A klasszikus összhangzattan axiomatikája

Tóbiás András

2013. október 15.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

> We can forgive a man for making a useful thing as long as he does not admire it. The only excuse for making a useless thing is that one admires it intensely.
> All art is quite useless.
> (O. Wilde: The Picture Of Dorian Gray, The Preface)

Amint minden művészeti ágra, úgy a zeneszerzésre vonatkozóan is preskriptív szabályrendszereket alkottak Európában a klasszicizmus korszakában. Ekkor születtek a klasszikus összhangzattan *szerkesztési elvei*, amelyeknek legnagyobb mértékben a bécsi klasszicista zeneszerzők művei felelnek meg. A szerkesztési elveket követő zeneművek legegyszerűbb és legtisztább modelljét a *négyszólamú összhangzattanpéldák* adják. Az ezekre vonatkozó szólamvezetési és akkordváltási szabályok döntő részben Johann Sebastian Bach korábban született négyszólamú korálfeldolgozásainak tulajdonságain alapulnak.

Ebben a dolgozatban a klasszikus összhangzattan tárgykörébe tartozó zenei jelenségeket definiáljuk matematikai pontossággal, majd ezek felhasználásával kimondjuk a négyszólamú összhangzattanpéldákra vonatkozó szerkesztési elveket. Joggal vetődik fel a kérdés: miért van ehhez szükség matematikai formalizálásra, ha a szabályok általánosan ismertek és elfogadottak?

Egyrészt szükséges az összhangzattani tudás- és tananyag logikai rendezése, amelyhez a matematika nagy segítséget nyújt. Az összhangzattan-tanulást megkezdő középiskolás növendék általában tanult már korábban szolfézst, esetleg énekórán hallott bizonyos zeneelméleti fogalmakról, így nem újdonság számára például a kvintkör, az enharmonikusság, a hármashangzatok, a hangnemek vagy a funkciók létezése. Éppen ezért az sem feltétlenül okoz számára az anyag tanulásában való előrehaladást meggátló zavart, ha elmarad ezen fogalmak pontos definiálása vagy ha redundáns módon egymásból magyarázzák meg nekik a nem kellő mértékben tisztázott fogalmakat. A mély megértéshez, az összhangzattan struktúrájának átlátásához azonban tiszta fogalmakra és köztük rendezett logikai viszonyrendszerre van szükség, ténylegesen pusztán az összhangzattan alapját jelentő felhangrendszerből kiindulva. Dolgozatom első két fejezete ezzel foglalkozik: a fogalmakat mindig egymásra építve adja – csak a felhangrendszer és a halmazelmélet tulajdonságait használva – meg a kvintkör, a jóltemperált zongora, az enharmonikusság, a hangközök, a konszonancia és disszonancia, a hármas- és négyeshangzatok definícióit és tulajdonságait. Lényeges új zeneelméleti vagy matematikai eredményt ez a formalizálás még nem hoz.

Másrészt a matematikai formalizálás teszi lehetővé összhangzattanilag illetve matematikailag értékes új állítások megfogalmazását is. Előbbire példa a hangnemek tulajdonságait leíró harmadik fejezet. Ez matematikai szempontból a legkevésbé bonyolult rész, igen egyszerű aritmetikát használ, viszont zeneelméleti szempontból talán ez a fejezet hozza a legjelentősebb eredményeket: a hangnemek osztályozását, a dúr és a moll hangnem viszonyának és különbségeinek végleges tisztázását. A negyedik fejezetben a topológia eszközeivel definiáljuk a négyszólamú összhangzattanpéldák és lejátszásaik tulajdonságait, erre építve adjuk meg a funkciók és a tonalitás jellemzőit az ötödik fejezetben, és így jutunk el a hatodik fejezetben, a tényleges axiomatizálás során *a tonalitás alaptételéhez.* Ez matematikai szempontból a legjelentősebb eredmény, bizonyítása a legkomolyabb a dolgozatban. Látni fogjuk, hogy ezt a zeneelméleti állítást a matematika eszközei nélkül nem is tudnánk megfogalmazni, holott a klasszikus összhangzattan szemlélete szerint nyilvánvalóan igaz.

Ez a TDK-dolgozat a skálahangokból felépülő összhangzattanpéldák tulajdonságainak és akkordváltási szabályainak tárgyalásával zárul, nem tárgya az alterált (módosított hangokat tartalmazó) akkordok és a modulációk részletes jellemzése. A jövőre kiadandó teljes változat már ezeket is tartalmazza, ezzel lényegében befejezi a klasszikus összhangzattan axiomatizálását. Nyilvánvaló, hogy ez a mű, amely igazán csak az egyetemi szintű matematikai ismeretekkel rendelkező olvasó számára érthető könnyen, önmagában messze nem alkalmas konzervatóriumi összhangzattan-tankönyvnek (sőt, zeneművészeti főiskolainak sem), de bízom abban, hogy logikai és szemléleti megalapozást, tárgyalási szerkezetet adhat egy új magyar zeneelmélet-tankönyv létrehozásához.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Dr. G. Horváth Ákos egyetemi docensnek, a BME-TTK Matematikai Intézet Geometria tanszéke vezetőjének, hogy témavezetőként segítette és támogatta munkámat, tanácsaival hozzájárult a dolgozat végleges szerkezetének kialakításához, egyes fogalmak és tételek elnevezéséhez, a leírások könnyebben olvashatóvá tételéhez, a TDK-ra való jelentkezés adminisztratív teendőinek időben való intézéséhez.

Köszönöm Dr. Serei Zsoltnak, a Liszt Ferenc Zeneművészeti Egyetem docensének, aki 2010 óta zeneelmélet-tanárom, a szemléleti szempontból nagy jelentőségű órákat, konzultációkat a klasszikus összhangzattanról és a konszonanciáról és a kérdéseimre adott válaszait, tanácsait.

Köszönöm Dinyés Dánielnek, első zeneelmélet-tanáromnak, aki 2007 és 2010 között tanított a Tóth Aladár Zeneiskolában, hogy felkeltette érdeklődésemet a klasszikus összhangzattan axiómarendszere iránt. Dinyés tanár úr mindig pontosan fogalmazta meg a szerkesztési elveket, és logikusan, mintegy természettudományos szemlélettel, ugyanakkor sok élőzenei példával tanította nekünk az összhangzattant. Sok definíciót és szerkesztési elvet, sőt néhány állítást is ennek köszönhetően tudtam egyszerűen és világosan megfogalmazni ebben a dolgozatban.

Köszönöm zongoratanáromnak, Hara Lászlónénak azt a szemléleti alapozást, amelyet a zeneelméleti szabályok valódi zeneművekre való alkalmazásához, alkalmazhatóságához adott nekem.

Köszönöm középiskolai magyartanáromnak, Schiller Mariannak a barokk művészetről tartott irodalomóráján a kvintkör és oktávkör közötti egyenlőtlenségnek és a jóltemperált zongora konstrukciójának bemutatását.

Köszönöm Dr. Robert S. Sturmannek, a University of Leeds egyetemi docensének, az egyetem Mathematics and Music BSc képzése programmenedzserének, hogy idén augusztusban Leedsben fogadott, konzultált velem a dolgozatomról, segített a magyar és a nemzetközi terminológia közötti különbségek megértésében és a számítógépes kottaírás javításában, a témához kapcsolódó nagy-britanniai és nemzetközi irodalom bemutatásában, továbbá szállást is nyújtott nekem és segített az egyetemi campuson való eligazodásban is. Szervezésének köszönhetően találkozhattam zeneszerzőkkel is Leedsben, köztük Dr. Scott McLaughlinnel, aki a leedsi egyetem zenei intézetében tanít adjunktusként, és műveiben nagy mértékben használ matematikai módszereket is.

Köszönöm évfolyamtársaimnak, barátaimnak a munkámhoz adott folyamatos támogatást, ötleteket, tanácsokat. Különösen szeretném megköszönni ötletét Vécsey Máténak, aki a tonalitás alaptételét megsejtette (ennek történetét részletesen lásd majd a tételnél).

1. A felhangrendszer és a jóltemperált zongora

1.1. A felhangok és a tiszta dúr skála

Az a célunk, hogy minden egyes vizsgált zeneelméleti–összhangzattani jelenséget pontosan akkor definiáljuk matematikai pontossággal, ha az adott jelenségnek nincs konvencionálisan elfogadott, egyértelmű definíciója. Ezekben az esetekben viszont nem csak pontos leírásra, összhangzattani szempontból releváns fogalomalkotásra fogunk törekedni, hanem a definiálás szabadságát kihasználva igyekszünk minél általánosabban érvényes definíciókat megadni, amelyeket felhasználva végül felépíthetjük a klasszikus összhangzattan axiómarendszerét és bebizonyíthatjuk Vécsey Máté tételét. Az axiómák bevezetése nem egy önálló, új elsőrendű nyelven történik, hanem a halmazelméletén (a ZFC axiómarendszer elfogadásával), kiegészítve a hangok és a felhangrendszer mechanikájára vonatkozó kitételekkel és az ezekből származó hangközdefiníciókkal. Ezeket viszont nem fogjuk részletesen megadni, hiszen itt konvencionálisan egyértelmű definíciókkal dolgozhatunk. A kottaírás hangmagasságra és -hosszúságra vonatkozó jelöléseit is külön bevezetés nélkül fogjuk használni. Tetszőleges metrikus térben az x pont körüli r sugarú nyílt gömböt $B_r(x)$-szel, általános topologikus térben az A halmaz lezártját $\overline{A}$-val, továbbá bármifajta f függvény értelmezési tartományát $\mathcal{D}(f)$-fel, értékkészletét $\mathcal{R}(f)$-fel jelöljük.

Tehát csak vázlatosan ismertetjük a következő fogalmakat. *Hangnak* a rugalmas közegben terjedő longitudinális hullámot nevezzük; a hangot *emberi füllel hallható*nak mondjuk, ha frekvenciája 20 és 20 000 Hz közé esik. A dolgozatban végig olyan $f(X)$ frekvenciájú X hangokkal foglalkozunk, amelyek tartalmazzák $\forall k \in \mathbb{N}$-re a $k\ f(X)$ frekvenciájú felhangjaikat; tetszőleges k-ra a $k\ f(X)$ frekvenciájú felhangot az X k. felhangjának hívjuk. Az ilyen tulajdonságú hangokat *alaphangoknak* fogjuk nevezni. (A felhangok egymáshoz és az alaphanghoz viszonyított erősségének vizsgálatára nem lesz szükségünk.) Egy alaphang frekvenciája (hertzben, azaz 1/szekundumban mérve) tetszőleges pozitív valós szám lehet.

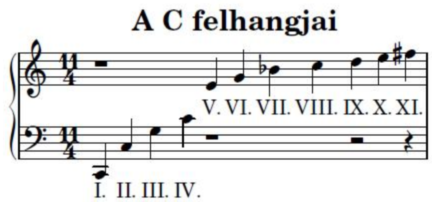
Egy hang és második felhangja hangközének neve *tiszta oktáv*, ez alapján mondjuk, hogy egy hang és 2^k. ($k \in \mathbb{N}$) felhangja k tiszta oktávra van egymástól (a második felhang egy oktávval magasabb az alaphangnál). A nulla oktávnyi hangköz (egy hang önmagától való hangköze) neve *tiszta prím*. Egy alaphang 2. és 3. felhangjának hangköze *tiszta kvint*[1], 3. és 4. felhangjának hangköze *tiszta kvart*, 4. és 5. felhangjának hangköze *nagy terc*, 5. és 6. felhangjának hangköze *kis terc*. Ha $f(X) \le f(Y) \le f(Z)$ és Z egy oktávval magasabb hang X-nél, akkor az Y és Z hangok hangközét és az X és Y hangok hangközét egymás *inverzének* hívjuk.

1.1. Állítás. *Az alaphangok hangközeinek körében az inverz tulajdonság szimmetrikus reláció. Egy hangköznek pontosan akkor létezik inverze, ha a hangköz nagysága oktávban mérve a* $[0, 1]$ *intervallumba esik. A tiszta kvint és a tiszta kvart valamint a tiszta prím és a tiszta oktáv egymás inverzei.*

Egy X alaphang 7. felhangját az X-nél egy tiszta kvinttel alacsonyabb Y alaphang *vezetőhangjának* nevezzük, az X 11. felhangját pedig az X-nél egy tiszta kvinttel magasabb Z alaphanghoz tartozó *szeptimhangnak*, másképpen a Z-nél egy nagy terccel magasabb W hang *felső váltóhang*jának.

A nagy C hang első 11 felhangját (jó közelítéssel) bemutatjuk – egyelőre csak szemléltetésül, hiszen még nem definiáltuk a kottában látható alaphangokat. Ha viszont ettől egy pillanatra eltekintünk, láthatjuk, hogy a C-dúr skálához képest éppen a G vezetőhangja az egyetlen felfelé módosított hang és az F-hez tartozó szeptimhang az egyetlen lefelé módosított hang a C első 11 felhangja között.

[1] Másképpen megfogalmazva: X és Y alaphangok ($f(Y) > f(X)$) hangköze tiszta kvint, ha $\exists Z$ alaphang, hogy X a Z első, Y a Z második felhangja. Hasonlóképpen értelmezendők a további hangközdefiníciók is. Ez alapján: általában X és Y alaphangok ($f(X) > f(Y)$) frekvenciaarányának 2-es alapú logaritmusa a két hang oktávban mért hangköze, hasonlóan X és Y frekvenciaarányának $\frac{3}{2}$ alapú logaritmusa a két hang kvintben mért hangköze, és így tovább.



Most definiáljuk még az X-dúr skálát. Ha X tetszőleges alaphang, akkor általában egy X alapú *hétfokú skála* egy olyan hételemű rendezett halmaz, amelynek X és további hat, hangmagasság (frekvencia) alapján X és annak első felhangja közé eső hangja közé eső hang az elemei, és a rendezést a hangmagasság adja ($Y > Z$, ha $f(Y) > f(Z)$). A rendezés alapján beszélhetünk a skála $I.$, $II.$, $\ldots$, $VII.$ fokú skálahangjáról (az I. fok a skála alapja), a k. fok a skála rendezés szerinti k. legalacsonyabb hangjától egész oktávra lévő alaphangok halmazát jelöli. A hétfokú, X-alapú skálát *tiszta X-dúr skálának* nevezzük, ha (a rendezés szerint) szomszédos hangok frekvenciaaránya rendre:

$$\frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15},$$

ahol az utolsó hangköz a VII. fokú hang és az I. fokú alaphangnál egy oktávval magasabb hang köze.

1.2. Kvintkör és oktávkör közötti egyenlőtlenség. A jóltemperált zongora konstrukciója

Legyen X tetszőleges alaphang úgy, hogy mind ő, mind a nála tizenkét kvinttel magasabb hang emberi füllel hallható. Ekkor az X-nél 7 oktávval magasabb X' alaphang frekvenciája $128f(X)$, az X-nél 12 kvinttel magasabb X'' alaphang frekvenciája pedig $\frac{531441}{4096}f(X)$. Az X' és X'' közötti hangmagasság-eltérés a tapasztalatok szerint az emberi fül számára szignifikáns, nem helyettesíthető a két hang egymással úgy, hogy a hallgatóság a különbséget ne érzékelje – így tapasztalták az 1600-as évek első felében Európában[2].

1.2. Állítás. *Tetszőleges, emberi füllel hallható tartományba eső tiszta X-dúr skála esetén jó közelítéssel (magas szinten szignifikanciahatáron belül) igazak a következők:*

(i) A III. fok a IV. foknak és a VII. fok az I. foknak vezetőhangja,

(ii) a IV. fok a III. foknak és az I. fok a VII. foknak felső váltóhangja,

(iii) a IV. és I. fok illetve az I. és V. fok hangköze tiszta kvint,

(iiii) a IV. fok az I. fokhoz, az I. fok pedig az V. fokhoz tartozó szeptimhang.

Így szignifikanciahatáron belül igaz, hogy az X hang 7. felhangja nincs a tiszta X-dúr skálában, de szerepel az X-nél egy tiszta kvinttel alacsonyabb Y alaphanggal rendelkező tiszta dúr skálában, és definíció szerint Y szeptimhangja, ami később részletezendő módon az Y alaphanghoz való vonzódást jelent. Az X 11. felhangja pedig szintén nincs a tiszta X-dúr skálában, de jó közelítéssel tagja a tiszta Z-dúr skálának, ahol Z egy tiszta kvinttel magasabb X-nél; ez a 11. felhang definíció szerint vezetőhangja Z-nek, ami később kifejtendő módon Z-hez való vonzódást jelent. Így ha tizenkét kvintlépéssel (végig ugyanabba az irányba) ugyanoda jutnánk, mint hét oktávlépéssel, akkor a kvintlépések során érintett alaphangokra épülő tiszta dúr skálák között kapcsolatot tudnánk teremteni a szeptim- és vezetőhangok segítségével, sőt 12 kvintlépéssel körbe is tudnánk mozogni. Ehhez azonban a 12 kvint és a 7 oktáv távolság közti különbséget legalábbis lokálisan, egy-két oktávnál nem nagyobb hangközök esetén el kell tudnunk tüntetni.

[2] Azt, hogy miért éppen 7 oktávot osztunk fel és miért éppen 12 egyenlő részre, lásd például: [Benson 2008, 5. fejezet – *Scales and temperement: the fivefold way*].

Vegyünk két hangot az emberi füllel hallható tartományba eső tartományon belül, amelyeknek távolsága hét oktáv, és ezt osszuk fel tizenkét egyenlő kvintnyi [azaz kettes alapú logaritmikus skála szerint egyenlő frekvenciájú] hangközre. A tapasztalatok szerint ezek a hangközök már helyettesíthetik a tiszta kvintet, lokálisan nem tűnnek attól különböző hangköznek. Így ha tizenkét ilyen kvázi kvintlépéssel jutunk el X-től X'-ig, akkor azt a barokk illúziót kelthetjük, hogy tizenkét tiszta kvintlépéssel X''-ig jutottunk. Így tetszőleges X alaphangról kiindulva létrehozhatjuk a kvintkört. Ha a tizenkét kvázi kvint összeadásával kapott hangközt hét egyenlő oktávnyi hangközre osztjuk tovább, akkor csak a kvintkörünk 12 hangjától egész oktávra lévő hangokat kapunk. Így ha rögzítjük, hogy a *normál A* szerepeljen a struktúránkban, megkapjuk a jóltemperált zongorát:

1.1. Definíció. *Alaphangok egy K halmaza jóltemperált zongora, ha*

(i) $A \in K$, *ahol* A *a 440 Hz frekvenciájú normál A hang,*

(ii) K *legalább 7 oktáv hangterjedelmű, azaz* $\exists V, W \in K:\ f(V) \geq 2^7 f(W)$,

(iii) $\forall X$ *alaphangra* $X \in K \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}:\ f(X) = f(A) \times (\sqrt[12]{2})^k$,

(iiii) ha $V, W \in K$, Z *alaphang,* $f(V) < f(Z) < f(W)$ *és* $\exists k \in \mathbb{Z}:\ f(Z) = f(A) \times (\sqrt[12]{2})^k$, *akkor* $Z \in K$.

Kevésbé precíz megfogalmazással: a jóltemperált zongora olyan, a normál A-t tartalmazó, alaphangokból álló, legalább 7 oktáv hangterjedelmű halmaz, ahol a szomszédos hangok frekvenciaaránya $\sqrt[12]{2}$. A jóltemperált zongorának legalább 85 eleme van definíció szerint, de nem zártuk ki, hogy – akár mindkét irányban – végtelen struktúra legyen. A mindkét irányba végtelen jóltemperált zongora megfelel egy a generálóelemű végtelen ciklikus csoportnak, ha a-t a normál A-nak és az a-val való szorzást $\sqrt[12]{2}$-szeresre való frekvencianövekedésként értelmezzük.

A jóltemperált zongora szomszédos hangjainak hangközét *félhangnak* nevezzük, így egy zongorahang és k. ($k \in \mathbb{N}$) szomszédja a jóltemperált zongorán k félhangra van egymástól. A két félhang távolságot kézenfekvő módon egészhangnak is mondjuk.

1.3. Az enharmonikussági reláció bevezetése

Az imént sok szó esett arról a kérdésről, hogy két alaphang hangmagasság alapján különbözik-e egymástól szignifikánsan vagy sem. A kérdést a hallgatóközönség körében végzett reprezentatív mérésekkel lehet eldönteni, és nyilvánvaló, hogy egy X alaphanggal bizonyos típusú zeneművekben kölcsönösen helyettesíthető hangok frekvenciái nem alkotnak egy jól meghatározott intervallumot, a szignifikanciahatár maga is erősen függ a mérésektől, hipotézisvizsgálati eszközöket kell használni. Nekünk itt nincs is szükség a szignifikanciahatár meghatározására, csupán arra, hogy bizonyos, azon nagy biztonsággal belül és ahhoz nem is közel eső hangokat helyettesíthessünk egymással vagy a jóltemperált zongora bizonyos hangjaival – éppen a kvintkör működésének biztosítása céljából. Ha egy adott zeneelméleti szituációban két emberi füllel hallható hang – vagy n darab együtt szóló hang, azaz egy n-eshangzat – helyettesíthető egymással, akkor azokat *enharmonikusaknak* mondjuk[3]. Ha X és Y enharmonikusak (jelölés: $X \sim Y$), akkor az X-től egész oktávra eső hangok halmazát is enharmonikusnak mondjuk az Y-tól egész oktávra eső hangok halmazával. Ebből viszont következik, hogy az enharmonikusság hangköz-eltolásinvariáns tulajdonság, vagyis X és Y pontosan akkor enharmonikus, ha bármely X' és Y' is enharmonikus, ahol oktávban mérve X és Y hangköze megegyezik X'-ével és Y'-ével. Ekkor X' és Y' hangközét is enharmonikusnak mondjuk X és Y hangközével. Johann Sebastian Bach *Das wohltemperierte Klavier* című művének megalkotásával – pontosabban azzal, hogy a közönség elfogadta a műben szereplő hanghelyettesítéseket – igazolta a következő tételt. A tételt sokkal általánosabban fogjuk kimondani hangnemekre, egyelőre még csak tiszta dúr skálákra tudjuk:

[3] Ez a tizenkétfokú egyenletes temperálásra vonatkozó enharmonikusság definíciója. Ha az egyenletesen temperált skála legfeljebb 5 ($\frac{12}{2} - 1$) hangot tartalmaz, olyan hangok is „enharmonikussá válnak”, azaz ugyanazon skálahanghoz lesznek a legközelebb, amelyek a jóltemperált zongora különböző hangjaihoz vannak közel. Ha pedig legalább 25 ($12 \times 2 + 1$) hangot tartalmaz az egyenletes hangközű skála, akkor bizonyos, a jóltemperált zongora szempontjából enharmonikus hangok már különböző skálahangokhoz lesznek a legközelebb ebben a skálában.

