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{n=1}^L e^{ipn} |n\rangle = \\
&= \left( \frac{1}{2}(e^{ip} + e^{-ip}) + \frac{L}{4} - 1 \right) |\Psi\rangle = \left( \cos p - 1 + \frac{L}{4} \right) |\Psi\rangle
\end{aligned}$$

Az ansatz által megadott állapot tehát valóban sajátállapot volt és az energiára is visszakaptuk a (3.7) egyenletben szereplő értéket.

### 3.2. Kétrészecskés sajátállapotok

A kétrészecskés állapotokhoz a kiindulási  $|\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle$  állapotból két spin lefordításával jutunk:

$$\left| \begin{array}{ccccccc} \uparrow & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \uparrow \\ 1 & & n_1 & & n_2 & & L \end{array} \right\rangle = S_{n_2}^- S_{n_1}^- |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle =: |n_1, n_2\rangle$$

Az altér tetszőleges sajátállapota természetesen most is kifejthető ezek segítségével (tegyük fel, hogy  $n_1 < n_2$ ):

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq n_1 < n_2 \leq L} a_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle \quad a_{n_1, n_2} \in \mathbb{C}$$

A Bethe-ansatz ezen együtthatók értékeiről a következőt állítja:

$$a_{n_1, n_2} = e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2)} + S(p_1, p_2) e^{i(p_1 n_2 + p_2 n_1)} \quad (3.8)$$

ahol  $S(p_1, p_2) = e^{i\delta(p_1, p_2)}$  az (1.3) egyenletben szereplő fázistolás. A sajátállapotok normálásával itt nem foglalkozunk, de megjegyzendő, hogy az Gaudin-mátrix segítségével végezhető el.

Látható, hogy az első tagban megjelenik a kitevőben az impulzus-koordináta szorzat mindkét részecskére, de ez még nem lenne elegendő a sajátállapothoz. Megjelenik egy második tag is, ahol a két koordináta felcserélt impulzusok tartoznak, ráadásul egy impulzusoktól függő fázistolás is szerepel. A sajátállapotokat itt is az impulzusok indexelik, de azok megadása nem olyan egyszerű, mint az egyrészecskés esetben, vannak közöttük komplex értékűek is [3]. Ezen impulzusok megkeresése bonyolult feladat, amivel a továbbiakban nem foglalkozunk.

Az együtthatóknak ebben az esetben is ki kell elégíteniük a (3.6) összefüggéssel analóg egyenleteket:

$$2(E - E_0)a_{n_1, n_2} = -4a_{n_1, n_2} + a_{n_1-1, n_2} + a_{n_1+1, n_2} + a_{n_1, n_2-1} + a_{n_1, n_2+1} \quad (3.9)$$

Ezt a kikötést a (3.8) együtthatók tetszőleges  $p_1$ ,  $p_2$  és  $\delta$  esetén teljesítik. Van azonban egy másik feltétel is, abban az esetben, ha  $n_2 = n_1 + 1$  azaz a két lefelé mutató spin egymással szomszédos:

$$2(E - E_0)a_{n_1, n_2} = -2a_{n_1, n_2} + a_{n_1-1, n_2} + a_{n_1, n_2+1} \quad (3.10)$$

A (3.10) egyenletből kivonva a (3.9) egyenletet a következő feltételhez jutunk:

$$2a_{n_1, n_1+1} = a_{n_1, n_1} + a_{n_1+1, n_1+1} \quad (3.11)$$

Ezt kell tehát teljesíteniük szomszédos lefelé mutató spinek esetén a (3.8) együtthatóknak. Belátható, hogy ez a következő feltételt adja az  $S(p_1, p_2)$  fázistolásra:

$$S(p_1, p_2) = e^{i\delta(p_1, p_2)} = -\frac{e^{i(p_1+p_2)} + 1 - 2e^{ip_2}}{e^{i(p_1+p_2)} + 1 - 2e^{ip_1}} \quad (3.12)$$

A szomszédos koordináták esetén fellépő viselkedést fizikailag úgy interpretálhatjuk, hogy a részecskék kölcsönhatásba lépnek, mikor közel vannak egymáshoz. A (3.8) kifejezés első tagja egy  $p_1$  impulzusú részecskét ír le az  $n_1$  koordinátán és egy  $p_2$  impulzusút a vele szomszédos  $n_2$  koordinátán. A második tagban a két részecske helyet cserél, és a kölcsönhatás miatt egy fázistolás jelenik meg, melynek fizikai tartalmát a 4. fejezet tárgyalja

Az általános  $N$  részecskés sajátállapotokhoz tartozó ansatz későbbi felírásához érdemes itt bevezetni egy jelölést. Legyen  $\delta(p_1, p_2) =: \delta_{21} =: -\delta_{12}!$  Ezek segítségével a fázistolás elosztható a (3.8) együtthatókban szereplő két tag között:

$$a_{n_1, n_2} = e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2 + \frac{1}{2}\delta_{12})} + e^{i(p_1 n_2 + p_2 n_1 + \frac{1}{2}\delta_{21})} \quad (3.13)$$

Az indexelés elsőre logikátlanak tűnhet, de  $\delta(p_1, p_2)$ -vel a felcserélt részecskés tag-hoz tartozó fázistolást jelöljük, amire viszont érdekesebb a felcserélt  $\delta_{21}$  bevezetése.

### 3.3. A rapiditás-paraméterezés

A bevezetésben említésre került, hogy létezik az impulzusoknak olyan paraméterezése, mellyel a (3.8) egyenletben szereplő fázistolás csak az új paraméterek különbségétől függ. Az alábbiakban ezt vizsgáljuk.

Legyen a rapiditás-paraméter  $\lambda \in \mathbb{C}$ , melynek az impulzussal való kapcsolatát a következő kifejezés definiálja:

$$e^{ip} = \frac{\lambda - \frac{i}{2}}{\lambda + \frac{i}{2}} \quad (3.14)$$

Könnyen belátható, hogy a rapiditás pontosan akkor lesz valós, ha az impulzus is az volt, hiszen ekkor lesz a kifejezés mindkét oldala egységösszű.

