3-REGULÁRIS GRÁFOK MINIMÁLIS LEVÉLSZÁMÚ FESZÍTŐFÁI

TDK dolgozat

Készítette:
Dücső Márton
BME Matematika MSc, II. évfolyam

Témavezető:
Dr. Wiener Gábor
egyetemi docens, BME SZIT

Budapest
2018

Kivonat

Egy összefüggő gráf minimális levélszámú feszítőfájának megtalálása a Hamilton-út probléma egyik legtermészetesebben adódó általánosítása (a minimális levélszám akkor és csak akkor 2, ha a gráfnak van Hamilton-útja), így persze ez a probléma is NP-nehéz. Lu és Ravi [3] azt is megmutatta, hogy a feladatra nem létezik konstans faktorú approximáció sem. A 3-reguláris gráfok Hamilton-köreivel és Hamilton-útjaival kapcsolatos vizsgálatok mindig is az érdeklődés középpontjában álltak, különösen síkgráfok esetén, hiszen Tait sejtéséből (minden 3-reguláris 3-összefüggő síkgráfnak van Hamilton-köre) azonnal következett volna a híres négy szín sejtés. A 3-reguláris gráfok minimális levelű feszítőfáival kapcsolatos legfrissebb eredmények az [1] és [2] cikkekben találhatók. A [2] cikkben Goedgebeur és szerzőtársai bebizonyítják Zoeram és Yaqubi sejtését [4], mely szerint minden összefüggő n csúcsú 3-reguláris gráfnak van legfeljebb $\frac{n}{6}+\frac{1}{3}$ levelű feszítőfája és megmutatják, hogy ha a gráf ezen felül még 2-összefüggő is, akkor ez $\frac{13n}{85}$-re javítható. Megfogalmazzák továbbá azt a sejtést, hogy minden 2-összefüggő n csúcsú 3-reguláris gráfnak van legfeljebb $\frac{n}{10}+1$ levelű feszítőfája, vagyis a $\frac{13}{85}$ érték akár $\frac{1}{10}$-re is javítható (ennél tovább viszont már nem, mint ahogy az $\frac{n}{6}+\frac{1}{3}$-os becslés is éles). Az [1] cikkben (számos egyéb eredmény mellett) Boyd és szerzőtársai megmutatják, hogy minden 2-összefüggő n csúcsú 3-reguláris multigráfnak van legfeljebb $\frac{n}{6}+\frac{2}{3}$ levelű feszítőfája. A dolgozatban egy korábban nem használt megközelítés segítségével jelentősen megjavítjuk Goedgebeur és szerzőtársai eredményét: megmutatjuk, hogy 2-összefüggő 3-reguláris gráfok esetén a $\frac{13}{85}$-ös érték $\frac{1}{8}$-ra javítható és egyben új bizonyítást adunk Boyd és szerzőtársai eredményére is. A módszer továbbfejlesztésével nem tűnik elérhetetlennek Goedgebeurék sejtésének igazolása sem.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A dolgozatban szereplő gráfok összefüggők, de nem feltétlenül egyszerűek. *Multigráf* alatt olyan gráfot értünk, amelyben lehetnek többszörös élek, de nincsenek hurokélek. Egy T fa *levelén* egy elsőfokú csúcsát értjük. Egy gráf k*-reguláris*, ha minden csúcsának k a fokszáma, és *kétszeresen összefüggő*, ha legalább 2 csúcsa van, és bármely csúcsát elhagyva összefüggő marad.

1.1. Definíció. A G gráf $m\ell(G)$-vel jelölt *minimális levélszáma* a feszítőfáinak levélszámának minimuma.

A dolgozatban 3-reguláris gráfok minimális levélszámával foglalkozunk. A minimális levélszámú feszítőfa keresése a Hamilton-út probléma természetes általánosítása, és a 3-reguláris gráfok Hamilton-útjai a gráfelmélet egy intenzíven kutatott területe. Goedgebeur és szerzőtársai a következő eredményt bizonyították ezzel kapcsolatban.

1.2. Tétel. [2] Ha G n csúcsú, egyszerű, összefüggő, 3-reguláris gráf és $n \geq 5$, akkor $m\ell(G) \leq \lceil \frac{n}{6} + \frac{1}{3} \rceil$.

Ez a tétel éles olyan értelemben, hogy végtelen sok n-re léteznek olyan n csúcsú gráfok, melyekre $m\ell(G) = \frac{n}{6} + \frac{1}{3}$. Zoeram és Yaqubi a [4] cikkben konstruált ilyen gráfokat, melyek összefüggőségi száma 1.

1.3. Sejtés. Ha G n csúcsú, egyszerű, kétszeresen összefüggő, 3-reguláris gráf, akkor $m\ell(G) \leq \lceil \frac{n}{10} \rceil$.

A [2] cikkben található konstrukció végtelen sok n-re olyan n csúcsú egyszerű, kétszeresen összefüggő, 3-reguláris gráfra, melyekre $m\ell(G) = \lceil \frac{n}{10} \rceil$.

A [2] cikkben a 1.3. sejtést nem igazolják, de tesznek egy fontos lépést az $\frac{n}{6}$-os becslés érdemi javításával.

1.4. Tétel. [2] Ha G n csúcsú, egyszerű, kétszeresen összefüggő, 3-reguláris gráf, akkor $m\ell(G) \leq \frac{13n}{85} \approx \frac{n}{6{,}54}$.

Jelen dolgozat fő eredménye e becslés jelentős javítása:

1.5. Tétel. Ha G n csúcsú, egyszerű, kétszeresen összefüggő, 3-reguláris gráf, és $n \geq 8$, akkor $m\ell(G) \leq \frac{n}{8} + 1$.

Kétszeresen összefüggő, 3-reguláris multigráfokra a következő eredmény ismert, melyet Boyd és szerzőtársai [1] bizonyítottak Mömke és Svensson eredményére [5] építve.

1.6. Tétel. [1] Ha G kétszeresen összefüggő, 3-reguláris multigráf, akkor $m\ell(G) \leq \frac{n}{6}+\frac{2}{3}$.

A későbbiekben új bizonyítást adunk az 1.6. Tételre, és egy egyszerű konstrukcióval azt is igazoljuk, hogy a tétel lényegében éles.

2. Kétszeresen összefüggő, egyszerű gráfok

A 1.5 Tétel igazolásához az alábbi definíciókra lesz szükségünk.

2.1. Definíció. Egy (g, T) párt *gyökeres fának* nevezünk, ha T fa, a g *gyökér* pedig T egy csúcsa.

2.2. Definíció. Egy g gyökerű gyökeres fában egy ℓ levelet *d-levélnek* nevezünk, ha $\ell \neq g$.

2.3. Definíció. Egy gyökeres fa *összmélysége* a csúcsok gyökértől való távolságainak összege, ahol két csúcs távolsága az őket a fában összekötő egyértelmű út éleinek száma.