1.1. Tétel (Bach-tétel dúr skálára). *A jóltemperált zongora tetszőleges V hangjára épített hétfokú skála, amelynek elemei: V és a nála 2, 4, 5, 7, 9, 11 félhanggal magasabb zongorahangok, enharmonikus a tiszta V-dúr skálával.*

Viszont nem minden alaphang enharmonikus zongorahanggal, például két szomszédos zongorahang között, mindkettőtől ugyanannyi oktávra lévő hang egyik szomszédjával sem enharmonikus (más zongorahanggal pedig nyilvánvalóan nem az). Ha ezután szeretnénk meghatározni egy *enharmonikussági tartományt*, vagyis frekvenciaintervallumok egy olyan E diszjunkt unióját, amelybe beleesnek a mindkét irányban végtelen jóltemperált zongora összes hangjára épülő tiszta dúr skála hangjai, és minden E-beli hang kis elsőfajú hibavalószínűség mellett valóban enharmonikus a hozzá legközelebbi zongorahanggal (elsőfajú hibán itt azt értjük, amikor egy adott zongorahanggal enharmonikusnak ítélünk meg egy olyan hangot, amely valójában a hallgatóság jelentős része számára nem enharmonikus a zongorahanggal), akkor tegyük a következőt. Tekintsük a zongora emberi füllel hallható tartományát. Ezen belül megfelelő módszertannal, kis elsőfajú hibavalószínűséggel határozzunk meg egy olyan r oktávban mért hangközt, amely nagyobb, mint a legnagyobb eltérés a zongorahangok által meghatározott tiszta dúr skálák megfelelő hangjai és a velük a Bach-tétel szerint enharmonikus zongorahangok között, de még az enharmonikusság elfogadási tartományán belül esik, és mérjünk fel minden zongorahang körül egy ilyen hangközt mindkét irányba úgy, hogy a végpontokat ne vegyük be az E-be. Így a logaritmikus frekvenciaskálán egyenlő sugarú nyílt gömbök diszjunkt unióját kapjuk egyenlő távolságra lévő szomszédos középpontokkal. A Bach-zongoraművek elfogadottsága, gyakorlatban való működése igazolja, hogy az eljárást sikeresen el lehet végezni. A következőkben így az E-t a fenti eljárás alapján elkészítettnek és rögzítettnek tekintjük. Egyszerűen látható, hogy az enharmonikussági tartományunkon az enharmonikusság ekvivalenciareláció.

1.4. Enharmonikussági viszonyok a zongora dúr skáláinak hangjai között

A jóltemperált zongorán a normál A-tól 0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12 félhangra lévő hangok, azaz a „fehér billentyűk" neve rendre: A, H, C, D, E, F, G. Ezek C alaphanggal egy dúr skálát határoznak meg, amely a Bach-tétel szerint a tiszta C-dúr skálával enharmonikus. Amit az előző fejezetben láttunk, most enharmonikussággal tudjuk megfogalmazni:

1.3. Állítás (Modulációs lemma). *Minden zongorahangnak a felső szomszédja enharmonikus a felső váltóhangjával, alsó szomszédja pedig enharmonikus a vezetőhangjával.*

A bizonyítás az enharmonikussági tartomány konstrukciójából következik.

A következőkben a tiszta dúr skálákat a velük enharmonikus, a jóltemperált zongora hangjaiból álló dúr skálákkal fogjuk helyettesíteni. Amikor dúr skáláról lesz szó, mindig ilyen skálákra gondolunk, és ha külön nem jelezzük ennek ellenkezőjét, akkor bármely szóba kerülő hétfokú skáláról feltesszük, hogy annak minden hangja az E enharmonikussági tartomány eleme, vagyis bármely két szomszédos hangja közti lépés egész számú félhanggal enharmonikus. A Bach-tétel szerint a zongorahanggal enharmonikus hangra épülő tiszta dúr skála ilyen tulajdonságú skála, így ezen skála k. fokának vezetőhangját elnevezhetjük a $k-1$. fokról, illetve az I. fokot a VII. fokról, az "-isz" képzővel (azaz a $\sharp$ operátorral), ha az adott vezetőhang nem skálahang, a felső váltóhangot pedig a $k+1$. fokról, illetve a VII. fokot az I. fokról, az "-(e)sz" képzővel (azaz a $\flat$ operátorral), ha nem skálahang az adott vezető- vagy szeptimhang[4]. Ez alapján definiálhatók a C-dúr skála fokai vezető- és szeptimhangjaiként a jóltemperált zongora „fekete billentyűi": a Cisz ($C\sharp$), Disz, Fisz, Gisz, Áisz avagy Desz ($D\flat$), Esz, Gesz, Asz, B[5] Az -esz és -isz utótagokkal az eddigiek szerint megnevezett, vezető- és szeptimhangként szolgáló, jól definiált fokszámú hangokat a dúr skála *n-szeresen módosított hangjainak* nevezzük, attól függően, hogy hány ilyen egyforma utótagot használunk a hang elnevezéséhez, azaz hányszor hozunk létre valamilyen dúr skálában módosított vezető- vagy szeptimhangot[6]. Így például a C-dúr skálában

[4] Láthatjuk, hogy a fokszámozás tulajdonképpen a $\mathbb{Z}_{7}$ prímtest elemeivel történik, csak a 0-t I. foknak, az 1-et II. foknak, és így tovább, a 6-ot VII. foknak nevezzük.

[5] Angolszász jelöléssel a B-t $B\flat$-nek nevezik és a H-t hívják B-nek, így a fehér billentyűk sorozata az A-tól kezdve a latin ábécé első hét betűje.

[6] Általában módosított hangon, anélkül, hogy megmondanánk, hányszorosan módosított, egyszeresen módosított hangot fogunk érteni.

a Fiszisz (jelölés: $C\times$) kétszeresen, az Eszesz (jelölés: $E\flat\flat$) is kétszeresen, a Desz egyszeresen, de ugyanígy a fehér F billentyűvel enharmonikus Eisz is csak egyszeresen módosított hang. A kvintkör tulajdonságaiból könnyen igazolható, hogy tetszőleges K jóltemperált zongorán $\flat\sharp = \sharp\flat = id_K$. Általában minden olyan hétfokú skálánál, amely az előbb leírt tulajdonságokkal rendelkezik, képezhetjük ehhez hasonló módon a módosított vezető- és szeptimhangokat és határozhatjuk meg ezek nevét, fokszámát.

1.2. Definíció. *Legyen V és W a K jóltemperált zongora két hangja. Ezek zongorán mért távolsága, $d_2(V,W)$: a két hang hangköze félhangban mérve.*

1. Példa. *Ha C az egyvonalas C, A pedig a normál (egyvonalas) A, akkor $d_2(C,A) = d_2(A,C) = 9$.*

1.4. Állítás. *A d_2 távolság tetszőleges K jóltemperált zongorán metrika, amely a diszkrét topológiát generálja.*

1.1. Állítás bizonyítása. *A metrikatulajdonságok bizonyítása triviális. Tetszőleges V zongorahangra és $0 < \lambda < 1$ valós számra $B_\lambda(V) = V$, így a jóltemperált zongora minden egypontú halmaza nyílt a metrika által generált topológiában, ezért a jóltemperált zongora diszkrét tér.*

1.1. Megjegyzés. *A d_2 zongorán mért távolság a K mindkét irányban végtelen jóltemperált zongoráról pszeudometrikaként kiterjeszthető az E enharmonikussági tartományra. Könnyen látható, hogy*

$$\forall X, Y \in E \quad d_2(X,Y) = 0 \;\Leftrightarrow\; X \sim Y.$$

A pszeudometrika szerint minden E-beli hang legszűkebb nyílt környezete az E őt tartalmazó, (az $\mathbb{R}$ szokásos topológiája szerint) összefüggő komponense. Az (E, d_2) teret az enharmonikussági relációval lefaktorizálva éppen a (K, d_2) jóltemperált zongorát kapjuk.

1.2. Megjegyzés. *A d_2 metrika által generált topológia egyben a zongora hangjainak hangmagasság szerinti rendezéséből származó rendezéstopológia is.*

1.5. Hangközök elnevezése a jóltemperált zongorán

Ha egy hétfokú skálában két skála- vagy valahányszorosan módosított, egymástól legfeljebb 14 félhang távolságra lévő hang között az alacsonyabbnál a magasabb $\pmod 7$ k fokkal van feljebb, akkor a köztük lévő hangköz neve:

1. ha $k = 0$ és a két hang 2 félhangnál közelebb van egymáshoz: prím. Ha a hangköz 0 félhanggal enharmonikus: tiszta prím (T1), ha 1-gyel: bővített prím (B1),
2. ha $k = 1$: szekund. Ha a hangköz 1 félhanggal enharmonikus: kis szekund (K2), ha 2-vel: nagy szekund (N2), ha 3-mal: bővített szekund (B2),
3. ha $k = 2$: terc. Ha a hangköz 2 félhanggal enharmonikus: szűkített terc (SZ3), ha 3-mal: kis terc (K3), ha 4-gyel: nagy terc (N3),
4. ha $k = 3$: kvart. Ha a hangköz 4 félhanggal enharmonikus: szűkített kvart (SZ4), ha 5-tel: tiszta kvart (T4), ha 6-tal: bővített kvart (B4),
5. ha $k = 4$: kvint. Ha a hangköz 6 félhanggal enharmonikus: szűkített kvint (SZ5), ha 7-tel: tiszta kvint (T5), ha 8-cal: bővített kvint (B5),
6. ha $k = 5$: szext. Ha a hangköz 8 félhanggal enharmonikus: kis szext (K6), ha 9-cel: nagy szext (N6), ha 10-zel: bővített szext (B6),
7. ha $k = 6$: szeptim. Ha a hangköz 9 félhanggal enharmonikus: szűkített szeptim (SZ7), ha 10-zel: kis szeptim (K7), ha 11-gyel: nagy szeptim (N7),

8. ha $k = 0$ és a két hang 2 félhangnál messzebb van egymástól: oktáv. Ha a hangköz 11 félhanggal enharmonikus: szűkített oktáv (SZ8), ha 12-vel: tiszta oktáv (T8), ha 13-mal: bővített oktáv (B8).

Ha $k = 1$ és a hangköz 1 és 2 oktáv közé esik, akkor a hangköz neve nóna. Amilyen típusú szekundot kapunk a nónából egy tiszta oktávot levonva, úgy nevezzük a nónát is ($\rightarrow$ kis nóna (K9), nagy nóna (N9), bővített nóna (B9)). Hasonlóan ha $k = 2$ és a hangköz 1 és 2 oktáv közé esik, akkor a hangköz neve decima, a decimából egy oktávot levonva tercet kapunk, ennek típusa a decima típusa (szűkített (SZ10), kis (K10) és nagy decima (N10)). A latin sorszámnevek sorozatát (undecima, duodecima ...) folytatva teljes indukcióval minden zongorahangközt el tudunk nevezni. A hangköz típusát mindig úgy kapjuk, hogy levonjuk a hangközből a lehető legtöbb tiszta oktávot, amelyet tartalmaz, és a megmaradó 0–11 félhangnyi hangköz típusa (a fokszámkülönbség alapján, tiszta, kis, nagy, szűkített vagy bővített) lesz a vizsgált nagyobb hangköz típusa.

1.5. Állítás. *Az 1.1 fejezetben definiált hangközelnevezések (tiszta prím, oktáv, kvint és kvart, kis és nagy terc) enharmonikusság erejéig megfelelnek az itt megadott hangközelnevezéseknek.*

1.3. Megjegyzés. *A 6 félhangnyi, azaz fél oktávnyi hangközt, akár bővített kvart, akár szűkített kvint, tritonusznak (vö. 3 egész hang) nevezzük.*

Különösen akkor használjuk a tritonusz kifejezést, ha kontextuson, hétfokú skálán kívül kerül szóba a 6 félhangnyi hangköz.

1.6. Konszonancia és disszonancia

Itt a bécsi klasszika és az ahhoz kapcsolódó összhangzattan szemlélete szerinti konszonanciát és disszonanciát tárgyaljuk. Például a két évszázaddal korábban alkotó Palestrinánál még disszonáns hangköznek számított a kvart, még korábban pedig további olyan hangközök is, amelyeket itt konszonánsnak fogunk tekinteni.

1.3. Definíció. *X és Y alaphangok oktáv-ekvivalensek (jelölés: $X \doteq Y$), ha egész számú tiszta oktáv a hangközük (vagyis az egyik a másiknak kettőhatványadik felhangja). Ha V, W alaphangok és V' oktáv-ekvivalens V-vel, W' pedig W-vel, akkor a V és W hangok hangköze oktáv-ekvivalens a V' és W' hangközével.*

1.4. Definíció (Konszonancia és oktáv-ekvivalencia kapcsolata). *A zongorahangok konszonanciáját definiáló tulajdonságok:*

(i) Ha a jóltemperált zongora két hangjának hangközéhez $\exists n, m \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, hogy ez a hangköz egy alaphang n. és m. felhangjának hangközével enharmonikus, akkor a hangköz konszonáns,

(ii) ha V, W a jóltemperált zongora két hangja és $\exists V' \doteq V$, $\exists W' \doteq W$, hogy V' és W' hangköze az (i) pont szerint konszonáns, akkor V és W hangköze is konszonáns,

(iii) ha egy hangköz konszonáns, akkor az inverze és az inverzével oktáv-ekvivalens hangközök is konszonánsak,

(iiii) minden más hangköz a jóltemperált zongorán disszonáns (azaz nem konszonáns).

Ezzel még csak azt határoztuk meg, hogy ha hallunk (vagy a hallható tartományon kívül más módon megismerünk) két zongorahangot, zenei kontextuson, hangnemen kívül, akkor azokat konszonánsnak vagy disszonánsnak tekintjük-e. Kontextusban ennél többet követelünk meg a konszonanciához. Ugyanis a szűkített és bővített akkordoknál (gyakran módosított) vezető- és szeptimhangok jelennek meg, és később látni fogjuk, hogy előbbiek egy szekunddal felfelé, utóbbiak egy szekunddal lefelé vonzódnak, és ezzel feszültséget, disszonáns érzetet kelthetnek olyan esetekben is, amikor maga a hangköz egyébként konszonáns a zongorán (pl. a bővített szekundnál). Talán a legegyszerűbb így megadni a plusz feltételt:

1.5. Definíció. *Egy olyan hétfokú skálának, amelynek minden hangja E-beli, X és Y skála- vagy valahányszorosan módosított hangjának hangköze pontosan akkor konszonáns, ha a hangközzel enharmonikus zongorahangköz az 1.4 definíció szerint konszonáns és a hangköz neve kis, nagy vagy tiszta*[7].

1.6. Állítás. *A jóltemperált zongora hangjai között konszonánsak a 0, 3, 4, 5, 7, 8, 9 félhangnyi és ennél egész oktávval nagyobb hangközök, a többi hangköz disszonáns.*
Rögzített E-beli skála esetén konszonáns hangközök: a tiszta prím, a kis és nagy terc, a tiszta kvart, a tiszta kvint, a kis és nagy szext, a tiszta oktáv és mindezeknél egész oktávval nagyobb hangközök, minden más hangköz disszonáns.

2. Hármashangzatok és négyeshangzatok

Legyen (K, d_2) tetszőleges jóltemperált zongora, és tekintsük ennek önmagával vett n. topologikus direktszorzatát, K^n-et, ahol $n > 1$ egész szám! Ekkor K^n is diszkrét, szeparábilis metrikus tér a szorzattopológiával, amelynek így Borel-σ-algebrája is $\mathcal{P}(K)$-val egyezik meg. A K^n elemeit *akkordoknak*, speciálisan konkrét n-re *n-eshangzatoknak* nevezzük. Az akkordok a későbbiekben – ahogy a zeneelméletben általában – mint zeneművek egyszerre szóló hangjainak halmazai fognak szerepelni. Két n-eshangzat oktáv-ekvivalens, ha hangjaik között létezik olyan bijekció, amely minden hanghoz vele oktáv-ekvivalenst rendel. Az n-szólamú zeneművet a lehető legáltalánosabban definiáljuk:

2.1. Definíció. *n-szólamú zeneműnek nevezünk minden $M : \mathbb{R}_0^+ \to K^n$ Borel-mérhető függvényt. Ha $t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, akkor $M(t)$-t az M t pontbeli akkordjának nevezzük.*

2.2. Definíció (Szólam). *Ha $pr_i : K^n \to K$ az i. projekció a K^n topologikus direktszorzatból a K jóltemperált zongora i. példányába, M pedig n-szólamú zenemű ($n \in \mathbb{N}$), akkor $pr_i \circ M$ az M i. szólama. Gyakran az első szólamot basszusnak, az utolsót szopránnak nevezzük. Négyszólamú esetben (ha ennek az ellenkezőjét külön nem jelezzük) az első szólam a basszus, a második a tenor, a harmadik az alt és a negyedik a szoprán.*

A szólamok hangmagasság szerint lentről fölfelé való számozása azt a hagyományt követi, hogy az akkordokat mindig lentről fölfelé olvassuk ki.

Két n-eshangzat *fordítás erejéig azonos*, ha mindkettőnek bármely szólamában olyan hang szerepel, amely (oktáv-ekvivalencia erejéig) szerepel a másiknak is valamely szólamában. Két n-eshangzat *azonos* vagy *egymás (különböző) helyzetei* (ugyanazt a nevet viselik), ha fordítás erejéig azonosak és a basszusszólamukban (oktáv-ekvivalencia erejéig) ugyanaz a hang szerepel. Két n-eshangzat *egyenlő*, ha minden szólamukban ugyanaz a hang szerepel – itt az oktáv-ekvivalenciát sem engedjük meg. Két n-eshangzat *fordítása egymásnak*, ha fordítás erejéig azonosak, de basszusaik különböznek. Ezen definíciókhoz hasonlóan definiálhatók az „enharmonikusság és fordítás erejéig azonos”, „enharmonikusság erejéig azonos”, „enharmonikus(ság erejéig egyenlő)” és „enharmonikusság erejéig fordításai egymásnak” fogalmak, csak ekkor a szólamok megegyezése helyére szólamok enharmonikusságát kell behelyettesíteni.

2.3. Definíció. *n-eshangzatnéven azonos n-eshangzatok halmazát értjük (amely egy speciális, az adott zenei kontextusban értelmes megnevezéssel rendelkezik). Egy adott n-eshangzatnév alá tartozó H n-eshangzat nevét $\mathfrak{N}(H)$-val jelöljük.*

A klasszikus összhangzattan axiómarendszerének legegyszerűbb modelljét, a *négyszólamú összhangzattanpéldák* struktúráját szeretnénk itt kidolgozni. Ezek speciális négyszólamú zeneművek, amelyeknek tulajdonságait a 3. fejezetben fogjuk tárgyalni. A négyszólamú összhangzattanpéldák értelmezési tartományának minden pontjában *a klasszikus összhangzattannak megfelelő hármas- vagy négyeshangzat szól.* Most meghatározzuk, melyek a klasszikus összhangzattannak megfelelő hármas- vagy négyeshangzatok.

[7]Tehát a skálától idegen E-beli hangok, amelyeket nem tudunk fokszámhoz kötni, az adott skálához – és a hangnemet adó skálák esetén a későbbiekben: az adott hangnemhez – képest disszonáns hangközben vannak mind a skála- és módosított hangokhoz, mind egymáshoz képest. Az ilyen hangokat, mivel nincs fokszámuk, le sem lehet kottázni, így ezek nagyon ritkán szerepelnek a zeneszerzési gyakorlatban, a klasszikus összhangzattan vizsgálata szempontjából el is tekinthetünk tőlük.

2.4. Definíció. *Legyen M négyszólamú zenemű! $H \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$ klasszikus formájú hármashangzat, ha létezik olyan (E-beli) hétfokú skála és olyan $k \in \{1, 2, \dots 7\}$ egész, amelyre $\pmod 7$ H a skála k., $k+2$. és $k+4$. fokú hangját is tartalmazza, ezek közül pontosan egyet két szólamban. A k. fokú hang a hármashangzat alapja, a $k+2$. fokú a terce, a $k+4$. fokú pedig a kvintje. A H hármashangzat típusa:*

- *(i) alaphelyzetű hármashangzat, ha a k. fokú hangot tartalmazza a basszusban. Ezen belül ha a szopránban*
  - *A. $k+4$. fokú hang szerepel, akkor kvinthelyzetű,*
  - *B. $k+2$. fokú hang szerepel, akkor terchelyzetű,*
  - *C. k. fokú hang szerepel, akkor oktávhelyzetű;*
- *(ii) szextakkord (egy hármashangzat szextfordítása), ha a $k+2$. fokú hangot tartalmazza a basszusban;*
- *(iii) kvartszextakkord (egy hármashangzat kvartszextfordítása), ha a $k+4$. fokú hangot tartalmazza a basszusban.*

2.5. Definíció. *Az előző definíció jelöléseivel H:*

- *(i) dúr hármashangzat, ha a k. és $k+2$. fokú hang nagy tercre, a $k+2$. és $k+4$. fokú hang kis tercre van egymástól,*
- *(ii) moll hármashangzat, ha a k. és $k+2$. fokú hang kis tercre, a $k+2$. és $k+4$. fokú hang nagy tercre van egymástól,*
- *(iii) szűk hármashangzat, ha a k. és $k+2$. fokú hang és a $k+2$. és $k+4$. fokú hang is kis tercre van egymástól,*
- *(iiii) bő hármashangzat, ha a k. és $k+2$. fokú hang és a $k+2$. és $k+4$. fokú hang is nagy tercre van egymástól.*

Akkor is érvényesek ezek az elnevezések, ha a definiáló tulajdonságú tercek helyett azokkal oktáv-ekvivalens hangközök szerepelnek.

A következő definíció már a klasszikus összhangzattan axiómáinak, ún. *szerkesztési elveinek* előkészítését szolgálja. Ismét a 2.4 definíció jelöléseivel:

2.6. Definíció. *Egy hármashangzatnév megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha az dúr, moll, szűk vagy bő hármashangzatokat tartalmaz egy rögzített hétfokú skála (később: hangnem) mellett. Egy konkrét H négyszólamú szerkesztésbeli hármashangzat megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha*

- *(i) a $\mathfrak{N}(H)$ megfelel a klasszikus összhangzattannak,*
- *(ii) H egy olyan M négyszólamú zenemű értékkészletében szerepel, amely M minden szólamához van társítva egy hangmagasság-tartomány[8], ezenkívül az is, hogy a szólamok egymáshoz képest milyen távolságra lehetnek, és H szólamai ezeknek a szabályoknak megfelelően helyezkednek el,*
- *(iii) ha H alaphelyzetű hármashangzat, akkor a k. fokú hangot tartalmazza két szólamban,*
- *(iv) ha H kvartszextfordítás, akkor a $k+4$. fokú hangot tartalmazza két szólamban,*
- *(v) H legfeljebb egy szólamban tartalmaz minden olyan hangot, amely a skálához képest módosított hang, vagy amely a skála első fokához tartozó vezető- vagy szeptimhang,*
- *(vi) ha H alaphelyzetű szűkhármas, akkor a $k+2$. fokú hang nem a tenorban vagy a $k+4$. fokú hang nem az altban szerepel,*
- *(vii) a hármashangzat lekottázható, vagyis az adott hétfokú skálához képest létezik egy olyan megszámlálható jelkészlet, amelynek valamelyik elemével a hármashangzat minden hangja azonosítható az adott fokszámhoz rendelt hangok között[9]*

[8]Például egy énekszólam vagy hangszer hangmagasság-tartománya. De a tartomány nem feltétlenül korlátos frekvenciaintervallum: lehet akár a mindkét irányban végtelen jóltemperált zongora frekvenciatartománya, $\mathbb{R}^+$ is.

