A gömbfelület kvantumos elemi részecskéinek meghatározása reprezentációelmélet alkalmazásával

TDK dolgozat
Fitos Bence

2021. október.

Témavezető: Dr. Andai Attila, egyetemi docens
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Természettudományi Kar, Matematikai Intézet, Analízis tanszék

MŰEGYETEM 1782

Tartalomjegyzék

Köszönettel tartozom Andai Attilának a téma feldolgozásában nyújtott segítségért és a dolgozat átnézéséért.

1. Bevezetés

A kvantummechanika precíz matematikai formalizmusa elsősorban Neumann Jánoshoz köthető. A Neumann-féle axiómarendszer kimondja, hogy egy kvantummechanikai rendszer fizikai eseményei megfeleltethetők egy komplex Hilbert-tér zárt lineáris altereinek, melyek halmaza alkalmasan bevezetett műveletekkel ortomoduláris σ-hálóvá tehető. A zárt lineáris alterek azonosíthatók a Hilber-tér projektiraival, így kapjuk az adott Hilbert-tér projektorhálóját.

A téridő egy szimmetria-transzformációja megfeleltethető az adott kvantummechanikai rendszerhez tartozó projektorháló egy automorfizmusának. Így egy téridő-modell és a kvantummechanikai rendszer között a téridő szimmetriacsoportjának projektív ábrázolása teremt kapcsolatot. Fizikai szempontból különösen fontos az elemi részecskék meghatározása, melyek a gyengén irreducibilis projektív ábrázolásokkal azonosíthatók (melyek közül a matematikai kezelhetőség miatt csak a folytonosakat tekintjük). Ennek az eljárásnak jól ismert példái a Galilei és Poincaré csoport projektív ábrázolásai [1, 7, 9]. Ezen ábrázolások egy osztálya jellemezhető egy pozitív valós, illetve egy félegész számmal, melyet az adott részecske tömegének, illetve spinjének nevezünk. Relativisztikus esetben ezen kívül megjelennek más ábrázolások is, ezek közé tartoznak többek közt a fénysebességgel haladó részecskék.

Ezen dolgozat elsődleges célja az idővel kiegészített kétdimenziós gömbfelszín elemi részecskéinek vizsgálata folytonos, gyengén irreducibilis projektív ábrázolások meghatározásának segítségével.

A 2. fejezetben áttekintünk fontosabb reprezentációelméleti definíciókat és tételeket, melyeket a későbbiekben felhasználunk. Definiáljuk a Hilbert-tér projektorhálóját, a csoportok projektív ábrázolását, valamint kitérünk az irreducibilitás fogalmára is. A projektív ábrázolások elméletében kulcsszerepet játszik Wigner tétele. Ennek segítségével a Lie-csoportok egy folytonos projektív ábrázolását visszavezethetjük részben egy unitér ábrázolásra, és egy, a csoport Lie-algebráján értelmezett zárt bilineáris formák úgynevezett gyenge kohomológiaosztályára. Ezt követően rátérünk az unitér ábrázolások elméletére, és bemutatjuk a Mackey-féle indukált ábrázolások módszerét, mely segítségével bizonyos nem kompakt, nem kommutatív csoportok összes folytonos irreducibilis unitér ábrázolása megadható.

A megfelelő projektív ábrázolások meghatározásához szükségünk van az idővel kiegészített gömbfelszín szimmetriacsoportjára, azonban a szimmetriacsoport meghatározására tetszőleges geometria mellett nincs általános módszer. A 3. fejezetben meghatározzuk a transzlációk alkotta csoportot. Látni fogjuk, hogy ezen csoport gyengén irreducibilis folytonos projektív ábrázolásai azonosíthatók a folytonos irreducibilis unitér ábrázolásaival, melyeket meg is határozunk.

A fizikai intuíció megkívánja, hogy a transzlációk alkotta csoportot kibővítsük adott sebességgel haladó rendszerbe való áttéréssel. Hogy izometria-transzformációt kapjunk, az adott sebességgel haladó rendszereket forgó rendszerekkel azonosítjuk. Látni fogjuk azonban, hogy két forgó rendszerbe való áttérés kompozíciója általános esetben nem helyettesíthető egyetlen ilyen transzformációval, hanem annál bonyolultabb, így a kibővített halmaz nem csoport. Ha a transzformációk bizonyos $t \to 0$ egymáshoz való viszonyát tekintjük, akkor megfogalmazhatunk egy leegyszerűsített műveletet, mellyel a vizsgált transzformációk halmaza csoporttá tehető. Ennek a leegyszerűsítésnek ára van, innentől kezdve a csoport elemei nem írnak le explicit módon forgatást, csupán tükrözik azok bizonyos $t \to 0$ struktúráját. Ugyanakkor a csoport Lie-algebrájának elemeihez továbbra is társítható fizikai jelentés.

A 4. fejezetben meghatározzuk ezen csoportot, és meghatározzuk annak megfelelő ábrázolásait. Megmutatjuk, hogy a csoport folytonos projektív ábrázolásai azonosíthatók a folytonos unitér ábrázolásaival. Az unitér ábrázolásokat a Mackey-féle reprezentációs tétel segítségével azonosítjuk, melyre két lényegében különböző ábrázolás-típus adódik. Az egyiket egy valós, egy pozitív valós, illetve egy egész számmal indexelhetjük, a másikat egy valós- és egy félegésszel. Ezek után megvizsgáljuk az adott unitér ábrázolások által meghatározott lineáris ábrázolásait az infinitezimális generátoroknak, különös tekintettel az első ábrázolási típus esetén. Látni fogjuk, hogy ugyan az egyszerűsítések miatt az időfejlesztő operátor alakja triviális lesz, a többi generátor reprezentánsai jó hasonlóságot mutatnak a szokásos hely- és impulzus-operátorokkal. Figyelemre méltó, hogy jelen esetben az impulzus operátorok kommutátora nem lesz nulla, ezt azzal azonosíthatjuk, hogy a gömbfelszínen a különböző irányú eltolások nem kommutálnak.

A 5. fejezetben párhuzamot vonunk az impulzus operátorok kommutátora és a téridő görbülete között. Görbült térben adott sebességgel haladó rendszerbe való áttérés, mint szimmetria-transzformáció bevezetése során szükségessé vált, hogy a transzformációknak csak valamilyen lokális tulajdonságait tekintsük. Egy differenciálható sokaságot ellátunk metrikus tenzormezővel, és hozzárendelünk minden pontjához egy Lie-algebrát. Ezt úgy tesszük meg, hogy négydimenziós Minkowski téridőre éppen a Poincaré-csoport Lie-algebráját adja, továbbá az eltolások infinitezimális generátorainak megfeleltethető elemek kommutátora arányos legyen a Riemann-tenzorral. Ezen koncepciót az előző fejezetek tapasztalatai erősen motiválták, azonban a téma részletes tárgyalása már túlmutat ezen dolgozat keretein.

2. Reprezentációelmélet

Ebben a fejezetben áttekintjük a későbbiekben felhasznált fontosabb reprezentációelméleti tételeket és definíciókat. Ezen fejezet alapjául elsősorban az [1], [7] és [5] források szolgáltak. A matematika több mélyebb tételét felhasználjuk, ezért a bizonyításokat nem részletezzük. A projektív ábrázolásokkal kapcsolatos legtöbb tétel bizonyítása a [7] könyvben megtalálható. Az unitér ábrázolásokkal kapcsolatos tételek (köztük a Mackey-féle reprezentációs tétel) részletes tárgyalása megtalálható az [5] jegyzetben.

2.1. Csoportok ábrázolásai

2.1.1. Definíció. *Legyen G csoport, X halmaz, és jelölje $\mathfrak{S}_X$ az X halmaz bijektív transzformációinak csoportját. Egy $T : G \to \mathfrak{S}_X$ csoport-homomorfizmust a G csoport hatásának vagy ábrázolásnak hívjuk az X halmazon.*

2.1.2. Definíció. *Legyen T a G csoport hatása az X halmazon. Egy $H \subseteq X$ halmazt T-invariánsnak nevezünk, ha minden $g \in G$ esetén $T_g \langle H \rangle \subseteq H$.*

2.1.3. Definíció. *Legyen G csoport, és X topologikus tér. Egy $T : G \to \mathfrak{S}_X$ ábrázolást a G csoport topologikus ábrázolásának nevezünk, ha minden $g \in G$ esetén $T_g : X \to X$ leképzés folytonos.*

Legyen G topologikus csoport, és X topologikus tér. Egy $T : G \to \mathfrak{S}_X$ topologikus ábrázolást folytonosnak mondunk, ha a $T : G \times X \to X$ leképzés folytonos.

2.1.4. Definíció. *Legyen T a G csoport hatása az X halmazon, és $x \in X$ tetszőleges pont. Ekkor az*

$$\{y \in X | \exists g \in G : T_g x = y\}$$

az x elem T-pályájának, a

$$G_x := \{g \in G | T_g x = x\}$$

halmazt az x pont stabilizátorának nevezzük. A T ábrázolás tranzitív, ha bármely pont pályája egyenlő az X halmazzal.

2.1.5. Definíció. *Legyen T a G topologikus csoport folytonos tranzitív ábrázolása az X topologikus térben, és $x \in X$ tetszőleges pont. Egy $c : X \to G$ függvényt x-beli Borel-metszetnek nevezünk, ha minden $y \in X$ esetén*

$$T_{c(y)} x = y,$$

és c Borel-mérhető függvény a G és X topologikus terek között.

2.1.6. Definíció. *Legyen X lokálisan kompakt topologikus tér, és jelölje $\mathscr{K}(X, \mathbb{K})$ az X-ből $\mathbb{K}$-ba tartó folytonos kompakt tartójú függvényeket. Egy $\mu : \mathscr{K}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionált (komplex) Radon-mértéknek nevezünk, ha minden $K \subseteq X, (K \neq \emptyset)$ kompakt halmazhoz létezik $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\varphi \in \mathscr{K}(X, \mathbb{C})$ esetén, ha $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$, akkor*

$$|\mu(\varphi)| \leq C \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

A μ Radon-mértéket valósnak nevezzük, ha minden $\varphi \in \mathscr{K}(X, \mathbb{R})$ esetén $\mu(\varphi) \in \mathbb{R}$.
A μ Radon-mértéket pozitívnak nevezzük, ha minden $\varphi \in \mathscr{K}(X, \mathbb{R})$ esetén, ha $\varphi \geq 0$, akkor $\mu(\varphi) \in \mathbb{R}_0^+$.

Legyen γ a G csoport topologikus ábrázolása az X lokálisan kompakt térben, és legyen μ X feletti Radon-mérték. Ekkor minden $g \in G$ esetén definiálhatjuk γ_g hatását az X felett értelmezett Radon-mértékek halmazán a következőképp

$$(\gamma_g \mu)(\varphi) := \mu(f \circ \gamma_g)$$

minden $\varphi \in \mathscr{K}(X, \mathbb{C})$ esetén.