Ellenőriznünk kell, hogy a fázistolás valóban csak a két rapiditás különbségétől függ-e. Vegyük a (3.12) egyenletet:

$$S(p_1, p_2) = e^{i\delta(p_1, p_2)} = -\frac{e^{i(p_1+p_2)} + 1 - 2e^{ip_2}}{e^{i(p_1+p_2)} + 1 - 2e^{ip_1}} =$$

Mivel az impulzusok csak az exponenciálisokban szerepelnek könnyen behelyettesíthetjük a (3.14) kifejezést:

$$= -\frac{\frac{\lambda_1 - \frac{1}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}} \cdot \frac{\lambda_2 - \frac{1}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}} + 1 - 2\frac{\lambda_2 - \frac{1}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}}}{\frac{\lambda_1 - \frac{1}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}} \cdot \frac{\lambda_2 - \frac{1}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}} + 1 - 2\frac{\lambda_1 - \frac{1}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}}} =$$

A számlálót és nevezőt is  $(\lambda_1 + \frac{i}{2})(\lambda_2 + \frac{i}{2})$ -vel szorozva:

$$= -\frac{(\lambda_1 - \frac{i}{2})(\lambda_2 - \frac{i}{2}) + (\lambda_1 + \frac{i}{2})(\lambda_2 + \frac{i}{2}) - 2(\lambda_2 - \frac{i}{2})(\lambda_1 + \frac{i}{2})}{(\lambda_1 - \frac{i}{2})(\lambda_2 - \frac{i}{2}) + (\lambda_1 + \frac{i}{2})(\lambda_2 + \frac{i}{2}) - 2(\lambda_1 - \frac{i}{2})(\lambda_2 + \frac{i}{2})} =$$

Kifejtve a szorzatokat és az egyszerűsítéseket elvégezve:

$$= -\frac{\cancel{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{i}{2}(\cancel{\lambda_1} + \cancel{\lambda_2}) - \frac{1}{4} + \cancel{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{i}{2}(\cancel{\lambda_1} + \cancel{\lambda_2}) - \frac{1}{4} - 2\cancel{\lambda_1 \lambda_2} - i\lambda_2 + i\lambda_1 - \frac{1}{2}}{\cancel{\lambda_1 \lambda_2} - \frac{i}{2}(\cancel{\lambda_1} + \cancel{\lambda_2}) - \frac{1}{4} + \cancel{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{i}{2}(\cancel{\lambda_1} + \cancel{\lambda_2}) - \frac{1}{4} - 2\cancel{\lambda_1 \lambda_2} - i\lambda_1 + i\lambda_2 - \frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{-1 + i(\lambda_1 - \lambda_2)}{-1 + i(\lambda_2 - \lambda_1)} = -\frac{-1 + i(\lambda_1 - \lambda_2)}{-1 - i(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

Eredményünk  $-i$ -vel való szorzás és osztás után:

$$S(\lambda_1 - \lambda_2) = -\frac{i + (\lambda_1 - \lambda_2)}{i - (\lambda_1 - \lambda_2)} \quad (3.15)$$

A fázistolás tehát ténylegesen csak az új paraméterek különbségétől függ, ahogyan az (1.4) egyenlet megköveteli.

Kiszámítjuk a rapiditások impulzus szerinti deriváltját. Ehhez deriváljuk a (3.14) egyenlet mindkét oldalát  $p$  szerint:

$$e^{ip} = \frac{\lambda - \frac{i}{2}}{\lambda + \frac{i}{2}} \quad / \frac{d}{dp}$$

$$ie^{ip} = \frac{1}{\lambda + \frac{i}{2}} \frac{d\lambda}{dp} - \frac{\lambda - \frac{i}{2}}{(\lambda + \frac{i}{2})^2} \frac{d\lambda}{dp}$$

$$i \frac{\lambda - \frac{i}{2}}{\lambda + \frac{i}{2}} = \frac{d\lambda}{dp} \left( \frac{1}{\lambda + \frac{i}{2}} - \frac{\lambda - \frac{i}{2}}{(\lambda + \frac{i}{2})^2} \right) \quad / \cdot \left( \lambda + \frac{i}{2} \right)$$

$$i \left( \lambda - \frac{i}{2} \right) = \frac{d\lambda}{dp} \cdot \frac{\lambda + \frac{i}{2} - \lambda + \frac{i}{2}}{\lambda + \frac{i}{2}}$$

$$i \left( \lambda - \frac{i}{2} \right) = \frac{d\lambda}{dp} \cdot \frac{i}{\lambda + \frac{i}{2}}$$

$$\frac{d\lambda}{dp} = \left( \lambda + \frac{i}{2} \right) \left( \lambda - \frac{i}{2} \right)$$

Az összegre és különbségre vonatkozó nevezetes azonosság felhasználásával kapjuk végeredményünket:

$$\frac{d\lambda}{dp} = \lambda^2 + \frac{1}{4} \quad (3.16)$$

Szükség lesz a későbbiekben a  $\delta(\lambda_1 - \lambda_2) = -i \ln S(\lambda_1 - \lambda_2)$  fázisszög deriváltjaira is. Elsőként nézzük a  $\lambda_1$  szerinti deriváltat:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \delta(\lambda_1 - \lambda_2) = -i \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln S(\lambda_1 - \lambda_2) =$$

(3.15)-ből behelyettesítjük  $S(\lambda_1 - \lambda_2)$ -t:

$$\begin{aligned} &= -i \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \ln \left( -\frac{i + (\lambda_1 - \lambda_2)}{i - (\lambda_1 - \lambda_2)} \right) = \\ &= -i \cdot \frac{i - (\lambda_1 - \lambda_2)}{i + (\lambda_1 - \lambda_2)} \left( -\frac{1}{i - (\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{i + (\lambda_1 - \lambda_2)}{[i - (\lambda_1 - \lambda_2)]^2} \right) = \\ &= -i \cdot \frac{i - (\lambda_1 - \lambda_2)}{i + (\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \frac{-i + (\lambda_1 - \lambda_2) - i - (\lambda_1 - \lambda_2)}{[i - (\lambda_1 - \lambda_2)]^2} = \end{aligned}$$

Az egyszerűsítések után:

$$= \frac{-2}{[i + (\lambda_1 - \lambda_2)][i - (\lambda_1 - \lambda_2)]} = \frac{-2}{-1 - (\lambda_1 - \lambda_2)}$$

A végeredményünk tehát:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \delta(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{2}{1 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2} \quad (3.17)$$

Amennyiben  $\lambda_2$  szerint deriválunk, a deriválásakor kapott mindkét tag előjelet vált, így a végeredmény is:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \delta(\lambda_1 - \lambda_2) = -\frac{2}{1 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

Továbbá az is igaz, hogy a kapott kifejezések szimmetrikusak a két indexre, így azok felcserélésével az eredmény nem változik.

