



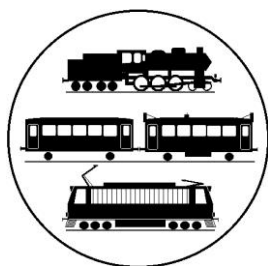
Budapesti Műszaki, és Gazdaságtudományi Egyetem

Vasúti járművek, Repülőgépek és Hajók Tanszék

Félpantográf rendszerű áramszedők tervezése
és vizsgálata

Hadas Ádám
Járműmérnöki MSc szak
Vasúti járműmérnök szakirány

Konzulens:
prof. dr. Zobory István
Professor Emeritus



TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés.....	1
2. Félpantográf áramszedő geometriájának számítása	2
3. Félpantográf rendszerű áramszedők redukált tömegének és nyomatékigényének meghatározása	6
3.1 Áramszedő nyomatékigényének meghatározása	6
3.2 Áramszedő redukált tömegének meghatározása.....	9
4. Áramszedő redukált tömegének meghatározása tetszőleges magasságban	12
4.1 Lineáris interpoláció	12
4.2 Lineáris interpoláció közvetlen alkalmazása	13
4.3 Lineáris interpoláció közvetett alkalmazása	14
4.4 A két módszer összehasonlítása, értékelése	15
5. Felsővezeték modellezése	17
6. Az áramszedő, mint egyszabadságfokú lengőrendszer	19
6.1 Az áramszedő mozgásegyenletének felírása	19
6.1.1 Mozgásegyenlet megoldása.....	21
6.2 Áramszedő sajátfrekvenciájának meghatározása	22
7. Villamos vontatójárművek mint többszabadságfokú lengőrendszerek	25
7.1 Másodfajú Lagrange – mozgásegyenlet endszer felírása	26
8. Összefoglalás.....	32
9. Irodalomjegyzék.....	33

1. BEVEZETÉS

A villamos vontatójárművek elengedhetetlen alrendszere az áramszedő, más néven pantográf. Ezen alrendszerrel függ a jármű biztos üzeme, lévén, hogy ez teremti meg a kapcsolatot a felsővezeték és a villamos berendezések között. A villamos vontatás kezdetén az ollós elrendezésű áramszedők terjedtek el, az egyszerű és merev mechanizmusa miatt, ám ezek redukált tömege és hely igénye igen nagy.

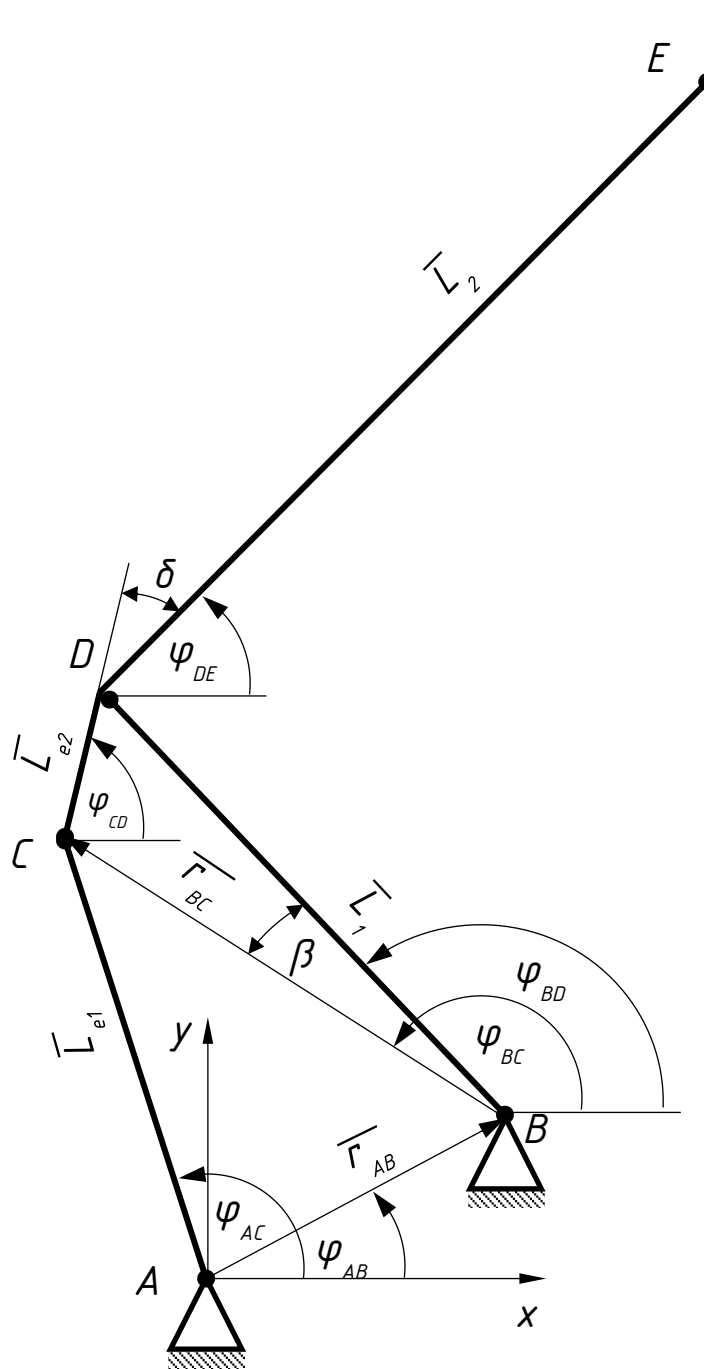
A vasúttársaságok eltérő rendszerrel építették ki a villamos vontatási rendszerüket, így biztosítva, hogy az országukba csak a saját vontatójárművükkel lehessen ellátni a vonatok továbbítását. De igény mindig volt arra, hogy más társaságok a saját mozdonyokkal továbbítsák a szerelvényeket, így időt és pénzt spórolva meg. Ezen igényt kielégítve a gyártók kifejlesztették a több áramnemű mozdonyokat, de a kezdetekben minden áramnemnek saját áramszedőt telepítettek, ám ezzel az volt a probléma, hogy a régi, ollós áramszedőből nem fért el a megfelelő mennyiségű. Ezért az 1950-es években kifejlesztették a félollós áramszedőt, aminek helyigénye lényegesen kisebb és a redukált tömege is jóval alacsonyabb. Az utóbbira a nagy sebességű közlekedésnél van nagy jelentősége, mivel a dinamikus hatások minimalizálhatók.

A dolgozat arra keresi a választ, hogy a korszerű számítógépes lehetőségek segítségével hogyan lehet megtervezni ezen alrendszert és milyen vizsgálatokat lehet elvégezni rajta. A tervezés első lépéseként elő kell állítani a megfelelő karrendszert, mint az áramszedő geometriáját. A megtervezett áramszedő alkatrészeinek tömegének ismeretében meg lehet határozni a redukált tömegét és a nyomatékigényét. Előbbi a dinamikai igénybevétel miatt az utóbbi pedig az emelőszerkezet miatt lényeges. Az áramszedőbe a megfelelő kontaktus eléréséhez egy rugót építettek be, ami nem csak a megfelelő áramszedést biztosította, hanem az emelkedést is garantálja.

Belátható, hogy az áramszedő egy redukált tömeget, rugót és manapság csillapítót tartalmazó dinamikai rendszert alkot, amire a mozdony (a vasúti pálya egyenlensége miatt) gerjesztő hatást gyakorol. Így vizsgálható önmagában az áramszedő, mint egyszabadságfokú lengőrendszer, továbbá a mozdonyra szerelve, rendszerként, így pedig egy többszabadságfokú lengőrendszerként lehet analizálni.

2. FÉLPANTOGRÁF ÁRAMSZEDŐ GEOMETRIÁJÁNAK SZÁMÍTÁSA

A félpantograf rendszerű áramszedő geometriájának tervezése [2] nagy körültekintést igényel, ugyanis a geometria hatással van az áramszedő összes többi jellemzőjére.