[9]Ilyen például a ♭-k és ♯-ek rendszere – más jelölésrendszert ebben a dolgozatban nem is fogunk használni.

(viii) ***az utolsó pontot a tonalitás definíciója után adjuk meg****. Lásd: a 6.3 definíció. Ez addig nem fog inkonzisztenciát okozni.*

A fordítások elnevezése a *jellegzetes hangközök*, a basszushang és a többi (vele nem oktáv-ekvivalens) hang hangközei alapján született. A helyzetek neve pedig a basszus és a szoprán közötti hangköz alapján.

2.1. Jelölés (Fordítások és helyzetek jelölése.). *Általában minden akkordjelölésnél a basszusra vonatkozó jellegzetes számokat a fokszám alá, a többi jellegzetes számot a fokszám mellé, sorban egymás fölé írjuk. Például első fokú, módosított hang nélküli akkordnál tetszőleges hétfokú skálában:*
I – *első fokú alaphelyzetű hármashangzat. Ezen belül (általában csak a zeneművek első akkordjánál írjuk ki:)* I^8 – *oktávhelyzet,* I^5 – *kvinthelyzet,* I^3 – *tercelyzet.* I^6 – *első fokú szextakkord,* I^6_4 – *első fokú kvartszextakkord.*
Rövidebb megnevezésként az n. fokú alaphelyzetű akkordot n. foknak, sőt még egyszerűbben n-nek mondjuk. Így: második fok, kettő. A fordításokat pedig szintén csak tőszámnévvel: n-szext, n-kvartszext; így: kettő-szext, kettő-kvartszext.

A hármashangzatfajták részletes bevezetése után a négyszólamú szerkesztésbeli négyeshangzatok ismertetésénél már könnyebb dolgunk lesz. Maradjunk a 2.4 definíció jelöléseinél és készítsük el a $\pmod 7$ $k.$, $k{+}2.$, $k{+}4$ és $k+6.$ fokú hangokból álló négyeshangzatot! Ekkor a $k.$ fok és a $k+6.$ fok között szeptim hangköz jön létre, ezért az ilyen négyeshangzatot (konkrétan magát a négyeshangzatot és a hozzá tartozó négyeshangzatnevet is) *szeptimakkord*nak nevezzük. Az alap, terc, kvint megnevezések a hármashangzatokhoz képest változatlanok, a $k+6.$ fokú hang a szeptimakkord *szeptimhangja*; látni fogjuk, hogy ez gyakran az eddig használt értelemben is szeptimhang, amely a $k+3.$ fokhoz tartozik. A $k.$, $k+2.$, $k+4.$ fokokhoz tartozó hármashangzatnév a szeptimakkord *alsó parciális hármashangzata* és a $k+2.$, $k+4.$, $k+6.$ fokokhoz tartozó hármashangzatnév a szeptimakkord *felső parciális hármashangzata*. Alaphelyzetű szeptimakkordról beszélünk, ha a $k.$ fok van a basszusban, egyébként pedig szeptimfordításról.

A szeptim hangköz és inverze, a szekund a korábbiak szerint disszonáns, feszültséget keltő hangközök. A tercekkel építkező alaphelyzetű szeptimakkordnál érezhető a legkevésbé a disszonancia, a fordításoknál jobban, hiszen ha a zenemű nem túlzottan tág fekvésben van, vagyis nincsenek egymástól nagyon messze (több oktávra) a szomszédos szólamok, akkor a szeptimfordításoknál nem a szeptim hangköz jelentkezik az alap és a szeptim között, hanem e két hang között *szekundsúrlódás*, szekund távolság van. Attól függően, hogy a basszushoz képest milyen hangközökre szerepelnek a szekundsúrlódásban lévő szólamok (oktáv-ekvivalencia erejéig), nevezzük a szeptimfordítást kvintszextnek (a terc van a basszusban), terckvartnak (a kvint van a basszusban) vagy szekundnak (a szeptim van a basszusban). Jelölés az előbbi példáknál leírtak szerint, pl. ötödik fokú szeptimnél: V^7 – alaphelyzetű öt-szeptim, V^6_5 – öt-kvintszext, V^4_3 – öt-terckvart, V^2 – öt-szekund.

2.7. Definíció. *Egy négyeshangzatnév megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha (megint csak a 2.4 definíció jelölésével):*

(i) *egy szeptimakkord neve,*

(ii) *mindkét parciális hármashangzatneve megfelel a klasszikus összhangzattannak,*

(iii) *a $k.$ és a $k+6.$ akkordok között tiszta oktávnál (12 félhangnál) kisebb hangköz van.*

Ha egy N négyeshangzat neve, $\mathfrak{N}(N)$ megfelel a klasszikus összhangzattannak és N egy olyan M négyszólamú zenemű értékkészletében szerepel, amely M minden szólamához társítva van egy hangmagasság-tartomány, és az, hogy a szólamok egymáshoz képest milyen távolságra lehetnek, továbbá N szólamai ezeknek a szabályoknak megfelelően helyezkednek el, akkor N megfelel a klasszikus összhangzattannak.

Az *(iii)* ponttal kizártuk a *bő hármashangzatot* mint pszeudo-szeptimakkordot: ez a *(ii)* pontot teljesíti, mert előáll két egymással enharmonikus bő hármashangzatból mint parciális hármashangzatokból, de szeptimhangja enharmonikus az alapjával, vagyis természetesen nem négyeshangzat. Az összes többi lehetséges párosítás alsó és felső parciális hármasra olyan szeptimakkordot ad, amilyennel dúr vagy moll hangnemben találkozni fogunk. Mivel a dúr hangnemnek egyelőre még csak a skáláját és annak enharmonikussági tulajdonságait ismerjük, a moll hangnemnek pedig még a skálájáról sem esett szó, csupán szemléltetéssel mutatjuk be, hogy a dúr és moll hangnemek *skálahangjaiból* felépülő szeptimakkordok közül melyik milyen típusú.

Terc	Kvint	Szeptim	Parciálisak	Hivatalos név	Triviális név	Példák dúrban	Példák mollban
N3	B5	N7	bő, dúr	bő hármas, nagy szeptim	nincs	nincsenek	$\mathrm{III}^7_{5\sharp}$
N3	T5	N7	dúr, moll	dúr hármas, nagy szeptim	major szeptim	$\mathrm{I}^7, \mathrm{IV}^7$	VI^7
N3	T5	k7	dúr, szűk	domináns szeptim	dúrszeptim	V^7	$\mathrm{V}^7_{\sharp}$
k3	T5	N7	moll, bő	összhangzatos mollszeptim	nincs	nincsenek	$\mathrm{I}^{7\sharp}$
k3	T5	k7	moll, moll	természetes mollszeptim	mollszeptim	VI^7	IV^7
k3	sz5	k7	szűk, moll	$<$ *nincs* $>$	félszűk(ített) szeptim	VII^7	II^7
k3	sz5	sz7	szűk, szűk	szűkített szeptim	szűkszeptim	nincsenek	$\mathrm{VII}^7_{\sharp}$

Kiegészítés: az alaphelyzetű domináns szeptimakkordot elfogadjuk a klasszikus összhangzattannak megfelelőnek akkor is, ha *hiányos*, vagyis a kvintje egyik szólamban sem szerepel, viszont az alapja kettőben – persze csak ha minden más feltétel teljesül a 2.7 definíció szerint. A következő definíció hasznunkra lesz majd a hangnemek konstrukciójánál:

2.8. Definíció (Hétfokú skála szeptimfüggvénye). *A 2 táblázatban szereplő (azaz a klasszikus összhangzattannak megfelelő) négyeshangzattípusok halmazát jelöljük F-fel, tetszőleges N négyeshangzat F-beli típusát pedig T_N-nel. Az S hétfokú skála hangjaiból előálló szeptimakkordok halmazát jelöljük $N(S)$-sel. Az S skála szeptimfüggvényén az $sz: \ N(S) \to F; N \longmapsto T_N$ függvényt értjük.*

Megfigyelhetjük, hogy tetszőleges alaphang 4.-5.-6. felhangjai dúr, 5.-6.-7. felhangjai pedig szűk hármashangzatot alkotnak, és ezek mint parciális hármashangzatok domináns szeptimet adnak ki. Más klasszikus formájú hármashangzat vagy szeptimakkord nem szerepel a felhangrendszerben, ezért szokás a moll akkordokat és hangnemet – azok szépsége elismerésével – emberi konstrukciónak gondolni. A moll hangnem Európában az 1500-as években vált elfogadottá és a dúrral egyenrangúvá.

3. Hangnemek. A dúr és moll hangnemek konstrukciója.

3.1. A hangnem fogalma

A hétfokú skálákról ebben a fejezetben is tegyük fel, hogy E-beli hangokból állnak, és minden skálahang az E különböző összefüggő komponensében van! Hangnemről fogunk beszélni, de amiről ténylegesen szó lesz, az a *hangnemet adó skála* fogalma. A klasszikus szóhasználat szerinti hangneme *tonális zeneműveknek* lehet, ahogy azt nemsokára látni fogjuk – viszont a tonalitás definiálásához szükségünk van előbb a most következő fogalmakra és állításokra.

3.1. Definíció. *Egy hétfokú skálát hangnemnek nevezünk, ha a következő három feltétel teljesül rá:*

(i) az V. fokú hármashangzat dúr, az V. fokú szeptimakkord domináns szeptim, és ezek tartalmazzák az I. fok vezetőhangját,

(ii) minden olyan domináns szeptim, amely a skála hangjaiból áll, oldódni képes skálahangokból álló dúr vagy moll hármashangzatra. Vagyis ha az i. fokú szeptimakkord domináns szeptim, akkor az $i+3$. ($\pmod 7$) fokú hármashangzat alapja az i. fokú skálahangtól egy tiszta kvart távolságra van és ez a hármashangzat dúr vagy moll,

(iii) a skála skálahangokból felépíthető összes hármas- és négyeshangzat neve megfelel a klasszikus összhangzattannak (lásd a 2.6 és a 2.7 definíciókat).

A definícióból igen egyszerűen következik a hangnemek alábbi tulajdonsága:

3.1. Állítás. *Hangnemben az I. fokú hármashangzat dúr vagy moll, a VII. fok és az I. fok között kis szekund távolság van.*

Megadtunk a hangnem definícióját, amelyről előre tudjuk (és hamarosan az Olvasó is biztosan látja majd), hogy a dúr és az összhangzatos moll skálák biztosan teljesítik. Ugyanakkor nem azt mondtuk, hogy ezt a kétfajta skálát nevezzük hangnemnek, hanem megadtunk olyan stabilitási tulajdonságokat hétfokú skálákra vonatkozóan, amelyek a klasszika szemlélete szerint a hangnem, a tonalitás érzetét adják. Célunk most egyrészt, hogy belássuk, hogy a dúr és az összhangzatos moll skála (utóbbit még definiálni is kell) hangnemet ad, másrészt megtalálni minden más ezektől különböző hangnemet, ha vannak ilyenek. Először haladjunk a moll hangnem definíciója felé!

3.2. Modális skálák

A következőkben a modális skálákat a lehető legszűkebb értelemben definiáljuk, a tágabb lehetőségekkel később foglalkozunk, ezekre most nincs szükségünk a hangnemek vizsgálatához.

3.2. Definíció. *Vegyünk egy tiszta dúr skálát, és ebben egy olyan 13 elemű sorozatot, amely az alaphanggal kezdődik, és minden hangot a vele szomszédos, nála magasabb skálahang követ! (A szokásos szolmizációs jelöléssel: dó, ré, mi, ... ti, dó', ré', ... ti'[10].) Ennek a 13 elemű sorozatnak a 7 szomszédos elemből álló részsorozatai a fejezet elején leírtaknak megfelelő hétfokú skálák. Ezeket modális skáláknak hívjuk, nevezetesen*

(i) *ión skálának magát a sorozat első hét hangjából álló (dó, ré, ... ti) dúr skálát;*

(ii) *dór skálának a sorozat 2-8. hangjából álló (ré, mi, ... dó') skálát;*

(iii) *fríg skálának a sorozat 3-9. hangjából álló (mi, fá, ... ré') skálát;*

(iiii) *líd skálának a sorozat 4-10. hangjából álló (fá, szó, ... mi') skálát;*

(v) *mixolíd skálának a sorozat 5-11. hangjából álló (szó, lá, ... fá') skálát;*

(vi) *eol skálának a sorozat 6-12. hangjából álló (lá, ti, ... szó') skálát;*

(vii) *és lokriszi skálának a sorozat 7-13. hangjából álló (ti, dó', ... lá') skálát*[11].

Csak a ión és a líd skálánál van kis szekund a VII. és az I. fok között, ezért a 3.1 állítás szerint az összes többi modális skála biztosan nem hangnem. Könnyen ellenőrizhető, hogy a ión, vagyis az eredeti tiszta dúr skála hangnem. A líd skála viszont megsérti a hangnemdefiníció (i) pontját, mert az első fokú szeptimakkord nem domináns szeptim. Nem közvetlenül az axiómák, hanem a bécsi klasszika axiómarendszerünkkel alátámasztott szemlélete szerint más problémákat is láthatunk a líd skálával kapcsolatban: a II. fokú szeptimakkord domináns szeptim, és oldódni képes az V. fokú hármashangzatra, miközben az I. fokra nem oldódhat szeptimakkord, így az V. fok stabilabb, mint az I. fok, tehát tulajdonképpen visszakapjuk az V. fokon alapuló dúr hangnemet. Vezessük be az összhangzatos modális skála fogalmát a további hangnemek megtalálása céljából.

3.3. Összhangzatos modális skálák

3.3. Definíció. *Összhangzatos modális skálának nevezzük az olyan hétfokú skálát, amelynek I., II., ..., VI. foka egy modális skála első hat foka, a VII. fok pedig (enharmonikusság erejéig) az I. fok vezetőhangja. (Ez a hang a modális skálában legfeljebb egyszeresen módosított hang.)*

[10] Ebben a fejezetben használjuk a szolmizációkat, pontosan az általános iskolában tanított módon értelmezve azokat, a Kodály-módszer szerint – kizárólag azzal a céllal, hogy a bizonyítások rövidek és világosak lehessenek. Definícióknál és tételeknél magyarázat nélkül nem fogjuk alkalmazni őket, csak szemléltetésre.

[11] Serei Zsolt összhangzattanórán elhangzott szavai szerint (2010) a lokriszi skála csak formálisan létezik: mivel a skálának nincs tiszta kvintje és az I. fokú hármashangzat szűkített, az I. fokra való érkezés semmilyen megnyugvást, stabilitást nem jelent, miközben a modális skálákat használó stílusokban és műfajokban fontos a skála alapjának biztonsága. Serei szerint a ti hangra végződő dallamok mindig dominánsra záró moll hangnemű művek.

Így most vizsgálhatjuk az összhangzatos dór, fríg, mixolíd és eol skálákat. Az összhangzatos lokriszi skálával számos probléma merül föl, például az I. fok maga is vezetőhangja a II. foknak, miközben a VII. fok az ő vezetőhangja, az V. fokú hármas szűkített, az V. fokú szeptim bővített tercet tartalmaz. (Az összhangzatos ión és líd skálák az eddigiek szerint megegyeznek a ión illetve líd skálával.) Az összhangzatos dór skála I. fokú hármashangzata moll, V. fokú szeptime domináns, és minden skálahangjaiból képezett hármas- és négyeshangzata megfelel a klasszikus összhangzattannak, így teljesül az (i) és az (iii) feltétel. Probléma a domináns szeptimek hangnembeli oldhatóságával van: IV^7 domináns szeptim, de nem oldódhat a VII. fokra, mert az szűkhármas. Így az összhangzatos dór skála nem ad hangnemet.
Az összhangzatos fríg skála sem, mert pl. a VII. fokú hármashangzat szűkített tercet tartalmaz (*ri-fá*), és így nem felel meg a klasszikus összhangzattannak.
Az összhangzatos mixolíd skáláról könnyen megmutatható (a zongorabeli vezetőhangok definícióját és a dúr skálákra vonatkozó Bach-tételt alkalmazva), hogy enharmonikus egy ión skálával. Így ez egy már tárgyalt hangnemet ad.
Az eol skála egyetlen domináns szeptime az V. fokú, ez az I. fokú mollhármasra tud oldódni a hangnemben (tartalmazza az I. fok mesterséges vezetőhangját, a *szi*t). A skálahangokból álló hármas- és négyeshangzatok a feltételeknek megfelelőek, és a skála dúr skálával nem enharmonikus. Így új hangnemet kapunk.

3.4. A hangnemek típusai

3.2. Állítás (Moll-lemma). *Tetszőleges H hangnemben a következő három feltétel ekvivalens:*

i) A IV. fokú hármashangzat moll,

ii) a hangnem szeptimfüggvénye bijektív (mind a 7 szeptimakkord különböző, lásd a 2.8 definíciót),

iii) a VII. fokú szeptimakkord szűkített.

3.1. Állítás bizonyítása. *Jelöljük a skálahangokat a $\mathbb{Z}_{12}$ azon elemével, amennyi az I. foktól való távolságuk félhangban mérve! Ekkor a fokok jelölése rendre, a hangnem tulajdonságai (dúr V. fok, domináns öt-szeptim) alapján:* $(0, 2, ?, 5, 7, ?, 11)$[12].

$(i) \Rightarrow (ii)$: Ha a IV. fok moll, akkor a fokszámsorozat: $(0, 2, ?, 5, 7, 8, 11)$*. Ellenőrizhetjük, hogy akár 3, akár 4 félhangra van a III. fokú hang az I.-től, a szeptimfüggvényünk bijektív, más esetben pedig lesz olyan, skálahangokból álló hármashangzat, amely nem felel meg a klasszikus összhangzattannak.*

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Ha a szeptimfüggvény bijektív, akkor a fokszámsorozat akár $(0, 2, 3, 5, 7, ?, 11)$ *(moll első fokú hármas), akár* $(0, 2, 4, 5, 7, ?, 11)$ *(dúr), mindkét esetben szükségképpen kapjuk, hogy a VI. fok jele csak a 8 lehet. Ekkor viszont a 11-2-5-8 jelű VII. fokú szeptim szűkített.*

$(iii) \Rightarrow (i)$: Ha a VII. fokú szeptim szűkített, akkor a fokszámsorozat minden eleme ismert a III. fokon kívül: $(0, 2, ?, 5, 7, 8, 11)$*. Emiatt a III. foktól függetlenül (ez az $(i) \Rightarrow (ii)$ iránynál meggondoltak szerint 3 vagy 4 félhanggal lehet az I. foknál magasabb) moll a IV. fokú hármas.*

A bizonyítás során többször láttuk, hogy a három ekvivalens feltételt E-beli alaphang esetén pontosan két hangnem elégíti ki. Az is látható, hogy a feltételeket teljesítő két hangnemben a VI. és a VII. fokú skálahangok között bővített szekund távolság van (ez 3 félhanggal, tehát egy kis terccel enharmonikus, de disszonáns).

3.3. Állítás. *Egy adott (E-beli) alaphanggal pontosan három különböző hangnem létezik: a tiszta dúr skála által meghatározott dúr hangnem és a moll-lemma feltételeit teljesítő két hangnem, amelyek pontosan abban különböznek, hogy az I. fokú hármas dúr vagy moll.*

3.2. Állítás bizonyítása. *Tetszőleges hangnemben ismertek a következő fokú hangok (az előző bizonyítás jelölésével):* $(0, 2, ?, 5, 7, ?, 11)$*. A hangnem definíciója szerint az I. fokú hármashangzat vagy dúr, vagy moll.*

[12] Ebben a bizonyításban és a következőben is az aktuálisan ismeretlen jelölésű skálahangok fokszámán kérdőjel áll.

Ha moll, akkor a III. fokot 3 jelöli (a III. fokú skálahang 3 félhanggal magasabb a basszusnál), és a moll-lemma (ii) → (iii) irányának bizonyításából kiolvasható, hogy a VI. fokot csak a 8 jelölheti. Így ekkor az összhangzatos moll skálát és a moll hangnemet kapjuk. Ha az első fokú hármashangzat dúr, akkor a III. fokot 4 jelöli, és kérdéses még a VI. fokú skálahang. Ha az 8 félhanggal magasabb az I. fokú skálahangnál, akkor a moll-lemma feltételeit teljesítő, de a molltól különböző hangnemet kapunk. Ha pedig 9 félhanggal magasabb az I. foknál a VI., akkor a dúr hangnemet kapjuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy bármilyen más lehetőség a VI. fokú hangra ellentétes azzal a hangnemtulajdonsággal, hogy a skálahangokból felépülő összes hármashangzat- és szeptimakkordnév megfelel a klasszikus összhangzattannak.

3.4. Definíció. *Az eol skálát természetes moll, az összhangzatos eol skálát összhangzatos moll skálának is nevezzük. Dallamos moll skálában lévő dallamról beszélünk, ha a dallam fölfelé a 0-2-3-5-7-9-11-12 félhanggal az alaphang felett lévő skálát (lá-ti-dó-ré-mi-fi-szi-lá), lefelé viszont a 12-10-8-7-5-3-2-0 (lá-szó-fá-mi-ré-dó-ti-lá) skálát (tehát a természetes moll skálát) használja.*

3.1. Megjegyzés. *Bár a dallamos moll skála egyik iránya sem ad hangnemet, mégis fontos a szerepe a klasszikus és főleg a bachi összhangzattanban: a moll hangnemű Bach-korálok cantus firmusai (a szopránban szereplő, rögzített, közkeletű protestáns koráldallamok) igen gyakran dallamos mollban íródtak.*

3.5. Definíció (Dúr és moll hangnem). *A tiszta dúr skála által meghatározott hangnemet dúr hangnemnek, az összhangzatos moll skála által meghatározott (avagy a moll I. fokú, bijektív szeptimfüggvényű) hangnemet moll hangnemnek nevezzük.*

3.1. Jelölés. *A J első fokú dúr hangnem jelölése (ahol $j \in E$ tetszőleges): $J-$dúr vagy J. Az J első fokú moll hangnem jelölése: $j-$ moll vagy j.*

Ha egy adott hangnemben egy akkord tartalmaz módosítotthangot, a módosítotthang hangközét is kiírjuk, de a tercnél gyakran szám nélkül, a basszusnál pedig az akkordnév alá írva: pl. moll hangnemben $\mathrm{V}^{\sharp}$ *— ötödik fok,* $\mathrm{V}^{7}_{\sharp}$ *— ötödik fokú szeptim (öt-szeptim),* $\mathrm{III}^{5\sharp}$ *— harmadik fok,* $\underset{\sharp}{\mathrm{VII}}^{7}$ *– hét-szeptim stb. Ha általános hangnemről beszélünk és nem egyértelmű, hogy az egyszeres felemelést $\sharp$ vagy $\natural$, esetleg többszörös kereszt, az egyszeres leszállítást pedig $\flat$ vagy $\natural$, esetleg többszörös bé fejezi ki, akkor felemelésre a $+$, leszállításra a $-$ jel is használható: pl. mollban* V^{+}, V_{2}^{4+}[13].