Mindezt összefoglalva:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \delta(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \delta(\lambda_2 - \lambda_1) = -\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \delta(\lambda_1 - \lambda_2) = -\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \delta(\lambda_2 - \lambda_1) \quad (3.18)$$

Természetesen, ha az impulzus szerinti deriváltakat nézzük, akkor megjelennek a rapiditások deriváltjai is:

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{d\lambda}{dp} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

A (3.17) egyenlet esetében például a (3.16) összefüggést felhasználva a következő adódik:

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \delta(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{2(\lambda_1^2 + \frac{1}{4})}{1 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2}$$

A (3.18)-hoz hasonló azonosságok tehát csak az ugyanazon impulzus szerinti deriváltakra érvényesek:

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \delta(p_1, p_2) = -\frac{\partial}{\partial p_1} \delta(p_2, p_1) \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_2} \delta(p_1, p_2) = -\frac{\partial}{\partial p_2} \delta(p_2, p_1)$$



### 3.4. N-részecskés sajátállapotok

Vegyük az általános  $N$  darab lefelé mutató spinnel rendelkező állapotok alterét! A sajátállapotok itt is előállíthatók a megfelelő lineáris kombinációval:

$$|\Psi\rangle = \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_N \leq L} a_{n_1, n_2, \dots, n_N} |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle \quad a_{n_1, n_2, \dots, n_N} \in \mathbb{C} \quad (3.20)$$

A Bethe-ansatz (3.13) általánosításaként a következő összefüggést adja az együtthatókra:

$$a_{n_1, n_2, \dots, n_N} = \sum_{\mathcal{P}} \exp \left( i \sum_{j=1}^N \left( p_{\mathcal{P}_j} n_j + \frac{1}{2} \sum_{k < j} \delta_{\mathcal{P}_k, \mathcal{P}_j} \right) \right) \quad (3.21)$$

Itt az első összegzés az  $\{1, 2, \dots, N\}$  indexek összes permutációján megy végig,  $\mathcal{P}_j$  pedig az aktuális permutáció  $j$ -edik eleme.

$N = 3$  esetben még kiírjuk a Bethe-együtthatókat:

$$\begin{aligned} a_{n_1, n_2, n_3} = & e^{i(k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3 + \frac{1}{2} \delta_{12} + \frac{1}{2} \delta_{13} + \frac{1}{2} \delta_{23})} + e^{i(k_1 n_1 + k_3 n_2 + k_2 n_3 + \frac{1}{2} \delta_{12} + \frac{1}{2} \delta_{13} + \frac{1}{2} \delta_{32})} + \\ & + e^{i(k_2 n_1 + k_1 n_2 + k_3 n_3 + \frac{1}{2} \delta_{21} + \frac{1}{2} \delta_{13} + \frac{1}{2} \delta_{23})} + e^{i(k_3 n_1 + k_1 n_2 + k_2 n_3 + \frac{1}{2} \delta_{12} + \frac{1}{2} \delta_{31} + \frac{1}{2} \delta_{32})} + \\ & + e^{i(k_2 n_1 + k_3 n_2 + k_1 n_3 + \frac{1}{2} \delta_{21} + \frac{1}{2} \delta_{31} + \frac{1}{2} \delta_{23})} + e^{i(k_3 n_1 + k_2 n_2 + k_1 n_3 + \frac{1}{2} \delta_{21} + \frac{1}{2} \delta_{31} + \frac{1}{2} \delta_{32})} + \end{aligned} \quad (3.22)$$

A fázistolások itt kétfelé osztva szerepelnek. Minden tagot  $e^{-\frac{i}{2}(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23})} = e^{\frac{i}{2}(\delta_{21} + \delta_{31} + \delta_{32})}$ -vel szorozva kapjuk a (3.8)-nak megfelelő alakot. Itt a kétrészecskés esethez hasonlóan bevezetjük a fázistolásokat:  $\delta(p_j, p_k) := \delta_{kj}$  ( $j < k$ ). Így a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{n_1, n_2, n_3} = & e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3)} + e^{i\delta(p_2, p_3)} \cdot e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3)} + \\ & e^{i\delta(p_1, p_2)} \cdot e^{i(p_2 n_1 + p_1 n_2 + p_3 n_3)} + e^{i[\delta(p_1, p_3) + \delta(p_2, p_3)]} \cdot e^{i(p_3 n_1 + p_1 n_2 + p_2 n_3)} + \\ & e^{i[(\delta(p_1, p_2)) + \delta(p_1, p_3)]} \cdot e^{i(p_2 n_1 + p_3 n_2 + p_1 n_3)} + e^{i[\delta(p_1, p_2) + \delta(p_1, p_3) + \delta(p_2, p_3)]} \cdot e^{i(p_1 n_3 + p_2 n_2 + p_1 n_3)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Az első tag a három részecskét jelképezi rendre növekvő koordinátákon. Bármelyik két egymás után következő részecske felcserélésekor egy másik taghoz jutunk és megjelenik a nekik megfelelő fázistolás, majd további cserénél további fázistolások. Nem nehéz elképzelni, hogy  $N$  részecskénél ugyanígy működne a dolog.

Tetszőleges  $N$  részecskére (3.21) együtthatók által kielégítendő egyenleteket itt nem adom meg, de az azokból következő összefüggés a fázisszögekre analóg a kétrészecskés esettel:

$$e^{i\delta_{kj}} =: e^{i\delta(p_j, p_k)} =: S(p_j, p_k) = -\frac{e^{i(p_j + p_k)} + 1 - 2e^{ip_k}}{e^{i(p_j + p_k)} + 1 - 2e^{ip_j}} \quad (3.24)$$

A számunkra lényeges következmény, hogy a kölcsönhatások miatt itt is megjelennek fázistolások, és mivel ezek alakja egyezik a korábbival, a bevezetett rapiditás-paraméterezés rájuk is ugyanígy használható.

## 4. fejezet

# A kvázi-klasszikus kép felépítése

A 3. fejezetben láttuk, hogy Bethe-sajátállapotok értelmezhetők, mint a rendszerbe kellett részecskék, vagy hullámok, melyek egymással való kölcsönhatása egy fázistolás formájában nyilvánul meg. A következőkben bemutatom, milyen fizikai kép alapján rendelhetünk ezen részecskékhez sebességeket és azok hogyan hozhatók összefüggésbe az (1.8) egyenlet által leírt sejtéssel.