1. ábra: számításhoz szükséges adatok [11]

Többféle módszer létezik [3] a tervezéshez, ám a következőkben bemutatott eljárás a legegyszerűbb és legcélravezetőbb.

A számítás [1] során az E pont elmozdulását szeretnénk meghatározni az A csuklóponthoz kötött derékszögű koordinátarendszerben, a φ_{AC} szögelfordulás függvényében (1. ábra). Ennek során az a kikötés, hogy az E pont pályája a lehető legkisebb mértékben térjen el a függőleges egyenestől az áramszedő működési tartományában. Erre a kikötésre az ollós áramszedőnél felsorolt okok miatt van szükség. A számításhoz válasszuk paraméternek az $|\overline{r_{AB}}|$, $|\overline{L_1}|$, $|\overline{L_{e1}}|$, $|\overline{L_{e2}}|$ karhosszúságokat és a φ_{AB} szöget. Ennek során kialakul egy $ABCD$ négyszög a megadott tagok hosszával. Első lépésként meg kell határozni az $|\overline{L_1}|$ és $|\overline{L_{e1}}|$ karok által bezárt szöget.

$$\begin{aligned}\overline{r_{BC}} &= \overline{L_{e1}} - \overline{r_{AB}} \\ |\overline{L_{e1}}|^2 &= |\overline{L_1}|^2 + |\overline{r_{BC}}|^2 - 2 \cdot |\overline{r_{BC}}| \cdot |\overline{L_1}| \cdot \cos \beta\end{aligned}$$

Ebből ki lehet fejezni a β szöget

$$\begin{aligned}\beta &= \cos^{-1} \left(\frac{|\overline{L_1}|^2 + |\overline{r_{BC}}|^2 - |\overline{L_{e1}}|^2}{2 \cdot |\overline{r_{BC}}| \cdot |\overline{L_1}|} \right) \\ \varphi_{BD} &= \varphi_{BC} - \beta\end{aligned}$$

A φ_{BD} szög ismeretében a φ_{BC} szög is számítható.

$$\varphi_{CD} = \tan^{-1} \left(\frac{|\overline{L_1}| \cdot \sin \varphi_{BD} - |\overline{r_{BC}}| \cdot \sin \varphi_{BC}}{|\overline{L_1}| \cdot \cos \varphi_{BD} - |\overline{r_{BC}}| \cdot \cos \varphi_{BC}} \right)$$

Ezek után már meg lehet határozni az $\overline{L_2}$ vektor hosszát.

$$\begin{aligned}|\overline{L_2}| &= \sqrt{(E_x - D_x)^2 + (E_y - D_y)^2} \\ \varphi_{DE} &= \tan \left(\frac{E_y - D_y}{E_x - D_x} \right) \\ \delta &= \varphi_{CD} - \varphi_{DE}\end{aligned}$$

A δ szöget a mozgás során állandónak véve kell meghatározni az E pont pályagörbéjét. Kísérletezés során megállapítható, hogy akkor kapjuk a legegyenesebb pályagöbét, ha $\delta \cong \varphi_{AB}$, valamint a karhosszak akkorák, hogy a δ szögre meghatározott feltételt kielégítik [4]. A karhosszak ismeretében előállítható az E pont pályagörbéje, mint φ_{AC} függvénye.

$$\begin{aligned}E_x &= |\overline{L_{e1}}| \cdot \cos \varphi_{AC} - |\overline{L_{e2}}| \cdot \cos \varphi_{CD} - |\overline{L_2}| \cdot \cos \varphi_{CD} \\ E_y &= |\overline{L_{e1}}| \cdot \sin \varphi_{AC} - |\overline{L_{e2}}| \cdot \sin \varphi_{CD} - |\overline{L_2}| \cdot \sin \varphi_{CD}\end{aligned}$$

Ezeknek a függvényeknek a segítségével megrajzolhatjuk az E pont pályagörbáját. Példaképpen vegyük az Afp 424s típusú félpantográf áramszedőt, melynek a méretei:

$$|\overline{r_{AB}}| = 726,395 \text{ mm}$$

$$\varphi_{AB} = 13,94^\circ$$

$$|\overline{L_{e1}}| = 1044 \text{ mm}$$

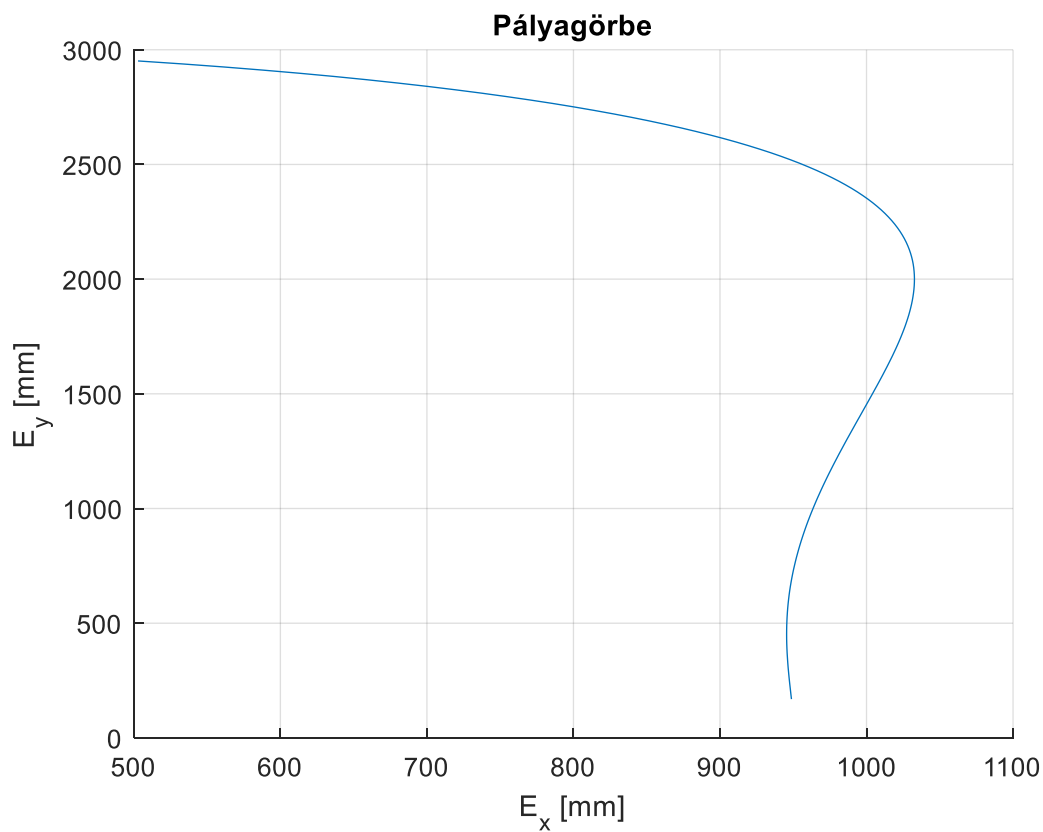
$$|\overline{L_{e2}}| = 340,162 \text{ mm}$$

$$|\overline{L_1}| = 1420 \text{ mm}$$

$$|\overline{L_2}| = 1663,6 \text{ mm}$$

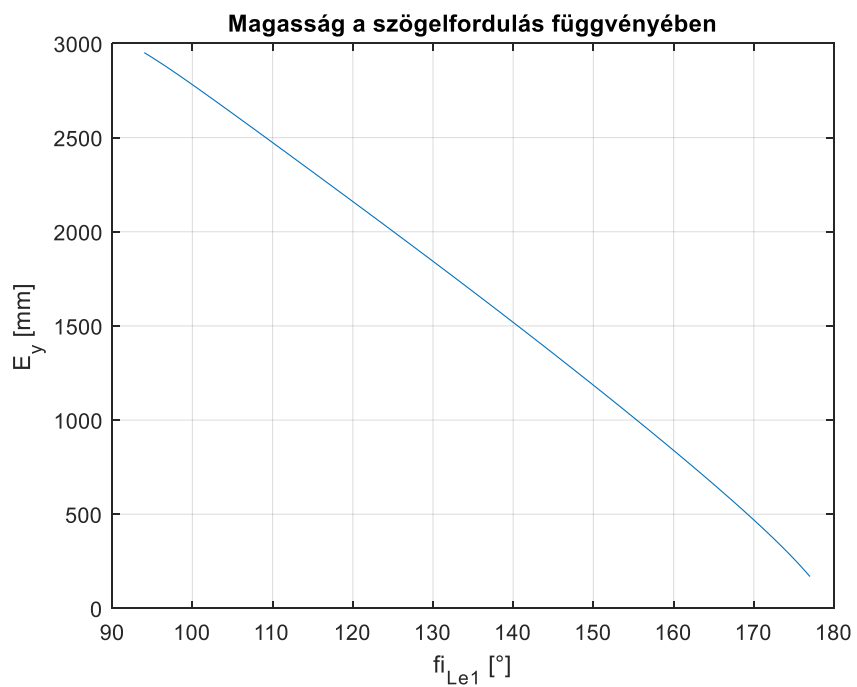
$$\delta = 14,6199^\circ$$

Ezen adatok segítségével előállítható az áramszedő pályagörbéje (2. ábra).