A dolgozat első figyelemre méltó önálló eredménye, hogy a hangnemet konvencionális módon definiálva, de nem rögzítve, hogy csak dúr és moll hangnem létezik, megkaphatjuk a kétfajta hangnem között átmenetet teremtő „pikárdiai terces moll" vagy „leszállított VI. fokú dúr" hangnemet. A moll-lemma gyakorlati jelentősége, hogy a szűkített VII. fokú szeptimakkord, a VI. és VII. fokok közötti bővített szekund távolság és a moll IV. fok olyan erősen a moll hangnemre utaló tulajdonságok, hogy ezek fennállása mellett (az európai klasszikus zene kultúrkörében) még akkor sem érezzük úgy, hogy dúr hangnemben vagyunk, ha az I. fokú hármashangzat, a hangnem középponti akkordja dúr. Ez a harmadik fajta hangnem rendszeresen felbukkan a klasszicista és romantikus zeneművek közben is (pl. Smetana Moldva című darabjában), a leggyakrabban azonban mégis úgy szerepel, hogy bizonyos moll hangnemben írt műveket felemelt tercű (dúr) első fokkal zárnak, de – moll IV. fokkal vagy egyszerűen csak a fel nem emelt VI. fokú hang beiktatásával – mindig megmutatják, hogy nem jutottunk át az azonos alapú dúr hangnembe (pl.: Bach összes I. fokra záró moll korálja, Chopin b-moll és g-moll noktürnje). Az egyértelműen moll záróhangnemű (lásd majd a tonalitás definícióját!), de dúr I. fokkal befejeződő zeneművekben az I. fokú hármas felemelt tercét nevezzük *pikárdiai tercnek*. Bár kevés ismert példa van rá, lehet önálló hangnemnek tekinteni a pikárdiai terces moll hangnemet és abban komponálni. Ezen hangnem működésének megismerésére és bemutatására már ezen TDK-dolgozat keretein kívül kerítünk sort.

[13] Angolszász jelölésmódban a moll és szűkített (alsó parciális hármashangzatú) akkordokat gyakran kis római betűkkel, a szűkítettet gyakran, különösen a könnyűzenében kis nullával (pl. dúrban II — második fok, VII^{0} — hetedik fok) jelölik, de itt a magyar jelölésmódot fogjuk követni.

4. A négyszólamú szerkesztés topológiája

Már elláttuk a jóltemperált zongorát a d_2 metrikával és definiáltuk pozitív egész n-re az n-szólamú zeneművet illetve annak szólamait is (lásd a 2. fejezet elejét). Most a *szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneművet* azaz *négyszólamú összhangzattanpéldát* mint a négyszólamú zenemű speciális fajtáját fogjuk meghatározni. $\mathbb{R}$-ről a továbbiakban mindig tegyük fel, hogy a szokásos topológiával van ellátva! Általában ha ebben a fejezetben hármashangzatról vagy szeptimakkordról beszélünk, az K^4 egy-egy rögzített elemét jelenti. Mindig külön kiemeljük, ha hármas- vagy négyeshangzatnévről lesz szó.

4.1. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és M n-szólamú zenemű!*

(i) $\inf \mathcal{D}(\mathcal{M})$ *a zenemű kezdőpontja,*

(ii) $\sup \mathcal{D}(\mathcal{M})$ *a zenemű végpontja, ha létezik,*

(iii) t-ben generálpauza van, ha $t \notin \mathcal{D}(\mathcal{M})$, de $\exists t_1, t_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) : t_1 < t < t_2$.

Az M n-szólamú szerkesztésű zenemű tehát folytonos időben játszódik, és $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ minden pontjában mind az n szólamban szól hang (hiszen $M(t)$ $\forall t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$-re egy n-eshangzat). A zenemű értelmezési tartománya felülről nem feltétlenül korlátos (ahogy a valós zenében sem: számos könnyűzenei mű elhalkulva, végtelen ismétlődésbe futva fejeződik be), de a zenemű kezdetének időpontja mindig meghatározható. Az egyszerűség kedvéért itt nem E^4, hanem csak K^4 értékű zeneműveket tekintünk, de a kottaírásnál és -olvasásnál természetesen mindig egy hétfokú skála alapján határozzuk meg a hangok fokszámát. Ténylegesen E^4 értékű, jóltemperált szólamot nem tartalmazó négyszólamú zeneműveknél (pl. vonósnégyes) előfordul, hogy egyébként enharmonikus hangokat (pl. Cisz és Desz)a felhangrendszerből kiindulva különbözőnek kell játszani.

4.2. Definíció. *Az $M : \mathbb{R}_0^+ \to K^4$ négyszólamú zeneművet szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműnek avagy négyszólamú összhangzattanpéldának nevezzük, ha:*

(i) $\forall t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$: $M(t)$ egy klasszikus formájú (dúr, moll, szűk vagy bő) hármashangzatnak vagy a 2.7 definíciónak megfelelő fajtájú szeptimakkordnak alaphelyzetű változata vagy fordítása,

(ii) $\forall H \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$ hármas- vagy négyeshangzatra $M^{-1}(H)$ diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt intervallumok uniója[14]*,*

(iii) mind a négy szólamhoz adott egy-egy hangmagasság-intervallum (hangszer vagy énekszólam konvencionálisan elfogadott hangmagassági tartománya), amelyen belül mozog M a teljes értelmezési tartományán.

(iiii) a zenemű lekottázható, azaz $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ felosztható megszámlálható sok diszjunkt, lefedő balról zárt jobbról nyílt intervallum rendszerére, hogy minden intervallumhoz létezik olyan E-beli, hangnemet adó hétfokú skála, amelyben $\forall i \in \{1,2,3,4\}$-re $Ran\ pr_i \circ M$-nek meghatározható a fokszáma, valamilyen speciális jelöléssel (pl. $\flat$, $\sharp$ és ezek többszörözése) a nem skálahangokat.

4.3. Definíció. *Az M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű burka: $B(M) = [\inf\ \mathcal{D}(\mathcal{M}), sup\ \mathcal{D}(\mathcal{M})[$, azaz a zeneművet tartalmazó legszűkebb balról zárt, jobbról nyílt intervallum.*

4.4. Definíció. *Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű!*

i) $t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ dallamkezdőpont, ha $\exists r > 0 :\ B_r(x) \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) = [t, t+r[$,

ii) $t \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$ dallamvégpont, ha $\exists r > 0 :\ B_r(x) \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) \subseteq$[15] *$[t-r, t[$,*

[14] Itt tehát H-t nem mint hármas- vagy négyeshangzatnevet, hanem mint konkrét alakú hármas- vagy négyeshangzatot, K^4 egyetlen elemét tekintjük, de könnyen látható, hogy ha így teljesül a *(ii)* feltétel $\forall H \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$-re, akkor $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ minden hármas- és négyeshangzatnevére is teljesül.

[15] A göngyölítési pont fogalmának bevezetése után érdemes elgondolkozni azon, miért nem egyenlőség szerepel itt.

iii) $t \in Int\ \mathcal{D}(\mathcal{M})$ *akkordváltási pont, ha* $\exists r > 0 : \ \forall x \in [t-r, t[: \ M(x) = H_1, \ \forall y \in [t, t+r[: \ M(y) = H_2$*, ahol* H_1 *és* H_2 *a* K^4 *különböző elemei. Az* M *akkordváltási pontjainak halmazát* $A(M)$*-mel jelöljük.*

4.1. Lemma. *Ha* M *szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű,* $A(M)$ *számossága legfeljebb megszámlálhatóan végtelen. Ha* λ *a Lebesgue-mérték és*

$$\inf_{t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})} \sup \{r_1 + r_2 | \ r_1, r_2 \geq 0 \ \wedge \ \forall x \in [t - r_1, t + r_2[: \ M(x) = M(t)\} \ > 0,$$

akkor $A(M)$*-nek nincs torlódási pontja, ha ezen felül* $\sup\limits_{H \in \mathcal{R}(\mathcal{M})} \lambda(M^{-1}(\mathfrak{N}(H))) < \infty$*, akkor* $A(M)$ *véges is*[16]*.*

Elnevezések: $\inf\limits_{t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})} \sup \{r_1 + r_2 | \ r_1, r_2 \geq 0 \ \wedge \ \forall x \in [t - r_1, t + r_2[: \ M(x) = M(t)\}$ *az* M *minimális,* $\sup\limits_{t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})} \sup \{r_1 + r_2 | \ r_1, r_2 \geq 0 \ \wedge \ \forall x \in [t - r_1, t + r_2[: \ M(x) = M(t)\}$*-t pedig az* M *maximális akkordhossza.*

4.1. Állítás. *Legyen* M *szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű!*
Ha $\inf\limits_{t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})} \sup\limits_{\substack{r_1, r_2 \geq 0 \\ \forall x \in [t - r_1, t + r_2[: \ M(x) = M(t)}} r_1 + r_2 > 0$*:*

(i) $t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ *dallamkezdő pont* $\Leftrightarrow$ $t \notin Int\ \mathcal{D}(\mathcal{M})$*.*

(ii) $t \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$ *dallamvégpont* $\Leftrightarrow$ $t \notin \mathcal{D}(\mathcal{M})$*.*

4.1. Állítás bizonyítása. (i) *Legyen* $t \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$ *tetszőleges. Ekkor* $M^{-1}(M(t))$ *t-t tartalmazó összefüggő komponense egy balról zárt, jobbról nyílt intervallum, ezért* $\exists\ r > 0 : \ [t, t+r[\ \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{M})$*. Ha* $t \notin Int\ \mathcal{D}(\mathcal{M})$*, akkor* $\forall \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon(t) \ \cap \ (\mathbb{R} \backslash \mathcal{D}(\mathcal{M})) \neq \emptyset$*, vagyis t tetszőlegesen kis környezetének t-től balra eső felébe esik olyan pont, amelyben generálpauza van. Mivel sem* $A(M)$*-nek, sem* M *dallamkezdő pontjai halmazának nincs torlódási pontja, ez csak úgy lehetséges, ha* $\exists r' > 0 :]t - r', t[\cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) = \emptyset$*, vagyis t dallamkezdő pont.*

(ii) *Ismét használjuk fel, hogy sem* $A(M)$*-nek, sem* M *dallamkezdő pontjai halmazának nincs torlódási pontja, vagyis* $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ *felosztható egymáshoz csatlakozó, diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt olyan* $I_1, I_2, \ldots$ *intervallumok sorozatára, hogy a páratlan sorszámú intervallumok részhalmazai* $\mathcal{D}(\mathcal{M})$*-nek, a páros sorszámúakon pedig generálpauza van. Ekkor* $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})} \backslash \mathcal{D}(\mathcal{M})$ *pontosan az* I_{2k+1} *és* I_{2k+2} *intervallumokat elválasztó pontok, vagyis éppen a dallamvégpontok halmaza.*

4.5. Definíció. *Legyen* M *szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű. A t az* M *göngyölítési pontja, ha tetszőleges* $r > 0$ *valós szám esetén a* $[t - r, t[$ *végtelen sok dallamkezdő vagy akkordváltási pontot tartalmaz.*

A göngyölítési pontot mint a gyakorlatban meg nem valósítható zenei jelenséget a későbbiekben kizárjuk a klasszikus összhangzattannak megfelelő zeneműveknél. A következő állítás előtt az egyértelműség kedvéért definiáljuk a teljes felhalmozódási pont fogalmát.

4.6. Definíció. *Legyen* (X, τ) *topologikus tér,* $A \subseteq X$*,* $x \in X$*. Az* x *teljes felhalmozódási pontja az* A *halmaznak, ha* $\forall U \in \tau : \ x \in U \ \Rightarrow |U \cap A| = |A|$*.*

4.2. Állítás. *Szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű minden torlódási pontja teljes felhalmozódási pont.*

4.2. Állítás bizonyítása. *Legyen* x *az* M *szigorú négyszólamú szerkesztési zenemű értelmezési tartományának torlódási pontja, vagyis* $\forall\ n \in \mathbb{N} : \ B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) \backslash \{x\} \neq \emptyset$*. Ekkor a kiválasztási axióma szerint* $\bigtimes\limits_{n \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) \backslash \{x\} \neq \emptyset$*. Ezért létezik egy* $a : \ \mathbb{N} \to \mathcal{D}(\mathcal{M})$ *sorozat, hogy* $\forall n \in \mathbb{N}$*-re* $a(n) \in B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap DomM \backslash \{x\}$ *és* $M(a(n))$ *egy* $a(n)$*-t tartalmazó balról zárt, jobbról nyílt intervallumon szól, amely a szigorú négyszólamú szerkesztés tulajdonságai miatt egy nem-üres intervallumban metszi* $B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) \backslash x$*-et. Ez azt jelenti, hogy* $\forall n \in \mathbb{N} : |B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) \backslash \{x\}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$*, vagyis* x *teljes felhalmozódási pontja a kontinuum számosságú* $\mathcal{D}(\mathcal{M})$*-nek*[17]*.*

[16] Felhasználjuk, hogy összesen véges sok hármas- és négyeshangzatnév létezik.
[17] A bizonyítás csak akkor nem helyes, ha $\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \emptyset$, de az állítás ekkor is igaz.

4.3. Állítás. *Szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű jobbról folytonos.*

4.3. Állítás bizonyítása. *A jobbról folytonosság diszkrét értékű függvénynél pontosan a következőt jelenti:*

$$\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{M})\ \exists \varepsilon > 0 : \ \forall y \in [x, x+\varepsilon[\cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) : \ M(y) = M(x).$$

Ha $x \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, akkor az előző definíciók és állítások szerint két eset lehetséges: ha x-ben nem kezdődik új akkord, vagyis $\exists \varepsilon > 0 : \ \forall y \in B_\varepsilon(x)\ M(y) = M(x)$, akkor $[x, x+\varepsilon[$ tanúsítja a jobbról folytonosságot. Ha x-ben új akkord kezdődik: $M(x) = H$ (meggondolható, hogy ekkor x akkordváltási pont vagy olyan göngyölítési pont, amelyben M értelmezett), akkor pedig $M^{-1}(H)$ x-et tartalmazó összefüggő komponense (ez is egy balról zárt, jobbról nyílt intervallum) mutatja, hogy M x-ben is jobbról folytonos. Így M minden pontban jobbról folytonos, ahol értelmezett.

Az eddigiekben tulajdonképpen az *ívhosszparaméterezésű* négyszólamú összhangzattanpéldákat definiáltuk: vagyis legyen adva egy 1 szekundum hosszú hang, ezt tekintjük egész hangnak, a zeneművet egyenletes sebességgel játsszuk le, tehát ha egy ütem egy egész hangból áll (ahogy a zeneirodalomban gyakran, a 4/4, 2/2 ütemmutatóknál), akkor pontosan 1 másodpercenként kezdődik egy új egész hang. Most térjünk rá a változó sebességgel lejátszott szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneművekre:

4.7. Definíció. *Legyen M n-szólamú zenemű valamely $n \in \mathbb{N}^+$-ra, Θ pedig $[0,\infty[\to [0,\infty[$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény, és a $[0,\infty[$ felosztható megszámlálható sok egymáshoz csatlakozó, de diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt intervallumra $(I_i)_{i\in\omega}$ úgy, hogy ezen intervallumok mindegyikének belsejében $\Theta \in C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$ immerzió. Ekkor Θ-t lejátszási függvénynek vagy egyszerűen lejátszásnak, $M \circ \Theta|_{B(M)}$-t az M Θ-hoz tartozó lejátszásának hívjuk, $t \in B(M)$ paraméter esetén $\Theta'(t)$ a t pontbeli lejátszási sebesség, $\Theta''(t)$ pedig a lejátszási gyorsulás, ha ezek léteznek.*
Ha $\Theta' \equiv 1$ (egészhang/szekundum) $B(M)$, akkor egységparaméterezésű, ívhosszparaméterezésű, egységpályasebességű vagy természetes paraméterezésű n-szólamú zeneműről beszélünk.

4.8. Definíció. *A Θ által generált μ_Θ Lebesgue-Stieltjes-mérték esetén bármely M négyszólamú összhangzattanpéldára $B(M)$ tetszőleges A Lebesgue-mérhető részhalmazára $\mu_\Theta(A) = \int\limits_A 1 \ \mathrm{d}\Theta(x) = \int\limits_A \Theta'(x)\ \mathrm{d}x$-et az A zeneműrészlet Θ lejátszásbeli hosszának hívjuk, ha ez az integrál véges.*

A lejátszásfüggvények kompakt halmazon mindig korlátos változásúak, így van értelme Stieltjes-integrálról beszélni.

4.9. Definíció. *Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű! $A \subseteq B(M)$ Ligeti–Boulez-nullmértékű halmaz, ha M minden Θ lejátszása esetén $\mu_\Theta(A) = 0$.*

4.4. Állítás. *Ha $A \subseteq [a,b] \subseteq B(M)$, akkor A Ligeti–Boulez-nullmértékű $\Leftrightarrow$ Lebesgue-nullmértékű.*

4.4. Állítás bizonyítása. $\Rightarrow$ *Legyen $\Theta = id_{\mathbb{R}}$! Ekkor $\mu_{id_{\mathbb{R}}}(A) = \lambda(A) = 0$.*
$\Leftarrow$ *Mivel A nullmértékű, lefedhető zárt intervallumok tetszőlegesen kis összhosszúságú rendszerével is. Ebből következik, hogy a zárt intervallumaink akár diszjunktak is lehetnek, vagyis tetszőleges $\delta > 0$ esetén létezik olyan $\{[x_n, y_n]\}_{n=1}^\infty$, hogy $i \neq j$ esetén $[x_i, y_i] \cap [x_j, y_j] = \emptyset$, $A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [x_n, y_n]$, $\sum_{n=1}^\infty \lambda([x_n, y_n]) < \delta$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám, $\Theta : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ tetszőleges lejátszás. Mivel az $[a,b]$-re megszorított Θ szakaszonként integrálfüggvény, ezért abszolút folytonos, így folytonos is. A szigorúan monoton növekedés miatt $\forall i \in \mathbb{N}$-re a minimumát x_i-ben, a maximumát y_i-ben veszi fel a vizsgált intervallumrendszeren. Így $\Theta(A) \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\Theta(x_n), \Theta(y_n)]$, $\lambda([\Theta(x_n), \Theta(y_n)]) \leq \sum\limits_{n=1}^\infty \lambda[\Theta(x_n), \Theta(y_n)] < \varepsilon$, ha $\sum\limits_{n=1}^\infty \lambda([x_n, y_n]) < \delta(\varepsilon)$, az abszolút folytonosság miatt. Vagyis $\delta(\varepsilon)$ megfelelő választásával tetszőleges ε-nál kisebb összhosszúságú intervallumrendszerrel lefedhetjük A-t bármely lejátszás esetén $\Rightarrow$ A Lebesgue-nullmértékű tetszőleges Θ-ra $\Rightarrow$ A Ligeti–Boulez-nullmértékű halmaz.*

4.5. Állítás. *A lejátszási függvények a kompozícióra nézve kommutatív csoportot alkotnak (ezt lejátszási csoportnak nevezzük és $PL(\mathbb{R})$-rel jelöljük).*

4.5. Állítás bizonyítása. *Elég azt megmutatnunk, hogy lejátszások kompozíciója és lejátszás inverze szintén lejátszás — ekkor az asszociativitás és kommutativitás a $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ függvénytérből öröklődik.*
Legyenek Θ_1 és Θ_2 lejátszások, M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű! $\Theta_2 \circ \Theta_1$ is szigorúan monoton növő függvény, és folytonos is, mivel folytonosak kompozíciója. Tekintsük $B(M)$-nek a Θ_1 által meghatározott intervallumokra való felosztását. Vegyük el $[0,\infty[$-ből az ehhez tartozó osztópontokat és azon x-eket is, amelyekre $\Theta_1(x)$ a Θ_2-höz tartozó intervallumvégpont. Ez összesen még mindig megszámlálható sok pont, amelyeknek nincs torlódási pontja, és ezen végpontok által meghatározott intervallumok belsejében $\Theta_2 \circ \Theta_1$ két immerzió kompozíciója, így a láncszabály szerint ennek a deriváltja sem tűnhet el. Tehát lejátszások kompozíciója lejátszás.
Legyen Θ tetszőleges lejátszás. Θ^{-1} biztosan függvény (az állításnak megfelelő halmazon értelmezett), mert Θ szigorúan monoton növő, így injektív. Sőt Θ^{-1} is szigorúan monoton nő. Azokon a nyílt intervallumokon, ahol Θ immerzió, az inverzfüggvénytétel alkalmazható, így ezeken a halmazokon Θ^{-1} is immerzió. Azt kell még bizonyítani, hogy Θ^{-1} minden pontban folytonos. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan x, ahol ez nem teljesül! Az eddigiek szerint ekkor itt Θ^{-1}-nek ugrása van, létezik egy olyan $[a,b] \subset [0,\infty[$ zárt intervallum, amely nem része Ran Θ^{-1}-nek. Ennek a folytonos Θ általi képe a Darboux-tétel miatt szintén zárt intervallum. Így $\Theta \circ \Theta^{-1} = id_{[0,\infty[}$ nem lejátszás, mert $[\Theta(a),\Theta(b)] \subseteq [0,\infty[$-n nincs értelmezve. Viszont $id_{[0,\infty[}$-ra teljesül a lejátszás definíciója, így ellentmondásra jutottunk. Így Θ^{-1} folytonos, vagyis az eddigiek alapján lejátszás. Tehát $PL(\mathbb{R})$ valóban csoport.

Megjegyezzük, hogy a bizonyításnál felhasználtuk a szigorú négyszólamú szerkesztést, de a kapott eredmény attól független, hiszen a lejátszásfüggvény tulajdonság nem függ attól, hogy négyszólamú összhangzattanpéldát vagy egyéb n-szólamú zeneművet paraméterezünk-e át vele.

4.10. Definíció. *Egy M négyszólamú összhangzattanpélda megvalósítható, ha*

(i) $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ lezártja kompakt (a ∞ nem torlódási pontja $\mathcal{D}(\mathcal{M})$-nek),

(ii) az M akkordjaihoz tartozó intervallumok hosszának infimuma pozitív, és ha $B(M) \neq \mathcal{D}(\mathcal{M})$, akkor az M generálpauzáihoz tartozóké szintén.

4.11. Definíció. *Ha M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, $x \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, $M(x) = H$, akkor $M^{-1}(H)$ x-et tartalmazó összefüggő komponensét az $M(x)$ tartományának nevezzük.*
Az $[a,b[\subseteq B(M)$ intervallum Θ lejátszás szerinti megfelezése: két diszjunkt, együtt lefedő (egymáshoz csatlakozó) balról zárt, jobbról nyílt intervallumra (I,J) való felosztása, amelyekre $\mu_\Theta(I) = \mu_\Theta(J)$.