2.1.7. Definíció. *Legyen γ a G csoport topologikus ábrázolása az X lokálisan kompakt térben. Azt mondjuk, hogy az X feletti μ Radon-mérték*

- γ-invariáns, ha minden $g \in G$ esetén $\gamma_g \mu = \mu$,

- γ-kváziinvariáns, ha minden $g \in G$ elemhez létezik olyan $f : X \to \mathbb{R}^+$ függvény, hogy $\gamma_g \mu = f\mu$.

2.1.8. Tétel. *Legyen γ a G lokálisan kompakt, σ-kompakt topologikus csoport folytonos topologikus tranzitív ábrázolása az X lokálisan kompakt térben. Ekkor létezik X-en μ nem nulla, γ-kváziinvariáns mérték, melyhez létezik olyan $f : G \times X \to X$ folytonos függvény, hogy minden $g \in G$ esetén*

$$\gamma_g \mu = f(g^{-1}, \cdot)\mu.$$

2.2. Projektív ábrázolások

2.2.1. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-tér, és legyen $(M_i)_{i \in I}$ $\mathscr{H}$ zárt lineáris altereinek egy (megszámlálható) rendszere. Vezessük be az alábbi műveleteket*

$$\bigwedge_{i \in I} M_i := \bigcap_{i \in I} M_i,$$

$$\bigvee_{i \in I} M_i := \overline{\mathrm{Span}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)},$$

illetve az ortokomplementációt a szokásos módon

$$M^\perp := \{x \in \mathscr{H} | \forall y \in M : \langle x, y \rangle = 0\}$$

minden M zárt lineáris altér esetén.
Ezekkel a műveletekkel ellátva $\mathscr{H}$ zárt lineáris alterei ortomoduláris σ-hálót alkotnak, mely nem disztributív, ha $\dim \mathscr{H} > 1$.

2.2.2. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, és jelölje $\mathcal{P}(\mathscr{H})$ a Hilbert-tér projektorainak halmazát. Egy egyértelmű megfeleltetés létesíthető a Hilbert-tér projektorai és zárt lineáris alterei között. Így értelmezhetjük $\mathcal{P}(\mathscr{H})$ halmazon az előző állításban definiált műveleteket, és ezzel $\mathcal{P}(\mathscr{H})$ ortomoduláris σ-háló.*

2.2.3. Definíció. *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér. Az előző állításban értelmezett $\mathcal{P}(\mathscr{H})$ hálót a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér projektorhálójának nevezzük.*

2.2.4. Definíció. *Legyen L_1 és L_2 ortomoduláris σ-háló. Egy $\Phi : L_1 \to L_2$ leképzést LATOM-morfizmusnak nevezünk, ha minden $x \in L_1$ és minden $(x_i)_{i \in I}$ L_1-ben haladó megszámlálható rendszerre*

$$\Phi(x^\perp) = \Phi(x)^\perp$$

$$\Phi\left(\bigwedge_{i \in I} x_i\right) = \bigwedge_{i \in I} \Phi(x_i)$$

$$\Phi\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) = \bigvee_{i \in I} \Phi(x_i)$$

2.2.5. Tétel. ***(Wigner-tétel)*** *Legyen $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ háromnál nem kisebb dimenziójú Hilbert-tér, és $A : \mathcal{P}(\mathscr{H}_1) \to \mathcal{P}(\mathscr{H}_2)$ LATOM-izomorfizmus. Ekkor egységnyi abszolút értékű szorzó erejéig egyértelműen létezik $U : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ unitér vagy antiunitér leképzés, mellyel minden $P \in \mathcal{P}(\mathscr{H}_1)$ esetén*

$$A(P) = UPU^{-1}.$$

Fordítva, ha $U : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ unitér vagy antiunitér operátor, akkor az előző egyenlőséggel definiált $A : \mathcal{P}(\mathscr{H}_1) \to \mathcal{P}(\mathscr{H}_2)$ leképzés LATOM-izomorfizmus.

2.2.6. Definíció. *Legyen G csoport, és $\mathscr{H}$ Hilbert-tér. Egy $A : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{P}(\mathscr{H}))$ leképzést a G csoport egy projektív ábrázolásának hívjuk, ha minden $g,h \in G$ esetén*

$$A_g \circ A_h = A_{gh}.$$

2.2.7. Definíció. *A G csoport A projektív ábrázolását gyengén irreducibilisnek nevezzük, ha nincs olyan nemtriviális eleme a projektorhálónak, mely minden $g \in G$ esetén fix pontja A_g-nek.*

Legyen A a G csoport projektív ábrázolása a $\mathscr{H}$ (kettőnél nagyobb dimenziós) Hilbert-tér projektorainak halmazán. Ekkor Wigner tétele alapján minden $g \in G$ esetén egységnyi abszolút értékű szorzó erejéig egyértelműen létezik olyan $U_g : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ unitér vagy antiunitér operátor, hogy minden $P \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$ esetén

$$A_g(P) = U_g P U_g^{-1}.$$

Látható, hogy az A ábrázolás pontosan akkor gyengén irreducibilis, ha nincs nemtriviális zárt lineáris altér, mely minden $g \in G$ esetén invariáns U_g-re.

2.2.8. Állítás. *Legyen A a G összefüggő Lie-csoport projektív ábrázolása a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér projektorainak halmazán. Minden $g \in G$ esetén legyen $U_g : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ az az egységnyi abszolút értékű komplex szorzó erejéig egyértelmű unitér vagy antiunitér leképzés, melyre minden $P \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$ esetén $A_g(P) = U_g P U_g^{-1}$. Ekkor minden $g \in G$ csoportelemre U_g unitér.*

Jelölje e_G a csoport egységelemét. Az eddigi jelöléseket megtartva legyen $U_{e_G} := \mathrm{id}_{\mathscr{H}}$. Mivel minden $g,h \in G$ esetén $A_g \circ A_h = A_{gh}$, így szükségszerűen

$$U_g U_h = \omega(g,h) U_{gh},$$

ahol $\omega(g,h)$ egységnyi abszolút értékű komplex szám. Könnyen ellenőrizhetők az alábbi összefüggések minden $g,h,f \in G$ esetén

$$\omega(e_G,e_G) = 1,$$

$$\omega(g,h)\omega(gh,f) = \omega(h,f)\omega(g,hf).$$

Ezen azonosságok motiválják a következő definíciót.

2.2.9. Definíció. *Legyen G csoport. Egy $\omega : G \times G \to \mathbb{T}$ leképzést a G csoport egy unitér kociklusának nevezzük, ha $\omega(e_G,e_G) = 1$, és minden $g,h,f \in G$ esetén*

$$\omega(g,h)\omega(gh,f) = \omega(h,f)\omega(g,hf)$$

teljesül. (Ahol $\mathbb{T}$ az egységnyi abszolút értékű komplex számok halmazát jelöli.)

Két unitér kociklus, ω_1 és ω_2 kohomológ egymással, ha létezik olyan $\tau : G \to \mathbb{T}$ függvény, hogy minden $g,h \in G$ esetén

$$\omega_2(g,h) = \omega_1(g,h)\frac{\tau(g)\tau(h)}{\tau(gh)}$$

Az ω_1 és ω_2 kociklusok gyengén kohomológok egymással, ha vagy ω_1 és ω_2, vagy $\overline{\omega_1}$ és ω_2 kohomológ. A (gyenge) kohomológia, mint ekvivalencia által meghatározott ekvivalencia-osztályokat (gyenge) kohomológiaosztályoknak nevezzük.

Könnyen igazolható, hogy a (gyenge) kohomológia valóban ekvivalencia az unitér kociklusok közt.

2.2.10. Állítás. *Ha ω a G csoport unitér kociklusa, akkor létezik olyan ω' unitér kociklusa G-nek, mely kohomológ ω-val, és minden $g \in G$ esetén*

$$\omega(g, g^{-1}) = 1$$

2.2.11. Definíció. *Egy (U,ω) párt a G csoport $\mathscr{H}$ Hilbert-téren megvalósított sugárábrázolásának nevezünk, ha ω a csoport egy unitér kociklusa, és $U : G \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ olyan leképzés, hogy $U_{e_G} = \mathrm{id}_{\mathscr{H}}$, illetve minden $g, h \in G$ esetén U_g unitér, és $U_g U_h = \omega(g,h)U_{gh}$.*

A G csoport egy sugárábrázolása egyértelműen meghatároz egy projektív ábrázolást a $P \mapsto U_g P U_g^{-1}$ leképzéssel ($g \in G$ és $P \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$). Ez fordítva nem igaz, a sugárábrázolások generálta projektív ábrázolások ekvivalenciájáról összefüggő Lie-csoportok esetén a következő állítás nyújt felvilágosítást.

2.2.12. Állítás. *Legyen (U_1, ω_1) illetve (U_2, ω_2) a G összefüggő Lie-csoport $\mathscr{H}_1$ illetve $\mathscr{H}_2$ Hilbert-tereken megvalósított sugárábrázolásai. A két sugárábrázolás által generált projektív ábrázolás akkor és csak akkor ekvivalens egymással, ha létezik $V : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ unitér vagy antiunitér leképzés, és $\tau : G \to \mathbb{T}$ függvény, hogy minden $g \in G$ esetén*

$$VU_1(g) = \tau(g)U_2(g)V.$$

Így ω_1 és ω_2 kohomológ, ha V unitér, illetve $\overline{\omega_1}$ és ω_2 kohomológ, ha V antiunitér.

2.2.13. Definíció. *Legyen G csoport, és ω a csoport egy unitér kociklusa. Ekkor legyen G_ω az a csoport, melynek alaphalmaza $G \times \mathbb{T}$ és a csoportművelet minden $g,h \in G$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$ esetén a*

$$(g, \lambda)(h, \mu) = (gh, \omega(g,h)\lambda\mu)$$

formulával van értelmezve.

2.2.14. Állítás. *Legyen (U,ω) a G csoport egy sugárábrázolása a $\mathscr{H}$ Hilbert-téren. Ekkor az*

$$U^\omega : G_\omega \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$$

$$(g,\lambda, \psi) \mapsto U^\omega_{(g,\lambda)}\psi := \lambda U_g \psi$$

leképzés a G_ω csoport unitér ábrázolása.

Tehát a G csoport egy projektív ábrázolása visszavezethető egy másik csoport unitér ábrázolására. A projektív ábrázolások megtalálásához elegendő megkeresni a csoporton értelmezett unitér kociklusok gyenge kohomológiaosztályait, és az adott osztályok ω reprezentáns elemeihez a G_ω csoport megfelelő unitér ábrázolásait. Ha a csoport minden kociklusa az azonosan 1 függvénnyel kohomológ, akkor a projektív ábrázolásai azonosíthatók az unitér ábrázolásaival.