### 4.1. Egyrészecskés eset

Az egyrészecskés sajátállapotok a (3.5) együtthatókkal állíthatók elő, és az állapotok időfüggését is kiírva a következő síkhullámokként értelmezhetők:

$$e^{ipn} e^{-iE(p)t}$$

Síkhullámok esetén a hullámcsomag-konceptió segítségével csoportsebességet értelmezhetünk. Jelölje  $f(p)$  az egyes impulzusokhoz tartozó együtthatók eloszlását. Ekkor az egyes síkhullámok szuperpozíciója a következő módon írható:

$$\int dp f(p) e^{ipn} e^{-iE(p)t} = \quad (4.1)$$

Amennyiben a hullámcsomag egy  $p^0$  impulzus kis környezetén kívüli impulzusokhoz tartozó komponenseket csak elhanyagolható mértékben tartalmaz, az energiakifejezés sorba fejthető az impulzus szerint első rendben.

$$= \int dp f(p) e^{ipn} e^{-i[E(p^0) + \frac{dE}{dp}(p-p^0)]t} =$$

A  $\frac{dE}{dp}$  derivált természetesen a  $p^0$  helyen értendő, csak az egyszerűség kedvéért nem írjuk ki. A  $p$ -től nem függő tagok kiemelhetők az integrál elé:

$$\begin{aligned} &= e^{-i[E(p^0) - \frac{dE}{dp} p^0]t} \int dp f(p) e^{ipn} e^{-i \frac{dE}{dp} p t} = \\ &= e^{-i[E(p^0) - \frac{dE}{dp} p^0]t} \int dp f(p) e^{-ip(n - \frac{dE}{dp} t)} = \end{aligned}$$

A kapott integrál éppen az  $f(p)$  függvény Fourier-transzformáltja.

$$= e^{i[E(p^0) - \frac{dE}{dp} p^0]t} \tilde{f}(n - \frac{dE}{dp} t)$$

A kifejezésből leolvasható a csoportsebesség:

$$v = \frac{dE}{dp} \quad (4.2)$$

ahogyan az az XX modellnél a (2.12) egyenlet kapcsán szerepelt. Az egyezés megfelel elképzeléseinknek, hiszen a rendszerben lévő egyetlen részecske esetén nem várunk kölcsönhatást ebben a modellben sem.

Megjegyzendő, hogy szigorúan nézve, csak akkor beszélhetünk Fourier-transzformációról, ha a lánc végtelen méretű, hiszen olyankor válik az impulzus folytonossá. Ebben az esetben viszont alkalmas a szemléletes kép kialakítására.

Tekintsük most az (1.8) sejtést! Egy részecskére a (1.7) Gaudin-mátrix csupán egy skalár:

$$G = L \frac{dp(\lambda)}{d\lambda}$$

Az  $\underline{e}^T \underline{\underline{G}}^{-1}$  kifejezés pedig a következő alakú:

$$\underline{e}^T \underline{\underline{G}}^{-1} = \frac{dE}{d\lambda} \cdot \frac{1}{G} = \frac{dE}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dp} \frac{1}{L} = \frac{1}{L} \frac{dE}{dp}$$

A (4.2) csoportsebességet behelyettesítve kapjuk:

$$\underline{e}^T \underline{\underline{G}}^{-1} = \frac{1}{L} v \quad (4.3)$$

Egy részecske esetén tehát az  $\underline{e}^T \underline{\underline{G}}^{-1}$  tényező valóban arányos a részecskéhez rendelhető sebességgel.

## 4.2. A kölcsönhatás értelmezése két részecskére

Két részecske esetén a (3.8) együtthatókban már megjelenik a kölcsönhatás okozta fázistolás. Alkalmazzuk itt is a hullámcsomag-konceptiót, egy  $f(p_1, p_2)$  együtthatóeloszlás segítségével! A felírandó integrál (4.1) mintájára:

$$\int \int dp_1 dp_2 f(p_1, p_2) \left( e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2)} + e^{i\delta(p_1, p_2)} e^{i(p_1 n_2 + p_2 n_1)} \right) e^{-i[E(p_1, p_2)]t} =$$

Ha  $f(p_1, p_2)$  most a  $(p_1^0, p_2^0)$  impulzus-kombináció kis környezetében nem elhanyagolható, akkor az energia és a fázisszög sorba fejthető e pont körül:

$$= \iint dp_1 dp_2 f(p_1, p_2) \left( e^{i(p_1 n_1 + p_2 n_2)} + e^{i[\delta(p_1^0, p_2^0) + \frac{\partial \delta}{\partial p_1}(p_1 - p_1^0) + \frac{\partial \delta}{\partial p_2}(p_2 - p_2^0)]} e^{i(p_1 n_2 + p_2 n_1)} \right) \cdot e^{-i[E(p_1^0, p_2^0) + \frac{\partial E}{\partial p_1}(p_1 - p_1^0) + \frac{\partial E}{\partial p_2}(p_2 - p_2^0)]t} =$$

A deriváltak itt is a  $(p_1, p_2)$  pontban értendők.

A  $p_1$ -től és  $p_2$ -től nem függő tagokat kiemelve és két tagra bontva a kifejezést:

$$= e^{-i[E(p_1^0, p_2^0) - \frac{\partial E}{\partial p_1} p_1^0 - \frac{\partial E}{\partial p_2} p_2^0]t} \iint dp_1 dp_2 f(p_1, p_2) e^{ip_1(n_1 - \frac{\partial E}{\partial p_1} t)} e^{ip_2(n_2 - \frac{\partial E}{\partial p_2} t)} + e^{-i[E(p_1^0, p_2^0) - \frac{\partial E}{\partial p_1} p_1^0 - \frac{\partial E}{\partial p_2} p_2^0]t} e^{i[\delta(p_1^0, p_2^0) - \frac{\partial \delta}{\partial p_1} p_1 - \frac{\partial \delta}{\partial p_2} p_2]} \cdot \iint dp_1 dp_2 f(p_1, p_2) e^{ip_1(n_2 - \frac{\partial E}{\partial p_1} t + \frac{\partial \delta}{\partial p_1})} e^{ip_2(n_1 - \frac{\partial E}{\partial p_2} t + \frac{\partial \delta}{\partial p_2})} =$$

Végül elvégezve a megjelenő Fourier-transzformációkat:

$$\begin{aligned}
&= e^{-i[E(p_1^0, p_2^0) - \frac{\partial E}{\partial p_1} p_1^0 - \frac{\partial E}{\partial p_2} p_2^0]t} \tilde{f}\left(n_1 - \frac{\partial E}{\partial p_1}, n_2 - \frac{\partial E}{\partial p_2}\right) + \\
&+ e^{-i[E(p_1^0) - \frac{\partial E}{\partial p_1} p_1^0 + E(p_2^0) - \frac{\partial E}{\partial p_2} p_2^0]t} e^{i[\delta(p_1^0, p_2^0) - \frac{\partial \delta}{\partial p_1} p_1^0 - \frac{\partial \delta}{\partial p_2} p_2^0]} \tilde{f}\left(n_2 - \frac{\partial E}{\partial p_1}t + \frac{\partial \delta}{\partial p_1}, n_1 - \frac{\partial E}{\partial p_2}t + \frac{\partial \delta}{\partial p_2}\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A kifejezés második tagját vizsgálva látható, hogy a sebességek ebben az esetben is az energia deriváltjaként állnak elő, viszont a fázistolás következményeként megjelenik egy koordináta eltolás, ami a fázisszög impulzus szerinti deriváltjaival egyenlő. Az egyrészecskés esetben az volt fizikai elképzelésünk, hogy egy hullám terjed  $v$  sebességgel körbe a periodikus határfeltétellel önmagába záródó  $L$  hosszú láncon. Két részecskére következő módon fejleszthető tovább a kvázi-klasszikus kép:

Két, egy irányba mozgó, hullámként terjedő részecskét képzelünk el a láncon, melyek sebessége a következő:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\partial E}{\partial p_1} \\
v_2 &= \frac{\partial E}{\partial p_2}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

A (3.8) egyenletben szereplő fázistolás szomszédos lefordított spinek esetén kap szerepet, amiből arra következtetünk, hogy a kölcsönhatás a részecskék közelkerülésekor érvényesül, azaz, amikor ütköznek. A (4.4) eredmény alapján pedig a kölcsönhatás megnyilvánulását út-, vagy időkésésként fogjuk fel. A részecskék megkülönböztetetlensége miatt az ütközést egyszerűen úgy képzeljük el, mintha a gyorsabb részecske áthaladna a lassabbon. A sajátállapotok (3.8) és (3.23) együtthatóiban szereplő tagok így az ütközés előtti és utáni helyzetet írják le.

(4.4) szerint a találkozáskor az első, illetve második részecske rendre a következő távolságoknak megfelelő időkésést szenved:

$$\begin{aligned}
\Delta_{s_{12}} &= \frac{\partial \delta(p_1, p_2)}{\partial p_1} \\
\Delta_{s_{21}} &= \frac{\partial \delta(p_1, p_2)}{\partial p_2}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Azaz ennyivel kerül hátrébb az ütközési pozíciótól.

Ezen időkésések miatt a részecskékhez egy átlagos sebesség rendelhető, amely a kölcsönhatás jelenléte miatt nem egyezik a haladási sebességükkel. A következőkben ezen átlagos sebességeket határozzuk meg.

Elsőként a két ütközés között eltelt időt fejezzük ki. A (3.8) összefüggés azt indokolja, hogy az első részecskét gondoljuk gyorsabbnak. Az együtthatóknál ugyanis az első tagot tekintjük az ütközés előtti állapotot leírónak és abban a  $p_1 n_1$  szorzat szerepel. Mivel  $n_1 < n_2$ , ezt úgy értelmezzük, hogy az első részecske helyezkedik el hátrébb. Ahhoz pedig, hogy a határesetben végtelen láncon is történjen ütközés, a hátsó részecskének muszáj gyorsabbnak lennie.

A részecskéknek tehát  $v_1 - v_2$  relatív sebességével kell befutni a láncon  $L$  hosszát, ráadásként a gyorsabb (első) részecske  $\Delta_{s_{12}}$  késését, nem kell viszont befutni a lassabb (második) részecske  $\Delta_{s_{21}}$  késését. Az eltelt idő így:

$$t = \frac{L + \Delta s_{12} - \Delta s_{21}}{v_1 - v_2} \quad (4.7)$$

Az első részecske két ütközés között  $v_1 t$  utat futna be, de ebből le kell vonnunk az időkééséből adódó  $\Delta s_{12}$  távot, hiszen azt valójában nem tette meg. A  $\bar{v}_1$  átlagsebesség tehát:

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1 t - \Delta s_{12}}{t}$$

Behelyettesítve a (4.7) időt:

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1 \frac{L + \Delta s_{12} - \Delta s_{21}}{v_1 - v_2} - \Delta s_{12}}{\frac{L + \Delta s_{12} - \Delta s_{21}}{v_1 - v_2}}$$

Átrendezve a kifejezést, és kihasználva, hogy a második részecskére teljesen analóg egyenletek érvényesek az alábbi átlagsebességeket kapjuk:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= v_1 - \Delta s_{12} \frac{v_1 - v_2}{L + \Delta s_{12} - \Delta s_{21}} \\ \bar{v}_2 &= v_2 - \Delta s_{21} \frac{v_1 - v_2}{L + \Delta s_{12} - \Delta s_{21}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

A sebességek szerint csoportosítva a tagokat:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= v_1 \frac{L - \Delta s_{21}}{L + \Delta s_{12} - \Delta s_{21}} + v_2 \frac{\Delta s_{12}}{L + \Delta s_{12} - \Delta s_{21}} \\ \bar{v}_2 &= -v_1 \frac{\Delta s_{21}}{L + \Delta s_{12} - \Delta s_{21}} + v_2 \frac{L + \Delta s_{12}}{L + \Delta s_{12} - \Delta s_{21}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Megadtuk tehát átlagsebességeket a haladási sebességek függvényeként a klasszikus képbén. A továbbiakban megmutatjuk, hogy az (1.8) sejtés a kölcsönhatás jelenlétében is értelmezhető fizikailag, azaz a  $\underline{e}'^T \underline{G}^{-1}$  tag most az átlagos sebesség lesz arányos.

A (4.5) és (4.6) összefüggések alapján az energia és a fázisszög deriváltjaira térünk át. Továbbá, mivel célunk az (1.8) egyenlet  $\underline{e}'^T \underline{G}^{-1}$  tényezőjével való összehasonlítás, rapiditásparaméterek szerinti deriválásra váltunk:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \frac{\partial E}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1} \frac{L - \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2}}{L + \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1} - \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2}} + \frac{\partial E}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2} \frac{\frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1}}{L + \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1} - \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2}} \\ \bar{v}_2 &= -\frac{\partial E}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1} \frac{\frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2}}{L + \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1} - \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2}} + \frac{\partial E}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2} \frac{L + \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1}}{L + \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1} - \frac{\partial \delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Vezessük be az átlagsebességek  $\bar{\underline{v}}$  oszlopvektorát, melyre  $(\bar{\underline{v}})_j = \bar{v}_j$ , valamint használjuk fel az (1.8) egyenletben szereplő  $\underline{e}'$  vektort! Ezek segítségével (4.10) a következő alakba írható:

$$\bar{\underline{v}}^T = \underline{e}'^T \cdot \frac{1}{L + \frac{\partial\delta(\lambda_1-\lambda_2)}{\partial\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1} - \frac{\partial\delta(\lambda_1-\lambda_2)}{\partial\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_1}{dp_1} \left( L - \frac{\partial\delta(\lambda_1-\lambda_2)}{\partial\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2} \right) & -\frac{d\lambda_1}{dp_1} \frac{\partial\delta(\lambda_1-\lambda_2)}{\partial\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{dp_2} \\ \frac{d\lambda_2}{dp_2} \frac{\partial\delta(\lambda_1-\lambda_2)}{\partial\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1} & \frac{d\lambda_2}{dp_2} \left( L + \frac{\partial\delta(\lambda_1-\lambda_2)}{\partial\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dp_1} \right) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Vezessük be a következő egyszerűsítő jelölést:

$$\delta' := \frac{\partial\delta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial\lambda_1} \quad (4.12)$$