Ahogy már említettük, a négyszólamú összhangzattanpéldákkal fogjuk modellezni a klasszikus összhangzattan axiómarendszerét, szemléletét. Ezek viszont valóban tankönyvi példák, nem műalkotások, igen ritkán képviselnek magas esztétikai értéket. A következő definícióban szereplő apró, lokális változtatások, a figurációk – és persze a szoprándallamok, amelyeket Bach megharmonizált – teszik az összhangzattanpéldákkal szemben élő zenévé, művészetté a négyszólamú korálokat. Definíciónk minden bizonnyal nem írja le maradéktalanul az összes Bach-korált sem, de a korálok jellegzetes fordulatait mégis tartalmazza.

4.12. Definíció. *A $\mathfrak{K}$ négyszólamú zeneművet négyszólamú korálnak nevezzük, ha létezik olyan M véges minimális akkordhosszú, ívhosszparaméterezésű, kompakt tartójú[18] szigorú négyszólamú szerkesztésű, szünetmentes ($\mathcal{D}(\mathcal{M}) = B(M)$) zenemű, melyre $\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$-re az x tartományának hossza az identikus lejátszás szerint egy fix c érték, és*
(1) $\mathfrak{K}$ előáll M-ből a következő lépések (az ún. figurációk) alkalmazásával. Az alkalmazás véges sok $x \in$ Dom M-re történik úgy, hogy az egymást kizáróakat ugyanazon x-re nem végezzük el.
Figurációk:

[18]Értsd: $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$ kompakt.

i) ***Késleltetés:*** *$M(x)$ tartományát az identikus lejátszás szerint megfelezzük, a másodikban $M(x)$ hangzik ($\forall y:\ \mathfrak{K}(y) = M(x)$), az elsőben viszont egy vagy két szólamban nála egy szekunddal magasabb hang, amely az M előző akkordjában szólt ebben a szólamban, a többi szólamban $M(x)$ megfelelő hangja.*

ii) ***Előlegzés:*** *$M(x)$ tartományát az identikus lejátszás szerint két egyenlő részre osztjuk, az elsőben $M(x)$ hangzik, a másodikban viszont pontosan egy szólamban az a hang, amely M következő akkordjában szól majd ebben a szólamban, és a szólam előző hangjától egy szekundra van, a többi szólamban $M(x)$ megfelelő hangja szól.*

iii) ***Átmenőhang:*** *tegyük fel, hogy $M(x)$ és az M utána következő akkordja között valamely szólamban terc távolság van — például az i. szólamba; több ilyen szólam is lehet. Azt mondjuk, hogy átmenőhangot rakunk az i. szólamba, ha $M(x)$ tartományát megfelezzük, az első részen $\mathfrak{K}(y) = M(x)$, a másodikban viszont $pr_i \circ \mathfrak{K}(z)$ egy szekundra van $M(x)$-től abba az irányba, amerre a következő akkord i. szólambeli hangjához a terclépés vezet. Azokban a j. szólamokban, ahová nem rakható átmenőhang, $pr_j \circ \mathfrak{K}(z) = M(x)$ a második fél intervallum minden z pontjára.*

iv) ***Akkordduplikálás:*** *az $M(x)$ intervallumát megfelezzük, az első felén $M(x)$ szól, a második felén pedig egy másik hármas-vagy négyeshangzat.*

(2) A kapott zeneművet egy olyan Θ lejátszással tekintjük, amely az identikustól annyiban tér el, hogy $\exists m \in \mathbb{N}$, amelyre az M minden m. akkordjához tartozó intervallumot Θ a k-szorosára nyújtja, ahol $k \in\ ]1,2[$ konvencionálisan elfogadott szorzótényező. Ekkor azt mondjuk, hogy minden m. akkordon a korálban ***korona*** *van*[19].

A továbbiakban a szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműveket fogjuk tárgyalni és nem a korálokat, mert a figurációkra folyamatosan tekintettel kéne lennünk a definíciók, tételek és bizonyítások megalkotása során, és úgy nehezedne meg a matematikai leírás, hogy végül nem kapnánk általánosabb, értékesebb eredményt, mint ha csak a négyszólamú összhangzattanpéldákat tárgyalnánk. Látni fogjuk viszont, hogy a szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneművekkel modellezett összhangzattani struktúra teljes egészében érvényes a korálokra, de még sokkal bonyolultabb olyan zeneművekre is, amelyek a klasszicista szerkesztési szabályoknak eleget tesznek, ha általánosabban, esztétikai szempontból alkalmazzuk az itt matematikai pontossággal definiált szabályokat – deskriptív (pl. mint a Bach-korálok jellemző tulajdonságainak modellje) és preskriptív (pl. mint a középfokú zeneoktatásban megtanított korálharmonizálási szabályok) értelemben is.

5. Hangnem konvergenciatartománya, funkciók és tonalitás

5.1. Előjegyzések

A hangnemek konstrukciója után könnyen látható, hogy *a Bach-tétel a dúr skála mellett igaz az összhangzatos moll és a pikárdiai terces összhangzatos moll skálára is*, vagyis a jóltemperált zongora minden hangjára felépíthető zongorahangokból álló dúr, moll és pikárdiai terces moll skála, így az E bármely hangjával mint I. fokkal felépíthetőek az E-n belül ilyen skálák. Vagyis egy jóltemperált zongora bármely hangja mindhárom fajta hangnemnek lehet I. foka.

Egy zongorahangra felépülő hangnem *előjegyzésén* a hangnem azon skálahangjainak halmazát értjük, amelyek a C-dúr, vagyis a „fehér billentyűkből felépülő dúr” skálához képest módosított hangok, kivéve, ha a hangnem nem dúr és a hangnemhez tartozó *természetes moll skálához* képest is módosítottak ezek a hangok. Így például a d-mollnak és a pikárdiai terces d-mollnak is egy $\flat$ az előjegyzése, hiszen a cisz és az utóbbi skálában szintén szereplő fisz az eredeti d-eol skálához képest is módosított hangok, ezzel szemben a D-dúrnak két $\sharp$ az előjegyzése, hiszen a fisz és a cisz is skálahang a D-dúr (nem moll) skálában és a C-dúr skálához képest módosított hang. (A jelölésmód célja az is, hogy $\flat$ és $\sharp$ előjegyzés ugyanazon hangnemhez

[19] A lehető legegyszerűbb módon igyekeztünk definiálni a korált a szigorú négyszólamú szerkesztésből, de persze a korálszerzők a gyakorlatban jellemzően nem úgy dolgoznak, hogy egy összhangzattanpéldát írnak, majd a lehetséges helyen ellátják figurációkkal.

ne tartozzon.) Az előjegyzést, ha több kereszt, mindig kvintenként fölfelé haladva (pl. fisz, cisz, gisz, disz), ha pedig több bé, mindig kvintenként lefelé haladva (pl. bé, esz, asz, desz, gesz) olvassuk ki. A kvintkörrel kapcsolatban meggondoltak alapján nem meglepő, hogy egy hangnemben ha van $\flat$ előjegyzés, akkor az előbbi sorrendben az utolsó éppen a hangnemhez tartozó szeptimhang (fá szolmizáció), ha van $\sharp$ előjegyzés, akkor az előbbi sorrendben utolsó éppen a hangnemhez tartozó vezetőhang (ti szolmizáció). Más szemszögből: egy T hangnemnél egy kvinttel magasabb, T-ben V. fokú alaphangú, T-vel azonos típusú D hangnemnek pontosan eggyel kevesebb bé / eggyel több kereszt az előjegyzése, mint T-nek, és ez a felemelt hang éppen a D vezetőhangja (amely T-ben fi szolmizációjú), a T-nél egy kvinttel alacsonyabb, T-ben IV. fokú alaphangú, T-vel azonos típusú SD hangnemnek pontosan eggyel több bé / eggyel kevesebb kereszt az előjegyzése, mint T-nek, és éppen a SD szeptimhangja a leszállított hang (ez T-ben tá szolmizációjú). A D hangnemet a *T domináns hangnemének*, az SD-t a *T szubdomináns hangnemének* nevezzük. A kvintkört bejárhatjuk domináns irányban (pl. C→G→D→A→E→H→Fisz∼Gesz→Desz→Asz→Esz→B→F→C) , ekkor gyakran *felső kvintkörről beszélünk*, és szubdominánsban (pl. az előző fordított sorrendben) is, ekkor pedig *alsó kvintkörről*.

5.2. Konvergenciatartomány, gyenge (poli)tonalitás

Ebben a fejezetben amit csak lehet, általános hangnemre definiálunk, de a konkrét akkordok tulajdonságait itt csak dúr és moll hangnemekben vizsgáljuk. Az egyértelműség kedvéért adjuk meg a következő három definíciót:

5.1. Definíció. *Legyen T tetszőleges hangnem. T vezetőhangja a T VII. fokú hangja (azaz T első fokának vezetőhangja), T szeptimhangja pedig a T IV. fokú hangja.*

5.2. Definíció. *Legyen SZ n. fokú szeptimakkord. Azt mondjuk, hogy SZ szeptimhangja sz, X-re vezet, ha X $n+5$. fokú* $\pmod 7$ *és egy vagy két félhanggal alacsonyabb sz-nél.*

5.3. Definíció. *A T hangnem első fokú hármashangzatát tonikai főhármashangzatnak, a negyedik fokút szubdomináns főhármasnak, az ötödik fokút pedig domináns főhármasnak nevezzük. Az összes többi skálahangokból felépülő hármashangzatot mellékhármashangzatnak nevezzük.*

Minden T hangnemhez – ezen dolgozat keretein belül a dúr és moll hangnemekhez – elemenként meg fogjuk határozni hármas- és négyeshangzatnevek egy halmazát, amelyet a *T hangnem konvergenciatartományának* nevezünk és $KT(T)$ módon jelölünk. Szemléletesen azok az akkordok tartoznak $KT(T)$-be, amelyek T skálahangjaiból állnak vagy T skálahangjaiból álló akkordokra vezethetnek úgy, hogy közben megmarad az az érzet, hogy T hangnemben maradunk. Az **Akkordtípus** jellel ellátott szövegrészek fogják jelezni egy-egy újabb akkordcsalád beemelését $KT(T)$-be. Bár ebben a dolgozatban majdnem kizárólag csak skálahangokból álló hármas- és négyeshangzatokból álló négyszólamú összhangzattanpéldákkal foglalkozunk, a végén függelékként megadjuk a dúr és moll hangnemek teljes konvergenciatartományát. Az akkordtípus-felsorolásoknál mindig azon hangnemek konvergenciatartományának újabb és újabb elemeit adjuk meg, amelyeknek I. fokú hangja a C-dúr hangnem skálahangjainak vagy egyszeresen módosított, skálahanggal nem enharmonikus hangjainak egyike.

1. Akkordtípus. *Tetszőleges hangnemben az alábbi, skálahangokból álló hármashangzatok: az I.–VI. fokú hármashangzatok, az I.-VII. fokú szextakkordok valamint az I. és IV. fokú kvartszextakkord. Továbbá az összes olyan szeptimakkord minden fordításban, amelyek skálahangokból épülnek fel.*

5.4. Definíció (Gyenge tonalitás, politonalitás.). *Legyen M négyszólamú zenemű, t torlódási pontja $\mathcal{D}(\mathcal{M})$-nek, k pedig pozitív egész szám. Ha $\exists U$ összefüggő nyílt környezete t-nek és legfeljebb k darab különböző hangnem ($T_1, \dots T_k$), hogy $U \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) \setminus \{t\}$ minden akkordja $KT(T_i)$ elemének a klasszikus összhangzattannak megfelelő változata valamely $i \in \{1, \dots, k\}$-ra, akkor azt mondjuk, hogy az M gyengén k-tonális*[20] *a t pontban $T_1, \dots T_k$ hangnemekkel.*

[20] A szokásos görög megnevezések is használhatók, mint például a „k-lineáris” kifejezésnél: bitonális, tritonális stb.

Ekvivalens definíciók a gyengén k-tonálisra: $k = 1$ esetén gyengén tonális, $k > 1$ esetén általában politonális.

Ha $X \subseteq \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$ minden pontjában M gyengén k-tonális, akkor azt mondjuk, hogy M gyengén k-tonális X-en. Ha M gyengén k-tonális $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$ minden pontjában, akkor azt is mondjuk, hogy M gyengén k-tonális.

5.1. Állítás. *Bármely olyan, klasszikus összhangzattannak megfelelő hármas- vagy négyeshangzatnévhez, amelynek alaphangja a C-dúr hangnem skálahangja vagy egyszeresen módosított, skálahanggal nem enharmonikus hangja, létezik olyan moll hangnem, amelynek konvergenciatartományában ez az akkord szerepel.*

A bizonyítás a moll-lemmából egyszerűen következik: a szeptimfüggvény bijektivitása miatt persze dúr, moll, szűk és bő hármashangzat is előáll a moll hangnemek skálahangjaiból. A Bach-tétel (illetve a kvintkör tulajdonságai) szerint pedig bármely zongorahangra épül moll hangnem, így ezek közül lesz olyan, amelyben egy tetszőleges hármas- vagy négyeshangzat éppen skálahangokból áll.

Most már látjuk azt is, hogy gyenge (1-)tonalitás valóban gyenge tulajdonság abban az értelemben, hogy ha vesszük egy M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű tetszőleges olyan t torlódási pontját, amely nem akkordváltási és nem is göngyölítési pont, akkor ennek a pontnak létezik olyan U_t nyílt környezete, amelynek M általi képében végig ugyanazon hármas- vagy négyeshangzat szól, és ez a szigorú négyszólamú szerkesztés definíciója szerint a klasszikus összhangzattannak megfelelel. Az ilyen akkordok mindegyikének neve az előbbiek szerint szerepel valamely hangnem konvergenciatartományában, így minden négyszólamú összhangzattanpélda gyengén tonális az összes olyan torlódási pontjában, amelyben sem akkordváltás, sem akkordgöngyölítés nincs. A gyenge tonalitás fogalma mégis elengedhetetlen egyrészt a funkciós tonalitás fogalmának felépítéséhez, másrészt az említett két különleges ponttípusbeli (poli)tonalitás jellemzéséhez.

5.3. A funkciók

A klasszika szemlélete alapján azonban ahhoz, hogy egy zeneművet vagy annak összefüggő részletét tonálisnak tekintsünk, nem elég, hogy minden akkord ugyanabból a hangnemből származzék. Milyen hangnembeli stabilitást, tonalitás-érzetet ad például, ha egy zeneműben végig csak ugyanaz az egyetlen akkord szól? A tonalitás-érzethez szükségünk van mindhárom *funkcióra*. Ahogy a hangnemek konstrukciójánál, itt sem puszta felsorolással adjuk meg az egyes funkciókhoz tartozó akkordokat, hanem a definíciókban igyekszünk a funkciók lényeges vonásait kihangsúlyozni. Ahhoz pedig, hogy a funkciók ne üres fogalmak legyenek, hanem példát is tudjunk adni különböző funkciójú akkordokra, megkezdjük a hangnem konvergenciatartománya elemeinek felsorolását is.

5.5. Definíció. *Legyen T hangnem, $H \in KT(T)$ dúr vagy moll hármashangzat, $J \in KT(T)$ „dúr vagy szűk hangzat", azaz dúr hármas, szűk hármas, domináns szeptim vagy szűkített szeptim. Azt mondjuk, hogy J kiváltja H-t (J kiváltó akkordja H-nak), ha J*

(i) tartalmazza H vezetőhangját,

(ii) ha a H alapjára épített dúr skálához képest tartalmaz módosított hangot, akkor az az ezen skála V. fokához tartozó felső váltóhang.

5.2. Állítás. *A H-t kiváltó J szeptimakkord tartalmazza a H-hoz tartozó szeptimhangot.*

5.6. Definíció (Domináns funkció (D) és az adott hangnembeli mellékdomináns tulajdonság). *Egy T hangnem I. fokú (skálahangokból felépülő) hármashangzatát kiváltó akkordot a hangnemben domináns funkciójúnak (a hangnem domináns akkordjának), a $KT(T)$ más, skálahangokból álló akkordját kiváltó akkordot a T hangnem mellékdomináns akkordjának nevezzük. Ezen belül a T domináns főhármashangzatát kiváltó akkordot a T hangnem váltódominánsának hívjuk.*

Dúr hangnemben egy nagyon fontos domináns akkordot kellene figyelmen kívül hagynunk, ha nem vennénk be azt azonnal a hangnem konvergenciatartományába:

2. Akkordtípus. *Dúr hangnemben a VII. fokú (az I. fok vezetőhangjára épülő) szűkített szeptim (jelölés C-dúrban:* $V\underset{\sharp}{I}I^{7\flat}$*).*

5.3. Állítás. *Egy T hangnem dominánsai pontosan a következők: az V. fokú hármashangzat alap- és szextfordítása, az V. fokú szeptimakkord összes fordítása, a vezetőhangra épülő VII. fokú hármashangzat szextfordítása és az utóbbi akkordot mint alsó parciális hármast tartalmazó VII. fokú szűkített szeptimakkord összes fordítása.*

A dúr hangnem konvergenciatartományának eddig ismertetett elemei közül az I. fokú hármas és fordításai mellékdominánsak.

5.7. Definíció (Tonikai funkció (T)). *Legyen T hangnem. $H \in KT(T)$ akkord a T-ben tonikai funkciójú, ha:*

i) tartalmazza a T skálája I. és III. fokú hangját, előbbit nem módosítva,

ii) ha tartalmazza a T vezetőhangját, akkor az H-nak szeptimhangja,

iii) ha mellékdomináns, akkor első fokú dúr hármashangzat, moll esetben felemelt terccel,

iiii) nem tartalmaz parciális hármashangzatként sem szűk, sem bő hármast.

5.4. Állítás. *Tonikai funkciójú minden hangnemben az I. fok, dúrban és mollban a VI. fok, dúrban a VI. fokú szeptim, dúrban az I. fokú, skálahangokból felépített szeptim.*

A domináns funkciójú akkordnál a dúr vagy szűk tulajdonság, tehát a *felhangrendszerben megtalálható*[21] akkordtípus volt a lényeges. Még a moll hangnemben is csak dúr vagy szűk akkord lehet domináns funkciójú, tulajdonképpen az erős domináns funkciót követeltük meg a 3.1 hangnemkonstrukcióban, ezért emeltük fel az eol skála VII. fokát mesterséges vezetőhanggá. A domináns akkordok vonzódása az egy kvinttel lejjebbi alaphanghoz is indokolható a felhangrendszerből, persze csak a jóltemperált zongora és az enharmonikusság konstrukciójának ismeretében, és akkor is nagyon kell vigyázni, hogy az indoklásba ne csússzon redundancia. A tonikai funkciójú akkordok ezzel szemben a hangnem stabilitást adó nyugvópontjai, legfeljebb minimális disszonanciát tartalmaznak, de általában azt sem; tonikáról kezdődik és végül tonikára ér vissza a legtöbb (bécsi) klasszicista zenemű[22]. A képet színesíti még a szubdomináns funkció:

5.8. Definíció (Szubdomináns funkció (SD)). *Legyen T hangnem. $H \in KT(T)$ akkord a T-ben szubdomináns funkciójú, ha:*

(i) tartalmazza a T skálája IV. és VI. fokú hangját, akár mindkettőt módosítva,

ii) ha tartalmaz módosított vezetőhangot, az az V. fok vezetőhangja,

(iii) H metszete az I. fokú hármashangzat fokaival vagy üres, vagy az I. fok.

5.5. Állítás. *Szubdomináns funkciójúak minden T hangnemben a II. és IV. fokú hármashangzat $KT(T)$-beli fordításai valamint a II. fokú szeptimakkord és minden fordítása.*

A szubdomináns kifejezést „domináns előtti”-ként, vagyis dominánsra vezető akkordként érdemes érteni, vagyis általában érvényes egy $SD \to D$ vonzódás, a szubdomináns után megszólaló domináns pedig általában tovább mozog a tonikára. Láthatjuk, hogy a főhármashangzatokat (I., IV., V. fok) a mostani funkciódefiníciókkal konzisztens módon neveztük el. Egy adott dúr vagy moll I. fokú hármashangzatról az V. fokú főhármashangzatra való lépést (akkordváltást) *autentikus lépésnek*, a IV. fokúra való lépést *plagális*

[21] A szűkített szeptim persze nem áll elő egy alaphang egymást követő felhangjainak sorozatából, de nagyon erősen vezet a hozzá tartozó tonikára.

[22] "It is not fully understood why V–I imparts such a feeling of finality, but it cannot be denied that it does." [Dave Benson, 2008, 5. fejezet: Scales and temperament – the fivefold way.]

lépésnek nevezzük. A $T \to SD \to D \to T$ lépéssorozat[23] neve *összetett autentikus* lépéssorozat vagy *teljes autentikus zárlat (kadencia)*, a fordított irányú $T \to D \to SD \to T$ lépéssorozaté hasonlóan *összetett plagális* vagy *teljes plagális zárlat (kadencia)*. A $T \to D$, $SD \to T$ lépések kevésbé járnak a befejezettség, az oldódás érzésével, mint az ellenkező irányú lépések, de hamarosan látni fogjuk, hogy sokfajta ilyen lépés is megfelelhet a klasszikus összhangzattannak. Gyakran nem ütközik szólamvezetési szabályokba a $D \to SD$ lépés sem, de a $D \to T$ vonzódás jelentőségét csökkentené, ha a zeneműben elszaporodnának a teljes plagális zárlatok, ezért egyik szerkesztési elvünk megtiltja a klasszikus összhangzattannak megfelelő zeneművekben a legerősebb és legtipikusabb domináns→szubdomináns lépést, az V. fokú alaphelyzetű hármashangzatról a IV. fokúra való mozgást (részletesen erről később).

Most pedig röviden összefoglaljuk a kérdéses funkciójú akkordokat a dúr és moll hangnemek konvergenciatartományainak eddig vizsgált elemei közül.

1. A III. fokú alaphelyzetű hármashangzat dúrban (dúr hangnemben) átmenet a tonikai és szubdomináns funkció között: mivel moll akkord, elég stabil, de tartalmazza a hangnem vezetőhangját. Önmagában gyenge domináns, főleg mivel két hangját is tartalmazza a tonikai főhármashangzatnak. Ha dominánsként oldódik, akkor leginkább VI. fokra (autentikus lépéssel). Viszont a domináns főhármasnak is két hangját tartalmazza. Szextfordítása már erősebb domináns érzetet kelt, ezt szokták alkalmazni disszonáns szubdominánsok és az V. fok közé közbeiktatva.