2.4. Definíció. Egy csúcs *ősei* a csúcsot a gyökérrel összekötő egyértelmű út csúcsai. Ha egy p csúcsnak a q csúcs őse, akkor p-t q *leszármazottjának* nevezzük. Egy a csúcs azon b ősét, amely egyben szomszédja is, a csúcs *szülőjének* nevezzük. Ekkor a-t a b csúcs *gyerekének* hívjuk.

2.5. Definíció. Legyen ℓ d-levél egy olyan gyökeres fában, amelyben van legalább harmadfokú csúcs. Az ℓ levél *szára* a levelet a hozzá legközelebbi legalább harmadfokú csúccsal összekötő út csúcsai, a levelet is beleértve, *töve* pedig ezen az úton a legalább harmadfokú csúcs melletti csúcs.

A bizonyítás során G egy alkalmas, Hamilton-úttól különböző T gyökeres feszítőfájának minden d-leveléhez hozzá fogunk rendelni 6 darab T-ben másodfokú csúcsot oly módon, hogy különböző levelekhez különböző csúcsokat rendelünk. Ekkor megbecsülhetjük T leveleinek számát, ehhez a következő állításra lesz szükségünk.

2.6. Állítás. Ha F egy 3-reguláris gráf feszítőfája, és F leveleinek száma f, akkor harmadfokú csúcsainak száma $f - 2$.

Bizonyítás. Jelölje a másodfokú csúcsok számát m, a harmadfokúakét h. F fokszámainak összege $f + 2m + 3h$, és ez a szám F éleinek számának kétszerese. Mivel F $f + m + h$ csúcsú fa, ebből az $f + 2m + 3h = 2(f + m + h - 1)$ egyenlőséget kapjuk, ahonnan $h = f - 2$. $\square$

Jelölje T leveleinek számát k. Ha T gyökere levél, akkor a harmadfokú csúcsok száma a 2.6. Állítás szerint $k-2$, a d-levelek száma $k-1$, az ezekhez rendelt másodfokú csúcsok száma $6(k-1)$. Így $k + (k-2) + 6(k-1) \leq n$, tehát $k \leq \frac{n}{8} + 1$.

Ha T gyökere nem levél, akkor k darab d-levele van T-nek, így $k+(k-2)+6k \leq n$, tehát $k \leq \frac{n}{8}+\frac{1}{4}$.

Gyakran külön megjegyzés nélkül használjuk a következő egyszerű állítást.

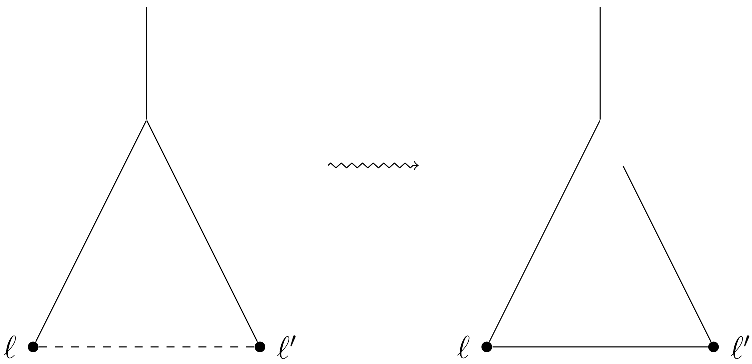
2.7. Állítás. Legyen T fa, és a T' gráfot k él törlésével és k él hozzávételével kapjuk T-ből. Ekkor T' pontosan akkor fa, ha összefüggő.

Bizonyítás. Ha T' fa, akkor összefüggő. Jelölje T csúcsainak számát n, ekkor éleinek száma $n-1$, és így ugyanennyi T' éleinek száma is. Könnyen látható, hogy minden n csúcsú, $n-1$ élű összefüggő gráf, így T' is fa. □

A másodfokú csúcsok hozzárendelésénél a következő lemmákat használjuk. A lemmákban G összefüggő multigráf, T pedig G-nek olyan minimális levélszámú feszítőfája, mely nem Hamilton-út.

2.8. Lemma. G-ben nem vezet él T egy ℓ leveléből egy másik ℓ' levelébe.

Bizonyítás. Ha lenne ilyen e él, $T \cup e$-ben volna egy egyértelmű kör. Mivel T nem út, a kör csúcsai között van olyan, ami legalább harmadfokú G-ben, egy ehhez csatlakozó körbeli élet elhagyva kevesebb csúcsú feszítőfát kapnánk (1. ábra). □



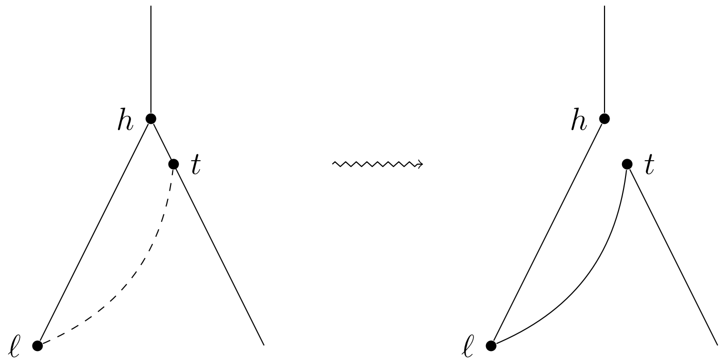
1. ábra

2.9. Lemma. G-ben nem vezet él T egy ℓ leveléből egy másik levél t tövébe.

Bizonyítás. Ha volna ilyen él, T-hez az ℓt élt hozzávéve és a t-t a szomszédos, legalább harmadfokú h csúccsal összekötő élet elhagyva egy kevesebb levelű feszítőfát kapnánk (2. ábra). □

A következő lemmákban az eddigieken felül feltesszük, hogy T a G gráfnak egy olyan gyökeres feszítőfája, amelynek

1. a lehető legkevesebb levele van,
2. ezen belül maximális az összmélysége.



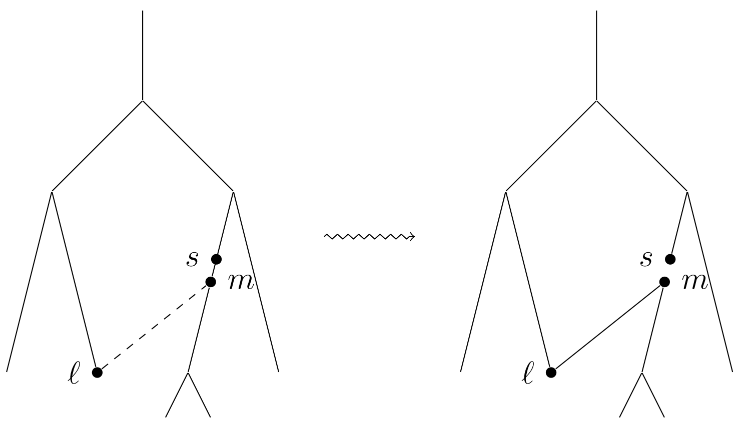
2. ábra

2.10. Lemma. Legyen az ℓ csúcs T-nek egy d-levele, és legyen az m csúcs T-nek egy olyan másodfokú csúcsa, amely nem őse ℓ-nek. Ekkor G-ben nem vezet él az m és ℓ csúcsok között.