Kihasználva a fázisszög deriváltjaira vonatkozó (3.18) összefüggéseket (4.11) egyszerűsödik:

$$\bar{\underline{v}}^T = \underline{e}'^T \frac{1}{L + \delta' \left( \frac{d\lambda_1}{dp_1} + \frac{d\lambda_2}{dp_2} \right)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_1}{dp_1} \left( L + \delta' \frac{d\lambda_2}{dp_2} \right) & \frac{d\lambda_1}{dp_1} \frac{d\lambda_2}{dp_2} \delta' \\ \frac{d\lambda_1}{dp_1} \frac{d\lambda_2}{dp_2} \delta' & \frac{d\lambda_2}{dp_2} \left( L + \delta' \frac{d\lambda_1}{dp_1} \right) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

A mátrixon belül szorozzunk, azon kívül osszunk  $\frac{dp_1}{d\lambda_1} \frac{dp_2}{d\lambda_2} = \left( \frac{d\lambda_1}{dp_1} \frac{d\lambda_2}{dp_2} \right)^{-1}$ -vel:

$$\bar{\underline{v}}^T = \underline{e}'^T \frac{1}{L \frac{dp_1}{d\lambda_1} \frac{dp_2}{d\lambda_2} + \delta' \left( \frac{dp_1}{d\lambda_1} + \frac{dp_2}{d\lambda_2} \right)} \cdot \begin{bmatrix} L \frac{dp_2}{d\lambda_2} + \delta' & \delta' \\ \delta' & L \frac{dp_1}{d\lambda_1} + \delta' \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Vizsgáljuk most az erre az esetre  $2 \times 2$ -es Gaudin-mátrixot! A definíció (1.7) alapján:

$$G_{jk} = L \frac{dp(\lambda_j)}{d\lambda_j} \delta_{jk} - i \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^2 \frac{\partial}{\partial\lambda_k} \ln \left( S(\lambda_j - \lambda_l) \right) \quad (4.15)$$

Felhasználva, hogy  $S(\lambda_j - \lambda_l) = e^{i\delta(\lambda_j - \lambda_l)}$ :

$$G_{jk} = L \frac{dp(\lambda_j)}{d\lambda_j} \delta_{jk} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^2 \frac{\partial\delta(\lambda_j - \lambda_l)}{\partial\lambda_k} \quad (4.16)$$

Ez alapján felírhatjuk a Gaudin-mátrixot két részecskére:

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} L \frac{dp_1}{d\lambda_1} + \frac{\partial\delta(\lambda_1-\lambda_2)}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial\delta(\lambda_1-\lambda_2)}{\partial\lambda_2} \\ \frac{\partial\delta(\lambda_2-\lambda_1)}{\partial\lambda_1} & L \frac{dp_2}{d\lambda_2} + \frac{\partial\delta(\lambda_2-\lambda_1)}{\partial\lambda_2} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Éljünk a (4.12) egyszerűsítéssel ebben az esetben is:

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} L \frac{dp_1}{d\lambda_1} + \delta' & -\delta' \\ -\delta' & L \frac{dp_2}{d\lambda_2} + \delta' \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

A mátrix determinánsa:

$$\begin{aligned}\det \underline{\underline{G}} &= \left( L \frac{dp_1}{d\lambda_1} + \delta' \right) \left( L \frac{dp_2}{d\lambda_2} + \delta' \right) - \delta'^2 = \\ &= L \left[ L \frac{dp_1}{d\lambda_1} \frac{dp_2}{d\lambda_2} + \delta' \left( \frac{dp_1}{d\lambda_1} + \frac{dp_2}{d\lambda_2} \right) \right]\end{aligned}$$

Ennek tudatában a  $2 \times 2$ -es mátrix már egyszerűen invertálható:

$$\underline{\underline{G}}^{-1} = \frac{1}{L} \frac{1}{L \frac{dp_1}{d\lambda_1} \frac{dp_2}{d\lambda_2} + \delta' \left( \frac{dp_1}{d\lambda_1} + \frac{dp_2}{d\lambda_2} \right)} \cdot \begin{bmatrix} L \frac{dp_2}{d\lambda_2} + \delta' & \delta' \\ \delta' & L \frac{dp_1}{d\lambda_1} + \delta' \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Amennyiben a kapott eredményt összevetjük a (4.14) egyenlettel, a következő megállapítás tehető:

$$\underline{e}^T \underline{\underline{G}}^{-1} = \frac{1}{L} \underline{v}^T \quad (4.20)$$

A kifejezés teljesen analóg az egyrészecskés (4.3) eredménnyel.

Megmutattuk tehát, hogy a sejtés a kölcsönható kétrészecskés esetben is szemléletes jelentéstartalommal bír, ha a kölcsönhatások miatt megváltozó átlagsebességeket tekintjük.

### 4.3. Az általános eset igazolása

A tetszőleges számú részecskét tartalmazó rendszer vizsgálatánál a kétrészecskés esetben kapott kvázi-klasszikus képet visszük tovább, mivel (3.21) és (3.24) egyenletek szerint ezen sajátállapotokban is ugyanolyan fázisszög értékek jelennek meg.

Elképzelünk tehát az  $L$  hosszú láncon  $N$  darab megegyező irányba haladó részecskét. A gyorsabbak folyamatosan előzik a lassabbakat, és minden esetben időkésés történik, melynek megfelelő ütkésések a  $j$ -edik és  $k$  adik ( $j < k$ ) részecske ütközésekor:

$$\Delta s_{jk} = \frac{\partial \delta(p_j, p_k)}{\partial p_j} \quad (4.21)$$

$$\Delta s_{kj} = \frac{\partial \delta(p_j, p_k)}{\partial p_k}$$

A fázistolások tekintetében ezt szépen szemléltetik a három részecskés esetben megadott (3.23) együtthatók.

A két részecskés esettel ellentétben, itt nem tudjuk az átlagsebességeket a mozgás egy rövid időtartamát vizsgálva egyszerűen kifejezni, hiszen a lezajló ütközések nagyban függenek például a kezdeti pozícióktól. Helyette a hosszú időre vett átlagos viselkedést tanulmányozhatjuk.