   Disszonáns szubdominánsok V. fokra vezetésére mindenfajta hangnemben használhatjuk az I_4^6-et. Ez meglepő lehet: hogyan válik a tonikai főhármashangzat egyik fordítása domináns funkciójúvá, kötelezően a domináns főhármashangzatra vagy az abból származó öt-szeptimre vezető akkorddá? A kérdés megválaszolásához először tegyük fel a kérdést fordítva: honnan származik eredetileg az I. foknak ez a fordítása, amely domináns hangzású és kötelezően V. fokra vezet? A zenetörténeti magyarázat az, hogy az V. fokú hármasnak azt a késleltetését, amikor a terchang késik a felső váltóhangjáról[24], a barokkban előszeretettel használták (például Bach is a koráljaiban), majd a korszak végén elkezdték úgy használni, hogy a kvinthang is késsen, így viszont a késleltetett akkord éppen az egy-kvartszext lett, amely stabil, konszonáns hangzásával a bécsi klasszicizmusban már önálló (korál formájú négyszólamú zeneműben egész hangot elfoglaló), kötelezően az V. fokra vezető hármashangzatként is megállja a helyét. E dolgozat keretein kívül vizsgáltuk, hogy bármilyen disszonáns szubdomináns akkord, amely az V. fokra bizonyos szerkesztési elvek miatt nem is vezethető közvetlenül, az I_4^6-en keresztül továbbvezethető oda. A leggyakoribb I_4^6-ot tartalmazó akkordmenet minden hangnemben az $I \to IV \to I_4^6 \to V \to I$ teljes autentikus zárlat.

2. Mollban az a különbség ehhez képest, hogy a III. fok bő hármashangzat, így erősen disszonáns, vonzódik az I. fokhoz úgy is, hogy két hangjuk közös. Nem esünk akkor sem komoly hibába, ha tisztán domináns funkciójúnak tekintjük a moll III. fokot. A III^6 itt is lehet V. fokra átvezető akkord, de mivel önmagában is disszonáns, óvatosan kell vele bánni a szubdominánsról való átvezetésnél!

3. Dúrban a VI. fok mollhármas, miközben mindhárom főhármas dúr. Így ez az akkord csak színesíti a hangnemet, kevésbé erős és kemény hatású, mint azok, stabil tonikai funkciójú, de nem ad befejezettségérzetet. Gyakran vezet II. fokra (autentikus lépés!) és ennek analógiájára IV.-re is. Általában dúr és moll hangnemben is az V-VI. lépést *álzárlatnak* nevezzük, mivel gyakran használják meglepő fordulatként: ahelyett, hogy egy V-I. lépéssel befejeződne a darab, VI. fok jön, ami után még folytatódnia kell a zenének.

4. Mollban viszont a VI. fok dúrhármas, miközben a főhármasok közül csak a domináns dúr (és az is csak a módosított vezetőhang miatt), a többi moll. Emiatt bár van tonikai jellege a VI. foknak és álzárlatot is lehet a segítségével írni mollban is, bizonyos helyzetekben szubdomináns hatást kelthet.

[23] A szó denotatív értelmében autentikus és plagális lépésekről csak főhármashangzatok között beszélhetünk, de szokás minden $D \to T, T \to SD$ lépést autentikusnak és minden ellenkező irányú lépést plagálisnak nevezni.

[24] A késleltetett akkord hangjai V., I., II., V. fokúak, azaz szó-dó-ré-szó szolmizációjúak.

5. A skálahangokból felépülő (ún. diatonikus) szeptimakkordok funkciós tulajdonságai a következők. Az I. fokú szeptimakkord, annak ellenére, hogy tartalmazza a hangnem vezetőhangját, mégis szubdomináns felé vezet: hamarosan látjuk, hogy a szeptimhang lefelé való vonzódása erősebb, mint a vezetőhang felfelé tartása. Mollban rendkívül disszonáns az I. fokú szeptim, így nem gyakran használják. A II. fokú szeptimakkord – dúrban mollszeptim, mollban[25] „félszűk” (lásd a szeptimakkordok táblázatát!) – erős szubdomináns, minden fordításban gyakran használják, például Bach koráljai záró részében a II_5^6 és nem a IV a szubdomináns. A III. fokú szeptim dúrban mollszeptim, ez gyengén vonzódik a hangnemben szintén nem meghatározó szerepű VI. fokra – ezt is csak ritkán használják. Mollban a III. fokú hármashoz hasonlóan disszonáns, erős domináns a $\mathrm{III}_{5\sharp}^7$ is, de használata nem túl gyakori. A IV. fokú szeptimet sem dúrban, sem mollban nem tudjuk skálahangra oldani, hiszen a VII. fok szűkített, és alapja nincs tiszta kvintre a négy-szeptim alapjától, így ezen szeptimet alig tudjuk használni a hangnemen belül maradva. Az V. fokú szeptimről láttuk, hogy a legfontosabb dominánsok közé tartozik minden hangnemben. A VI. fokú szeptimről dúrban hasonló mondható el, mint a III. fokúról: ritkán használatos, a II. fokra vonzódik. Mollban nem tudjuk a hangnemen belül oldani, ezért csak hangnemváltásra, modulációra használható. A VII. fokú szeptim mollban igen erős domináns, dúrban ennek analógiájára alkottuk meg a hét-szűkszeptimet, a dúr hangnemben a „félszűk” VII^7 önmagában csak gyenge domináns, mollos hatást kelt, nem hangzik kiváltó akkordnak.

5.4. Pár alapvető fogalom modulációkról

A *modulációk*, azaz különböző hangnemek közötti váltások részletes leírása és vizsgálata is meghaladja ezen TDK-dolgozat kereteit. Azonban a klasszikus összhangzattan axiómarendszerének vázolásához és a tonalitás alaptételéhez néhány alapvető definíciót és szabályt rögzítenünk kell a modulációkkal kapcsolatban. A modulációtól első körben elvárjuk, hogy megvalósítható zeneművön folyjon le, közben ne legyen göngyölítési pont, ne tartson végtelen sokáig és a hangterjedelmi korlátozások se sérüljenek. Tehát:

5.9. Definíció (Moduláció). *Ha az M szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműhöz léteznek olyan T_1 és T_2 hangnemek, hogy $\mathcal{D}(\mathcal{M})$-nek létezik olyan $Z = [a, b[$ részhalmaza, amelyre $M|_Z$ megvalósítható zenemű, és létezik olyan $r_1 > 0$ valós szám[26], amelyre $\overline{B_{r_1}(a) \cap (\mathbb{R} \backslash Z)}$ egészén M gyengén tonális T_1 hangnemmel és létezik olyan $r_2 > 0$ valós szám, amelyre $\overline{B_{r_2}(b) \cap (\mathbb{R} \backslash Z)}$ egészén M gyengén tonális T_2 hangnemmel, akkor $\forall W \subseteq Z$-re azt mondjuk, hogy W-n moduláció van a T_1 hangnemből a T_2-be.*

Később sokkal szigorúbb feltételeket fogunk megszabni a modulációknak, mostani célunkhoz ezt az egyet rögzítjük (és a későbbiekben is mindig megtartjuk):

1. Szerkesztési elv (Első modulációs axióma). *Legyen M olyan szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, amely megfelel a klasszikus összhangzattannak és tartalmaz egy T_1 hangnemből egy T_2 hangnembe vezető modulációt (ez a moduláció esetleg érinthet más hangnemeket is). Ekkor $\exists\, [a, b[\subseteq \mathcal{D}(\mathcal{M})$[27], hogy $M(a)$ a T_1 első fokú alaphelyzetű főhármashangzata, $M(b-) = \lim_{t \to b-0} M(t)$ a T_2 első fokú alaphelyzetű főhármashangzata, a-ban M gyengén tonális, T_1 hangnemmel, b-ben pedig szintén gyengén tonális, T_2 hangnemmel, és $[a, b[$ a legbővebb olyan intervallum, amelyen az adott $T_1 \to T_2$ moduláció zajlik.*

Minden a rendelkezésünkre áll már ahhoz, hogy definiáljuk a funkciós tonalitást.

5.5. A tonalitás topologikus definíciója

5.10. Definíció (Funkciós tonalitás – 1. Zenemű hangneme egy pontban). *Legyen M négyszólamú zenemű, t pedig torlódási pontja $\mathcal{D}(\mathcal{M})$-nek. Azt mondjuk, hogy M tonális a t pontban és hangneme T, ha létezik olyan U összefüggő nyílt környezete t-nek, hogy $\mathrm{V} = U \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) \setminus \{t\}$-re az alábbi feltételek mindegyike teljesül:*

[25] Pikárdiai I. fok esetén is!

[26] Azaz valamely lejátszás szerinti időtartam szekundumban mérve.

[27] Hangsúlyozzuk, hogy $[a, b[$-n egyáltalán nincs generálpauza!

(i) M *gyengén tonális* V*-n* T *hangnemmel,*

(ii) $M[V]$*, azaz a* V*-n megszólaló akkordok halmaza tartalmaz a* T *hangnemben tonikai, szubdomináns és domináns határozott funkcióval rendelkező akkordot is,*

(iii) ha $t \notin Int\ \mathcal{D}(\mathcal{M})$*, akkor* t*-be csak hármashangzat értékű pontjai torlódnak* $\mathcal{D}(\mathcal{M})$*-nek.*

5.11. Definíció (Funkciós tonalitás – 2. Zenemű modulációbeli pontja). *Legyen* M *szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű,* t *pedig torlódási pontja* $\mathcal{D}(\mathcal{M})$*-nek. Azt mondjuk, hogy* M *tonális a* t *pontban és* t*-ben modulál egy* T_1 *hangnemből egy* T_2*-be, ha létezik olyan* U *összefüggő nyílt környezete* t*-nek, amelyhez létezik olyan* $\mathrm{V} \supseteq U$ *balról zárt, jobbról nyílt intervallum, amelynek egészén a 5.9 definíció szerint moduláció zajlik* T_1*-ből* T_2*-be, és ez a moduláció a [később megadandó] szerkesztési elvek szerint a klasszikus összhangzattannak megfelel.*

Az M szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneművet a t torlódási pontjában tehát mindkét leírt esetben tonálisnak nevezzük; a pontbeli hangnemet általános négyszólamú zeneműre is tudtuk definiálni. (Más lehetőség nincs a pontbeli funkciós tonalitásra.) A továbbiakban az „M hangneme t-ben T" kijelentés mindig funkciós tonalitásra fog utalni. Az itt definiált pontbeli hangnem létezése a klasszika szemlélete szerint már elégséges a tonalitás érzésének biztosításához – a szerkesztési elvek azt mondják meg, hogy a pontbeli hangnemet biztosító akkordok hogyan (ne) kövessék egymást. A modulációk leírásánál láthatjuk, hogy a modulációk kezdő- és zárószakaszában előfordulhat, hogy egy x pontnak U környezete azt tanúsítja, hogy x-ben még megvan a kezdőhangnem vagy már beállt a záróhangnem, egy (általában U-tól különböző) V környezete viszont azt, hogy x a definíció szerint modulációs pontja M-nek. Általában ilyenkor $U \neq V$.

Az is könnyen látható, hogy ha az M zenemű t pontbeli tonalitást és hangnemet vagy modulációt tanúsító nyílt környezet U, akkor U minden pontjában tonális M és U tanúsítja ezekben a pontokban is a hangnemet vagy modulációt is. Most definiáljuk a zenemű tonalitását is:

5.12. Definíció (Tonális zenemű). *Legyen* M *szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű (és* T *hangnem),* $X \subseteq \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$*.* M *tonális* X*-en (és* X*-en a hangnem* T*), ha* X *minden torlódási pontjában tonális (és a hangnem minden ilyen pontban* T*).* M *tonális (és* M *hangneme* T*), ha* $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$*-en tonális (és a hangnem* T*) és* $\inf\ \mathcal{D}(\mathcal{M})$*-ben és* $\sup\ \mathcal{D}(\mathcal{M})$*-ben is van hangnem (és ez* T*).*

Most pedig megadhatjuk a hármashangzat felrakási szabályainak (2.6 definíció) hiányzó nyolcadik pontját:

5.13. Definíció. *(viii) Ha a* H *hármashangzat egy* M *négyszólamú zenemű egy olyan* t *pontjában szól, ahol* M *tonális és a hangnem* T*, akkor* H *minden* T*-hez képest módosított hangot legfeljebb egy szólamban tartalmaz.*

6. Az axiómarendszer konstrukciója és viszonya a tonalitáshoz

A klasszikus összhangzattan négyszólamú összhangzattanpéldákra vonatkozó szerkesztésű elvei egyrészt a hármas- és négyeshangzatok engedélyezett fajtáira és felrakásaira, másrészt az összhangzattanpéldák topologikus jellemzőire (például más, mint szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, ebben a modellben nem is felelhet meg a klasszikus összhangzattannak), harmadrészt pedig az akkordok sorrendjére, az akkordváltások tulajdonságaira vonatkoznak. Ezek közül az elsővel már csaknem végeztünk, egy kiegészítést teszünk majd csak a tonalitást is használva. A másodikkal folytatjuk most és csak utána térünk rá a harmadikra – így logikusabb, ráadásul a harmadik ponttal nem is fogunk ezen dolgozat keretén belül végezni, mivel $KT(T)$-t semmilyen T hangnemre nem fogjuk teljesen megadni, és sok olyan akkordról nem ejtünk szót, amelyek használatához újabb akkordváltási szerkesztési elveket kellene bevezetnünk.

6.1. Kijavíthatósági kritérium a négyszólamú összhangzattanpéldákra

Most megadjuk a négyszólamú összhangzattanpéldák klasszikus összhangzattannak való, egy adott pontbeli megfelelésének szükséges és elégséges feltételét, lényegében anélkül, hogy az akkordváltásokra vonatkozó szerkesztési elvekből bármit ismernénk. Ennek segítségével bebizonyítjuk a tonalitás alaptételét, és utána röviden, kevés példával – illeszkedve a formai követelményekhez – megnevezzük ezeket a szerkesztési elveket is.

6.1. Definíció (Kijavítható zenemű). *Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, $a \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, $b \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \cup \{\infty\}$, $N = [a, b[\subseteq B(M)$.*
***Ha** N-re a következő feltételek mindegyike teljesül:*

(i) akkordjai ($Ran(M|_N)$ elemei) hosszának infimuma[28] *pozitív,*

(ii) N mint (esetleg felülről nem korlátos) intervallum felosztható véges sok olyan diszjunkt, N-et lefedő balról zárt, jobbról nyílt intervallumra, hogy a $t = 0$ ponttól pozitív irányba haladva felsorolva az intervallumokat $(I_1, I_2, \dots I_{2n+1})$, $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots 2n+1\}: \ I_i \cap \mathcal{D}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$, minden $0 < k \leq n$ pozitív egészre a teljes I_{2k} halmaznak a $\mathcal{D}(\mathcal{M})$-mel vett metszetén a klasszikus összhangzattannak az akkordváltási pontokon kívül megfelelő moduláció zajlik, minden $0 \leq k \leq n$ egészre pedig $I_{2k+1} \cap \mathcal{D}(\mathcal{M})$-hez pedig egyértelműen létezik egy olyan T_k hangnem, amelynek konvergenciatartományába tartozik minden I_{2k+1}-en megszólaló akkord, és ezen akkordok között van T_k-nak határozott tonikai, szubdomináns és domináns funkcióval rendelkező akkordja is,

(iii) N-en minden dallamkezdőpontba és dallamvégpontba $\mathcal{D}(\mathcal{M})$-nek csak hármashangzat értékű pontjai torlódnak,

a) és $t \in Int\, \mathcal{D}(\mathcal{M}) \cap N$, akkor ha t-ben nincs olyan akkordváltás, amelyet az akkordváltási pontokra vonatkozó szerkesztési elvek tiltanak,
***akkor** azt mondjuk, hogy M t-ben megfelel a klasszikus összhangzattannak, és N a t egy klasszikus környezete.*
b) Ha $t_0 \in N$ dallamkezdő pontja $M|_N$-nek, akkor a szigorú négyszólamú szerkesztés definíciója szerint $\lim_{t \to t_0+} M(t) = M(t_0)$. Ebben az esetben, ha $\exists r > 0: \ \forall x \in [t_0, t_0 + r[: \ x \in N$ és x-ben M megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor M t_0-ban is megfelel a klasszikus összhangzattannak. Ha t_0 nem az N legkisebb eleme, akkor az N-t a t_0-nak is klasszikus környezetének mondjuk.

6.2. Definíció (Klasszikus összhangzattannak megfelelő zenemű). *Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, $X \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{M})$. M X-en megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha X minden pontjában megfelel a klasszikus összhangzattannak úgy, hogy az összes pontnak van $K \supseteq X$ klasszikus környezete. M megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha $\mathcal{D}(\mathcal{M})$-en megfelel a klasszikus összhangzattannak.*

A kijavítható zenemű elnevezése arra a – szolfézs- és összhangzattan-oktatás alapját adó – szemléletre épül, hogy ha megadjuk, hogy egy összhangzattanpélda milyen nevű hármas- és négyeshangzatokat tartalmazzon és milyen sorrendben, milyen időpontokban történő akkordváltásokkal, akkor ha bizonyos alapvető tonalitási és megvalósíthatósági feltételek teljesülnek, akkor már csak az a kérdés, képesek vagyunk-e a megadott akkordokat úgy egymás után fűzni, hogy az akkordváltások is szabályosak legyenek. Kérdés viszont, hogy ez a szemlélet minden esetben helyes-e. Vagyis ha nincs olyan akkordnevek közti akkordváltás, ami eleve tilos a klasszikus összhangzattan szerint (például valamely hangnemben az V $\to$ IV lépés), akkor az ügyes növendék tényleg képes-e az akkordokat úgy felrakni, hogy valóban a klasszikus összhangzattannak megfelelő művet kapjon, vagy elképzelhető az is, hogy bármely két szomszédos, előre megadott akkordnév között létezik szabályos váltás, de mégsem tudjuk a teljes akkordsorozat elemeit úgy felrakni, hogy az összes váltás megfeleljen a klasszikus összhangzattannak. Az előre megadott akkordsorozatok kijavíthatóságának, *feloldozhatóságának*[29] kérdései érdekes és korántsem lezárt kutatási irányt adnak, ezt is fogjuk majd – de már ezen dolgozat keretein kívül – tárgyalni.

[28] Ha ez az infimum valamely lejátszásra pozitív, akkor minden lejátszásra pozitív, vö. a Ligeti–Boulez-nullmértékűség 4.4 ekvivalens feltételével!

[29] Az elnevezés onnan származik, hogy több szólamvezetési és akkordváltási tilalom, például a tritonuszra és a bővített szekundra vonatkozó korlátozások a katolikus egyháztól származtak a középkorban és a kora újkorban, az egyház akkori vélekedése szerint ezek a zenei jelenségek az ördög művei.

6.2. Az axiómarendszer viszonya a tonalitással – a tonalitás alaptétele

Eljutottunk munkánk fő eredményéhez, a tonalitás alaptételéhez. Mielőtt megfogalmaznánk és bebizonyítanánk, néhány megjegyzést szeretnék tenni a tétel jelentőségével és születésével kapcsolatban. Közvetlenül kapcsolódva a zenemű kijavíthatóságának definíciója után megfogalmazott gondolatokhoz kijelenthetjük, hogy az összhangzattan (és különösen annak oktatása) szemlélete szerint a tétel igaz. Ez biztosítja azt, hogy jogosan definiáltuk a tonalitást és a klasszikus összhangzattannak való megfelelést úgy, ahogyan tettük. (Hiszen másfajta definíciókkal nem feltétlenül jutnánk el ahhoz, hogy igaz a most következő tétel.) A tételt 2012 februárjában, ezen dolgozat témájáról való beszélgetésünk közben sejtette meg Vécsey Máté évfolyamtársam, de ő akkor még alig ismerte az alakulóban lévő dolgozat felépítését és definícióit, így a tétel pontos kimondásához és első bizonyításához én jutottam el 2012 júliusára. A négyszólamú szerkesztéssel kapcsolatos fogalmak átalakítása után 2013 júliusában született meg az itt olvasható, letisztultabb bizonyítás.

6.1. Tétel (A tonalitás alaptétele). *Legyen M megvalósítható szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű!*
M tonális ($\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$-en) $\Leftrightarrow$ az akkordváltási pontjainak $A(M)$ halmazán kívül $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ minden pontjában megfelel a klasszikus összhangzattannak.

6.1. Tétel bizonyítása. $\Leftarrow$

Megmutatjuk, hogy a tétel feltétele elégséges a tonalitásra. Ha M a véges, izolált pontokból álló $A(M)$-en kívül megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor M kezdőpontján kívül $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ minden pontjának létezik $\mathcal{D}(\mathcal{M})$-et tartalmazó klasszikus környezete. Ezért $B(M)$-re teljesül a kijavítható zenemű definíciójában szereplő (i), (ii) és (iii) pont is. Így $B(M)$ felosztható a kijavítható zeneművekre jellemző intervallumrendszere, legyen egy ilyen intervallumrendszer: $I_1, I_2, \dots I_{2n+1}$ ($\exists n \in \mathbb{N}$).

Ha $0 < k \leq n$ egész, akkor I_{2k}-ban T_k és T_{k+1} között zajlik moduláció. I_{2k-1} vagy I_{2k} M általi képében az első modulációs axióma és a moduláció 5.9 definíciója szerint megtalálható T_k-nak I. fokú alaphelyzetű hármashangzata, amely ezt a modulációt (ehhez a modulációhoz tartozó legbővebb intervallumot) nyitja, az ehhez tartozó intervallum kezdőpontját jelölje x_k, hasonlóan I_{2k} vagy I_{2k+1} M általi képében szerepel T_{k+1}-nek I. fokú alaphelyzetű hármashangzata, amely a modulációt zárja, az ehhez tartozó intervallum végpontját jelölje y_k. Most tekintsük $B(M)$-nek az M kezdő- és végpontja valamint az összes x_k és y_k pontok által való balról zárt, jobbról nyitott intervallumokra: $J_1, J_2, \dots J_{2n+1}$ való felosztását. Világos, hogy $\forall k$-ra ($0 < k \leq n$ egész) $J_{2k} \supseteq I_{2k}$, ezért $\forall k$-ra ($0 \leq k \leq n$ egész) $J_{2k+1} \subseteq I_{2k+1}$. $\forall t \in Int\ J_{2k} \cap \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$-ra $Int\ J_{2k}$ a t tonalitást és $T_k \to T_{k+1}$ modulációt garantáló összefüggő nyílt környezete. $\forall t \in Int\ I_{2k+1} \cap \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$-re pedig $Int\ I_{2k+1}$ a t tonalitást és T_k hangnemet garantáló összefüggő nyílt környezete. Ezzel a $(J_i)_{i=1}^{2n+1}$ felosztás osztópontjain kívül már $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ minden pontjában igazoltuk a tonalitást. Könnyen látható, hogy $\forall k$-ra x_k-ban a hangnem T_k, hiszen $\exists \varepsilon > 0$, hogy $]x_k - \varepsilon, x_k[$ egészén a hangnem T_k, $[x_k, x_k + \varepsilon[$-on pedig T_k I. fokú hármashangzata szól alaphelyzetben, így például $I_{2k-1} \cup B_\varepsilon(x_k)$ a T_k hangnemet garantáló összefüggő nyílt környezete x_k-nak. Hasonlóan igazolható, hogy $\forall l$-re y_k-ban a hangnem T_{k+1}. Az is triviálisan igaz, hogy M kezdőpontjában T_1, M végpontjában T_{n+1} a hangnem. Így M a $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$ minden pontjában tonális, tehát tonális.