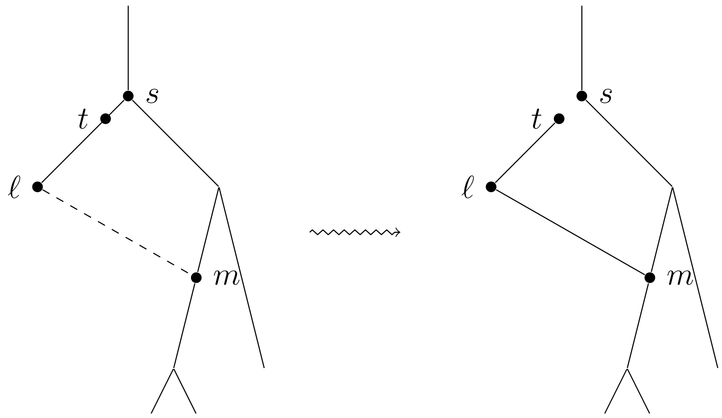
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van ilyen él, ℓ mélysége legyen d_1, m mélysége d_2.

Ha $d_1 \geq d_2$, hagyjuk el T-ből az m-et az ő s szülőjével összekötő élet, és vegyük hozzá az ℓm élet (3. ábra). A kapott T' gráf fa és legfeljebb annyi levele van, mint T-nek. T'-ben m-nek és leszármazottainak nagyobb a mélysége, mint T-ben, míg a többi csúcs mélysége a két fában azonos, ami ellentmond T választásának.

Tegyük fel, hogy $d_1 < d_2$. Ekkor T-ből hagyjuk el az ℓ levél t tövét az ő s szülőjével összekötő élet, és vegyük hozzá az ℓm élet (4. ábra). A kapott gráf fa, és legfeljebb ugyanannyi levele van, mint T-nek. Jelölje i az ℓ levél szárán levő csúcsok számát. Ekkor T'-ben az ℓ levél szárán levő csúcsoknak a mélységei $d_2, d_2{+}1, ..., d_2{+}i$ lesznek, T-ben pedig ugyanezen csúcsoknak a mélységei $d_1, d_1-1, ..., d_1-i$, a többi csúcs mélysége azonos T-ben és T'-ben. T' összmélysége tehát nagyobb, mint T összmélysége, ami ellentmond T választásának. □



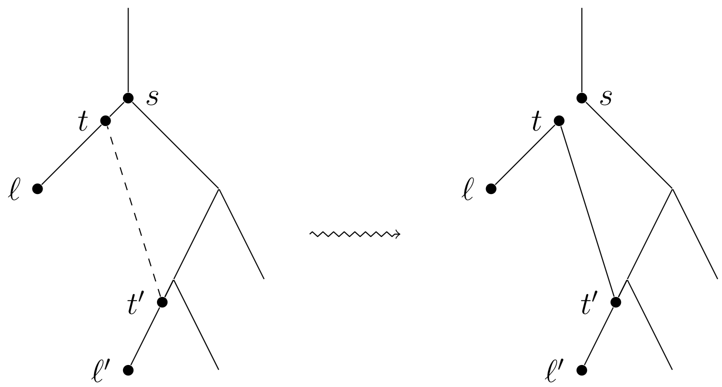
3. ábra



4. ábra

2.11. Lemma. G-ben nem mehet él egy ℓ d-levél t töve és egy másik ℓ' d-levél t' töve között.

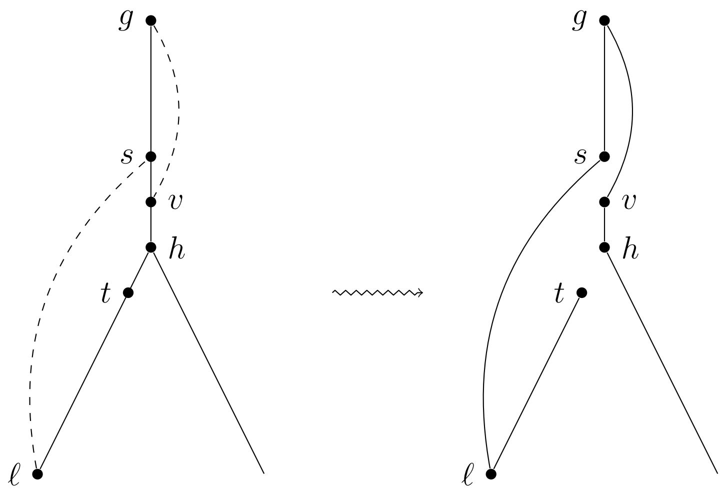
Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy van ilyen él G-ben. Feltehető, hogy a t csúcs mélysége legfeljebb akkora, mint t'-é. T-ből hagyjuk el a t csúcsot az ő s szülőjével összekötő élet és vegyük hozzá a tt' élet (5. ábra). A kapott T' gráf fa, és pontosan annyi levele van, mint T-nek. A 2.10. Lemma bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy T' összmélysége nagyobb, mint T összmélysége, ami ellentmond T választásának. □



5. ábra

2.12. Lemma. Ha a g gyökér levele T-nek, és a v csúcs g-nek szomszédja G-ben, de nem szomszédja T-ben, akkor v nem lehet gyereke egy másik ℓ levél olyan s szomszédjának, ami nem ℓ szárán van.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy g-nek van ilyen v szomszédja. Hagyjuk el T-ből az sv élet, és az ℓ levél t tövét a szülőjével összekötő élet, és vegyük hozzá a gv és ℓs éleket (6. ábra). Könnyen látható, hogy a kapott T' gráf fa, és kevesebb levele van, mint T-nek, ami ellentmond T választásának. □



6. ábra

A következő lemmákban az eddigieken kívül azt is feltesszük, hogy G 3-reguláris. Egy T-beli csúcs *G-szomszédainak* nevezzük azokat a csúcsokat, amelyek G-ben szomszédai, de T-ben nem.

2.13. Lemma. Ha T-ben egy ℓ d-levél egy s G-szomszédja nem a levél szárán van, akkor az s csúcs T-ben másodfokú, és az egyértelmű a gyereke is másodfokú. Ezen felül az a csúcs nem lehet G-szomszédja ℓ-nek, sem ℓ szárán bármely másik csúcsnak.

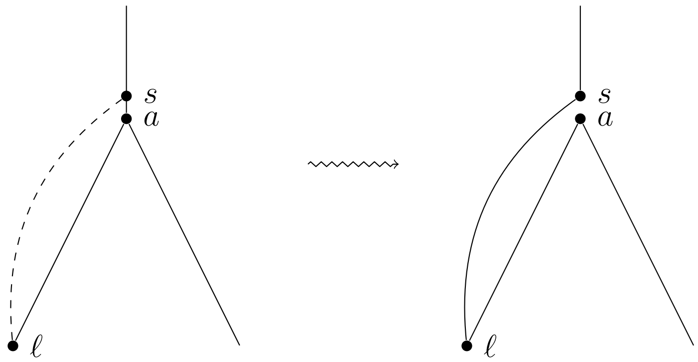
Bizonyítás. Az s csúcs nem lehet elsőfokú a 2.8. Lemma szerint, és nem lehet harmadfokú sem, hiszen G 3-reguláris, s tehát másodfokú.