Fizikai szempontból a folytonos ábrázolások lesznek számunkra relevánsak különös tekintettel Lie-csoportok esetén, ezért most ezen esetet vizsgáljuk meg.

2.2.15. Állítás. *Legyen G összefüggő Lie-csoport és (U,ω) egy sugárábrázolása. A sugárábrázolás által meghatározott projektív ábrázolás akkor és csak akkor folytonos, ha ω analitikus a csoport egységelemének egy környezetében, és a $g \to U_g$ hozzárendelés erősen folytonos.*

Ezen állítás motiválja a következő definíciót:

2.2.16. Definíció. *A G Lie-csoport (U,ω) sugárábrázolását folytonosnak nevezzük, ha ω analitikus az egységelem egy környezetében, és a $g \to U_g$ hozzárendelés erősen folytonos.*

Tehát (U,ω) folytonos sugárábrázolás esetén ω analitikus az egységelem egy környezetében, ez indokolja a következő fogalmak bevezetését.

2.2.17. Definíció. *Legyen G Lie-csoport. Az (ω, N) párt a Lie-csoport egy lokális kociklusának nevezzük, ha N az egységelem környezete, és $\omega : N \times N \to G$ analitikus függvény, hogy $\omega(e_G,e_G) = 1$, és minden $g,h,f \in N$ esetén*

$$\omega(g,h)\omega(gh,f) = \omega(h,f)\omega(g,hf)$$

valahányszor a kifejezések értelmezve vannak.
Azt mondjuk, hogy az (ω_1, N_1) és (ω_2, N_2) lokális kociklusok egymással kohomológok, ha létezik $N_0 \subseteq N_1 \cap N_2$ környezet, és $\tau : N_0 \to \mathbb{T}$ függvény, hogy minden $g,h \in N_0$ esetén

$$\omega_2(g,h) = \omega_1(g,h)\frac{\tau(g)\tau(h)}{\tau(gh)}.$$

(ω_1, N_1) és (ω_2, N_2) gyengén kohomológ, ha akár (ω_1, N_1) és (ω_2, N_2), akár $(\overline{\omega_1}, N_1)$ és (ω_2, N_2) kohomológ egymással.

2.2.18. Állítás. *Egy egyparaméteres Lie-csoport minden lokális kociklusa az azonosan egy függvénnyel kohomológ.*

2.2.19. Állítás. *Egy egyszeresen összefüggő Lie-csoport minden lokális kociklusa kiterjeszthető az egész csoportra.*

Egy Lie-csoport lokális kociklusai megfeleltethetők a Lie-algebrán értelmezett bizonyos antiszimmetrikus formáknak, melyek számítási szempontból általában könnyebben kezelhetők. Ehhez fontos megjegyeznünk, hogy a Lie-csoportokat az egységelemük egy alkalmas környezetében Lie-algebrájuk egyértelműen meghatározza.

2.2.20. Definíció. *Legyen* $\mathfrak{g}$ *Lie-algebra a* $[\cdot,\cdot]$ *kommutátorral. Egy* $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ *függvényt a Lie-algebra egy kommutátor-kociklusának nevezzük, ha bilineáris, antiszimmetrikus és zárt, azaz minden* $a,b,c \in \mathfrak{g}$ *esetén*

$$\mathcal{K}([a,b],c) + \mathcal{K}([c,a],b) + \mathcal{K}([b,c],a) = 0.$$

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}_1$ *és* $\mathcal{K}_2$ *kommutátor-kociklusok kohomológok egymással, ha létezik* $\eta : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ *lineáris függvény, hogy*

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1 + \eta \circ [\cdot,\cdot].$$

A $\mathcal{K}_1$ *és* $\mathcal{K}_2$ *kommutátor-kociklusok gyengén kohomológok egymással, ha akár* $\mathcal{K}_1$ *és* $\mathcal{K}_2$*, akár* $-\mathcal{K}_1$ *és* $\mathcal{K}_2$ *kohomológ egymással.*

2.2.21. Tétel. *Legyen* G *Lie-csoport és* $\mathfrak{g}$ *a Lie-algebrája. Egy egyértelmű megfeleltetés létesíthető a Lie-csoport lokális kociklusainak (gyenge) kohomológiaosztályai és a Lie-algebrája kommutátor-kociklusainak (gyenge) kohomológiaosztályai között. A megfeleltetés minden* $a,b \in \mathfrak{g}$ *esetén a*

$$\mathcal{K}(a,b) := -i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \log\Big(\omega([ta][tb],[-ta][-tb])\omega([ta][tb])\omega([-ta][-tb])\Big)$$

formulával adható meg ω *lokális kociklus és* $\mathcal{K}$ *kommutátor-kociklus között, ahol* $[ta] = \exp(ta)$.

2.3. Unitér ábrázolások

2.3.1. Definíció. *Legyen* G *csoport és* $\mathscr{H}$ *Hilbert-tér. Egy* $U : G \to \mathfrak{S}_{\mathscr{H}}$ *csoport-homomorfizmust a* G *csoport unitér ábrázolásának nevezzük, ha minden* $g \in G$ *esetén* U_g *unitér.*

A továbbiakban a nulla dimenziós Hilbert-téren megvalósuló ábrázolásokkal nem foglalkozunk, ezen eseteket a továbbiakban minden tétel és állítás kimondásánál kihagyjuk.

2.3.2. Tétel. *Legyen* U *a* G *csoport unitér ábrázolása a* $\mathscr{H}$ *Hilbert-térben* $(\mathscr{H} \neq \{0\})$. *Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *Nincs* U*-ra invariáns nemtriviális zárt lineáris altér.*
- *Minden* $u : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ *folytonos lineáris operátor esetén, ha minden* $g \in G$*-re* $U_g \circ u = u \circ U_g$*, akkor* u *az identitás számszorosa.*

2.3.3. Definíció. *Legyen* U *a* G *csoport unitér ábrázolása a* $\mathscr{H}$ *Hilbert-térben* $(\mathscr{H} \neq \{0\})$. *Azt mondjuk, hogy az* U *ábrázolás irreducibilis, ha teljesül rá az előző tételben megfogalmazott állítás valamelyike.*

2.3.4. Állítás. *Kommutatív csoport minden irreducibilis unitér ábrázolása egydimenziós.*

Tehát, ha N lokálisan kompakt kommutatív csoport, akkor N minden folytonos irreducibilis unitér ábrázolása azonosítható egy $\chi : N \to \mathbb{T}$ folytonos csoporthomomorfizmussal.

2.3.5. Definíció. *Legyen* N *topologikus csoport. Az* N *folytonos unitér karakterének nevezünk minden* $\chi : N \to \mathbb{T}$ *folytonos csoporthomomorfizmust, melyek halmazát jelölje* $\hat{N}$.

2.3.6. Állítás. *Legyen N topologikus csoport. Az $\hat{N}$ halmaz a pontonkénti szorzással csoporttá tehető. Ezen a csoporton a kompakt halmazon történő uniform konvergencia topológiát ad meg, ezzel ellátva $\hat{N}$ topologikus csoport.*

A továbbiakban az $\hat{N}$ halmazt mindig topologikus csoportként tekintjük.

Lie-csoportok folytonos unitér ábrázolásai összefüggésbe hozhatók a Lie-algebra elemeinek bizonyos lineáris ábrázolásaival. Ezzel kapcsolatos a következő két tétel.

2.3.7. Tétel. ***(Stone-tétel)*** *Legyen U a valós számok additív csoportjának folytonos unitér ábrázolása a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben. Ekkor létezik egyértelműen egy H önadjungált operátor $\mathscr{H}$-ban úgy, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$U_t = \exp(itH).$$

Fordítva, ha H önadjungált operátor a $\mathscr{H}$ Hilbert-téren, akkor az előbbi formulával definiált $\mathbb{R} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ leképzés az $(\mathbb{R}, +)$ csoport egy folytonos unitér ábrázolását határozza meg.

2.3.8. Tétel. ***(Gårding-tétel)*** *Legyen U a G Lie-csoport folytonos unitér ábrázolása a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és jelölje $\mathfrak{g}$ a csoport Lie-algebráját. Ekkor létezik*
- *(i) D mindenütt sűrű lineáris altér $\mathscr{H}$-ban,*
- *(ii) $T > 0$ valós szám,*
- *(iii) $H : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lin}(\mathscr{H})$ leképzés,*

hogy minden $a, b \in \mathfrak{g}$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén
- *(1) H_a önadjungált operátor,*
- *(2) $D \subseteq \mathrm{dom}(H_a)$, $H_a D \subseteq D$,*
- *(3) $H_a|_D$ lényegében öndjungált,*
- *(4) $H_{\alpha a+\beta b}|_D = \alpha H_a|_D + \beta H_b|_D$,*
- *(5) $i[H_a, H_b] = H_{[a,b]}$ a D halmazon,*
- *(6) $U_{\exp(ta)} = \exp(itH_a)$, ha $|t| < T$.*

Ha az ábrázolás hű, akkor a H leképzés injektív.

2.4. Megengedett hatos

2.4.1. Definíció. *Legyenek H és N csoportok, valamint $q : H \to \mathrm{Aut}(N)$ csoporthomomorfizmus. A $H \times N$ halmazon értelmezzük a $\cdot$ műveletet úgy, hogy minden $(h,n), (h',n') \in H \times N$ esetén*

$$(h,n) \cdot (h',n') := (hh', nq(h)n')$$

A $H \times N$ halmazt a $\cdot$ művelettel ellátva a H és N csoportok q szerinti féldirektszorzatának nevezzük, és $H \times_q N$ szimbólummal jelöljük.
Ha N és H szeparált, lokálisan kompakt, második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő topologikus csoportok, valamint N kommutatív, akkor a $H \times_q N$ féldirektszorzatot speciális lokálisan kompakt féldirektszorzatnak nevezzük.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a $H \times N$ hamazon definiált $\cdot$ művelet valóban csoportműveletet határoz meg.

Ha $H \times_q N$ lokálisan kompakt féldirektszorzat, akkor a q ábrázolás meghatároz H-nak egy ábrázolását $\hat{N}$-ban, melyet a továbbiakban Q-val jelölünk

$$Q : H \to \mathrm{Aut}(N), \quad Q_h \hat{n} := \hat{n} \circ q_h^{-1}$$

2.4.2. Definíció. *Legyen $G := H \times_q N$ speciális lokálisan kompakt féldirektszorzat. Egy*

$$(\omega, \mu, \varphi, x_0, c_{x_0}, V)$$

rendszert a G csoport egy megengedett hatosának nevezzük, ha
- *ω lokálisan kompakt H-pálya $\hat{N}$-ben,*
- *μ pozitív, nem nulla, Q-kváziinvariáns mérték ω-n,*
- *φ folytonos függvény, melyre*

$$\varphi : H \times \omega \to \mathbb{R}^+, \quad Q_h\mu = \varphi(h^{-1}, \cdot)\mu,$$

- *$x_0 \in \omega$,*
- *$c_{x_0} : \omega \to H$, x_0-beli Borel-metszet,*
- *V a G_{x_0}-nak folytonos unitér ábrázolása.*

Jelöljük a V ábrázolás terét W-vel, és vezessük be a $\mathscr{H} := L^2(\omega, \mu, W)$ jelölést.