$\Rightarrow$

A tétel feltételének szükségessége: tekintsük az M tonális, megvalósítható négyszólamú összhangzattanpéldát. Vegyük $\forall t \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$-nek egy-egy U_t tonalitást garantáló összefüggő nyílt környezetét úgy, hogy ha létezik t-nek olyan U_t környezete, amely hangnemet és nem modulációt tanúsít, akkor ilyet válasszunk. Mivel $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ korlátos részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, feltehető, hogy $\forall t \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$-re U_t korlátos nyílt intervallum. Ezen környezetekkel megkapjuk a $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$ egy nyílt befedését: $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})} \subseteq \bigcup_{t \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}} U_t$, ennek pedig $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$ kompaktsága miatt létezik véges részbefedése: $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. (Az U_i-ket kezdőpont szerinti növekvő sorrendben indexeljük.) U_1-ben a tonalitás definíciója szerint van hangnem, ezt jelölje T_1 . Kezdjünk meg egy szekvenciális eljárást $\mathrm{V} = U_1$-gyel és $T = T_1$-gyel, amelynek célja a $B(M)$-nek a kijavítható zenemű definíciójában szereplő intervallumok rendszerére való felosztása. Döntsük el, hogy a következő két eset közül melyik áll fent:

1. *Ha $\forall k > j$-re U_k-ban ugyanaz a hangnem, mint V-ben (vagy $\sup\ V$ az M végpontja), akkor a kijavíthatóságot tanúsító felosztáshoz tartozó következő, egyben utolsó (legnagyobb kezdőpontú) balról zárt,*

jobbról nyílt intervallum legyen $(\bigcup_{k>j} U_k) \cup V \cap B(M)$. *Ennek egészén* M *tonális és a hangnem* T, *dallamkezdő- és dallamvégpontba csak hármashangzat értékű pontok torlódhatnak. Ezzel befejeztük az eljárást.*

2. *Ha viszont az előző pont nem teljesül, akkor* $\exists k > j$, *hogy* U_k*-ban van hangnem,* T' *(hiszen* $\sup\ \mathcal{D}(\mathcal{M})$*-ben van hangnem a tonalitás definíciója szerint). Ekkor legyen* s *a* $B(M) \cap [\inf\ V, \sup\ U_k[$ *azon pontjainak szuprémuma, ahol a hangnem* T *és* I *a* $B(M) \cap [\inf\ V, \sup\ U_k[$ *azon pontjainak infimuma, ahol a hangnem* T'. *(Mivel* $\mathbb{R}$ *teljesen rendezett test, ezek léteznek.) Mivel a pontbeli tonalitás egyben gyenge 1-tonalitást is jelent,* $s \leq i$. *Ha* $s < i$, *akkor az* $[s, i[$ *intervallumon végig* $T \to T'$ *moduláció zajlik, amely az akkordváltási pontokon kívül a klasszikus összhangzattannak megfelel (ebből következik, hogy egyáltalán nem tartalmaz dallamkezdőpontot és dallamvégpontot sem). Vegyük hozzá a kijavíthatóság definíciója szerinti felosztás eddig meglévő intervallumaihoz* $[\inf\ V, s]$*-et (mint* T *hangnemű zeneműrészletet) és* $[s, i[$*-et (mint* $T \to T'$ *modulációs szakaszt) és vezessünk be új* T*-t és* V*-t:* $T := T'$, $\mathrm{V} := [i, \sup\ U_k[$, *majd térjünk vissza az eljárás elejére.*

Valahányszor visszatérünk az eljárás elejére, az aktuális V *végpontja mindig legalább eggyel nagyobb sorszámú* U_k *végpontja, mint az előző körben. Így legfeljebb* n*-szer haladunk végig az eljáráson, és ha eljutunk oda, hogy* $\sup\ V = \sup\ \mathcal{D}(\mathcal{M})$, *az eljárás abban a körben már biztosan véget ér (és lehetséges az is, hogy ide nem is jutunk el). A kapott felosztás a zenemű kijavíthatósága minden pontjának megfelel, páratlan sok egymáshoz csatlakozó, diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt intervallumra osztjuk fel* $B(M)$*-et, a páratlan indexűekben hangnem van, a páros indexűeken pedig a szomszédos intervallumok hangnemei közti, az akkordváltási pontokon kívül a klasszikus összhangzattannak megfelelő moduláció. Így* $\mathcal{D}(\mathcal{M}) \backslash A(M)$ *minden pontjának* $B(M)$ *biztosan klasszikus környezete.*

A tétel feltétele a kijavítható, de nem megvalósítható M zeneműre (az ilyen zeneműnél $\exists t_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, T hangnem: $\forall t > t_0 :\ t \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}\ \Rightarrow t$-ben a hangnem T) is elégséges, de nem szükséges a tonalitáshoz. Ellenpéldának vegyünk egy tonális megvalósítható zeneművet, amelynek kezdő- és záróhangneme is T_1, és tartalmaz valamely $T_1 \neq T_2$ hangnemre $T_1 \to T_2$ és $T_2 \to T_1$ modulációt is. Ezt a zeneművet periodikusan $[\inf\ \mathcal{D}(\mathcal{M}), \infty[$-re kiterjesztve olyan tonális zeneművet kapunk, amely nem osztható fel a kijavítható zeneművekre jellemző intervallumrendszerre, így nem felel meg egyik pontjában sem a klasszikus összhangzattannak. A feltétel szükségességét a bizonyításból kiolvasható módon $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$ kompaktsága biztosítja a megvalósítható esetben.

6.3. Elemi akkordváltási szabályok (szerkesztési elvek)

Ismét olyan fejezethez jutottunk, ahol nem érdemes a matematikai formalizálást túlzásba vinni. Egy esztétikai szabályrendszert akarunk leírni, és bár a szabályrendszer szigorú és preskriptív, egy adott akkordváltás vagy szólamvezetés elfogadásának vagy elutasításának kérdésénél sokszor nem logikailag pontosan leírható szabályok, hanem a zeneirodalmi gyakorlat és esztétikai szempontok alapján döntünk. Az is fontos szerepet játszik az akkordváltások elbírálásánál is, hogy milyen jellegű összhangzattanpélda-írásról van szó: megadott akkordsorozatot akarunk felépíteni a szerkesztési elveknek megfelelően, megadott basszust vagy szopránt harmonizálunk, esetleg a szigorú négyszólamú szerkesztéshez közel álló létező zenemű egyes lépéseinek helyességét akarjuk az akkordok alapján elbírálni. Különösen igaz ez a legkisebb mozgás elvével kapcsolatos döntésekre.

Általában a *lépés* az összhangzattani szóhasználatban két különböző dolgot is jelent. Egyrészt ha azt mondjuk, hogy *valamely szólam lép*(ésszerűen mozog) egy adott akkordváltási pontban, az azt jelenti, hogy az akkordváltásnál következő hang egy szekundra van az előzőtől. Másrészt ha H és G egymás után következő hármas- illetve négyeshangzatnevei egy négyszólamú összhangzattanpéldáknak, akkor szokás $H \to G$ *lépés*ről beszélni, ahogy $H \to G$ akkordváltási pontról is. Azt mondjuk, hogy egy adott szólamban *a közös hangot megtartjuk* egy adott t akkordváltási pontban, ha a pont előtti akkord azonos fokszámú az utána következővel *a zenemű lejegyzéséhez használt* T *hangnem szerint.* A szerkesztési elvek betartásának gyakorlatát néhány (természetesen nem moduláló, hanem végig egy adott dúr vagy moll hangnemben lévő) példával is illusztráljuk, amelyek azt is mutatják, hogy leírt elméletünknek létezik modellje (vagy legalábbis itt nem találtunk az elméletben inkonzisztenciát).

Az itt leírt szerkesztési elvek alkalmazására sorszámozott példákat is mutatunk, ezek a dolgozat végén lévő MusixTeX fájlban láthatók.

2. Szerkesztési elv (Szeptimhang-axióma). *Legyen H olyan szeptimakkord, G pedig olyan hármas- vagy négyeshangzat, amely szerepel egy adott T hangnem konvergenciatartományában, t pedig a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M négyszólamú összhangzattanpélda egy $H \to G$ akkordváltási pontja.*

Ha M t-ben megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor G és a szólamvezetés olyan, hogy M H szeptimhangját tartalmazó szólama lépésszerűen lefelé mozog vagy megtartja a közös hangot. Ez a szabály minden más, erre a szólamra vonatkozó szerkesztési elvet – így például a most következő vezetőhang-axiómát is – felülír.

3. Szerkesztési elv (Vezetőhang-axióma). *Legyen t a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M négyszólamú összhangzattanpélda egy $H \to G$ akkordváltási pontja. Tegyük fel, hogy $\exists T$ hangnem, amelyre $H, G \in KT(T)$ és H tartalmazza a T vezetőhangját. Ekkor:*

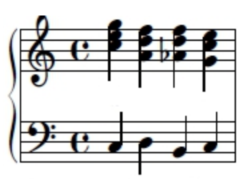
(i) H pontosan egy szólamban tartalmazza ezt a vezetőhangot, ellenkező esetben nem

(i) Ekkor a szoprán lépésszerűen felfelé mozog t-ben vagy megtartja a közös hangot.

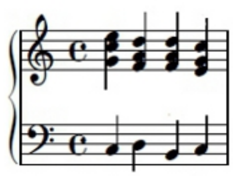
(ii) Tegyük fel, hogy t-ben van hangnem, T_0. Ekkor ha T vezetőhangja a T_0 módosított hangja, akkor ez bármely szólamban van, ez a szólam t-ben lépésszerűen felfelé mozog vagy megtartja a közös hangot.

Bár azt mondtuk, hogy csak a domináns szeptim és a szűkített szeptim rendelkeznek a kiváltó (domináns) tulajdonsággal, a szeptimhang-axióma mégis domináns szerepet ad a többi szeptimakkordnak is. Például a C-dúr hangnemben tekintjük a „félszűk" VII. fokú diatonikus szeptimet, azt pontosan ugyanúgy kell III. fokra vezetni, mint a valóban domináns hét-szűkszeptimet ($\mathrm{VII}^{7\flat}$):

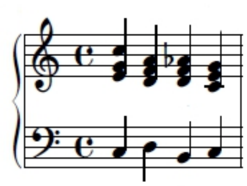
Kottapélda a két akkord azonos vezetési módjáról: 1a, 1b, 1c.



1a) I^5 II $\mathrm{VII}^{7\flat}$ I



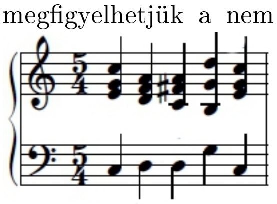
1b) I^3 II VII^7 I



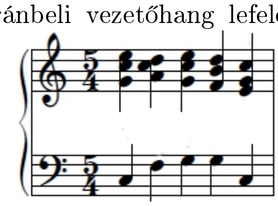
1c) I^8 II $\mathrm{VII}^{7\flat}$ I

Vagy szintén C-dúrban: a váltódomináns szeptim ($\mathrm{II}^7_\sharp$), azaz a domináns G-dúr hangnem domináns szeptime, amely a C-dúr hangnemhez képest módosított (fi szolmizációjú) vezetőhangot is tartalmaz, így nagyon erősen vezet az V. fokra. A szeptimhang- és a vezetőhang-axióma miatt ezzel az akkorddal pontosan megegyező módon kell az V. fokra vezetni a a diatonikus kettő-szeptimet, amely egy módosított hang nélküli mollszeptim, tehát a felhangrendszer alapján lényegesen gyengébben vonzódik a domináns főhármashangzathoz.

Kottapélda a két akkord azonos vezetési módjáról: 2a, 2b. A 2b) példa utolsó akkordváltásánál megfigyelhetjük a nem szopránbeli vezetőhang lefele való, szabályszerű tercugrását az I. fok kvintjére.



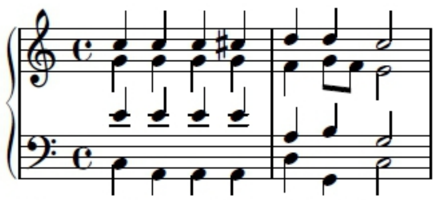
2a) I^8 II $\mathrm{II}^7_\sharp$ V I



2b) I^3 II^6_5 I^6_4 V^7 I

Leggyakrabban akkor tartjuk meg közös hangként a szeptimhangot, ha egy szeptimakkord nem egyből oldódik a neki – a szeptim- és vezetőhang-axióma szerint – megfelelő hármas- vagy négyeshangzatra, hanem először a nála erősebb, módosított hangot tartalmazó mellékdomináns változata szólal meg és azt vezetjük tovább, ugyanoda, ahova már a gyengébb szeptimakkord is vezet. (Ennél persze sokkal összetettebb példák is vannak a szeptimhang megtartására és az utána következő fordulatokra.)

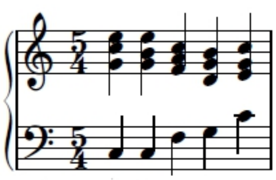
Kottapélda: 3.; a II. fokú mollhármasra vezet már a diatonikus hat-szeptim is, de ez mellékdomináns ($VI^7_\sharp$) szeptimre módosítva még erősebben vonzódik a II. fokhoz. A $VI^7 \to VI^7_\sharp$ váltásnál egyedül a domináns szeptim módosított vezetőhangját tartalmazó szólam mozog. Igen gyakori mind Bachnál, mind a klasszikában az V^{87} módon jelölt *átmenőszeptim*, amely topológiai szempontból tekinthető egy négyszólamú korálokra jellemző átmenőhang-mozgásnak vagy akár egy négyszólamú összhangzattanpélda olyan akkordváltásának, ahol nem mindegyik szólam szólaltat meg ténylegesen új hangot. Természetesen az átmenőszeptim szeptimhangjára is érvényes a szeptimhang-axióma. Bach koráljaiban igen gyakran szerepel az előbb látott (nem szopránbeli) szeptimhang-leugratás a művet záró $V \to I$ lépésnél, különösen ha az V. fokon átmenőszeptim van, lásd például az e fejezet végén látható 10b) példa utolsó akkordváltását!



3) I VI VI^7 VI$^7_\sharp$ II V^{87} I

A szeptimhang-axióma erősebb a vezetőhang-axiómánál is, így például az I. fokú diatonikus szeptimakkord szeptimhangját is mindig lépésszerűen lefelé kell vinni:

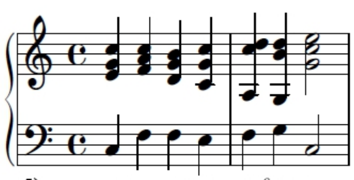
Kottapélda: 4.



4) I I^7 IV V I

Hangzásra is igen könnyen felismerhető a szeptimakkordok szekundfordítása. Az V. fokú szekund a szeptimhang-axióma miatt minden hangnemben I^6 akkordra oldódik, alaphelyzetű I. fokra nem mehet tovább.

Kottapélda: 5.



5) I^8 IV V^2 I^6 II$^6_5$ V I

Következnek az oktáv- és kvintpárhuzamra vonatkozó tilalmak. A klasszikus összhangzattan esztétikai axiómarendszere a párhuzamokat tehát nem rútnak vagy ördögtől valónak titulálja, hanem a *független szólamvezetés* megtartása érdekében veti el, kapcsolódva ahhoz az elvhez, hogy négyszólamú korálnak mind a négy szólama önálló, önmagában is értelmes dallam legyen – annak ellenére, hogy a figurációkat leszámítva minden pontban hármashangzatot vagy szeptimakkordot kell alkotniuk, ami nagy mértékben csökkenti a szólamok önállóságát. Ha két szólam között oktáv- vagy kvintpárhuzam van, az a klasszika szemlélete szerint olyan, mintha csak egy szólamot hallanánk. Ezen dolgozat keretén kívül, a feloldozhatóságról szóló fejezetben megkísérlem majd matematikai eszközökkel értelmezni, hogy mit is jelenthet pontosan a szólamfüggetlenség.

4. Szerkesztési elv (Oktáv- és kvintpárhuzamok kerülése.). *Legyen t a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű egy $H \to G$ akkordváltási pontja. Ha M t-ben megfelel a klasszikus összhangzattannak és a t-beli lekottázásra használt T hangnemben H két szólama (vagy–vagy–vagy)*

(i) (egész számú oktáv plusz) egy kvintre, azaz $(\mathrm{mod}\ 7)$ *5 fokra van egymástól,*

(ii) egész oktávra van egymástól, azaz fokszámuk megegyezik és legalább 10 félhang a távolságuk,

(iii) hangja megegyezik[30]*,*

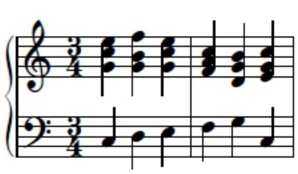
és nem teljesül, hogy G-nek ezen mindkét szólamában ugyanaz a hangja, mint H-nak, akkor G ugyanezen két szólama nem rendelkezik ugyanezzel az adott tulajdonsággal.

A párhuzamok tilalma miatt szomszédos fokú főhármashangzatok vagy szextakkordok között *ellenmozgást* használunk: példánkban dúr IV $\to V$ váltást tekintünk, itt a basszus fölfelé lép, minden további szólam lefelé mozog és így kerüljük el a párhuzamokat.

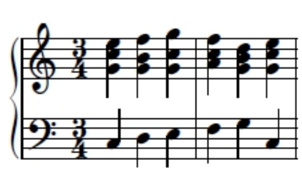
Kottapéldák az ellenmozgásról a szomszédos fokok között: 1a, 1b, 1c, 4.

A *Wolfgang Amadeus Mozart-kvintpárhuzam* (WAM5) olyan kvintpárhuzam, amelynél a szeptimhang sem a szabályos irányba mozog. Viszont nagyon jó hangzású kvintpárhuzam, és nem is a szólamfüggetlenséget veszélyeztető $T5 \to T5$, hanem mindig $SZ5 \to T5$ típusú, felfelé léptetett szeptimhanggal és leggyakrabban a szoprán és az alt között. Mozart gyakran használta $\mathrm{V}_3^4 \to I^6$ váltásoknál, a dolgozatunk ezen változában nem szerepelt bővített kvintszext $\to$ V. fok váltásoknál is[31]. Előbbi esetben van lehetőség az ilyen kvintpárhuzamot elkerülő szólamvezetésre, utóbbinál bizonyos helyzetekben nincsen. Megjegyezzük, hogy a klasszikus összhangzattan (és főleg az oktatása) a tercakkordok között előnyben részesíti az alapkettőzöttet, ha az valamilyen szerkesztési elv miatt nem hozható létre egy adott akkordváltásnál, akkor is a kvintkettőzöttet. Terckettőzött szextakkordot csak akkor szabad leírni, ha másfajtára nincs lehetőség – itt a szabályos változatnál például nincs, hiszen az egyik E hang a basszusban van rögzítve, a másik pedig a szeptimhang-axióma miatt kötelezően jelentkezik. Nem elvetendő gondolat, hogy a kvintkettőzött akkordra való váltás jobban hangzik, mint a terckettőzöttre történő.

Kottapélda: a szerkesztési elveknek megfelelő $\mathrm{V}_3^4 \to I^6$ váltásra a 6a, a Mozart-kvintpárhuzamra a 6b. Figyeljük meg, hogy a Mozart-kvintlépés után sokkal simább, kevesebb ugrást igényel az akkordvezetés, mint a terckettőzött egy-szextre való szabályos vezetés után! Az 1c példában pedig a hét-szűkszeptimről az első fokra való továbblépésnél elkerülhetetlen a Mozart-kvintpárhuzam.



6a) I V_3^4 I^6 IV V I



6b) I V_3^4 I^6 IV V I

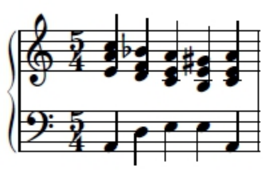
Ugyanakkor az érzékeny hangok kettőzésének tilalma miatt (lásd a 2.6 definíciót és kiegészítő pontját) több szextakkordfajta csak terckettőzött formában engedélyezett. Ilyen például a hét-szext: a VII. fokú hármas minden hangnemben szűk, és mivel alapja a vezetőhang, az nem szerepelhet két szólamban, tehát az alaphelyzetű akkordot és az alapkettőzött szextfordítást eleve el kell vetnünk a klasszikus összhangzattan

[30]Azaz a tiszta prímpárhuzamot is kerülni kell.

[31]A bécsi klasszikusoknál gyakori a Mozart-kvintpárhuzam, megtalálható található például Haydn C-dúr nagyszonátájában [Hob. XVI. 50.] vagy Mozart Varázsfuvolája nyitányának 189. ütemében.

szerint. Ugyanakkor a hármashangzat alapja és kvintje közti tritonusz eleve nagyon erős disszonancia, amit fölerősít az alap vezetőhang tulajdonsága a hangnemben, így a kvintkettőzött szextfordítást és a kvartszextfordítást is kizárjuk, így csak a terckettőzött hét-szext engedélyezett a fordítások közül. Ez erős dominánsa a hangnemnek, Bach koráljaiban mindig ezt az akkordot használja és a hozzá hasonló öt-terckvartot soha. A moll hangnem szűk II. fokának fordításaira és helyzeteire vonatkozó korlátozások nem ilyen szigorúak: a VII. foknál csak a vezetőhang tulajdonság miatt kizárt felrakások engedélyezettek. Azonban a moll II. foknak is a terckettőzött szextfordítás a leggyakrabban használt változata, a tritonusz túlzott erősségének mérséklése miatt. Sőt a moll hangnem kettő-szextből a II. fokú hang leszállításával létrejövő, tragikus hatású szubdominánsa, a $\mathrm{II}^{6\flat}$ *nápolyi szext* csak terckettőzött formában elfogadott.

Kottapélda a nápolyi szext használatára: 7. Ez első példánk arra is, amikor az I_4^6 segít a disszonáns szubdomináns hármashangzat V. fokra vezetésében.



7) $\mathrm{I}\ \mathrm{II}^{6\flat}\ \mathrm{I}_4^6\ \mathrm{V}\ \mathrm{I}$

Sem a dolgozat műfaja, sem terjedelme nem teszi lehetővé, hogy a bővített szekundlépéssel kapcsolatos vádak[32] okára fényt derítsünk és ezen vádakkal szemben megvédjük ezt a lépést. Azt a zenetörténeti megjegyzést fűzzük csak hozzá a most következő könnyen formalizálható szerkesztési elvhez, hogy Johann Sebastian Bach, akire még nem vonatkoztak a klasszikus összhangzattan preskriptív szabályai, zenekari és zongoraműveiben előszeretettel használta a bőszekundlépést, de négyszólamú koráljaiban mindig mellőzte. Ennek valószínűleg az volt az oka, hogy a zeneileg alacsonyan képzett, az elénekelendő korál kottáját gyakran csak helyben megismerő kórusénekeseket elbizonytalaníthatta, a szólamok önálló előrehaladását megtörhette volna, ha a középső szólamok valamelyikébe bővített szekundlépést írt volna a mester, a szopránban lévő cantus firmusokra nem volt jellemző ez a lépés (szemben rengeteg eurázsiai etnikum népzenéjével), amelyet Bach a basszusban is elkerült. Valószínűleg Bach koráljainak meghatározó hatása a később kialakított klasszikus összhangzattani axiómarendszerre az oka a bővített szekundlépés tilalmának, amelyet itt csak *vokális* művekre mondunk ki[33]. Haydn, Mozart és különösen Beethoven gyakran használták a bővített szekundlépést, de vokális művekben ők is lényegesen kevésbé, mint másutt (azért esetenként ott is: például Mozart a Requiem Dies irae tételében a szopránban).