Lássuk most be, hogy a is másodfokú. Nem lehet levél, mert ekkor a másodfokú s csúcs az a szárán helyezkedne el, ami ellentmondana a 2.10. Lemmának. Tegyük fel, hogy az a csúcs harmadfokú. Hagyjuk el T-ből az sa élet, és vegyük hozzá az ℓs élet (7. ábra). A kapott T' gráf fa, és kevesebb levele van, mint T-nek, ami ellentmond T választásának, így az a csúcs valóban másodfokú kell legyen.

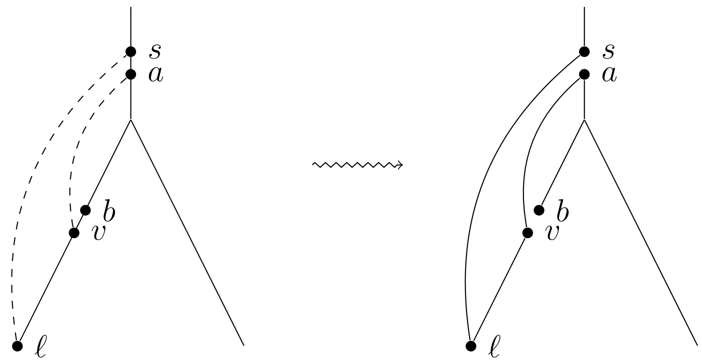
Most tegyük fel, hogy az a csúcs G-szomszédja a levélnek, vagy egy másik v csúcsnak a levél szárán. Jelölje b a v csúcs szülőjét. Hagyjuk el T-ből a vb és sa éleket, vegyük hozzá az ℓs és va éleket (8. ábra). A kapott T' gráf fa, mert T'-ben az s, l, v és a csúcsok azonos komponensben vannak, és v, a és b csúcsok is azonos komponensben vannak, ugyanis az a csúcs őse l-nek, és így b-nek is.

T' összmélysége nagyobb, mint T összmélysége, mert a T-beli sb úton éppen annyi csúcs van, mint a T-beli sl úton, így az ezen úton levő csúcsok összmélysége a két fában ugyanannyi, de az s csúcs összes többi leszármazottjának nagyobb a mélysége T'-ben, mint T-ben. Ez ellentmond T választásának.

□



7. ábra



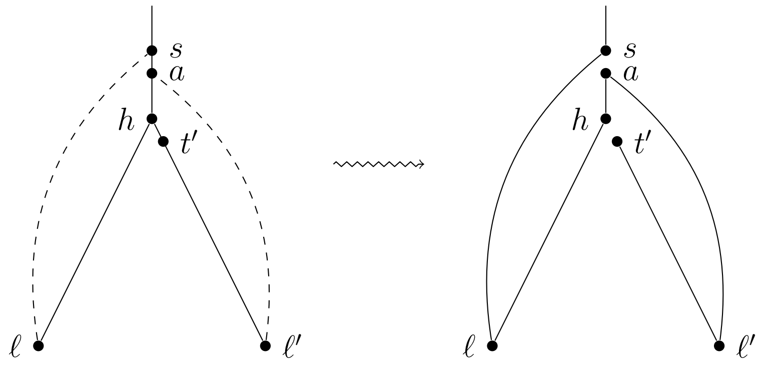
8. ábra

2.14. Lemma. Ha T-ben egy ℓ d-levél egy s G-szomszédja nem a levél szárán van, akkor az s csúcs a gyerekének G-szomszédja nem lehet egy másik ℓ' d-levél, vagy az ℓ' levél t' töve.

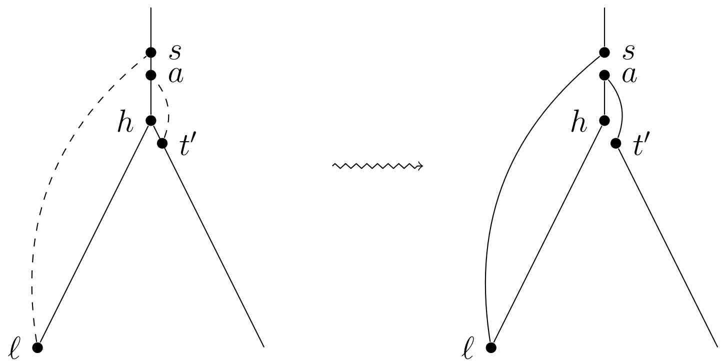
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az a csúcs szomszédos egy ℓ' levéllel vagy annak t' tövével. Hagyjuk el T-ből az as élet és a t'-t az ő h szülőjével összekötő élet és vegyük hozzá az ℓs és $\ell' a$ illetve $t'a$ éleket (9. és 10. ábrák). A kapott T' gráf fa, mert T'-ben az s, l és a csúcsok azonos komponensben vannak, ugyanis s, és ezért a is őse l-nek a 2.10. Lemma szerint. A t', a és h csúcsok szintén azonos komponensben vannak. T'-nek kevesebb levele van, mint T-nek, ami ellentmondás. □

2.15. Lemma. Ha T-ben az ℓ d-levél egy s G-szomszédja nem ℓ szárán helyezkedik el, és az ℓ' d-levél egy s' G-szomszédja nem az ℓ' szárán helyezkedik el, akkor a és a' gyerekeik nem lehetnek szomszédosak G-ben.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az a és a' csúcsok szomszédosak G-ben. Hagyjuk el T-ből az sa és $s'a'$ éleket és vegyük hozzá az ℓs és $\ell' s'$ éleket (11. ábra). Bebizonyítjuk, hogy a kapott T' gráf összefüggő, így fa. Feltehető, hogy T-ben az a csúcs mélysége legalább akkora, mint az a' csúcsé. Ekkor az $a\ell$ úton nem töröltünk élet, ezért az a, ℓ