2. ábra Félpantográf áramszedő pályagörbéje

Valamint a $\varphi_{L_{e1}}$ szögelfordulás függvényében a magasság függés is (3. ábra).



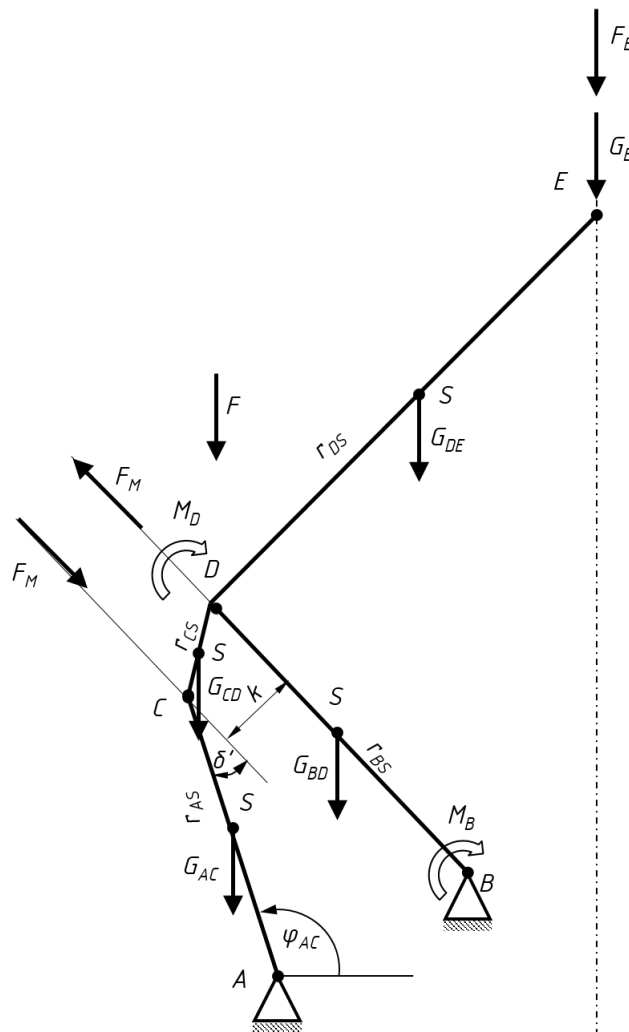
3. ábra Áramszedő magassága a φ_{Le1} szög függvényében

3. FÉLPANTOGRÁF RENDSZERŰ ÁRAMSZEDŐK REDUKÁLT TÖMEGÉNEK ÉS NYOMATÉKIGÉNYÉNEK MEGHATÁROZÁSA

A redukált tömeg meghatározása során azt a fiktív tömeget kell meghatározni, amit a csúszó saru helyén van, és a mozgási energiája megegyezik a mozgó karrendszer mozgási energiájával.

3.1 Áramszedő nyomatékigényének meghatározása

A nyomaték igény meghatározása során figyelembe kell venni az egyes tagok tömegét, valamint a forgó mozgást végző karok esetében a tömegükön kívül azok tehetetlenségi nyomatékát és súlypontjait. Továbbá definiálható még a rendszer pillanatnyi forgás pólusa is, mely pont körül végzi a forgó mozgását a karrendszer.



4. ábra: Áramszedő nyomatékigényének meghatározása [1]

Jel	Megnevezés
G_{AC}	Húzókar súlya
G_{CD}	Emelőkar súlya

G_{BD}	Nyomókar súlya
G_{DE}	Felsőkar és a vízszintesbe tartó rúd hossza
G_E	Áramszedőfej súlya
F_E	Felsővezeték nyomóereje
S	Karok súlypontjai
M_D	F_M erő k karon kifejtett nyomatéka a D pontra
F	Eredő erő
M_B	Az áramszedő nyomatékigénye a b forgástengelyen

1. táblázat: 4. ábra jelmagyarázata

A nyomatékigény meghatározása (4. ábra) során bemenő paraméterek a már elkészített geometria méretei, valamint az egyes tagok súlya, azok tehetetlenségi nyomatékai és a karok súlypontjai. A számítást, hasonlóan a geometria meghatározásánál, φ_{AC} függvényeként írható föl, vagyis $\Delta\varphi_{AC}$ lépésekben határozható meg a nyomatékigény és a redukált tömeg értékei.

Első lépésként meg kell határozni a D pontban ébredő nyomatékokot.

$$M_{D1} = [(F_E + G_E) \cdot |\overline{L}_2| + G_{DE} \cdot r_{DS}] \cdot \cos(\varphi_{DE})$$

$$M_{D2} = \left(G_{CD} \cdot \frac{|\overline{L}_{e2}| - r_{CS}}{|\overline{L}_{e2}|} + G_{AC} \cdot \frac{r_{AS}}{|\overline{L}_{e1}|} \right) \cdot |\overline{L}_{e2}| \cdot \cos(\varphi_{CD})$$

$$M_D = M_{D1} - M_{D2}$$

Következő lépésként meg kell határozni a C és E pontok távolságát és az alapsíkkal bezárt szögét.

$$r_{CE} = \sqrt{(E_x - C_x)^2 + (E_y - C_y)^2}$$

$$\varphi_{CE} = \tan^{-1} \left(\frac{E_y - C_y}{E_x - C_x} \right)$$

Ezek után meghatározható a C ponti nyomaték is.

$$M_{C1} = [(F_E + G_E) \cdot r_{CE} + (G_{CD} + G_{DE}) \cdot S_{CE}] \cdot \cos(\varphi_{CE})$$

$$M_{C2} = G_{BD} \cdot \frac{r_{BS}}{|\overline{L}_1|} \cdot |\overline{L}_{e2}| \cdot \cos(\varphi_{CE})$$

$$M_C = M_{C1} + M_{C2}$$

Most meg kell határozni az áramszedőre ható erőpár F értékét, majd ennek a karját is.