5. Szerkesztési elv (Bővített szekundlépés kerülése.). *Ha t a a tonalitás alaptétele feltételeit teljesítő M négyszólamú, vokális szólamot is tartalmazó összhangzattanpélda $H \to G$ akkordváltási pontja, ahol M a klasszikus összhangzattannak megfelel, és létezik olyan szólam, amelynek H- és G-beli hangja között a távolság 3 félhanggal enharmonikus, akkor ez a távolság kis terc.*

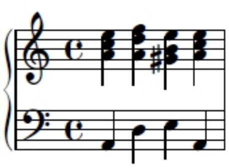
Szokás általában megtiltani a bővített nevű lépéseket, de más bővített lépés kérdése igen ritkán merül fel a tonális zenében. Szomszédos skálahangok közti bővített szekund távolság mollban fordul elő (pikárdiai tercesben is). A leggyakrabban használt akkordváltások, ahol figyelemmel kell lenni a bőszekundlépés kerülésére: $\mathrm{II}^6 \to \mathrm{V}$, $\mathrm{IV} \to V$, $\mathrm{V} \to \mathrm{VI}$, $\mathrm{VI}(^6) \to \mathrm{VII}^6$. Az *ellenmozgás* általában elég védelmet jelent a bővített

[32]Például: [Kesztler Lőrinc: Összhangzattan – a magyar zenei középiskolákban ma is használatos tankönyv, első megjelenése: 1952]: „A bővített másod és hozzátehetjük: minden bővített lépés nehéz intonálhatósága és csekély dallam-szépsége az indoka annak, hogy gyakorlatainkban mellőzzük és a tilos menetek csoportjába sorozzuk."

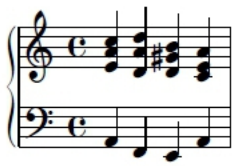
[33]Ezzel összhangban áll Kesztler Lőrinc megjegyzése az előző lábjegyzetben idézett szövegrészlet után: „Azt hiszem, nem kell külön hangsúlyoznom, hogy amennyiben nem külön énekszólamokra írt, hanem oly szerkesztésről van szó, amelyben az egyes szólamok számára nem a *legtermészetesebb* mozgást kell választani – mint például a zongoránál, ahol a hangszer természete folytán a bővített lépés is könnyű és egyszerű – vagy ahol a hangok természetének megfelelő speciális mozgásra nem helyezünk súlyt, a bővített lépések tilalma elesik."

szekundlépés ellen, – persze ha nem a basszusban van kötelezően ez a lépés[34]– ahogy azt a következő példák is mutatják:

Kottapéldák mollban a bőszekundlépés elkerülésére: 8a, 8b.



8a) I IV V$^{\#}$I

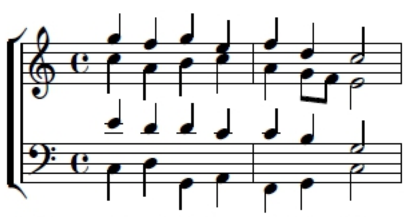


8b) I IV^6 V$^7_{\#}$ I

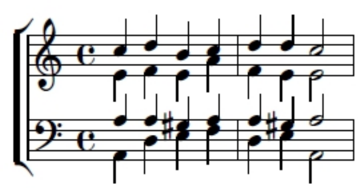
Speciális helyzet alakul ki a moll hangnemben az V $\to$ VI lépésnél (álzárlatnál). Ha itt a VI. fokú hármashangzatot a szokásos módon, két alap-, egy terc- és egy kvinthanggal raknánk fel, és a párhuzamok elkerülése végett a szokásos módon ellenmozgást használnánk, akkor a vezetőhangnak (szi szolmizáció) bőszekundlépéssel kellene lefelé mennie az alapra. Ezért ennél a lépésnél a VI. foknak nem az alapja, hanem *a terce szerepel két szólamban*, – már Bach korálfeldolgozásaiban is – amely a moll hangnem I. fokú hangja, ezzel a változtatással az egyébként nem teljesen határozott tonikai funkciójú, részben szubdomináns jellegű VI. fokú dúr hármashangzat már erős tonika. Ez a funkcióerősítés dúr hangnemben is jól használható az V $\to$ VI lépésnél, ráadásul ha az V. fok vezetőhangja a szopránban van, akkor az ellenmozgás itt is problémát jelentene: ha bővített szekundlépés nincs is, a vezetőhangot lefele kellene léptetni, hogy két alapot hagyjunk. Ezért rögzítjük a következő mellékszabályt és a példához hasonlóan alkalmazzuk:

6. Szerkesztési elv (Terchang kettőzése álzárlatnál). *Dúr és moll hangnemben* V $\to$ VI *lépésnél következő VI. fokú alaphelyzetű hármashangzatra a 2.6 definíció (iii) pontja helyett a következő érvényes (a definíció többi pontja pedig változatlanul igaz): ez a VI. fokú hármashangzat az I. fokot tartalmazza két szólamban.*

Kottapéldák álzárlat szerkesztésére dúrban: 9a, mollban: 9b.



9a) I II V VI IV V^{87} I



9b) I II V$^{\sharp}$ VI IV V$^7_{\sharp}$ I

Már említettük, hogy a plagális akkordvezetés elkerülése érdekében megtiltjuk az $V \to IV$ lépéseket. Ezen tilalom annyiban különbözik a többi, akkordváltási szerkesztési elvtől, hogy nem egy szólam kötelező vagy megtiltott mozgási irányát határozza meg és nem is a szólamok egymáshoz képesti viszonyát, hanem két *hármashangzatnév* közötti akkordváltást zárja ki.

7. Szerkesztési elv (Domináns$\to$szubdomináns lépés tilalma). *Legyen t a a tonalitás alaptétele feltételeit teljesítő M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű értelmezési tartományának egy pontja. Ha M t-ben megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor $\nexists T$ hangnem, amelyben* V $\to$ IV *alaphelyzetű (skálahangokból felépülő) hármashangzatok közötti akkordváltás van t-ben.*

A hangnemek fajtáinak ismeretében láthatjuk, hogy a (mod 7) eggyel alacsonyabb fokra való lépések közül ezzel a dúr$\to$dúr és a dúr$\to$moll alaphelyzetű hármasok közti lépéseket zártuk ki, a moll$\to$moll és a többi

[34]A bővített szekund inverze, a szűkített szeptim megléphető, de a szólamok hangterjedelmi korlátai miatt nem mindig.

fajtájú lépések engedélyezettek.[35] Könnyen látható, hogy az V. fok bármely helyzetből továbbvezethető IV. fokra úgy, hogy a domináns→szubdomináns lépés tilalmán kívül más szerkesztési elv ne sérüljön – használva az ellenmozgást. A reneszánsz zenében még igen gyakori volt nem csak az $\mathrm{V} \rightarrow \mathrm{IV}$, de a $\mathrm{I} \rightarrow \underset{\flat}{\mathrm{VII}}$ lépés is dúrban, ez a leszállított alapú VII. fokú hármashangzat a szubdomináns funkciót erősítette, még egy plagális lépéssel IV. fokra, majd onnan V.-re vezethető, de gyakran közvetlenül V. fokra vezették. Az összetett plagális menetek kizárásával azonban a leszállított VII. fok kikerült a hangnem konvergenciatartományából. Bachnál már nem túl jellemző az $\mathrm{V} \rightarrow \mathrm{IV}$ lépés, de például a *Hilf, Gott, Daß Mirs Gelinge* kezdetű korál feldolgozása[36] ilyen lépéssel kezdődik, és alkalmanként a bécsi klasszikusoknál is találkozhatunk ilyen lépéssel (például Haydn visszafelé is olvasható scherzójában). Ezen mű folytatásában, a feloldozhatóság kérdésénél foglalkozni fogunk a domináns→szubdomináns lépésének tilalma és a többi szerkesztési elv viszonyával, az ilyen lépések engedélyezésével létrejövő alternatív összhangzattani axiómarendszerekkel.

Ebben a dolgozatban a terjedelmi korlátozások miatt csak kevés példát láthatunk *alterált akkordra*, azaz egy hangnem konvergenciatartományának a hangnem módosított hangját is tartalmazó elemére. Ilyen akkord például a dúr hangnemben a hét-szűkszeptim. Ezen akkordok használata esetén, hasonló okokból, mint a bővített szekundlépésnél, zavart okozhat, ha a bennük szereplő módosított hang egy másik szólamban szerepel feloldva a következő akkordban. Ezt a jelenséget nevezzük *keresztállásnak*.

8. Szerkesztési elv (Keresztállás tilalma). *Legyen t a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű egy $H \rightarrow G$ akkordváltási pontja. Tegyük fel, hogy $\exists T$ hangnem, amelynek H alterált akkordja, és létezik olyan, T-hez képest módosított hangja H-nak (X'), amellyel megegyező fokú skálahang (X) szerepel G-ben.*
Ha M t-ben megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor X' és X ugyanabban a szólamban szerepelnek (X sem szerepel másikban[37].

Következnek a túlzottan nagy hangközugrásokat kizáró axiómák, amelyek a zeneművek kiegyensúlyozottságát és természetességét szolgálják a klasszika szemlélete szerint. A *közös hang megtartását* előirányzó szerkesztési elv még igen könnyen formalizálható általános hangterjedelmű esetben is:

9. Szerkesztési elv (Közös hang megtartása). *Legyen t a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M négyszólamú összhangzattanpélda $H \rightarrow G$ akkordváltási pontja. Ha M t-ben megfelel a klasszikus összhangzattannak:*

(i) ha H-nak és G-nek van azonos fokú hangja, akkor M megtartja a közös hangot (azaz ezen hangok azonos szólamban szerepelnek) minden olyan esetben, amikor ebből nem következik más szerkesztési elv megsértése[38],

(ii) ha több szólamban van lehetőség egyszerre megtartani a közös hangot más szerkesztési elv megsértése nélkül, akkor M mindegyiket megtartja,

(iii) ha H-nak két szólama létezik, amelyben ugyanaz a hangja szerepel (oktáv-ekvivalencia erejéig), és ezek közül bármelyikben megtarthatja M a közös hangot más szerkesztési elvek megsértése nélkül, de egyszerre csak az egyikben, akkor M ezek közül az alsóban tartja meg azt.

[35]Az $\mathrm{V}^6 \rightarrow \mathrm{IV}^6$ lépés engedélyezett a klasszika szemlélete szerint, ha a négy-szext terckettőzött. Kesztler Lőrinc így fogalmaz Összhangzattan című tankönyvében [1952]: „A terckettőzés következtében a felső szólamok valamelyikében a basszus dallamával ellenkező menet mutatkozik, mely az V-IV. fokoknak önmagában véve nem természetes egymásutánjának (D-S!) bizonyos átmeneti jelleget kölcsönöz (...) a IV. fokú szextakkordot ilyenkor nem annyira S hangzatnak, mint a D akkord két alakját összekapcsoló dallamos láncnak érezzük.”.

[36][BWV. 343, a Vierstimmige Choralgesange 1982-es EMB kiadásában (ezt forgalmazzák ma is utánnyomott változatban) a 170. sorszámú].

[37]Az érzékeny hangok kettőzésének tilalma miatt X' más szólamban nem is szerepelhet. Az összhangzatos moll skála VII. fokát, a pikárdiai terces moll hangnem III. és VII. fokát is módosítottnak tekintjük ebben a szerkesztési elvben.

[38]Előre rögzített szólamra (cantus firmus) természetesen ez a szabály nem igaz: ha például az előre megadott szoprán nem tartja meg a közös hangot, de létezik olyan akkord, amelynek egy másik hangja szerepel az akkordváltás után a szopránban, mint addig, akkor elfogadható ugyanolyan nevű akkorddal folytatni az akkordváltás után, mint amilyen előtte volt.

Így például I $\rightarrow$ VI lépéseknél az I., VI $\rightarrow$ IV lépéseknél a VI. (de álzárlatnál I.!) fokú hangok közül mindig az alsót tartjuk meg, lásd a 3. és 9b példákat. Végül tárgyaljuk a *legkisebb mozgás elvét*, amely a klasszika szemlélete szerint talán a legfontosabb szerkesztési elv. Formalizálni itt nem fogjuk, mivel pontos alkalmazása nagy mértékben függ attól, hogy milyen hangszerekre vagy énekszólamokra írjuk négyszólamú összhangzattanpéldánkat – ebből következik, milyen hangterjedelemben mozoghatnak a szólamaink – és milyen fekvést használunk – ebből következik, hogy a szomszédos szólamok milyen mértékben közelíthetik meg egymást és mennyire távolodhatnak el egymástól. A szerkesztési elv lényege, hogy mind szólamonként, mind egy akkordváltásnál összességében törekedni kell a lehető legkevesebb mozgásra. A közös hangokból minél többet tartsunk meg, tercnél nagyobb ugrás legfeljebb egy szólamban legyen, ha lehetséges. A legkisebb mozgás elve adja a négyszólamú összhangzattanpéldák formájának alapját, de a szeptimhang-, vezetőhang-, párhuzam- és bőszekund-axiómák lokálisan, egy adott akkordváltásnál erősebbek nála. Például két szomszédos fok között a legkisebb mozgás elve önmagában azt kívánná, hogy minden szólam egy szekundlépést tegyen ugyanabba az irányba. Ez azonban oktáv- és kvintpárhuzamot, esetleg más problémákat is vonna maga után[39].

Leginkább vokális műveknél, amikor a szoprán, alt, tenor, basszus kifejezések valóban az adott énekszólamot jelentik, szoktunk *szűk- és tágfekvésről* beszélni. A tágfekvést használta Bach négyszólamú korálfeldolgozásaiban, itt a basszust és a tenort basszuskulcsban, az altot és a szopránt violinkulcsban szoktuk lekottázni, és a szólamok közötti távolságok nagyjából egyenletesek. Ezzel szemben a szűkfekvésnél csak a basszus szerepel basszuskulcsban, a tenor gyakran a férfiszólamnak megfelelő magasság fölött énekel, a szólamvezetés nem élőzene-szerű – de ebben a fekvésben tisztábban szemléltethetők a szerkesztési elvek, mint a tágfekvésben, így az összhangzattanpéldák írásának oktatásában ezt használják gyakrabban. **Kottapéldák** tágfekvésű művekre dúrban: 3, 9a; a 9b pedig tágfekvésben írt moll példa. A többi példa szűkfekvésű. A négy énekszólamra vonatkozó konvencionális hangmagasság-tartományokat használó szűkfekvésű műből konvencionális hangterjedelmű és elrendezésű tágfekvésű művet kaphatunk, ha az altot és a basszust egy-egy oktávval lejjebb visszük, ezek lesznek a tágfekvésű zenemű férfiszólamai. Ha az eredeti szigorú négyszólamú szerkesztésű kórusmű a klasszikus összhangzattannak megfelelt, általában ugyanez lesz igaz a kapott tágfekvésű műre is, legfeljebb kvintpárhuzam keletkezhet az eredeti kvartpárhuzam helyett.

6.4. Az axiomatizálási munka eredményei

A legkisebb mozgás elvét kemény munkával, komoly zeneirodalmi anyaggyűjtés alapján négy adott, korlátos hangterjedelmű, valódi hangszerhez vagy énekhang-magassághoz köthető szólam (például: vokális szólamok – tágfekvés) esetén már lehet formalizálni, hiszen ekkor minden T hangnem esetén a $KT(T)$ akkordneveinek száma véges, és minden akkordnévhez csak véges sok helyzet tartozik a hangterjedelem korlátossága miatt. Egyes akkordváltások elfogadásának kérdésénél (azaz hogy elég kevés-e a szólamokban az összmozgás ahhoz, hogy a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő zeneművet az adott akkordváltási pontjában tekinthetjük-e a klasszikus összhangzattannak megfelelőnek) kényes esztétikai döntéseket kell meghozni. A munka végeredménye azonban az lesz, hogy szerkesztési elveinkből – felhasználva a ZFC-t és az alaphangokról a dolgozat elején posztuláltakat, valamint az eddig leírtakat kiegészítve a klasszikus összhangzattannak megfelelő modulációkra vonatkozó többi szerkesztési elvvel – egy *teljes* axiómarendszer áll össze.[40] Az adott hangszerekkel vagy énekszólam-magassághoz tartozó tetszőleges M szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműről el tudjuk dönteni, hogy kijavítható-e, és ha igen, egyértelműen el tudjuk dönteni minden akkordváltásáról, hogy az sérti-e valamelyik, pontosan formalizált szerkesztési elvünket – és ha nem, akkor az adott akkordváltási pontban is megfelel a klasszikus összhangzattannak.

[39] Az ilyen akkordváltásokból felépülő szerkesztés a *mixtúrás akkordvezetés*, amelynek sok példáját láthatjuk Bartók Béla műveiben, például A kékszakállú herceg várában az 5. ajtó kinyitása utáni részben („Lásd, ez az én birodalmam...").

[40] A teljesség akkor is megmarad, ha további, szintén jóldefiniált, akkordváltásra vonatkozó szerkesztési elveket veszünk hozzá az axiómarendszerhez – ahogy az alterált akkordok és a modulációk kapcsán azt meg is fogjuk tenni e mű folytatásában.

6.5. A matematikai eredmények értékelése

Ha a 6.3 alfejezetet olvassuk, már csak néhányszor találkozunk olyan fogalmakkal, amelyekről a zeneelmélet(-oktatás) hagyományosan nem beszél. Ez annak köszönhető, hogy a klasszikus összhangzattan akkordváltási szerkesztési elvei formálisan önmagukban is csaknem matematikai pontosságúak. Csakhogy ahhoz, hogy valóban matematikai axiómarendszert kapjunk, és valóban precízen megmondhassunk, mit jelentenek azok a fogalmak, amelyek ezekben a szerkesztési elvekben szerepelnek, szükségünk volt minden egyes definícióra és korábbi axiomatizálási lépésre. Az axiomatizálás sikeres: minden zeneelméleti objektumot és ezek viszonyát a klasszikus összhangzattan szemléletéhez hűen fogalmaztunk meg, és így tudtuk bebizonyítani a tonalitás alaptételét, amely e szemlélet szerint igaz. Ugyanakkor nem befejezett az axiomatizálás: amint már említettük, a dolgozat végleges, teljes verziójában szerepelni fognak az alterált akkordok és modulációk tulajdonságai és az ezekre vonatkozó újabb szerkesztési elvek is. A 6.3 alfejezethez hasonlóan ezek az új részek is jóval inkább zenéről szólnak, mint matematikáról, de még matematikai érdekességeket, újdonságokat is tartogatnak. Viszont ezekkel a kiegészítésekkel és a legkisebb mozgás elvével kapcsolatos esztétikai döntések meghozatalával valóban le tudjuk zárni a klasszikus összhangzattan axiomatizálását.

A tonalitás alaptételét – bár szükségszerűen használja a dolgozatban definiált zeneelméleti fogalmakat – tisztán topológiai úton igazoltuk, maga az állítás és bizonyítása is a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériumára emlékeztet[41]. Számos esetben igyekeztem a definíciókat a lehető legáltalánosabban, a klasszikus összhangzattan által tárgyalt zenei jelenségek tulajdonságait is felölelve, de annál bővebben megfogalmazni, lásd például a következő definíciókat: enharmonikussági tartomány; n-szólamú zeneművek; szigorú négyszólamú szerkesztés; funkciók; funkciós tonalitás; kijavítható (de nem feltétlenül véges) zenemű. Több esetben az hozott új eredményt, hogy nem csak felsoroltam valamilyen jelenségre a klasszikus összhangzattanból ismert példákat, hanem megadtam egy olyan definíciót, amely ezen példák meghatározó tulajdonságaiból áll. Így kaptuk meg a dúr és a moll mellett a pikárdiai terces moll hangnemet is, és a zeneelméleti szempontból hangsúlyos moll-lemmát is csak ennek köszönhetően fogalmazhattuk meg. Így jutottunk azokra a megállapításokra, hogy a szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműnek lehet göngyölítési pontja, lehet torlódási pontja a $t = \infty$, vagy akár lehet az ilyen zenemű úgy tonális és pozitív minimális akkordhosszúságú, hogy mégsem kijavítható. Számos új kutatási irányt nyithatunk az ilyen általánosabb definíciókkal, ezek közül néhány példát mutatok, amelyek felé az ebben a dolgozatban szereplő fogalmak segítségével elindulhatunk. Vizsgálhatjuk összetettebb zeneművek tonalitását, osztályozhatjuk a klasszikus összhangzattannak nem megfelelő zeneműveket feloldozhatóság szempontjából, leírhatjuk az élőzenei művek összhangzattani tulajdonságainak fokozatos változását a bécsi klasszicizmustól a XX. század első felére jellemző atonalitásig, megadhatjuk a pikárdiai terces moll hangnem konvergenciatartományát, összehasonlíthatjuk Bach korálfeldolgozásainak gyakorlatát az itt leírt szerkesztési elvekkel és az azokból következő szólamvezetési gyakorlattal.

Hivatkozások

[1] Dave Benson: *Music: A Mathematical Offering*, University of Aberdeen, 2008. Aktuális verzió a következő honlapon: `http://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/music.pdf`

[2] Ligeti György: *Döntés és automatizmus Pierre Boulez Structure 1a című művében*, 1957, fordította: Kerékfy Márton. In: Ligeti György válogatott írásai, Rózsavölgyi és Társa Kiadó, Budapest, 2010.

[3] Kesztler Lőrinc: *Összhangzattan*, középiskolai tankönyv. Editio Musica Budapest, 1952.

[4] D. Gareth Loy: *Musimathics: the mathematical foundations of music*, Cambridge, Mass., 2006–2007.

[5] John Fauvel, Raymond Flood, Robin Wilson: *Music and Mathematics From Pythagoras to Fractals*, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[6] Dmitrij Tymoczko: *The Geometry of Musical Chords*, in: Science 313, 72 (2006).

[41] Beszélgetésünk Vécsey Mátéval, amelynek során Máté megsejtette a tétel állítását, ezen az ötleten alapult: a Lebesgue-kritériumhoz hasonló ekvivalens feltételt kerestem a négyszólamú összhangzattanpéldák tonalitására.

[7] Clifton Callender, Ian Quinn, Dmitrij Tymoczko: *Generalized Voice-Leading Spaces*, in: Science 313, 72 (2006).

[8] Christopher A. Thorpe: *C.P.U. Bach: Using Markov Models for Chorale Harmonization*, Harvard College, Cambridge, Massachusetts, 1998.