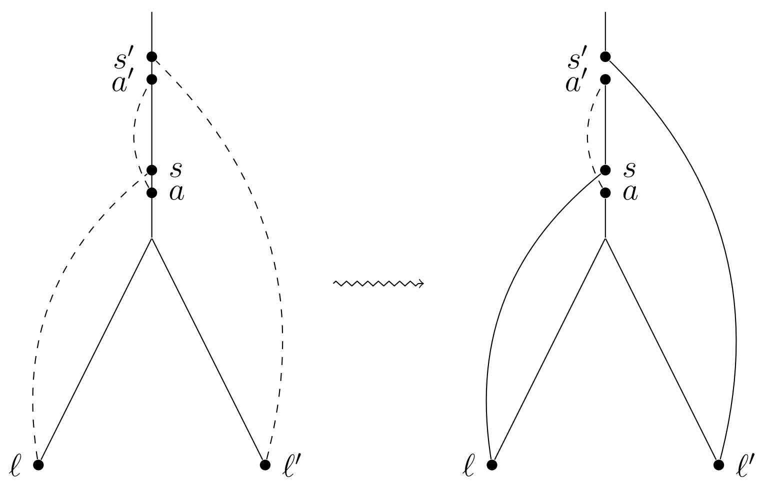


9. ábra



10. ábra

és s csúcsok T'-ben azonos komponensben vannak. Így az a', ℓ' és s' csúcsok is azonos komponensben vannak. T'-ben az aa' él két levelet köt össze, ezért a 2.8. Lemma szerint lenne T-nél kevesebb levelű feszítőfa, ami ellentmondás. $\square$

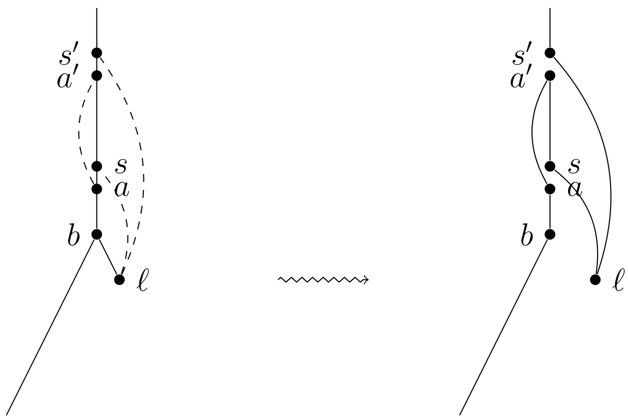


11. ábra

2.16. Lemma. Ha T-ben egy ℓ d-levél G-szomszédai s és s', ezek gyerekei az a és

a' csúcsok, melyek szomszédosak G-ben, akkor az ℓ levél szárán nem csak az ℓ csúcs található.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a levél szárán csak az ℓ csúcs van, jelölje b az ℓ szülőjét. A feltevés szerint b harmadfokú. Hagyjuk el T-ből az sa, $s'a'$ és ℓb éleket, vegyük hozzá az ℓs, $\ell s'$ és aa' éleket (12. ábra). Feltehető, hogy s mélysége nagyobb, mint s' mélysége. Ekkor s, s', a és a' is ℓ őse, és ez négy különböző pont, mert a 2.13. Lemma szerint s és a' nem egyezhet meg. Ekkor az $a's$ úton nem töröltünk élet, tehát a kapott T' gráfban az a', s, ℓ és s' csúcsok azonos komponensben vannak, és az a, a' és s csúcsok is azonos komponensben vannak. A b csúcsnak is őse a T-ben, így az ℓ, s, a', a és b csúcsok is egy komponensben vannak, így T' összefüggő. Tehát T' fa, és kevesebb levele van, mint T-nek, ami ellentmond T választásának. ☐



12. ábra

Most rátérünk az 1.5. Tétel bizonyítására. Legyen T az egyszerű, kétszeresen összefüggő, 3-reguláris G gráfnak egy olyan feszítőfája, amelynek

1. a lehető legkevesebb levele van,
2. feltéve az előzőt, a lehető legnagyobb az összmélysége.

T minden d-leveléhez hozzá fogunk rendelni 6 darab, T-ben másodfokú csúcsot.

2.17. Definíció. Egy levél *átrendezése* a szára csúcsainak olyan sorrendje, amelyben az első a levél töve, és bármely két egymást követő csúcs között van G-ben él.

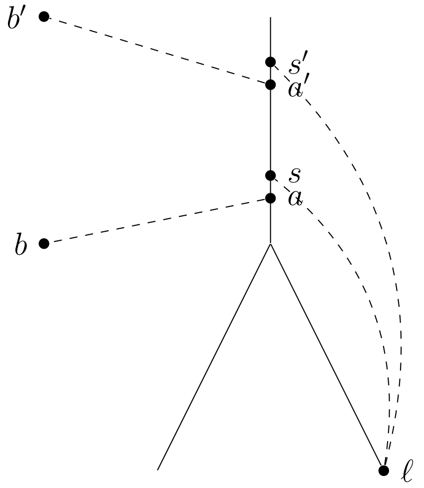
Ha a T fa egy levelét átrendezzük, akkor egy vele izomorf fát kapunk. Egy csúcs *átrendezéssel levéllé tehető*, ha egy ilyen átrendezés után kapott gráfban levél.

A hozzárendeléshez öt esetet különböztetünk meg, melyek közül pontosan egy teljesül T fa minden d-levelére. Minden esetben bizonyítjuk, hogy valóban 6 különböző, T-ben másodfokú csúcsot rendeltünk a levélhez.

1. eset: A levél két G-szomszédja, s és s' nem a levél szárán helyezkedik el, és gyerekeik, a és a' között nem megy él G-ben (13. ábra).

A levélhez hozzárendelt csúcsok: a, a', s, s', valamint s-nek és s'-nek b illetve b' G-szomszédja.

A 2.8. Lemma szerint s és s' nem levél, és nem lehetnek T-ben harmadfokúak, mert van G-szomszédjuk. Feltehető, hogy s mélysége nagyobb, mint s'-é. A 2.13. Lemma szerint a' és s nem lehet azonos, így s, s', a és a' 4 különböző, T-ben másodfokú csúcs. A 2.14. és a 2.12. Lemma szerint b és b' nem lehet levél, és így ugyanaz a csúcs sem lehet. T-ben harmadfokú sem lehet b és b', mert van G-szomszédjuk.



13. ábra . Az ℓ levél és a hozzárendelt csúcsok az 1. esetben

2. eset: A levél két G-szomszédja, s és s' nem a levél szárán helyezkedik el, és gyerekeik, a és a' között megy él G-ben (14. ábra).

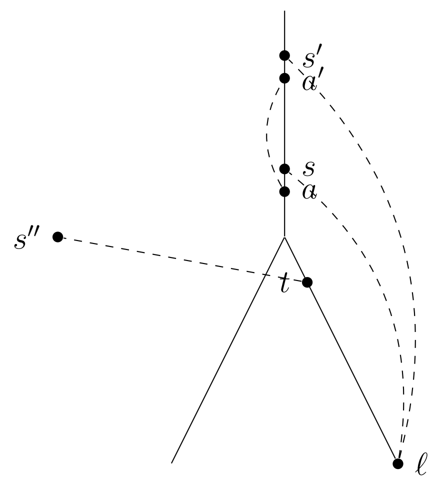
A levélhez hozzárendelt csúcsok: a, a', s, s', valamint a levél t töve és t-nek az s'' G-szomszédja.