$$F = F_E + G_E + G_{DE} + G_{CD} + G_{AC} \cdot \frac{r_{AS}}{|\overline{L}_{e1}|} + G_{BD} \cdot \frac{r_{BS}}{|\overline{L}_1|}$$

$$k_a = |\overline{L}_{e2}| \cdot \sin(\pi - \varphi_{AC} + \varphi_{CD})$$

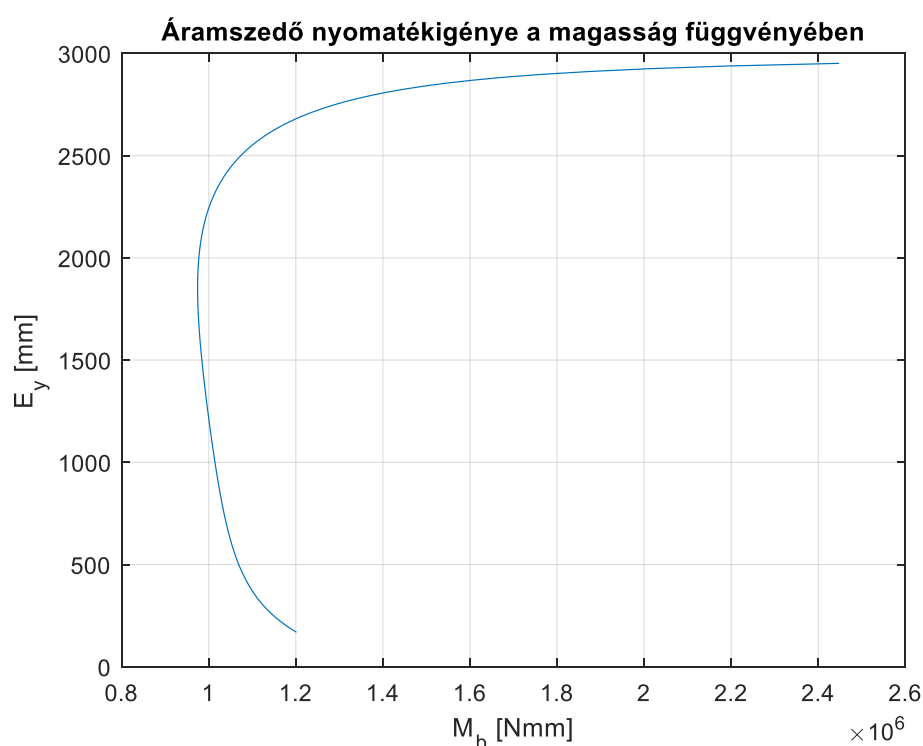
$$k_b = |\overline{L_{e2}}| \cdot \sin(\pi - \varphi_{BD} + \varphi_{CD})$$

Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni az áramszedő nyomatékigényét, definiálni kell egy δ' szöveget, ami a következő módon határozható meg:

$$\delta' = \varphi_{BD} - \varphi_{AC}.$$

Az áramszedőbe épített rugó egy karrendszer segítségével csatlakozik a B pontba, így az áramszedő nyomatékigényét (5. ábra) a B pontban ébredő nyomatékkal tudjuk meghatározni:

$$M_b = \frac{M_D \cdot |\overline{L_1}|}{k_a} \cdot \sin(\delta') - F \cdot |\overline{L_1}| \cdot \cos(\varphi_{BD}).$$



5. ábra: AFp424s típusú áramszedő nyomatékigénye

Következő lépésben meghatározható az áramszedő pillanatnyi forgás póluspontja. A pantográf redukált tömege akkor tartható közel állandó értéken, ha a P póluspont közel van az E ponthoz.

$$P_x = \frac{r_{AB} \cdot \sin(\varphi_{AB}) - r_{AB} \cdot \cos(\varphi_{AB}) \cdot \tan(\varphi_{BD})}{\tan(\varphi_{AC}) - \tan(\varphi_{BD})}$$

$$r_{AP} = \frac{P_x}{\cos(\varphi_{AC})}$$

$$P_y = r_{AP} \cdot \sin(\varphi_{AC})$$

A redukált tömeg értékét a fenti egyenlet átrendezésével határozható meg.

$$m_{red} = \frac{J_a \omega_a^2 + J_b \omega_b^2 + (J_s + m_s \cdot r_{PS}^2) \cdot \omega_p^2}{v_y^2}$$

A mozgási energiákat elméletileg bármelyik tengelyre fölírható, de valójában akkor kapjuk a legegyszerűbb alakot, ha a p, pillanatnyi pólusra írjuk föl az egyenleteket. Továbbá definiálható még a tengelyek közötti áttétel is.

$$\frac{\omega_p}{\omega_a} = \frac{L_{e1}}{r_{AP}} = i_{PA}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_b} = \frac{L_1}{r_{BP}} = i_{PB}$$

Az alsókarok tehetetlenségi nyomatékait föl lehet írni még az áttételek segítségével is.

$$J_{AP} = \frac{J_a}{i_{PA}^2}$$

$$J_{BP} = \frac{J_b}{i_{PB}^2}$$

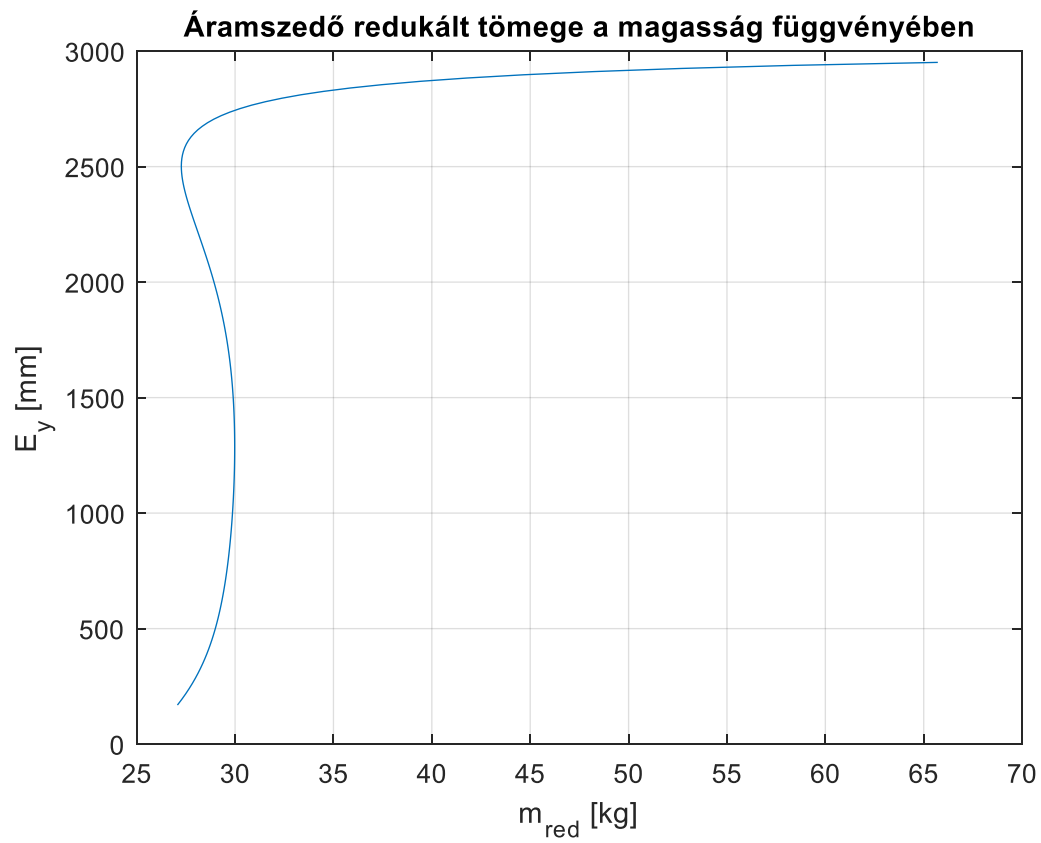
A függőleges irányú sebességet pedig a következő összefüggés segítségével határozható meg:

$$v_y = |\overline{r_{PE}}| \cdot \omega_p \cdot \cos(\varphi_{PE})$$

A redukált tömeg számításához az alábbi egyszerűsített képletet lehet fölhasználni:

$$m_{red} = \frac{J_a \left(\frac{r_{PC}}{L_{e1}}\right)^2 + J_b \left(\frac{r_{PD}}{L_1}\right)^2 + J_s + m_s \cdot r_{PS}^2}{|\overline{r_{PE}}|^2 \cdot \cos^2(\varphi_{PE})}$$

Példa képen az AFP424S típusú áramszedő redukált nyomatékát a 7. ábra szemlélteti.