2.4.3. Definíció. *Az eddigi jelöléseket megtartva definiáljuk a következő ábrázolást*

$$U : (H \times_q N) \times \mathscr{H} \to \mathscr{H},$$

$$(h,n,\psi) \mapsto U_{(h,n)}\psi,$$

$$\left(U_{(h,n)}\psi\right)(x) := x(n)\sqrt{\varphi(h^{-1}, x)}V\left(c_{x_0}(x_0)\right) \cdot$$

$$\cdot V\left(c_{x_0}(x)^{-1}hc_{x_0}(Q_{h^{-1}}x)\right)V\left(c_{x_0}(x_0)\right)^{-1}\psi\left(Q_{h^{-1}}x\right),$$

ahol $Q : H \times \hat{N} \to \hat{N}$ az a csoportábrázolás, melyre minden $h \in H, \hat{n} \in \hat{N}$ esetén $Q_h\hat{n} = \hat{n} \circ q_h^{-1}$. Ezt az ábrázolást nevezzük a megengedett hatos által generált ábrázolásnak.

Ha μ invariáns mérték, továbbá $c_{x_0}(x_0) = e_H$, akkor a generált ábrázolás a következőképp egyszerűsödik

$$\left(U_{(h,n)}\psi\right)(x) := x(n)V\left(c_{x_0}(x)^{-1}hc_{x_0}(Q_{h^{-1}}x)\right)\psi\left(Q_{h^{-1}}x\right).$$

2.4.4. Tétel. *Legyen $(\omega_1, \mu_1, \varphi_1, x_1, c_{x_1}, V_1)$ és $(\omega_2, \mu_2, \varphi_2, x_2, c_{x_2}, V_2)$ a $G := H \times_q N$ speciális lokálisan kompakt féldirektszorzat két megengedett hatosa. A két megengedett hatos által generált unitér ábrázolás akkor és csak akkor unitér ekvivalens, ha létezik olyan (h,V) pár, hogy*

i) $h \in H$ és $hx_1 = x_2$,

ii) $V : W_1 \to W_2$ olyan unitér operátor, hogy minden $g \in H_{x_1}$ elemre

$$V_2(hgh^{-1}) = V \circ V_1(g) \circ V,$$

ahol W_1 illetve W_2 a V_1 illetve V_2 ábrázolás tere.

2.4.5. Tétel. *Ha a topologikus féldirektszorzat egy megengedett hatosa által generált ábrázolás irreducibilis, akkor a megengedett hatosban szereplő stabilizátor ábrázolása irreducibilis.*

2.4.6. Tétel. ***(Mackey-féle reprezentációs tétel)*** *Legyen $H \times_q N$ speciális lokálisan kompakt féldirektszorzat. Tegyük fel, hogy $\hat{N}$-ban minden H pálya lokálisan kompakt halmaz, és tegyük fel, hogy létezik $\hat{N}$ topologikus térben olyan Borel-halmaz, amely az $\hat{N}/H$ faktorhalmaznak teljes reprezentáns rendszere. Ekkor a $H \times_q N$ csoport minden komplex Hilbert-térbeli U folytonos irreducibilis unitér ábrázolásához létezik a csoportnak olyan megengedett hatosa, mely által generált ábrázolás az adott ábrázolással unitér ekvivalens, és minden $n \in N$ esetén $U(n) = \chi(n) \cdot \mathrm{id}_{\mathscr{H}}$, ahol $\mathscr{H}$ az U ábrázolás tere, és $\chi \in \hat{N}$ a megengedett hatosban szereplő reprezentáns pont.*

2.4.7. Következmény. *Legyen G lokálisan kompakt topologikus csoport, és legyen q a G triviális ábrázolása $\mathbb{R}$-ben. Ekkor a $G \times_q \mathbb{R}$ csoport minden V folytonos irreducibilis unitér ábrázolásához létezik olyan $m \in \mathbb{R}$ és létezik a G-nek olyan $U : G \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ folytonos irreducibilis unitér ábrázolása, hogy V unitér ekvivalens az m és U által meghatározott*

$$U^m : (G \times_q \mathbb{R}) \times \mathscr{H} \to \mathscr{H},$$

$$(g, t, \psi) \mapsto U^m_{(g,t)}\psi,$$
$$U^m_{(g,t)}\psi := \exp(imt)U_g\psi$$

ábrázolással.

Bizonyítás A Mackey-féle reprezentációs tétel következménye.

Határozzuk meg a csoport megengedett hatosait!

Mivel a q a G-nek triviális ábrázolása, így $\hat{\mathbb{R}}$-ben minden pálya egyelemű halmaz. Jegyezzük meg, hogy $\mathbb{R}$ és $\hat{\mathbb{R}}$ elemei kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak a $\delta : \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$, $m \mapsto \delta(m) := \exp(im\cdot)$ bijekció által. (Az $\mathbb{R}$ és $\hat{\mathbb{R}}$ halmazok izomorfak, mint csoportok, és homeomorfak mint topologikus terek; ezt úgy fejezzük ki, hogy $\mathbb{R}$ additív csoportja önduális.) Így $\hat{\mathbb{R}}$ pályáit indexelhetjük egy $m \in \mathbb{R}$ valós számmal, melyhez jelölje

$$X^m := \{\chi \in \hat{\mathbb{R}} | \chi = \delta(m)\}$$

az adott egyelemű pályát. Ezzel $\hat{\mathbb{R}}$ összes pályáját megadtuk. Ezen egyelemű halmazokon minden μ mérték invariáns és triviális, illetve minden $c_{\delta(m)}$ Borel-metszetet választhatunk e_G értékűnek.

Adott $m \in \mathbb{R}$ esetén az X^m pálya reprezentás pontját értelemszerűen $\delta(m)$-nek választjuk. Nyilvánvalóan minden $m \in \mathbb{R}$ esetén $G_{\delta(m)} = G$, ahol $G_{\delta(m)}$ a $\delta(m)$ stabilitáscsoportja. A stabilitáscsoportok folytonos irreducibilis unitér ábrázolásai tehát egybeesnek G folytonos irreducibilis unitér ábrázolásaival.

A Mackey-féle reprezentációs tételt szerint a $G \times_q \mathbb{R}$ csoport minden V folytonos irreducibilis unitér ábrázolásához létezik a csoportnak olyan megengedett hatosa, hogy az adott hatos által generált ábrázolás unitér ekvivalens V-vel. Az előzőek alapján a $G \times_q \mathbb{R}$ csoport egy megengedett hatosát egy $m \in \mathbb{R}$ és egy $U : G \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ folytonos irreducibilis unitér ábrázolás egyértelműen meghatároz, melynek alakja a következő

$$\left(X^m, \mu, \mathbf{1}_{G \times X^m}, \delta(m), c_{\delta(m)}, U\right)$$

Ekkor a generált ábrázolás alakja a következő:

$$\tilde{U}^m : (G \times_q \mathbb{R}) \times L^2(X^m, \mu, \mathscr{H}) \to L^2(X^m, \mu, \mathscr{H}),$$

$$(g, t, \alpha) \mapsto \tilde{U}^m_{(g,t)}\alpha,$$

$$\left(\tilde{U}^m_{(g,t)}\alpha\right)(\chi) := \chi(t)U_g\alpha(\chi)$$

Mivel a

$$\Phi : L^2(X^m, \mu, \mathscr{H}) \to \mathscr{H},$$

$$\alpha \mapsto \phi(\alpha) := \mu(\mathbf{1}_{X^m})\alpha(\delta(m))$$

leképzést unitér, így kapunk egy, az előzővel unitér ekvivalens ábrázolást

$$U^m : (G \times_q \mathbb{R}) \times \mathscr{H} \to \mathscr{H},$$

$$(g, t, \psi) \mapsto U^m_{(g,t)}\psi,$$

$$U^m_{(g,t)}\psi := \exp(imt)U_g\psi$$

■

3. Transzlációk alkotta csoport

Legyen $S_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 | \|x\|_2 = 1\}$, lássuk el a szokásos metrikával. Ekkor S_2 izometria-transzformációi azonosíthatók O(3) elemeivel. A fizikai vizsgálódás szempontjából a továbbiakban csak a csoport azon összefüggő részcsoportját vizsgáljuk, mely tartalmazza az egységelemet. Ez a részcsoport az SO(3).

Az időt $\mathbb{R}$-el azonosítjuk, melyen a szimmetria-transzformációk az eltolások. Ezen eltolások alkotta csoport megegyezik $\mathbb{R}$ additív csoportjával.

Összességében a téridőt $\mathbb{R} \times S_2$ térrel azonosítjuk, melynek transzlációi az $\mathbb{R}$ és SO(3) csoportok elemeivel adhatók meg, így a teljes transzlációk alkotta csoport az $\mathbb{R} \times \mathrm{SO}(3)$ direktszorzat.

Először ezen csoport gyengén irreducibilis projektív ábrázolásait vizsgáljuk meg.

Határozzuk meg a csoport kommutátor-kociklusait! Válasszunk $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R})$-ben $\mathrm{SO}(3) \times \{0\}$ elemeit generáló bázist; jelölje ezeket A_i $(i = 1, 2, 3)$, melyeket választhatjuk úgy, hogy fennálljon az $[A_i, A_j] = \epsilon_{ijk} A_k$ összefüggés. Jelölje B a Lie-algebra a $\{id_{\mathbb{R}^3}\} \times \mathbb{R}$ elemeit generáló egy elemét. Ekkor $\{A_1, A_2, A_3, B\}$ bázis $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R})$-ben, illetve $[A_i, B] = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Definiáljuk a $\mathcal{K}_{ij} := \mathcal{K}(A_i, A_j), (i,j = 1, 2, 3)$ mátrixot! Ez a kommutátor-kociklus tulajdonságai miatt antiszimmetrikus, így felírható $\mathcal{K}_{ij} = \varepsilon_{ijk} \lambda_k$ alakba, ahol $\lambda_k \in \mathbb{R}, (k = 1,2,3)$. Definiáljuk az $\eta : \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3)) \to \mathbb{R}, A_k \mapsto \lambda_k$ lineáris leképzést! Ekkor

$$\mathcal{K}(A_i, A_j) = \eta([A_i, A_j]),$$

vagyis $\mathcal{K}$ $\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$-ra megszorítva kohomológ az azonosan 0 függvénnyel.