Az eddigiek szerint s, s', a és a' 4 különböző, T-ben másodfokú csúcs. A 2.16. Lemma szerint t egy ℓ-től különböző, T-ben másodfokú csúcs. A 2.9. Lemma szerint s'' nem levél, nem lehet T-ben harmadfokú, mert van G-szomszédja, és nem lehet azonos a korábbi hozzárendelt csúcsokkal, hiszen azok egymás, illetve ℓ G-szomszédai.

3. eset: A levél egyik G-szomszédja, s' a levél szárán van, a másik, s, nem. (15. ábra).

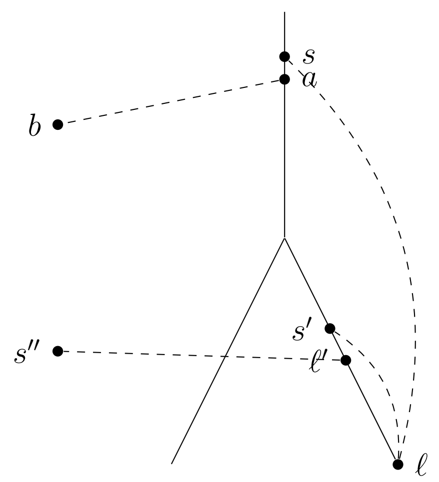
A levélhez hozzárendelt csúcsok: s, s', ezek gyerekei, a és ℓ', valamint a és ℓ' G-szomszédai, b és s''.

Az eddigiek szerint s, a és b különböző másodfokú csúcsok T-ben, a 2.13. Lemma szerint b nincs ℓ szárán. Az s' csúcs ℓ szárán van, és nem ℓ, tehát másodfokú T-ben. Mivel G egyszerű gráf, $\ell' \neq \ell$, és így ℓ' is másodfokú, sőt a levél szárának a levél t tövétől induló $ts'\ell\ell'$ bejárása szerint levéllé tehető. Így szomszédja, s'' is másodfokú



14. ábra . Az ℓ levél és a hozzárendelt csúcsok az 2. esetben

T-ben, és ezért nem lehet azonos b-vel.



15. ábra . Az ℓ levél és a hozzárendelt csúcsok a 3. esetben

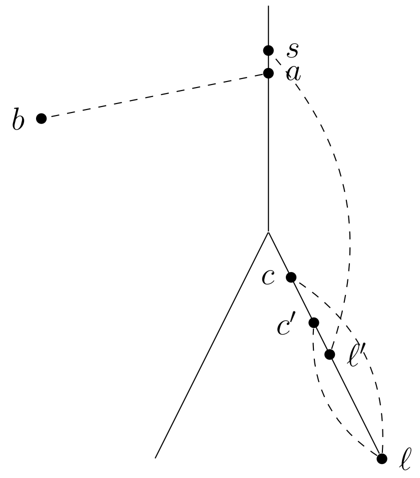
4. eset: A levél mindkét G-szomszédja, c és c' a levél szárán van, és közülük a nagyobb mélységű csúcs gyerekének, ℓ'-nek az s G-szomszédja nem a levél szárán van (16. ábra).

A levélhez hozzárendelt csúcsok: c, c', ℓ', s, s gyereke, a, és a G-szomszédja, b.

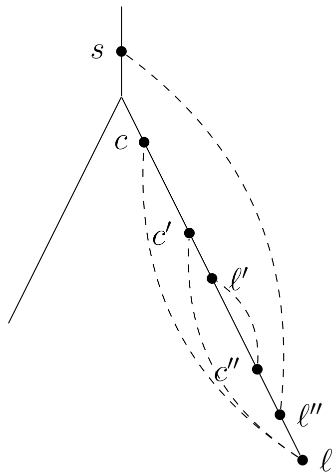
A c és c' és ℓ' csúcsok ℓ szárán helyezkednek el, másodfokúak T-ben és ℓ' levéllé tehető. Az előző esethez hasonlóan s, a és b három különböző, másodfokú csúcs, nem ℓ szárán.

5. eset A levél mindkét G-szomszédja, c és c' a levél szárán van, és közülük a nagyobb mélységű c' csúcs gyerekének, ℓ'-nek a c'' G-szomszédja is a levél szárán van.

A levélhez hozzárendelt csúcsok: c, c', ℓ', c'', egy alkalmas ℓ'' csúcs a levél szárán és annak G-szomszédja, s. Az ℓ'' csúcs a levél töve, vagy átrendezéssel levéllé tehető (17. ábra).



16. ábra . Az ℓ levél és a hozzárendelt csúcsok a 4. esetben



17. ábra . Az ℓ levél és a hozzárendelt csúcsok az 5. esetben

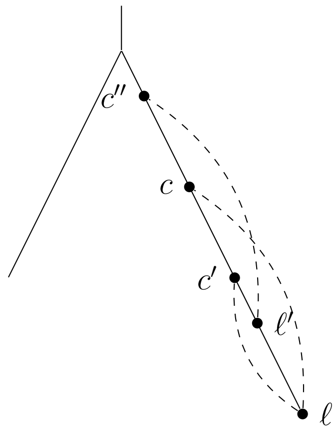
A levél szárán c, c', c'' és l' négy különböző, másodfokú csúcs. Megmutatjuk, hogy a levél t töve különbözik ezektől, vagy választható még egy l'' csúcs a levél szárán, amely T-ben másodfokú és levéllé tehető.

G kétszeresen összefüggő, így van olyan él, ami a levél száráról egy száron kívüli csúcsba vezet, tehát van olyan csúcs a száron, mely különbözik ℓ, c, c', c'' és l' mindegyikétől. Tegyük fel, hogy ezek között van a levél töve, és a többi, a száron levő csúcs nem tehető levéllé.

A c'' csúcs elhelyezkedése szerint a következő esetek lehetségesek.

- A c'' csúcs a levél töve (18. ábra).

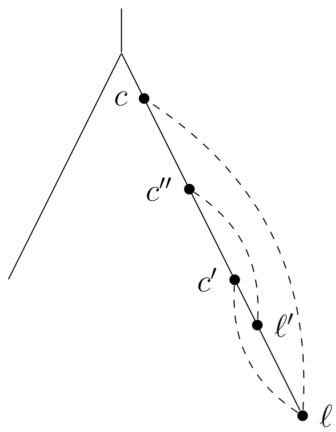
  A cc' szakaszon (vagyis a c és c' csúcsot összekötő út c-től és c'-től különböző csúcsai között) nem lehet csúcs, mert akkor a c csúcs d gyereke a $c''cld$ úton (ahol



18. ábra

nem T-hez tartozó éleken haladunk, ha a két csúcs között vezet ilyen, különben a szár élein) levéllé tehető lenne. Így az $\ell\ell'$ szakaszon sem lehet csúcs, mert akkor az ℓ csúcs d szülője a $c''c\ell c'd$ úton levéllé tehető lenne. Végül a cc'' szakaszon sem lehet csúcs, mert akkor a c'' csúcs d gyereke a $c''\ell'lc'd$ úton levéllé tehető lenne, így ellentmondásra jutottunk.