7. ábra: AFp424s típusú áramszedő redukált tömege

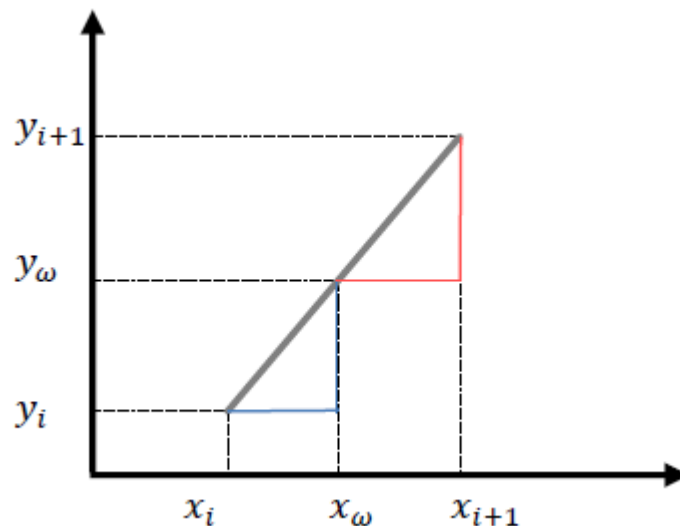
4. ÁRAMSZEDŐ REDUKÁLT TÖMEGÉNEK MEGHATÁROZÁSA TETSZŐLEGES MAGASSÁGBAN

A vizsgálat folytatásához szükség van az áramszedő redukált tömegére. A méretezési eljárás során az értékek a φ_{AC} szögelfordulás függvényében vannak kiszámolva. Ennek tükrében valamilyen közelítő eljárás segítségét kell használni.

4.1 Lineáris interpoláció

Ha ismert az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ pontokban felvett $y_i = f(x_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ értékei. Keressük a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, ami kielégíti a $y_i = g(x_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ interpolációs [8] feltételeket. További megjegyzések:

- Az $\{x_i\}_{i=1}^n$ pontokat *interpolációs alappontoknak* nevezzük
- Az interpolációs feltételek teljesülésétől azt várjuk, hogy a $g(x)$ interpolációs függvény az alappontok által meghatározott intervallumon jól közelítse az $f(x)$ függvényt



8. ábra: Lineáris interpoláció [8]

Másképpen megfogalmazva: keressük meg az x_α helyen az $f(x_\alpha)$ függvény értékét. Ezt a pontot az x_i és az x_{i+1} alappontok veszik körül. Továbbá a hasonló háromszögek alapján a következő egyenlőség írható fel:

$$\frac{x_\alpha - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_\alpha - y_i}{y_{i+1} - y_i}$$

Ebből az egyenletből kell meghatározni $f(x_\alpha)$ értékét, ami nem más, mint az y_α érték.

$$y_\alpha = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_\omega - x_i)$$

Más jelölésekkel:

$$f(x_\alpha) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_\omega - x_i)$$

Ezen módszer segítségével meghatározható az áramszedő redukált tömege, tetszőleges áramszedő magassághoz. Ezt egy MATLAB program könnyen lekezeli, a már előre elkészített $\{x_i\}_{i=1}^N$; $\{y_i\}_{i=1}^N$ pontsorozat és a meghatározni kívánt x_α érték segítségével a hozzá tartozó y_α függvényértéket gyorsan kiszámolja.

A következőkben egy példán lesz bemutatva a matematikai módszer gyakorlati alkalmazása. Példaképpen a MÁV – Start Zrt széles körben alkalmazott 431, 432, 433 sorozatú (V43) villamosmozdony és az AFP 424S áramszedő esetén, $v = 0 \left[\frac{km}{h} \right]$ (álló helyzet) és $h_f = 6000 [mm]$ felsővezeték magasságot feltételezve, meghatározható az áramszedő redukált tömege.

Első lépésben meg kell határozni a pantográf statikus magasságát:

$$h_p = h_f - h_m; \text{ ahol:}$$

h_p : áramszedő magassága,

h_f : felsővezeték magassága, és

h_m : mozdony magassága (áramszedő nélkül)

A 43x sorozatú mozdonyok magassága 4540 [mm], így a statikus magasság:

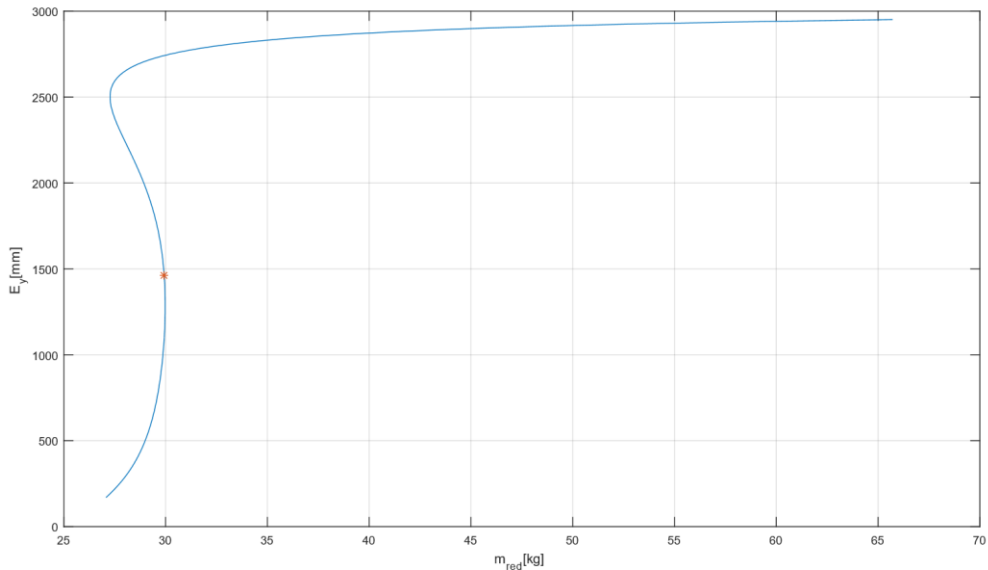
$$h_{ps} = 6000 - 4540 = 1460 [mm]$$

4.2 Lineáris interpoláció közvetlen alkalmazása

Ebben a fejezetben arról esik szó, hogy a módszert közvetlenül a redukált tömeg – magasság görbén alkalmazzuk.

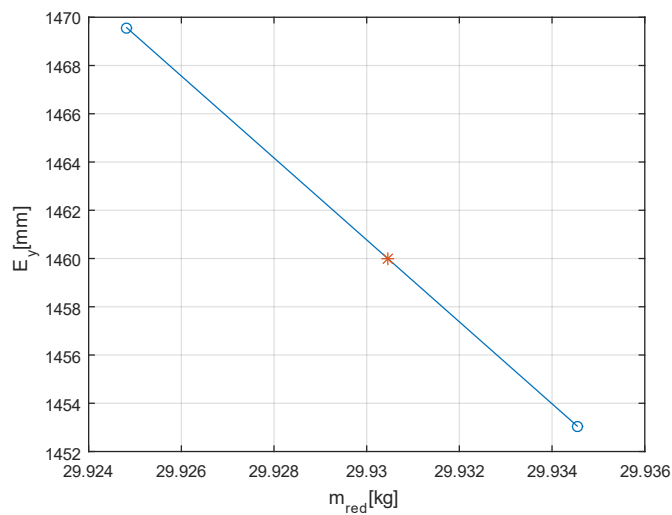
A példában szereplő 1460 [mm] – hez tartozó redukált tömeg $m_{red} = 29,93045432 [kg]$.