Minden kommutátor-kociklus kohomológiaosztályból tehát választhatunk olyat ($\mathcal{K}$), melyre $\mathcal{K}(A_i, A_j) = 0$ teljesül (minden $i,j = 1, 2, 3$ esetén). Feladatunk meghatározni még $\mathcal{K}(A_i, B)$ lehetséges értékeit. $\mathcal{K}$ zártsága folytán minden $i,j = 1, 2, 3$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{K}([A_i, A_j], B) + \mathcal{K}([B, A_i], A_j) + \mathcal{K}([A_j, B], A_i) = \\ &= \epsilon_{ijk} \mathcal{K}(A_k, B) + \mathcal{K}(0, A_j) + \mathcal{K}(0, A_i) = \\ &= \epsilon_{ijk} \mathcal{K}(A_k, B). \end{aligned}$$

Így a csoport minden kommutátor-kociklusa kohomológ az azonosan 0-val. Ezért $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}$ projektív ábrázolásai azonosíthatók az unitér ábrázolásaival.

(2.4.7) alapján SO(3) folytonos irreducibilis unitér ábrázolásait kell csak megadnunk. SO(3) folytonos irreducibilis unitér ábrázolásai egyértelműen indexelhetők egy $\sigma \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ félegész számmal. Az ábrázolás tere $\mathbb{C}^{2\sigma+1}$, az ábrázoló operátorokat jelölje D^σ. Ez felírható $\exp \circ (iS^\sigma) \circ \exp^{-1}$ alakban, ahol $S^\sigma : \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3)) \to \mathrm{H}(\mathbb{C}^{2\sigma+1})$, melynek a Lie-algebra egy A_1, A_2, A_3 bázisában az

$$\begin{aligned} \left(S^\sigma_{A_1}\right)_{kl} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{k,l+1} \alpha^\sigma_l + \delta_{k,l-1} \alpha^\sigma_{l-1}\right) \\ \left(S^\sigma_{A_2}\right)_{kl} &= \frac{i}{2} \left(\delta_{k,l+1} \alpha^\sigma_l - \delta_{k,l-1} \alpha^\sigma_{l-1}\right) \\ \left(S^\sigma_{A_3}\right)_{kl} &= k \delta_{kl} \end{aligned}$$

formulákkal megadhatjuk egy reaizációját, ahol $\alpha^\sigma_k = \sqrt{\sigma(\sigma + 1) - k(k + 1)}$, és $k, l \in \{-\sigma, -\sigma + 1, ..., 0, ..., \sigma - 1, \sigma\}$.

Így (2.4.7) alapján a $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}$ csoport folytonos irreducibilis unitér ábrázolásai egyértelműen indexelhetők egy $m \in \mathbb{R}$ valós, és egy $\sigma \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ félegész számmal, melyekhez tartozó ábrázoló operátorok a következők

$$U^{m,\sigma} : (\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^{2\sigma+1} \to \mathbb{C}^{2\sigma+1}$$

$$(R, t, \psi) \mapsto U^{m,\sigma}_{(R,t)}\psi$$

$$U^{m,\sigma}_{(R,t)}\psi := \exp(imt) D^{\sigma}_{R}\psi.$$

4. Transzlációk és a forgó rendszerbe való áttérés

4.1. A csoport meghatározása

Elsődleges célunk kiegészíteni a transzlációk alkotta $\mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}$ csoportot olyan elemekkel, melyek forgó rendszerbe való áttérést írnak le. Egy ilyen transzformációt azonosíthatunk egy $\omega \in \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$ antiszimmetrikus 3×3-as mátrixxal, melyhez tartozó transzformáció

$$\mathbb{R}\times S_2 \to \mathbb{R}\times S_2, \quad (t,x)\mapsto (t,\exp(t\omega)x)$$

alakú. Vizsgáljuk meg két forgó rendszerbe való áttérés kompozícióját! Legyenek ω_1, illetve ω_2 antiszimmetrikus mátrixok, kompozíciójuk egy adott $t\in\mathbb{R}$ pillanatban az $x\in S_2$ ponthoz az $\exp(t\omega_1)\exp(t\omega_2)x$ elemet rendeli. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\omega\in\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$, hogy minden $t\in\mathbb{R}$ esetén

$$\exp(t\omega_1)\exp(t\omega_2)=\exp(t\omega).$$

Vegyük mindkét oldal t szerinti deriváltját $t=0$-ban. Ebből $\omega=\omega_1+\omega_2$ adódik, mely szerint

$$\exp(t\omega_1)\exp(t\omega_2)=\exp(t(\omega_1+\omega_2)),$$

ami azonban általában nem igaz. Láthatjuk tehát, hogy két forgó rendszerbe való áttérés kompozíciója nem szükségszerűen forgó rendszerbe való áttérés, így csupán ezen transzformációkkal kiegészítve a transzlációkat nem csoportot kapunk.

Definiáljuk egy $(R,\tau,\omega)\in\mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}\times\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$ elem generálta automorfizmusát az $\mathbb{R}\times S_2$ térnek a következőképp

$$\mathbb{R}\times S_2\to\mathbb{R}\times S_2,\quad (t,x)\mapsto(t+\tau,\exp(t\omega)Rx)$$

Két ilyen transzformáció, $(R_1,\tau_1,\omega_1),(R_2,\tau_2,\omega_2)\in\mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}\times\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$ kompozíciója esetén a következő leképzést kapjuk

$$(t,x)\mapsto(t+\tau_2+\tau_1,\exp((t+\tau_2)\omega_1)R_1\exp(t\omega_2)R_2x).$$

Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned}\exp(t\omega_1)\exp(t\omega_2)&=\exp(t(\omega_1+\omega_2))+\mathcal{O}^{(2)}(t),\\ R\exp(t\omega)&=\exp(tR\omega R^{-1})R,\\ \exp(\tau\omega_1)\exp(t\omega_2)&=\exp\left(t(\omega_2+\tau[\omega_1,\omega_2])\right)\exp(\tau\omega_1)+\mathcal{O}^{(2)}(t,\tau),\end{aligned}$$

ahol a $[\cdot,\cdot]$ a szokásos kommutátort jelöli. Így az előző leképzés

$$\begin{aligned}(t,x)\mapsto\Big(t+\tau_2+\tau_1,\exp\Big(t\left(\omega_1+R_1\omega_2R_1^{-1}+\tau_2\left[\omega_1,R_1\omega_2R_1^{-1}\right]\right)\Big)\cdot\\ \cdot\exp\left(\tau_2\omega_1\right)R_1R_2\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}+\mathcal{O}^{(2)}(t,\tau_2)\right)x\Big)\end{aligned}$$

alakba írható. Ezek alapján definiáljuk az $\mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}\times\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))$ halmazon az alábbi műveletet

$$\cdot_1:(\mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}\times\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3)))\times(\mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}\times\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3)))\to(\mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}\times\mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3))),$$

$$(R_1,\tau_1,\omega_1)\cdot_1(R_2,\tau_2,\omega_2):=\left(\exp\left(\tau_2\omega_1\right)R_1R_2,\tau_2+\tau_1,\omega_1+R_1\omega_2R_1^{-1}+\tau_2\left[\omega_1,R_1\omega_2R_1^{-1}\right]\right)$$

Jelölje $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az $\mathbb{R}^3$ elemein értelmezett szokásos vektoriális szorzást. Lie(SO(3)) elemeit azonosthatjuk $\mathbb{R}^3$ elemeivel az

$$\mathbb{R}^3 \to \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3)), \quad a \mapsto a \times \cdot$$

lineáris izomorfizmus által. Ekkor minden $a, b \in \mathbb{R}^3$ esetén igaz az

$$[a \times \cdot, b \times \cdot] = (a \times b) \times \cdot$$

összefüggés.
Megjegyezzük, hogy minden $R \in \mathrm{SO}(3)$ esetén

$$\sum_{k_1,k_2,k_3} \varepsilon_{k_1k_2k_3} R_{j_1k_1} R_{j_2k_2} R_{j_3k_3} = \varepsilon_{j_1j_2j_3}$$

$$\sum_{k_1,k_3} \varepsilon_{k_1qk_3} R_{j_1k_1} R_{j_3k_3} = \sum_k \varepsilon_{j_1kj_3} R_{kq},$$

ahol kihasználtuk, hogy $\det(R) = 1$ és $RR^T = R^TR = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ (az indexek értelemszerűen $\{1, 2, 3\}$ halmaz elemeit vehetik fel). Az $a \in \mathbb{R}^3$ elemmel beszorozva az előző összefüggést

$$\sum_{k_1,k_3,q} R_{j_1k_1} \varepsilon_{k_1qk_3} a_q R_{j_3k_3} = \sum_{k,q} \varepsilon_{j_1kj_3} R_{kq} a_q$$

adódik, ami azt jelenti, hogy minden $R \in \mathrm{SO}(3)$ és $a \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$R(a \times \cdot)R^T = (Ra) \times \cdot$$

Ezek alapján a fentebb definiált $(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(3)), \cdot_1)$ pár izomorf a $(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \cdot_2)$ párral, melyen a művelet

$$\cdot_2 : \Big(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\Big) \times \Big(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\Big) \to \Big(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\Big)$$

$$(R_1, \tau_1, a_1) \cdot_2 (R_2, \tau_2, a_2) := (\exp(\tau_2 a_1 \times \cdot) R_1 R_2, \tau_2 + \tau_1, a_1 + R_1 a_2 + \tau_2 a_1 \times (R_1 a_2)).$$

Fontos megemlítenünk, hogy az itt definiált művelet nem asszociatív, így az $(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \cdot_2)$ pár nem csoport. Hogy csoportot kapjunk további egyszerűsítést kell véghezvinnünk. Ezért tekintsük a $\tau \to 0$ határesetet, így a fenti műveletet leegyszerűsítve

$$\cdot : \Big(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\Big) \times \Big(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\Big) \to \Big(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\Big)$$

$$(R_1, \tau_1, a_1) \cdot (R_2, \tau_2, a_2) := (R_1 R_2, \tau_2 + \tau_1, a_1 + R_1 a_2)$$

adódik. Az így definiált művelettel már az $(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \cdot)$ pár csoport, melyet felírhatunk féldirektszorzat alakban. Tekintsük SO(3)-at és $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ additív csoportját, és definiáljuk a

$$q : \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3,$$

$$(R, t, a) \mapsto q_R(t, a) := (t, Ra)$$

ábrázolást. Az így kapott $\mathrm{SO}(3) \times_q (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ féldirektszorzat izomorf az $(\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \cdot)$ pár által meghatározott csoporttal. A továbbiakban ezen csoport ábrázolásait vizsgáljuk.

Megjegyezzük, hogy ezen „érintőcsoport" elemei nem írnak le explicit módon forgó rendszerbe való átülést, mégis reprezentálják ezen transzformációk bizonyos egymáshoz való viszonyát (midőn $t \to 0$). Hogy csoportot kapjunk el kellett dobnunk bizonyos időfüggést, így várhatjuk, hogy az időfejlesztő operátor alakja triviális lesz. Ennek ellenére látjuk majd, hogy a forgó rendszerbe való átülést illetve a forgatást generáló elemeket ábrázoló operátorok jó hasonlóságot fognak mutatni a szokásos hely és impulzus operátorokkal, így nem haszontalan ezen úton való vizsgálódásunk.