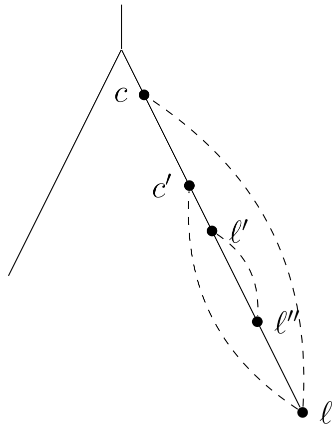
- A c'' csúcs a c és c' csúcsok közé esik (19. ábra).



19. ábra

A cc'' szakaszon nem lehet csúcs, mert akkor a c csúcs d gyereke cld úton levéllé tehető lenne. Így az $\ell\ell'$ szakaszon sem lehet csúcs, mert ekkor az ℓ csúcs d szülője a $c\ell c'c''\ell'd$ úton levéllé tehető lenne. Végül a $c'c''$ szakaszon sem lehet csúcs, mert akkor a c' csúcs d szülője a $c\ell c'\ell'c''d$ úton levéllé tehető lenne, így ellentmondásra jutottunk.

- A c'' csúcs az ℓ és ℓ' csúcsok közé esik (20. ábra).



20. ábra

Az $\ell'\ell''$ szakaszon van csúcs, mert G egyszerű gráf. Ha d jelöli c'' szülőjét, akkor a d csúcs a $cc'\ell c''\ell' d$ úton levéllé tehető lenne, ami ellentmondás.

Tehát tényleg kiválasztható egy, az eddigiektől különböző ℓ'' csúcs, ami a levél töve, vagy átrendezéssel levéllé tehető. Ennek a csúcsnak az s G-szomszédja nem lehet c, c', ℓ' vagy c'', mert ezek egymásnak, vagy ℓ-nek a G-szomszédai. A 2.8 és 2.9. Lemmák szerint s is másodfokú T-ben.

2.18. Állítás. Nem rendeltük két különböző d-levélhez ugyanazon csúcsot.

Bizonyítás. Tetszőleges ℓ levélhez hozzárendelt valamennyi csúcs a következő típusok valamelyikébe tartozik:

1. s-típusú: az ℓ levélnek, vagy egy levéllé tehető csúcsnak a G-szomszédja, amely nem ℓ szárán helyezkedik el

2. t-típusú: az ℓ levél töve

3. u-típusú: egy t-típusú csúcs G szomszédja

4. ℓ-típusú: átrendezéssel levéllé tehető csúcs

5. a-típusú: egy s-típusú csúcs gyereke

6. b-típusú: egy a-típusú csúcs G-szomszédja

7. c-típusú: az ℓ levél szárán helyezkedik el, és G-szomszédja a levél, vagy egy másik, a levélhez hozzárendelt csúcs

Két, különböző levélhez rendelt s-,u-,c-, vagy b-típusú csúcs nem lehet azonos, mert egy T-ben másodfokú csúcsnak csak egy G-szomszédja lehet. Ugyancsak nem lehet azonos két, különböző levélhez rendelt t-, ℓ-, vagy c-típusú csúcs, hiszen különböző levelek szárán vannak. A maradék esetek:

- s-típusú és t-típusú csúcs nem lehet azonos a 2.9. Lemma szerint.
- s-típusú és ℓ-típusú csúcs nem lehet azonos a 2.8. Lemma szerint.
- s-típusú és a-típusú csúcs nem lehet azonos a 2.14. Lemma szerint.
- t-típusú és u-típusú csúcs nem lehet azonos a 2.11. Lemma szerint.
- t-típusú és a-típusú csúcs nem lehet azonos, mert a 2.13. Lemma szerint a-típusú csúcs nem lehet egy másik levél szárán.
- t-típusú és b-típusú csúcs nem lehet azonos a 2.14. Lemma szerint.
- u-típusú és ℓ-típusú csúcs nem lehet azonos a 2.9. Lemma szerint.
- u-típusú és a-típusú csúcs nem lehet azonos a 2.14. Lemma szerint.
- ℓ-típusú és a-típusú csúcs nem lehet azonos, mert a 2.13. Lemma szerint a-típusú csúcs nem lehet egy másik levél szárán.
- ℓ-típusú és b-típusú csúcs nem lehet azonos a 2.14. Lemma szerint.
- két a-típusú csúcs nem lehet azonos, mert szülőik különböznek.
- a-típusú és b-típusú csúcs nem lehet azonos, a 2.15. Lemma szerint.
- a-típusú és c-típusú csúcs nem lehet azonos, mert a 2.13. Lemma szerint a-típusú csúcs nem lehet egy másik levél szárán.

$\square$

Tehát minden d-levélhez hozzárendeltünk 6 darab másodfokú csúcsot, és különböző levelekhez rendelt csúcsok különbözőek. Ezzel befejeztük az 1.5. Tétel bizonyítását.

$\square$

3. Kétszeresen összefüggő multigráfok

Most az [1] cikkben bizonyított 1.6. Tételre adunk egy új bizonyítást, az 1.5. Tétel bizonyításában használt módszereket követve.

G most kétszeresen összefüggő, 3-reguláris multigráf, az előzőhez hasonlóan legyen T a G gráfnak egy olyan feszítőfája, amelynek

1. a lehető legkevesebb levele van,

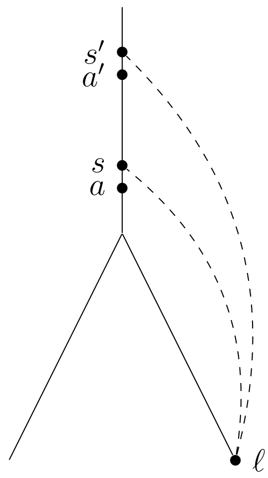
2. feltéve az előzőt, a lehető legnagyobb az összmélysége.

Most minden d-levélhez 4 darab, T-ben másodfokú csúcsot fogunk hozzárendelni. A hozzárendelés az alábbi esetek szerint történik:

1. eset A levél két G-szomszédja, s és s' nem a levél szárán helyezkedik el.

A levélhez hozzárendelt csúcsok: s, s', valamint az ő a és a' gyerekeik (21. ábra).

Egy levél két G-szomszédja nem lehet ugyanaz a v csúcs, mert a 3-regularitás miatt v csak levél lehetne, ami a 2.8. Lemma miatt nem lehetséges. Így s és s' különböznek, nem lehetnek levelek és nem lehetnek T-ben harmadfokúak, mert van G-szomszédjuk. Így a 2.13. Lemma szerint s, s', a és a' 4 különböző, T-ben másodfokú csúcs.

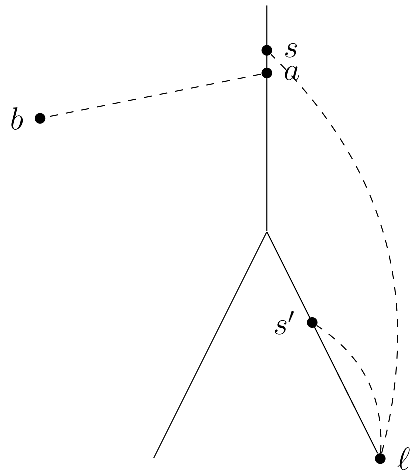


21. ábra

2. eset A levél egyik G-szomszédja, s', a levél szárán van, a másik, s, nem.