Grafikusan szemléltetve:



9. ábra: Redukált tömeg 1460 mm-es magasságban

Az interpolációk környezet kinagyítva:



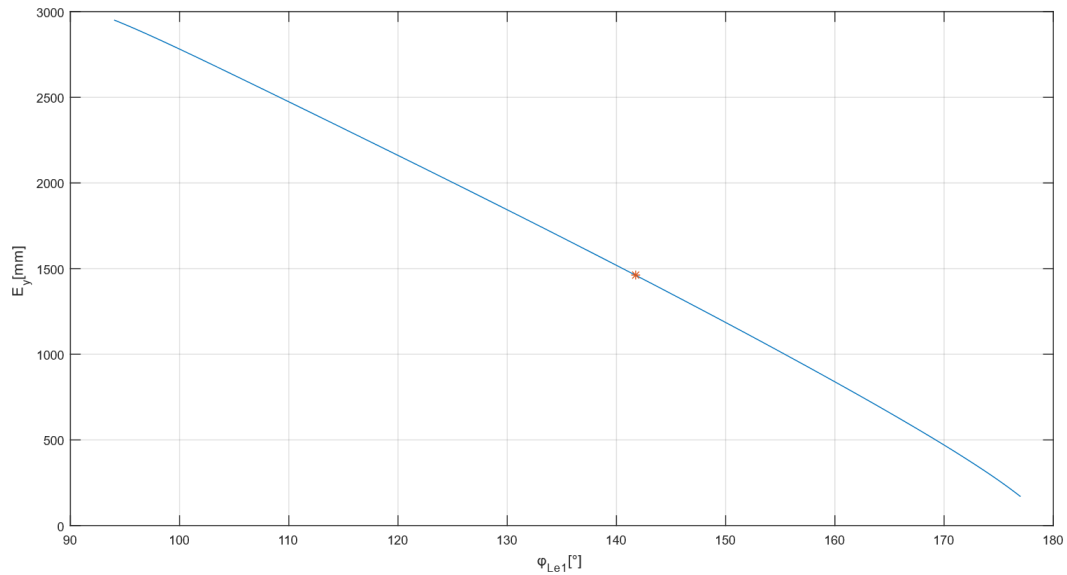
10. ábra: Interpolációs környezet

4.3 Lineáris interpoláció közvetett alkalmazása

Ha az interpolációt a magasság – szögelfordulás függvényvel alkalmazzuk, akkor megkapható az aktuális áramszedő magassághoz tartozó φ_{AC} szög értéke. Ezen szög érték segítségével kiszámítható az aktuális pozícióhoz tartozó redukált tömeg értéket.

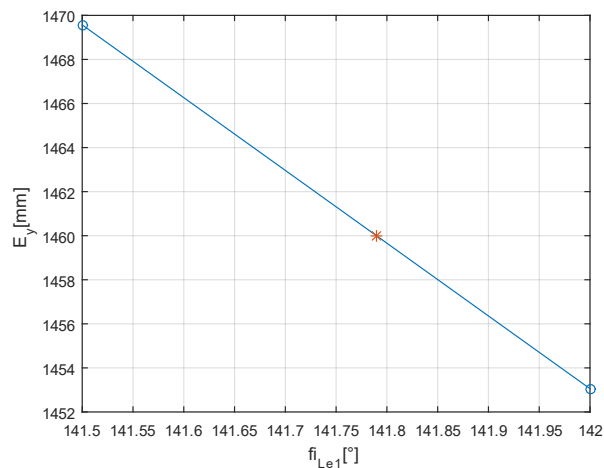
A példában szereplő 1460 [mm] – hez tartozó φ_{AC} szög értéke: $\varphi_{L_{e1}} = 141,78973846 [^\circ]$.

Grafikusan:



11. ábra: Redukált tömeg 1460 mm-es magasságban

Az interpolációs környezetre nagyítva:

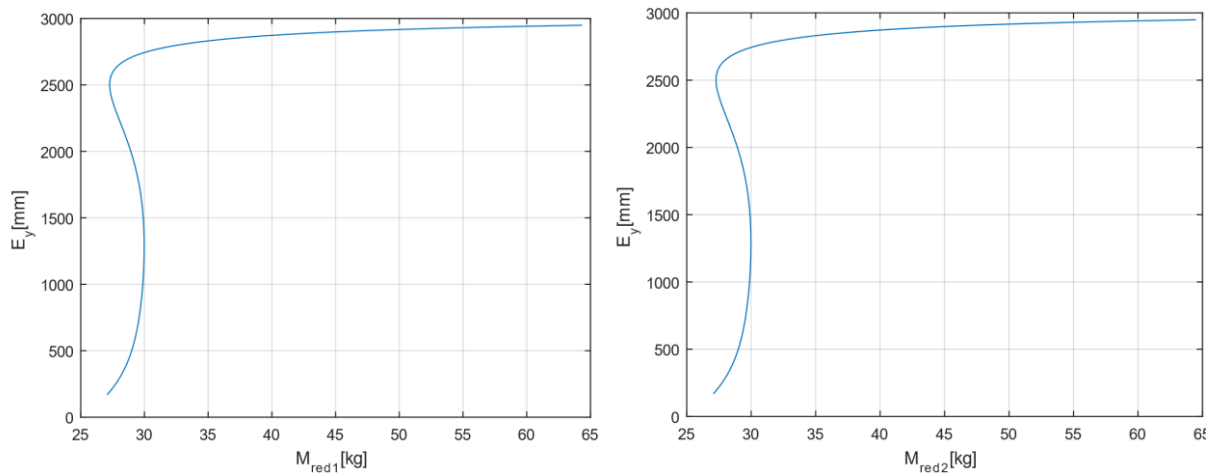


12. ábra: Interpolációs környezet

Ezzel a szögértékkel a redukált tömeg pedig: $m_{red} = 29,93057720$ [kg].

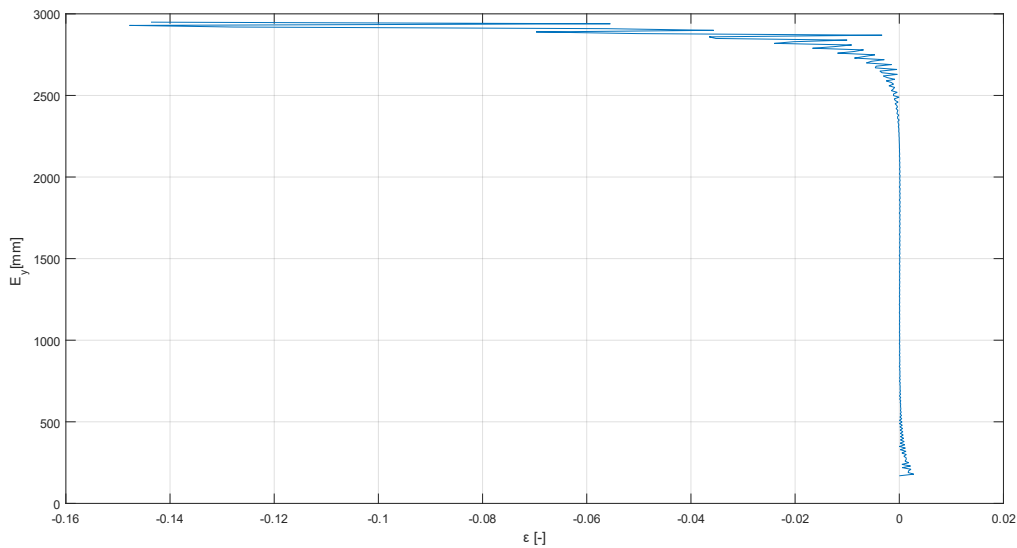
4.4 A két módszer összehasonlítása, értékelése

Előállíthatók interpolációsegítségével a redukált tömeg görbék, M_{red1} -gyel jelölve a közvetett és M_{red2} -vel jelölve a közvetlen alkalmazást



13. ábra: Redukált tömeg a két módszer segítségével

Látszólag jelentős eltérés nincs a két módszer között, ám ha képezzük az $M_{red1} - M_{red2}$ különbség függvényt, elénk tárulnak az eltérések.