4.2. A csoport kommutátor-kociklusai

Válasszunk a csoport Lie-algebrájában olyan $(A_1, A_2, A_3, B, D_1, D_2, D_3)$ bázist, hogy az (A_1, A_2, A_3) hármas $\mathrm{SO}(3) \times \{0\} \times \{0\}$ elemeit generálja, álljon fenn a $[A_i, A_j] = \epsilon_{ijk} A_k$ összefüggés ($i,j,k = 1,2,3$), B generálja $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$, és a (D_1, D_2, D_3) hármas generálja $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^3$ elemeit.
Ekkor a kommutátor báziselemeken felvett értékei a következők minden $i,j,k \in \{1,2,3\}$ esetén

$$\begin{aligned}
[A_i, A_j] &= \epsilon_{ijk} A_k \\
[A_i, B] &= 0 \\
[D_i, D_j] &= 0 \\
[B, D_i] &= 0 \\
[A_i, D_j] &= \epsilon_{ijk} D_k
\end{aligned}$$

Minden kommutátor-kociklus kohomológiaosztályból választhatunk olyan $\mathcal{K}$-t, melyre $\mathcal{K}(A_i, A_j) = 0$ teljesül (minden $i,j = 1, 2, 3$ esetén). Azonban, ha η lineáris függvény a Lie-algebrán, és $\mathcal{K}' = \mathcal{K} + \eta\left([\cdot,\cdot]\right)$, akkor és csak akkor teljesül $\mathcal{K}'(A_i, A_j) = 0$, ha $\eta(A_i) = 0$ minden $i \in \{1,2,3\}$. A $\mathcal{K}$ zártsága folytán minden $i,j = 1, 2, 3$ esetén (alkalmazva az Einstein-féle összegzéskonvenciót)

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{K}([A_i, A_j], B) + \mathcal{K}([B, A_i], A_j) + \mathcal{K}([A_j, B], A_i) = \\
&= \epsilon_{ijk} \mathcal{K}(A_k, B) + \mathcal{K}(0, A_j) + \mathcal{K}(0, A_i) = \\
&= \epsilon_{ijk} \mathcal{K}(A_k, B),
\end{aligned}$$

amiből következik, hogy $\mathcal{K}(A_i, B) = 0$ minden $i = 1, 2, 3$ esetén.
Mivel $\varepsilon_{ijk}[A_i,D_j] = 2D_k$, így $\mathcal{K}$ zártsága, valamint a kommutátor tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned}
2\mathcal{K}(D_k, D_l) &= \varepsilon_{ijk} \mathcal{K}([A_i, D_j], D_l) = \\
&= \varepsilon_{ijk} \left(-\mathcal{K}([D_l, A_i], D_j) - \mathcal{K}([D_j, D_l], A_i)\right) = \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} \mathcal{K}(D_m, D_j) = \\
&= \mathcal{K}(D_k, D_l) - \delta_{kl} \mathcal{K}(D_j,D_j).
\end{aligned}$$

A $\mathcal{K}$ antiszimetrikussága miatt $\mathcal{K}(D_j,D_j) = 0$, és így minden $k,l \in \{1,2,3\}$ esetén $\mathcal{K}(D_k, D_l) = 0$. Hasonlóképp

$$\begin{aligned}
2\mathcal{K}(D_k, B) &= \varepsilon_{ijk} \mathcal{K}([A_i, D_j], B) = \\
&= \varepsilon_{ijk} \left(-\mathcal{K}([B, A_i], D_j) - \mathcal{K}([D_j, B], A_i)\right) = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Továbbá $\varepsilon_{ijk}[A_i,A_j] = 2A_k$, így $\mathcal{K}$ zártsága, valamint a kommutátor tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned}
2\mathcal{K}(A_k, D_l) &= \varepsilon_{ijk} \mathcal{K}([A_i, A_j], D_l) = \\
&= \varepsilon_{ijk} \left(-\mathcal{K}([D_l, A_i], A_j) - \mathcal{K}([A_j, D_l], A_i)\right) = \\
&= \varepsilon_{ijk} \left(\varepsilon_{ilm} \mathcal{K}(D_m, A_j) - \varepsilon_{jlm} \mathcal{K}(D_m, A_i)\right) = \\
&= 2\mathcal{K}(D_k, A_l) - 2\delta_{lk} \mathcal{K}(D_i, A_i).
\end{aligned}$$

A k és l indexeket egybeejtve $4\mathcal{K}(A_k, D_k) = 6\mathcal{K}(A_i, D_i)$, és így $\mathcal{K}(A_k, D_k) = 0$ adódik. Visszahelyettesítve a

$$\mathcal{K}(A_k, D_l) = -\mathcal{K}(A_l, D_k)$$

összefüggésre juttunk. Vezessük be a $\mathcal{K}_{kl} := \mathcal{K}(A_k, D_l)$ mátrixot, mely az előbbi összefüggés értelmében antiszimmetrikus az indexeiben. Így felírható $\mathcal{K}_{kl} = \varepsilon_{klm}\lambda_m$ alakba ($m \in \{1{,}2{,}3\} : \lambda_m \in \mathbb{R}$). Legyen η olyan lineáris függvény a Lie-algebrán, hogy minden $m \in \{1{,}2{,}3\}$ esetén $\eta(D_m) := \lambda_m$ és $\eta(A_m) := 0$. Ekkor $\mathcal{K}(A_k, D_l) = \eta\left([A_k{,}D_l]\right)$, így minden kohomológiaosztályból választható olyan kommutátor-kociklus, hogy $\mathcal{K}(A_k, D_l) = 0$, és a fentebbi tulajdonságok is érvényben maradnak.

Ezzel beláttuk, hogy minden kohomológiaosztályból választható olyan kommutátor-kociklus, hogy a Lie-algebra minden báziselempárján 0-t vesz fel, így (a bilinearitás miatt) az $\mathrm{SO}(3) \times_q (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ csoport minden kommutátor-kociklusa az azonosan 0-val kohomológ. Ezért a csoport gyengén irreducibilis folytonos projektív ábrázolásai és a folytonos irreducibilis unitér ábrázolásai kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak.

4.3. Pályák meghatározása

Keressük meg a folytonos irreducibilis unitér ábrázolásokat. Az $\mathrm{SO}(3)\times_q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ átírható $G\times\mathbb{R}$ alakba, ahol $G = \mathrm{SO}(3)\times_{\tilde{q}}\mathbb{R}^3$, $\tilde{q} : \mathrm{SO}(3)\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (R, a) \mapsto \tilde{q}_R a := Ra$. Így (2.4.7) alapján elegendő $\mathrm{SO}(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3$ folytonos irreducibilis unitér ábrázolásait megkeresnünk.

Az $\hat{\mathbb{R}^3}$ azonosítható $\mathbb{R}^3$-vel a $\delta : \mathbb{R}^3 \to \hat{\mathbb{R}^3}$, $a \mapsto \delta(a)$ leképzés által, ahol $(\delta(a))(a') = \exp(ia \cdot a')$ minden $a' \in \mathbb{R}^3$ esetén.
Jelölje Q az $\mathrm{SO}(3)$ hatását $\hat{\mathbb{R}^3}$-on, ahol $Q : \mathrm{SO}(3) \times \hat{\mathbb{R}^3} \to \hat{\mathbb{R}^3}$, $(R, \chi) \mapsto Q_R\chi := \chi \circ q_R^{-1}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $R \in \mathrm{SO}(3)$ esetén $\delta^{-1} \circ Q_R \circ \delta = q_R$, tehát Q_R hatása $\hat{\mathbb{R}^3}$-ban azonosítható egy R-el való forgatással $\mathbb{R}^3$-ban. Az egyszerűség kedvéért használjuk a $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$ jelölést. Ha $a, b \in \mathbb{R}^3$ olyan, hogy $\|a\| = \|b\|$, akkor létezik az $\mathrm{SO}(3)$-nak olyan R eleme, hogy $Ra = b$, és vica versa azaz, ha létezik az $\mathrm{SO}(3)$-nak olyan R eleme, hogy $Ra = b$, akkor $\|a\| = \|b\|$. Ezek alapján definiáljuk a következő pályákat, legyen $r \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$X^r := \{\chi \in \hat{\mathbb{R}^3} | \; \|\delta^{-1}(\chi)\| = r\},$$

$$Y := \{\chi \in \hat{\mathbb{R}^3} | \; \|\delta^{-1}(\chi)\| = 0\}.$$

Ezzel $\hat{\mathbb{R}^3}$ összes Q-pályáját indexeltük.

4.4. Az X^r pályákhoz tartozó ábrázolások

Először adjunk meg az X^r pályákon kváziinvariáns mértéket. Jelölje ϕ a gömbi koordinátákból $\mathbb{R}^3$-ba való áttérést

$$\phi : \mathbb{R}^+\times\,]-\pi, \pi[\, \times\,]0, \pi[\, \to \mathbb{R}^3 \backslash H,$$

$$(r, \theta, \vartheta) \mapsto \phi(r, \theta, \vartheta),$$

$$\phi(r, \theta, \vartheta) := \left(r\cos(\theta)\sin(\vartheta), r\sin(\theta)\sin(\vartheta), r\cos(\vartheta)\right),$$

ahol $H := \{(x{,}y{,}z) \in \mathbb{R}^3 | x \leq 0 \wedge y = 0\}$ nullmértékű halmaz (a Lebesgue-mérték szerint). Definiáljuk a következő mértéket.

$$\hat{\mu}_r : \mathscr{K}\left(X^m\right) \mapsto \mathbb{C},$$

$$\varphi \mapsto \hat{\mu}_r(\varphi) := \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\varphi \circ \delta \circ \phi)(r, \theta, \vartheta)\sin(\vartheta)d\theta d\vartheta$$

A fentebbi formulával definiált $\hat{\mu}_r$ invariáns és normált mérték az X^r (kompakt) pályán.

Legyen egyelőre általános $\chi_0 \in X^r$ rögzített, meghatározunk hozzá alkalmas $\hat{c}_{\chi_0}$ metszetfüggvényt. Legyen $\chi \in X^r$, megadunk olyan R elemét SO(3)-nak, melyre $Q_R x_0 = x$. Vezessük be a következő jelöléseket: $x_0 := \delta^{-1}(\chi_0)$, $x := \delta^{-1}(\chi)$. Elegendő olyan R-et keresnünk, melyre $Rx_0 = x$ fennáll.
Az x_0 és x, mint háromdimenziós vektorok által bezárt szög:

$$\arccos\left(\frac{x_0 \cdot x}{\|x_0\|\|x\|}\right),$$

ahol $x_0 \cdot x$ az x_0 és x vektorok euklidészi skalárszorzatát jelöli. Nem nyilvánvaló, de ellenőrizhető, hogy az

$$R := \exp(\varphi_{(x_0,x)} \times \cdot)$$

forgatásra fennáll az $Rx_0 = x$ egyenlőség, ahol $\varphi_{(x_0,x)} \in \mathbb{R}^3$ a következő vektor

$$\varphi_{(x_0,x)} := \frac{x_0 \times x}{\|x_0 \times x\|} \arccos\left(\frac{x_0 \cdot x}{r^2}\right).$$

Az iménti formulákkal definiált metszetfüggvényre fennáll a $\hat{c}_{\chi_0}(\chi_0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ összefüggés.