Vizsgáljuk meg adott  $t$  idő alatt átlagosan hányszor ütközik a  $j$ -edik és  $k$ -edik részecske! Ha az ütközésre  $T_{jk}$  időnként kerül sor, akkor az ütközések száma:  $t/T_{jk}$ . Két ütközés között annyi idő telik el, amíg a relatív sebességükkel befutják az  $L$  hosszúnak az ütkésésekkel korrigált változatát. Nem tudhatjuk azonban, ez alatt melyik részecske hányszor és mivel ütközött, és ezen ütközések milyen további korrekciókat jelentenek a befutandó útra nézve. Ha feltesszük viszont, hogy létezik minden részecskéhez egy átlagos  $\bar{v}$  sebesség, ami ezen korrekciókat már tartalmazza, akkor ezeket nem kell külön figyelembe vennünk és az ütközések közti idő a következő:

$$T_{jk} = \frac{L}{|\bar{v}_j - \bar{v}_k|} \quad (4.22)$$

Ennek segítségével megadhatjuk, hogy a  $t$  idő alatt a  $j$ -edik részecske összesen mennyi útkését szenvedett a  $k$ -adik részecskével való ütközések miatt:

$$\Delta s_{jk}^{\text{össz}} = \Delta s_{jk} \cdot \frac{t}{L} \frac{1}{|\bar{v}_j - \bar{v}_k|} \quad (4.23)$$

Ezeket  $k$ -ra összegezve kapjuk a  $t$  idő alatt tetszőleges részecske miatt elszenvedett útkéséseket:

$$\Delta s_j^{\text{össz}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \Delta s_{jk} \cdot \frac{t}{L} \frac{1}{|\bar{v}_j - \bar{v}_k|} \quad (4.24)$$

Ezen összes késés éppen azt adja meg, mennyivel kevesebb utat tett meg a részecske azért, mert a kölcsönhatások miatt a tényleges helyett az átlagos sebességével haladt:

$$(v_k - \bar{v}_k)t = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \Delta s_{jk} \frac{t}{L} \frac{1}{|\bar{v}_j - \bar{v}_k|} \quad (4.25)$$

Innen kifejezhetjük a haladási sebességet:

$$v_k = \bar{v}_k + \frac{1}{L} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \Delta s_{jk} |\bar{v}_j - \bar{v}_k| \quad (4.26)$$

A kétrészecskés esettel ellentétben, itt tehát a haladási sebességek fejezhetőek ki könnyebben az átlagosakkal.

A következőkben bemutatom, hogy az átlagos sebességekkel a sejtés ebben az esetben is fizikai értelmezést nyer.

Az (1.7) egyenlet szerint a Gaudin-mátrix:

$$G_{jk} = L \delta_{jk} \frac{dp_j}{d\lambda_j} - i \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \ln S(\lambda_j - \lambda_l) =$$

Áttérve a  $\delta(\lambda_j - \lambda_l)$  fázisszögekre:

$$= L \delta_{jk} \frac{dp_j}{d\lambda_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \frac{\partial \delta(\lambda_j - \lambda_l)}{\partial \lambda_k} = \quad (4.27)$$

Különválasztva a mátrix diagonális és off-diagonális elemeit, és kihasználva, hogy utóbbi esetben mindenképp  $l = k$ , mert a deriválás a többi tagot kiejti:

$$= \delta_{jk} \left( L \frac{dp_j}{d\lambda_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \frac{\partial \delta(\lambda_j - \lambda_l)}{\partial \lambda_j} \right) + (1 - \delta_{jk}) \underbrace{\frac{\partial \delta(\lambda_j - \lambda_k)}{\partial \lambda_k}}_{-\frac{\partial(\lambda_k - \lambda_j)}{\partial \lambda_k}} = \quad (4.28)$$



Az off-diagonális elem (3.18) alapján átírható a kisebbítendő rapiditás szerinti deriváltra.

$$= \delta_{jk} \left( L \frac{dp_j}{d\lambda_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \frac{\partial \delta(\lambda_j - \lambda_l)}{\partial \lambda_j} \right) - (1 - \delta_{jk}) \frac{\partial \delta(\lambda_k - \lambda_j)}{\partial \lambda_k} \quad (4.29)$$

A (4.3) és (4.20) eredmények alapján a következőt szeretnénk belátni:

$$\bar{v} = L \underline{e}' \cdot \underline{G}^{-1} \quad (4.30)$$

Világos, hogy nem követhetjük a két részecskénél végigjárt utat, mert az általános  $N \times N$ -es Gaudin-mátrixot nem tudjuk invertálni. Rendezzük hát át az egyenletet:

$$\underline{e}' = \frac{1}{L} \bar{v} \cdot \underline{G} \quad (4.31)$$

Ugyanezt indexekkel kiírva:

$$e'_k = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \bar{v}_j G_{jk} \quad (4.32)$$

A Gaudin mátrix elemeit beírva, és kihasználva, hogy  $e'_k = \frac{\partial E}{\partial \lambda_k}$ :

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda_k} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^N \left[ \bar{v}_j \delta_{jk} \left( L \frac{dp_j}{d\lambda_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \frac{\partial \delta(\lambda_j - \lambda_l)}{\partial \lambda_j} \right) - \bar{v}_j (1 - \delta_{jk}) \frac{\partial \delta(\lambda_k - \lambda_j)}{\partial \lambda_k} \right] \quad (4.33)$$

A Kronecker-delták hatását felhasználva:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda_k} = \frac{1}{L} \left( \bar{v}_k L \frac{dp_k}{d\lambda_k} + \bar{v}_k \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \frac{\partial \delta(\lambda_k - \lambda_l)}{\partial \lambda_k} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \bar{v}_j \frac{\partial \delta(\lambda_k - \lambda_j)}{\partial \lambda_k} \right) \quad (4.34)$$

Áttérve impulzus szerinti deriváltakra:

$$\frac{\partial E}{\partial p_k} \frac{dp_k}{d\lambda_k} = \bar{v}_k \frac{dp_k}{d\lambda_k} + \bar{v}_k \frac{1}{L} \sum_{l \neq k} \frac{\partial \delta(p_k, p_l)}{\partial p_k} \frac{dp_k}{d\lambda_k} - \frac{1}{L} \sum_{j \neq k} \bar{v}_j \frac{\partial \delta(p_k, p_j)}{\partial p_k} \frac{dp_k}{d\lambda_k} \quad (4.35)$$

A szummákat összevonva, és kihasználva, hogy  $\frac{\partial E}{\partial p_k} = v_k$ :

$$v_k = \bar{v}_k + \frac{1}{L} \sum_{j \neq k} \frac{\partial \delta(p_k, p_j)}{\partial p_k} (\bar{v}_k - \bar{v}_j) \quad (4.36)$$