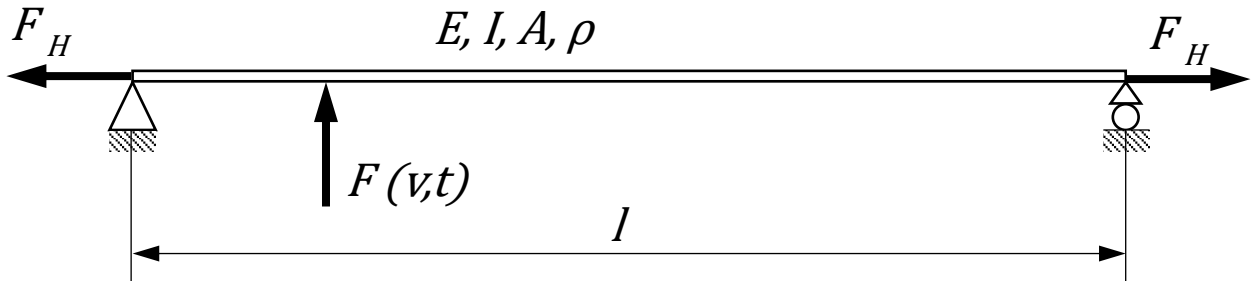


14. ábra: Különbség függvény

Látható, hogy a két módszer között igen nagy eltérés nincs, az $[500; 2500]$ intervallumon a különbség 0 közeli, így ezen a tartományon belül mind a két módszer közel pontos eredményt ad vissza. Ezen ok miatt további megfontolást igényel a megfelelő módszer kiválasztása. A szempont, hogy minél gyorsabban lefusson a számítás, és ezt a közvetlen alkalmazással lehet elérni, így a továbbiakban ezzel számítási módszerrel lesz meghatározva a redukált tömeg értéke, amikor a magasság függvényében kell meghatározni.

5. FELSŐVEZETÉK MODELLEZÉSE

A megfelelő eredmény érdekében figyelembe kell venni a felsővezeték gerjesztő hatását. Feltételezve, hogy a felsővezeték tartó oszlopoknál a felsővezeték függőleges irányú elmozdulása zérus, így modellezhető egy kéttámaszú tartónak (15. ábra).



15. ábra: Felsővezeték modellezése

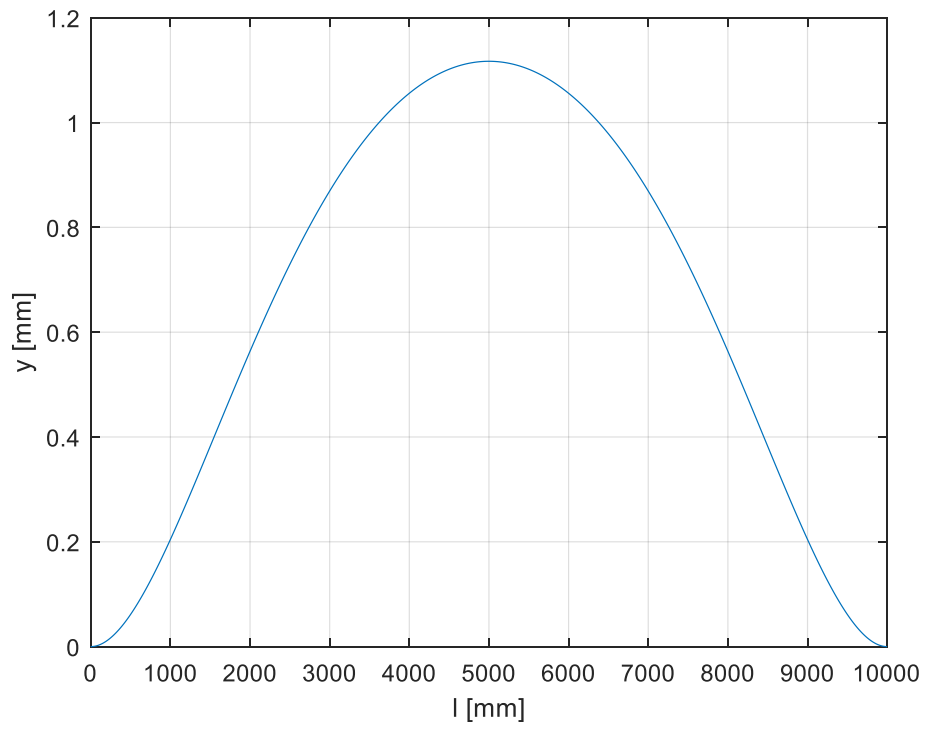
Az F erő v sebességgel halad folyamatosan ezen a tartón, amely egy F_H horizontális erővel elő van feszítve. Ez is egy periodikus gerjesztést visz bele a rendszerbe.

A lehajlást a következő [9] egyenlettel számítható ki:

$$e_y = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{F(L-x)^2}{L} \cdot x^2 + \rho \left(\frac{F \cdot x}{L} + \frac{F(L-2x)}{L-x} \right) - \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot x(L-x) \cdot \frac{2}{3} \cdot F_x \left(\frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{F(L-x)^2}{L} \cdot x^2 \right)$$

Ahol E a felsővezeték anyagára jellemző rugalmassági modulus, I a keresztmetszet másodrendű nyomatéka, L a két tartó oszlop közötti távolság, ρ a felsővezeték anyagának sűrűsége, F az áramszedő szorítóereje, F_x az x irányú húzóerő.

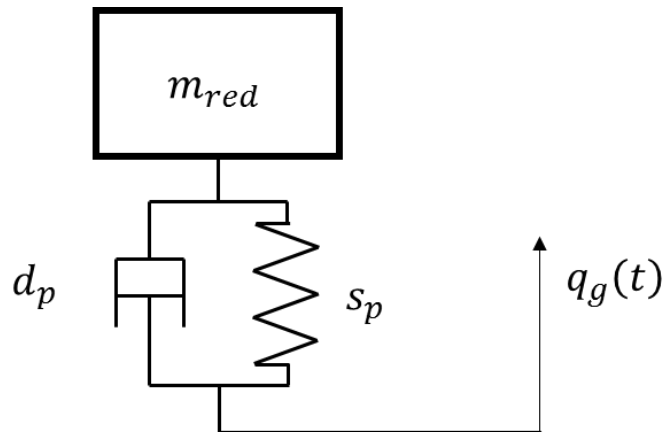
A felsővezeték lehajlását a 16. ábra szemlélteti.



16. ábra: Felsővezetél felhajlása

6. AZ ÁRAMSZEDŐ, MINT EGYSZABADSÁGFOKÚ LENGŐRENDSZER

A 17. ábra szemlélteti az áramszedő dinamikai modelljét.



17. ábra: Áramszedő dinamikai modellje

6.1 Az áramszedő mozgásegyenletének felírása

Látható, hogy áll egy tömegből, egy rugóból és egy csillapítóból, melynek mozgása egyetlen $q = q(t)$ általános koordinátával leírható, valamint a rendszer útgerjesztést kap a mozdonytól. Ezek után belátható, hogy ez egy lengésképes rendszer, melyre a Lagrange féle másodfajú mozgásegyenlet felírható, melynek általános alakja [7]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q.$$

Első lépésként fel kell írni az energiákat

- a) tömegpont mozgási energiája:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot \dot{q}^2$$

- b) disszipációs energia

$$D = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \dot{q}^2$$

- c) rugóban tárolt energia

$$U = \frac{1}{2} \cdot s \cdot q^2$$

Következő lépésként el kell végezni a deriválásokat.

$$a) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_{red} \cdot \dot{q}^2 \right)}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (m_{red} \cdot \dot{q}) = m_{red} \cdot \ddot{q}$$

$$b) \frac{\partial E}{\partial q} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_{red}\cdot\dot{q}^2\right)}{\partial q} = 0$$

$$c) \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}d\cdot\dot{q}^2\right)}{\partial \dot{q}} = d \cdot \dot{q}$$

$$d) \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}s\cdot q^2\right)}{\partial q} = s \cdot q$$

Így előállítható az áramszedőnek, mint egyszabadságfokú lengőrendszer mozgásegyenlete:

$$m_{red} \cdot \ddot{q} + d \cdot \dot{q} + s \cdot q = Q$$

A q általános koordináta jelen esetben a z irányú elmozdulás, ezért $q = y$; $\dot{q} = \dot{y}$ és $\ddot{q} = \ddot{y}$, így a mozgásegyenlet:

$$m_{red} \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + s \cdot y = Q$$