Az X^r pálya reprezentáns pontjának válasszuk $\delta\left((0{,}0{,}r)\right)$-et. Ennek a pontnak $\mathbb{R}^3$-beli képe értelemszerűen $(0{,}0{,}r)$.
A metszetfüggvény alakja ebben a speciális esetben a következő.

$$\hat{c}_{\delta((0,0,r))}(\delta(x)) := \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \arccos\left(\frac{x_3}{r}\right)\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\\ 0\end{pmatrix} \times \cdot\right) \quad \forall \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\| = r$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért $\hat{c}_{\delta((0,0,r))}$ helyett használjuk a $\hat{c}_r$ jelölést. Az $(0{,}0{,}r)$-hez tartozó stabilitáscsoportba azon R forgatások tartoznak bele, melyek ezt a vektort önmagukba viszik, ezért $(0{,}0{,}r)$ szükségszerűen párhuzamos a forgástengellyel. Így a stabilitáscsoport ezen rögzített tengely körüli forgatások csoportja, amely jelen esetben nem más, mint $\mathrm{SO}(2) \times \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$, amely triviális módon azonosítható SO(2)-vel.

Hogy SO(2) folytonos irreducibilis unitér ábrázolásait megtaláljuk, tekintsük a

$$\Phi : \mathbb{T} \to \mathrm{SO}(2),$$

$$q \mapsto \Phi(q) := \begin{pmatrix}\Re(q) & -\Im(q)\\ \Im(q) & \Re(q)\end{pmatrix}$$

folytonos csoport-izomorfizmust, mely segítségével SO(2) elemeit azonosíthatjuk $\mathbb{T}$ elemeivel.

A $\mathbb{T}$ csoport folytonos irreducibilis unitér ábrázolásait $n \in \mathbb{Z}$ egész számokkal indexelhetjük, melyekhez tartozó ábrázoló operátorok

$$\tilde{\zeta}^n : \mathbb{T} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

$$(q, z) \mapsto \tilde{\zeta}^n_q z := q^n z$$

alakúak. Ez Φ által azonosítható SO(2) ábrázolásával

$$\zeta^n : \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

$$(A,z) \mapsto \zeta^n_A z := \left(\Phi^{-1}(A)\right)^n z,$$

mellyel (unitér ekvivalencia erejéig) SO(2) összes folytonos irreducibilis unitér ábrázolását megadtuk.

Mindezek alapján az X^r pályához tartozó megengedett hatosokat egy $n \in \mathbb{Z}$ számmal indexeljük, melyek alakja a következő

$$\left(X^r, \hat{\mu}_r, \mathbf{1}_{\mathrm{SO}(3)\times X^r}, (0,0,r), \hat{c}_r, \zeta^n\right).$$

Ezen megengedett hatos által generált ábrázolás

$$\hat{U}^{r,n} : \left(\mathrm{SO}(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3\right) \times L^2\left(X^r, \hat{\mu}_r, \mathbb{C}\right) \to L^2\left(X^r, \hat{\mu}_r, \mathbb{C}\right),$$

$$(R,a,\alpha) \mapsto \hat{U}^{r,n}_{(R,a)}\alpha,$$

$$\left(\hat{U}^{r,n}_{(R,a)}\alpha\right)(\chi) := \chi(a)\zeta^n\left(\hat{c}_r(\chi)^{-1}R\hat{c}_r\left(Q_R^{-1}\chi\right)\right)\alpha\left(Q_R^{-1}\chi\right).$$

Áttérünk egy másik, az eredetivel unitér ekvivalens ábrázolásra. Ehhez definiáljunk S_2-n egy mértéket:

$$\mu : \mathscr{K}\left(S_2\right) \mapsto \mathbb{C},$$

$$\varphi \mapsto \mu(\varphi),$$

$$\mu(\varphi) := \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\varphi \circ \phi)(1,\theta,\vartheta)\sin(\vartheta)d\theta d\vartheta$$

Az imént definiált μ mérték $\tilde{q}$-ra invariáns és normált. Tekintsük a

$$\Omega_r : L^2\left(X^r, \hat{\mu}_r, \mathbb{C}\right) \to L^2\left(S_2, \mu, \mathbb{C}\right),$$

$$\varphi \mapsto \Omega_r\varphi,$$

$$(\Omega_r\varphi)(x) := \varphi \circ \delta(rx)$$

leképzést, könnyen belátható, hogy unitér. Vezessük be a $c_r := \delta^{-1} \circ \hat{c}_r \circ \delta$ jelölést. Toljuk el az $\hat{U}^{r,n}$ ábrázolást az Ω unitér operátorral, az így kapott ábrázolás

$$U^{r,n} : \left(\mathrm{SO}(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3\right) \times L^2\left(S_2, \mu, \mathbb{C}\right) \to L^2\left(S_2, \mu, \mathbb{C}\right),$$

$$(R,a,\psi) \mapsto U^{r,n}_{(R,a)}\psi,$$

$$\left(U^{r,n}_{(R,a)}\psi\right)(x) := \exp(ira\cdot x)\zeta^n\left(c_1(x)^{-1}Rc_1\left(R^{-1}x\right)\right)\psi\left(R^{-1}x\right),$$

mely unitér ekvivalens $\hat{U}^{r,n}$-val. Ezzel az X^r pályákhoz tartozó összes ábrázolást megadtuk.

Megjegyezzük, hogy c_1-et explicit alakba felírhatjuk a következőképp (feltéve, hogy $x_3 \neq -1$):

$$c_1(x) = \begin{pmatrix} x_3 + \frac{x_2^2}{1+x_3} & -\frac{x_1x_2}{1+x_3} & x_1 \\ -\frac{x_1x_2}{1+x_3} & x_3 + \frac{x_1^2}{1+x_3} & x_2 \\ -x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

ahol $x \in \mathbb{R}^3$, $\|x\| = 1$. Vezessük be továbbá $v_x := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ jelölést, ekkor

$$c_1(x) = (v_x \times \cdot) + x_3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + \frac{1}{1+x_3}v_x \otimes v_x^*$$

alakba írható (amennyiben $x_3 \neq -1$). Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $c_1(x)c_1(x)^T = c_1(x)^Tc_1(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

4.5. Az Y pályához tartozó ábrázolások

Az Y pálya egyelemű, melyen minden mérték invariáns és triviális. Legyen μ_0 a triviális normált mérték. Y pályán a reprezentáns pont természetesen $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, az ehhez tartozó stabilitáscsoport a teljes SO(3). SO(3) folytonos irreducibilis ábrázolásait a 3. fejezetben leírtaknak megfelelően indexeljük egy $\sigma \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ félegész számmal, az ábrázoló operátorokat jelölje D^σ. Ekkor a generált ábrázolás unitér ekvivalens D^σ-val, melyet a továbbiakban az Y pályához tartozó generált ábrázolással azonosítunk.

4.6. Ábrázoló operátorok

A Mackey-féle reprezentációs tétel alapján állíthatjuk, hogy meghatároztuk az $\mathrm{SO}(3)\times_{\tilde{q}}\mathbb{R}^3$ összes folytonos unitér irreducibilis ábrázolását. Alkalmazva (2.4.7) állítást felírhatjuk $\mathrm{SO}(3) \times_q (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ folytonos irreducibilis unitér ábrázolásait, melyet a következő tételben foglaltunk össze.

4.6.1. Tétel. *Legyen $q : \mathrm{SO}(3) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, (R, t, a) \mapsto q_R(t,a) := (t, Ra)$ csoporthomomorfizmus. Az $\mathrm{SO}(3) \times_q (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ lokálisan kompakt topologikus féldirektszorzat összes folytonos irreducibilis unitér ábrázolása (unitér ekvivalencia erejéig) egyértelműen fellelhető az alábbi ábrázolások között, melyeket két típusra bonthatunk.*

Az egyik típusú ábrázolást egy $(m, r, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}$ számhármassal indexelhetjük. Az ábrázoló operátorok

$$U^{m,r,n} : \left(\mathrm{SO}(3) \times_q \left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\right)\right) \times L^2\left(S_2, \mu, \mathbb{C}\right) \to L^2\left(S_2, \mu, \mathbb{C}\right),$$

$$(R, t, a, \psi) \mapsto U^{m,r,n}_{(R,t,a)}\psi,$$

$$\left(U^{m,r,n}_{(R,t,a)}\psi\right)(x) := \exp(imt)\exp(ira \cdot x)\zeta^n\left(c_1(x)^{-1}Rc_1\left(R^{-1}x\right)\right)\psi\left(R^{-1}x\right)$$

alakúak.

A másik ábrázolást egy $m \in \mathbb{R}$ valós, illetve egy $\sigma \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ félegész számmal indexelhetjük, melyekhez tartozó ábrázoló operátorok a következők

$$U^{m,\sigma} : \left(\mathrm{SO}(3) \times_q \left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3\right)\right) \times \mathbb{C}^{2\sigma+1} \to \mathbb{C}^{2\sigma+1},$$

$$(R, t, a, \psi) \mapsto U^{m,\sigma}_{(R,t,a)}\psi$$

$$U^{m,\sigma}_{(R,t,a)}\psi := \exp(imt)D^\sigma_R\psi.$$

Láthatjuk, hogy a második típushoz tartozó ábrázoló operátorok lényegében megegyeznek $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}$ ábrázoló operátoraival.

Vizsgáljuk meg részletesebben az unitér ábrázolások által meghatározott lineáris ábrázolásait a Lie-algebráknak! Az Y pályához tartozó stabilizátor ábrázolásait lényegében a Lie-algebra ábrázolásán keresztül adtuk meg, az időfüggés pedig egyszerű, így a továbbiakban csak az X^r pályákhoz tartozó ábrázolásokra koncentrálunk. Ehhez legyen $(m, r, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}$ rögzített.

Legyen először H az időeltolás generátorának ábrázoló operátora, ekkor $H = m$. Ez nem mutat különösebb érdekességet, mint azt a csoport meghatározásánál várhattuk az időfüggés egyszerű mivolta miatt. Tekintsük azonban a többi ábrázoló operátort.