A levélhez hozzárendelt csúcsok: s, s', az s csúcs gyereke, az a csúcs és az a csúcs G-szomszédja, b (22. ábra).

Az eddigiek szerint s, s' és a 3 különböző, T-ben másodfokú csúcs. A 2.9 és 2.12. Lemmák szerint b nem levél, és nem lehet T-ben harmadfokú, mert van G-szomszédja. A másik három hozzárendelt csúccsal sem lehet azonos, ugyanis azok egymásnak, illetve ℓ-nek a G-szomszédai.



22. ábra

3. eset A levél mindkét G-szomszédja, c és c' a levél szárán van.

A levélhez hozzárendelt csúcsok: c, c' és egy alkalmas ℓ' csúcs a levél szárán és annak G-szomszédja, s. Az ℓ' csúcs a levél töve, vagy átrendezéssel levéllé tehető (23. ábra).

A levél szárán c, c' különböző másodfokú csúcsok. Feltehető, hogy c' mélysége nagyobb, mint c-é. Megmutatjuk, hogy a levél t töve különbözik az eddig kiválasztott csúcsoktól, vagy választható még egy ℓ' csúcs a levél szárán, amely T-ben másodfokú és levéllé tehető.

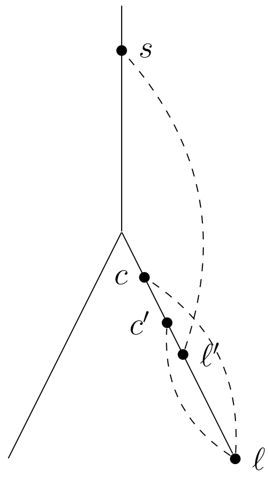
G kétszeresen összefüggő, így van olyan él, ami a levél száráról egy száron kívüli csúcsba vezet, tehát van a száron ℓ-en, c-n és c'-n kívül egy másik csúcs is. Ha ez a csúcs c őse, akkor a levél töve nem lehet c, így c' sem. Ha c és c' között van csúcs, akkor c gyereke, d a $c\ell d$ úton levéllé tehető. Ha pedig ℓ és c' közt van csúcs, akkor c' gyereke a $cc'\ell d$ úton levéllé tehető.

Az ℓ' csúcs s G-szomszédja nem egyezhet meg c, c' és ℓ' egyikével sem, és másodfokú T-ben a 2.8. Lemma szerint.

3.1. Állítás. Nem rendeltük két különböző levélhez ugyanazt a csúcsot.

Bizonyítás. Az 1.5. Tétel bizonyítása során már beláttuk. □

Ha a g gyökér levele T-nek, akkor G-szomszédai, v és v' különböző másodfokú csúcsok. Nem egyezhetnek meg a d-levelekhez már hozzárendelt csúcsok egyikével



23. ábra

sem, mert a fokszám miatt csak a-típusúak lehetnének, de ez a 2.12. Lemma miatt nem lehetséges.

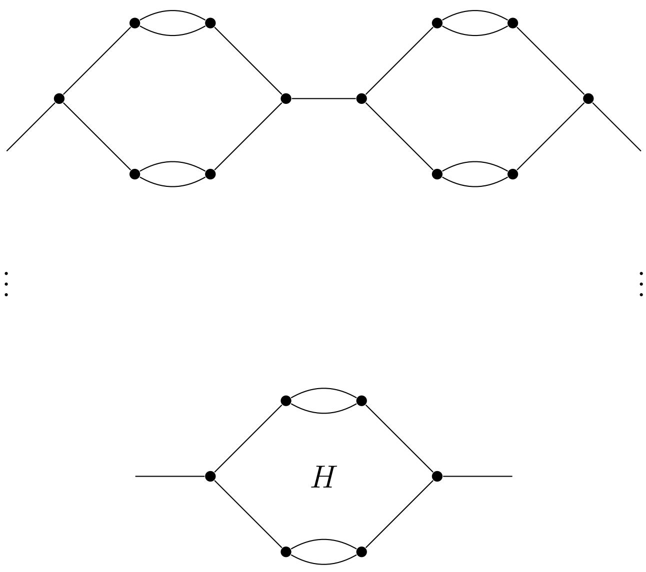
Jelölje T leveleinek számát k. Ha T gyökere levél, akkor a harmadfokú csúcsok száma $k-2$, a d-levelek száma legalább $k-1$, az ezekhez rendelt másodfokú csúcsok száma $4(k-1)$, és 2 csúcsot g-hez rendeltünk. Így $k+(k-2)+4(k-1)+2 \leq n$, tehát $k \leq \frac{n}{6}+\frac{2}{3}$.

Ha T gyökere nem levél, akkor $k+(k-2)+4k \leq n$, tehát $k \leq \frac{n}{6}+\frac{1}{3}$. Mindkét esetben $m\ell(G) \leq k \leq \frac{n}{6}+\frac{2}{3}$. □

Most megmutatjuk, hogy az 1.6. Tételben szereplő korlát lényegében éles.

3.2. Állítás. Végtelen sok n-re léteznek olyan n csúcsú, kétszeresen összefüggő, 3-reguláris multigráfok, melyekre $m\ell(G) \geq \frac{n}{6}$.

Bizonyítás. Tekintsük a 24. ábrán látható G_k gráfokat. Ezek kétszeresen összefüggő, 3-reguláris multigráfok, csúcsszámuk $6k$. Ha T egy feszítőfája G_k-nak, minden H részben kell, hogy legyen levele, így $m\ell(G) \geq k$. □



24. ábra A G_k gráfban a H rész k-szor ismétlődik

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Wiener Gábornak a téma ajánlását és a dolgozat elkészítéséhez adott segítséget, észrevételeket, javaslatokat.

4. Irodalomjegyzék

[1] S. Boyd, R. Sitters, S. van der Ster, L. Stougie, The traveling salesman problem on cubic and subcubic graphs, Math. Program. A 144, 227-245. (2014)

[2] J. Goedgebeur, K. Ozeki, N. van Cleemput, G. Wiener: On the minimum leaf number of cubic graphs, arXiv preprint: arXiv:1806.04451 (2018)

[3] H.-I. Lu and R. Ravi. The power of local optimization: Approximation algorithms for maximum-leaf spanning tree (draft). Technical Report CS-96-05, Department of Computer Science, Brown University, Providence, Rhode Island (1996)

[4] H. G. Zoeram, D. Yaqubi, Spanning k-ended trees of 3-regular connected graphs, Electronic J. of Graph Theory and Applications 5 , 207–211. (2017)

[5] T. Mömke, O.Svensson, Approximating graphic TSP by matchings, Proc.of the 52nd Symposium Foundations of Computer Science (FOCS), 560–569. (2011)