Szeretnénk a fázisszögek deriváltjait a kvázi-klasszikus kép útkéséseire átírni. Figyelnünk kell azonban arra, hogy az  $S(p_j, p_k)$  fázistolások  $j < k$ -ra lettek definiálva és (3.19) alapján az argumentumok cseréje egy előjelcserével ekvivalens. Másrészt, mivel most is a kisebb indexű sebességekre gondolunk nagyobb értékűekként, a (4.36) kifejezésben  $(\bar{v}_k - \bar{v}_j)$  épp akkor vált

negatívra, amikor a fázisszög első argumentuma lesz a nagyobb, tehát az előjelet vált. Mindezek miatt beírhatjuk az útkésést, ha a sebességkülönbség abszolút értékét vesszük:

$$v_k = \bar{v}_k + \sum_{j \neq k} \frac{\Delta s_{kj}}{L} |\bar{v}_k - \bar{v}_j| \quad (4.37)$$

A kifejezés egy  $j \leftrightarrow k$  indexcserétől eltekintve egyezik az átlagsebességre a kvázi-klasszikus kép segítségével kapott (4.26) eredménnyel. Az ekvivalens átalakítások végrehajtása miatt ez azt jelenti, hogy belátni kívánt (4.30) összefüggés tetszőleges  $N$  részecske esetén is fennáll.

Sikerült tehát megmutatni, hogy kölcsönható XXX modell tetszőleges sajátállapotában az (1.8) sejtésnek szemléletes jelentéstartalma van: azt állítja, hogy a megmaradó töltések áramának várható értéke arányos a töltések várható értékének és a kölcsönhatásnak megfelelően módosított átlagsebességeknek a szorzatával.

## 5. fejezet

# Összefoglalás

Munkám során egy Bethe-ansatz módszerrel megoldható, kvantumintegrálható rendszerekre vonatkozó sejtéshez sikerült fizikai jelentéstartalmat találnom.

A bevezetőben bemutatam az integrálható rendszerek sajátosságait: a rendszermérettel arányos megmaradó töltéseket és a rájuk felírható kontinuitási egyenleteket. Ismertettem a Bethe-ansatz fő összefüggéseit és az idetartozó sejtést, melynek bizonyítása kutatócsoportom egyik jelenlegi célja, valamint annak egy szemléletes jelentését, melynek belátása dolgozatom fő témája.

A 2. fejezet az XX spinláncon végzett korábbi vizsgálataimat tárgyalja. Megadtam a modell sajátérték-problémájának Jordan-Wigner-transzformációval kapható megoldását, annak megmaradó töltéseit és a hozzájuk tartozó áramokat. Megmutattam, hogy a modellt miért tekinthetjük kölcsönhatásmentesnek, és hogy ebben az esetben a sejtéshez társítható szemléletes kép valóban működik.

A 3. fejezetben a kölcsönható XXX modell sajátállapotait vizsgáltam a Bethe-ansatz segítségével. Bemutattam, hogy az egyes sajátállapotok a rendszerben lévő bizonyos kvázi-részecskék jelenlétének feleltethetők meg, valamint hogy a kölcsönhatásuk egy fázistolást eredményez, amikor közel kerülnek egymáshoz. Elemeztem a részecskék impulzusának a rapiditás-változókkal történő paraméterezését, és levezettem néhány ide tartozó összefüggést.

Végül a 4. fejezetben megmutattam, hogy a hullámcsomag-konceptió segítségével miként társítható a részecskékhez sebesség, valamint a fázistolásokhoz útkésés. Kidolgoztam egy kvázi-klasszikus képet, melyben a részecskék a láncon haladnak körbe, és egymáson való áthaladás-ükkor útkésést szenvednek. Vizsgáltam a részecskék kölcsönhatás miatt megváltozó átlagos sebességét, és beláttam, hogy tetszőleges számú részecske esetén ezen sebességek jelennek meg a sejtésben.

Bár feladatokat az XXX spinlánc modelljéből kiindulva végeztem el, a megoldás során használt Bethe-egyenletek tetszőleges másikkal, így módon megoldható modellre is érvényesek, így eredményeim is azok.

Munkám következményeként a sejtés igazolásával az is világossá válik majd, hogy a Bethe-ansatz segítségével megoldható, integrálható modellek a klasszikussal analóg áramlási folyamatokkal bírnak. A megmaradó töltéseknek és azok áramainak várható értékeit a modellben értelmezhető részecskék átlagos sebessége köti össze.

# Irodalomjegyzék

- [1] H.-J. Mikeska and A. K. Kolezhuk, „One-dimensional magnetism,” in *Quantum magnetism*, pp. 1–83, Springer, 2004. arXiv:cond-mat/0501603v2 [cond-mat.str-el].
- [2] R. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Dover books on physics, Dover Publications, 2007.
- [3] M. Karabach, G. Müller, H. Gould, and J. Tobochnik, „Introduction to the bethe ansatz i,” *Computers in Physics*, vol. 11, no. 1, pp. 36–43, 1997. arXiv:cond-mat/9809162v1 [cond-mat.stat-mech].
- [4] Matteo Mancini, „Fermionization of Spin Systems,” 2008.
- [5] J.-S. Caux and J. Mossel, „Remarks on the notion of quantum integrability,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2011, no. 02, p. P02023, 2011. arXiv:1012.3587v1 [cond-mat.str-el].
- [6] F. H. Essler and M. Fagotti, „Quench dynamics and relaxation in isolated integrable quantum spin chains,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 2016, no. 6, p. 064002, 2016. arXiv:1603.06452v2 [cond-mat.quant-gas].
- [7] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. Weiss, „A quantum newton’s cradle,” *Nature*, vol. 440, pp. 900–903, 4 2006.
- [8] B. Bertini, M. Collura, J. De Nardis, and M. Fagotti, „Transport in out-of-equilibrium x x z chains: Exact profiles of charges and currents,” *Physical review letters*, vol. 117, no. 20, p. 207201, 2016. arXiv:1605.09790v4 [cond-mat.stat-mech].
- [9] O. A. Castro-Alvaredo, B. Doyon, and T. Yoshimura, „Emergent hydrodynamics in integrable quantum systems out of equilibrium,” *Physical Review X*, vol. 6, no. 4, p. 041065, 2016. arXiv:1605.07331v3 [cond-mat.stat-mech].
- [10] M. Schemmer, I. Bouchoule, B. Doyon, and J. Dubail, „Generalized hydrodynamics on an atom chip,” *arXiv preprint arXiv:1810.07170*, 2018.
- [11] M. Gaudin and J. Caux, *The Bethe Wavefunction*. Cambridge University Press, 2014.
- [12] M. Borsi, „Megmaradó töltések és kontinuitási egyenletek Heisenberg-típusú spinlánc modellekben,” 2018. BSc Szakdolgozat.
- [13] P. Jordan and E. Wigner, „Über das Paulische Äquivalenzverbot,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 47, pp. 631–651, Sept. 1928.