Jelölje pr_i az i-edik projekciót ($i \in \{1,2,3\}$):

$$\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_i$$

Ha a (K_1^r, K_2^r, K_3^r) jelöli rendre a $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^3$ részcsoport (D_1, D_2, D_3) generátorainak ábrázoló operátorait, akkor minden $i \in \{1,2,3\}$ esetén

$$K_i^r : L^2(S_2, \mu, \mathbb{C}) \to L^2(S_2, \mu, \mathbb{C}),$$

$$\psi \mapsto K_i^r \psi = r \,\mathrm{pr}_i \cdot \psi,$$

azaz minden $x \in S_2$-re $K_i^r \psi(x) = r x_i \psi(x)$. Láthatjuk, hogy a $\dfrac{K_i}{r}$ operátorok alakja megegyezik a szokásos helyoperátorok alakjával.

A forgatások generátorainak ábrázolását már bonyolultabb meghatározni. Jelölje S_1^n, S_2^n, S_3^n rendre az $\mathrm{SO}(3) \times \{0\} \times \{0\}$ részcsoport megfelelő A_1, A_2, A_3 generátorainak ábrázoló operátorait, ahol

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tekintsük először az A_3 generálta forgatást adott $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén

$$R_3(\varphi) := \exp(\varphi A_3) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Számolással ellenőrizhető, hogy minden $x \in S_2$ esetén

$$c_1(x)^{-1} R_3(\varphi) c_1 \left(R_3(\varphi)^{-1} x \right) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

és így

$$\zeta^n \left(c_1(x)^{-1} R_3(\varphi) c_1 \left(R_3(\varphi)^{-1} x \right) \right) = \exp(in\varphi).$$

Ez alapján

$$S_3^n = n - \frac{1}{i} (\mathrm{pr}_1 \partial_2 - \mathrm{pr}_2 \partial_1),$$

amit formálisan írhatunk

$$S_3^n = n - \frac{1}{i} (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \times \nabla)_3$$

alakba. Térjünk rá S_1^n meghatározására. Az A_1 generálta forgatás $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén

$$R_1(\varphi) := \exp(\varphi A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

A következő összefüggéshez vezető számítások ugyan elemi lépéseket igényelnek, azonban meglehetősen hosszadalmasnak adódnak. Ezért az alábbi kifejezés kiszámítását Phyton programozási nyelvben a Sympy programcsomag algebrai eszköztárát felhasználva végeztem el.

$$\left.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} c_1(x)^{-1}R_1(\varphi)c_1\left(R_1(\varphi)^{-1}x\right)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{x_1}{1+x_3} & 0\\ \frac{x_1}{1+x_3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Így

$$\left.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} \zeta^n\left(c_1(x)^{-1}R_1(\varphi)c_1\left(R_1(\varphi)^{-1}x\right)\right)=in\frac{x_1}{1+x_3}$$

amiből

$$S_1^n=n\frac{\mathrm{pr}_1}{1+\mathrm{pr}_3}-\frac{1}{i}(\mathrm{pr}_2\,\partial_3-\mathrm{pr}_3\,\partial_2),$$

vagy formálisan

$$S_1^n=n\frac{\mathrm{pr}_1}{1+\mathrm{pr}_3}-\frac{1}{i}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\times\nabla)_1$$

adódik. Hasonló módon kapjuk S_2^n-t. Összefoglalva a forgatások infinitezimális generátoraira kapott kifejezéseket, megfogalmazhatjuk a következő tételt.

4.6.2. Tétel. *Tekintsük az* $\mathrm{SO}(3)\times_q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ *csoport (4.6.1) tételben szereplő egy* $\mathbb{R}\times\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{Z}\ni(m,r,n)$ *számhármassal indexelt* $U^{m,r,n}$ *folytonos irreducibilis unitér ábrázolását. Ekkor választhatunk* $\mathrm{SO}(3)\times\{0\}\times\{0\}$ *elemeit generáló* A_1,A_2,A_3 *bázist a csoport Lie-algebrájából úgy, hogy fennáljon az* $[A_i,A_j]=\epsilon_{ijk}A_k$ *összefüggés (i,j,k = 1,2,3), továbbá az* A_1,A_2,A_3 *elemekhez tartozó, a Gårding-tétel alapján az* $U^{m,r,n}$ *unitér ábrázolás által meghatározott* S_1^n,S_2^n,S_3^n *infinitezimális generátorok a következők*

$$S_1^n=n\frac{\mathrm{pr}_1}{1+\mathrm{pr}_3}-\frac{1}{i}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\times\nabla)_1$$
$$S_2^n=n\frac{\mathrm{pr}_2}{1+\mathrm{pr}_3}-\frac{1}{i}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\times\nabla)_2$$
$$S_3^n=n-\frac{1}{i}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\times\nabla)_3.$$

Könnyen ellenőrizhető az $[A_j,A_k]=\varepsilon_{jkl}A_l$ és a Gårding-tétel alapján elvárt

$$[S_j^n,S_k^n]=-i\varepsilon_{jkl}S_l^n$$

összefüggés minden $j,k\in\{1,2,3\}$ esetén. Láthatjuk, hogy $n=0$ esetére visszakapjuk a szokásos impulzusmomentum-operátorokat.

Tekintsük a gömbfelszínt, mint kétdimenziós sokaságot, és benne az $x_0=(0,0,1)$ pontot. Ebben a pontban az S_1^n és S_2^n operátorok alakja

$$S_1^n\psi(x_0)=\left(\frac{1}{i}\partial_2\psi\right)(x_0),$$

$$S_2^n\psi(x_0)=\left(-\frac{1}{i}\partial_1\psi\right)(x_0),$$

amely a megfelelő előjelekkel azonosítható a szokásos impulzus-operátorokkal. Érdemes szót ejtenünk a kétdimenziós síkon értelmezett szokásos impulzus-operátorok (P_1,P_2) és az S_1^n illetve S_2^n operátorok közti különbségről. Legfontosabb felidéznünk a kommutációs összefüggéseket, miszerint $[P_1, P_2] = 0$, viszont $[S_1^n, S_2^n] = -iS_3^n \neq 0$. Az impulzusoperátorok a térbeli transzlációk generátorainak ábrázolásai, a kommutációs összefüggéseket így értelmezhetjük úgy, hogy míg a síkon a különböző irányú eltolások felcserélhetők, addig a gömbfelszínen ez természetesen nem igaz, mely lényegében egyenértékű annak görbült mivoltával. Érdemes tehát megvizsgálni, hogy általánosabb keretek közt milyen összefüggést tudunk adni a tér görbülete és a transzlációt generáló operátorok kommutátora közt. Ezen témával kapcsolatban teszünk kitekintést a következő fejezetben.

5. Kitekintés

Láthattuk, hogy a tér görbülete szoros kapcsolatban áll az impulzus operátorok kommutációs relációjával. Most ezt a gondolatot visszük tovább.

Legyen $\mathcal{M}$ egy n dimenziós sokaság, legyen $g : \mathcal{M} \to T^*(\mathcal{M}) \otimes T^*(\mathcal{M})$ metrikus tenzormező, és legyen ∇ az a g által meghatározott kovariáns derivάció, melyre $\nabla g = 0$. Megadunk minden ponthoz egy Lie-algebrát, mely $n = 4$, Minkowski-térre éppen a Poincaré-csoport Lie-algebráját adja. Előrebocsájtjuk, hogy a Lie-algebra értelmezésének lesz egy külön feltétele.

Legyen $p \in \mathcal{M}$, jelölje $(\mathscr{A}_p, [\cdot,\cdot]_p)$ a p ponthoz tartozó Lie-algebrát. Ezt fogjuk most realizálni. Ehhez jelölje $A_1^1(p, \mathcal{M})$ azon $S : T_p(\mathcal{M}) \to T_p(\mathcal{M})$ lineáris függvények halmazát, melyre minden $X,Y \in T_p(\mathcal{M})$ esetén $g_p(SX, Y) = -g_p(X, SY)$. Ekkor $A_1^1(p, \mathcal{M})$ a pontonként értelmezett összeadással, és skalárral való szorzással vektortér. Legyen

$$\mathscr{A}_p := A_1^1(p, \mathcal{M}) \oplus T_p(\mathcal{M}),$$

ezzel $\mathscr{A}_p$-nek megadtunk vektortér struktúrát, mely dimenziója $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Meg kell még adnunk a Lie-algebra kommutátorát, melyet a következőképpen definiálunk minden $S_i, S_j \in A_1^1(p, \mathcal{M})$ és $P_i, P_j \in T_p(\mathcal{M})$ esetén:

$$[(S_i, 0), (S_j, 0)]_p := (S_iS_j - S_jS_i, 0),$$

$$[(S_i, 0), (0, P_j)]_p := (0, S_iP_j),$$

$$[(0, P_i), (0, P_j)]_p := (R(P_i, P_j), 0),$$

ahol R a Riemann-tenzor, azaz minden $X, Y, Z \in T_p(\mathcal{M})$-re

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{XY-YX}Z$$

A kommutátor antiszimmetriája és bilinearitása következtében azt egyértelműen meghatároztuk.

Meg kell vizsgálnunk, hogy a kommutátor teljesíti-e a szükséges feltételeket. Ehhez idézzünk fel a Riemann-tenzorra vonatkozó néhány azonosságot: minden $X,Y,Z,W \in T_p(\mathcal{M})$ esetén

$$R(X,Y) = -R(Y,X)$$

$$g_p(R(X,Y)Z,W) = -g_p(R(X,Y)W, Z)$$

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$$

Könnyen látható, hogy ezek alapján a definiált kommutátor bilineáris és antiszimmetrikus. A Jacobi identitás azonban feltételhez szabott, mely csak akkor és akkor teljesül, ha minden $S \in A_1^1(p, \mathcal{M})$ és $P_i, P_j \in T_p(\mathcal{M})$ esetén fenáll az

$$[R(P_i,P_j), S]_p = R(SP_j, P_i) - R(SP_i, P_j)$$

összefüggés.

Irodalomjegyzék

[1] Andai Attila, diplomamunka, *A kvantummechanika matematikai alapjairól*, ELTE Természettudományi Kar, Alkalmazott Analízis Tanszék, 1998.

[2] D. R. Grigore. Free fields for any spin in 1+2 dimensions. *Journal of Mathematical Physics* **35**, 6304, 1994.

[3] D. R. Grigore. The projective unitary irreducible representations of the Galilei group in 1+2 dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, **37**, 460, 1996.

[4] D. R. Grigore. The Projective Unitary Irreducible Representations of the Poincaré Group in 1+2 Dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, **34**, 4172, 1993.

[5] Kristóf J.. *A matematikai analízis elemei V.* Online jegyzet: `https://web.cs.elte.hu/~krja/`

[6] G. W. Mackey. *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics.* W. A. Benjamin, Inc./Editore Boringhieri, 1968.

[7] Matolcsi T., Székely S.. *Matematikai Fizika I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[8] Matolcsi T.. *Matematikai Fizika II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[9] V. S. Varadarajan. *Geometry of Quantum Theory.* New York: Spriger-Verlag, 1985.

[10] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, Volume 1: Foundations. Cambridge University Press, 2013.