Most pedig meg kell vizsgálni a rendszerre ható gerjesztést. A pantográf a mozdonyok tetején helyezkednek el, így gerjesztő hatást kap egyszer magától a mozdony szekrénytől rugón és csillapítón keresztül, másod sorban a felsővezetektől is kap egy gerjesztést, tömegén keresztül. Mind két esetben útgerjesztésről lehet beszélni. Továbbá a régebbi típusú áramszedőkben még nem alkalmaztak csillapító elemet, de ebben az esetben a rugó anyagcsillapítását figyelembe lehet venni. A felsővezeték korlátozó feltételeit elhanyagolva, csak a mozdonytest gerjesztő hatását figyelembe véve a gerjesztő függvény a következő alakban írható fel:

Útgerjesztés esetén a rugóban a felhalmozódott energia:

$$U = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (y - y_g)^2.$$

Így az általános visszatérítő erő:

$$Q_{s\ddot{o}} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial y} = -y \cdot s + y_g \cdot s.$$

Útgerjesztés esetén a disszipált energia:

$$Q_{d\ddot{o}} = -\vec{F}_d \cdot \vec{\beta} = -k\vec{v}_d \cdot \vec{k} = -k \cdot v_d = -k \cdot (\dot{y} - \dot{y}_g) = -k \cdot \dot{y} + k \cdot \dot{y}_g$$

A gerjesztő erők:

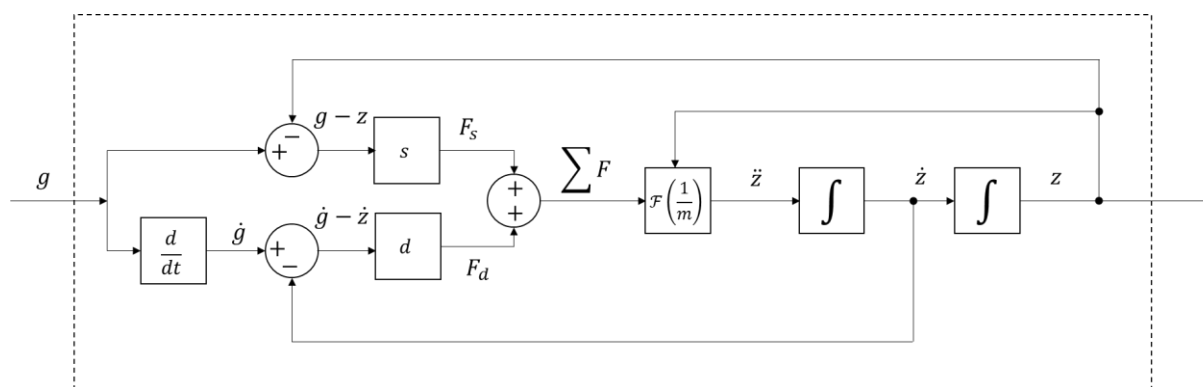
$$Q_{g1} = y_g(t) \cdot s$$

$$Q_{g2} = \dot{y}_g(t) \cdot d$$

Ezek alapján az áramszedő mozgását leíró másodrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlete a következő alakú lesz:

$$m_{red}(y) \cdot \ddot{y} + d \cdot (\dot{y} - \dot{y}_g) + s \cdot (y - y_g) = \underbrace{\dot{y}_g(t) \cdot d}_{Q_{g2}} + \underbrace{y_g(t) \cdot s}_{Q_{g1}}$$

Az egyenlet szemléltetése jelfolyam ábrával:



18. ábra: Mozgásegyenlet jelfolyam ábrán

Az egyenlet megoldását tovább bonyolítja az a probléma, hogy a redukált tömege magasságfüggő.

A mozgásegyenlet numerikus megoldásához az egyenletet a következő alakúra kell rendezni:

$$\ddot{y} = -\frac{d}{m_{red}(y)} \cdot (\dot{y} - \dot{y}_g) - \frac{s}{m_{red}(y)} \cdot (y - y_g) + \frac{Q_{g1}}{m_{red}(y)} + \frac{Q_{g2}}{m_{red}(y)}$$

6.1.1 Mozgásegyenlet megoldása

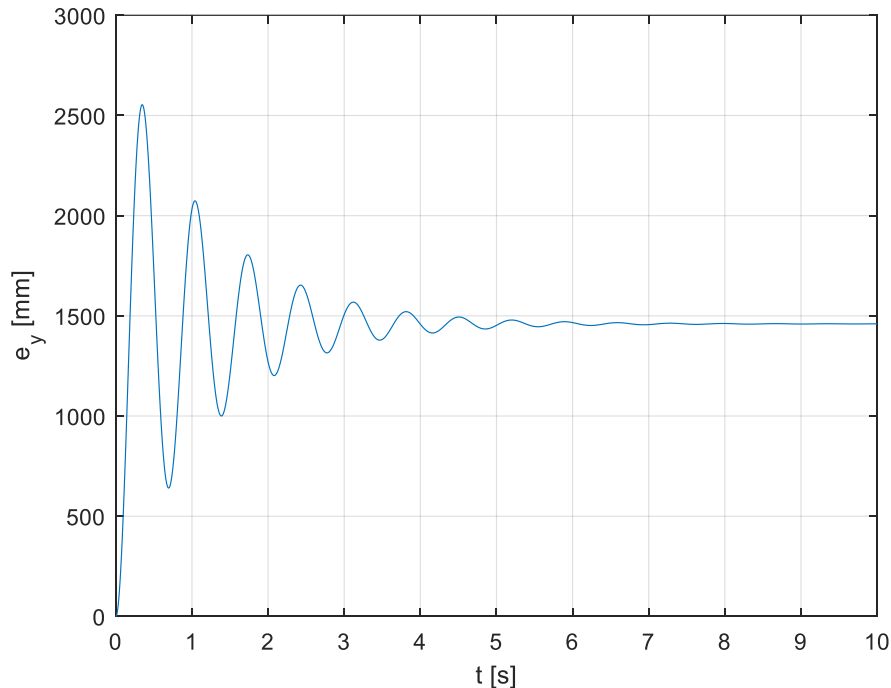
A mozgásegyenlet megoldása [6] során figyelembe kell venni a redukált tömeg magasság függő változását, ehhez pedig a járműstatikus magasság szüksége. Valamit szükséges még a t_0 időponthoz tartozó $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, y(t) = y_0$ kezdetiértékek meghatározása.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{y}_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{p0} = 1460 \text{ mm}$$

A korszerű áramszedők rugalmas elemen kívül csillapító taggal rendelkeznek. A dolgozatban szereplő áramszedőbe példaképpen egy $s = 2485 \left[\frac{N}{m} \right]$ rugóállandójú lineáris rugó és egy $d =$

50 $\left[\frac{Ns}{m}\right]$ csillapítási tényezőjű lengéscsillapító legyen feltételezve. A megoldás során azzal az egyszerűsítéssel lehet élni, hogy az áramszedő redukált tömege a mozgás során nem változik. Továbbá figyelembe kell venni a felsővezeték gerjesztő hatását.



19. ábra: Áramszedő lengései

A 19. ábra szemlélteti az áramszedő lengését. Megfigyelhető, hogy a 8. másodpercet követően lecseng a lengés. Ez azért lehetséges, mert a pályáról és a felsővezetékéről érkező gerjesztést a rendszer kiegyenlítette. A további vizsgálatokhoz pontos pálya és felsővezeték modell szükséges.

6.2 Áramszedő sajátfrekvenciájának meghatározása

Az áramszedő $z(t)$ gerjesztő időfüggvénye a deriváltjával együtt ismeretlennek tekinthető, így a differenciálegyenlet [6] egy

$$f^*(t) = \dot{y}_g(t) \cdot d + y_g(t) \cdot s$$

zavarófüggvénynek tekinthetjük. A dinamikai rendszer mátrixos felírásához bevezetve az

$$\mathbf{y} = [y_g(t), \dot{y}_g(t)]^T \in \mathbb{R}^2$$

állapotvektort, a következő alakban írható fel az egyenlet:

$$\dot{\mathbf{y}}(z) = \begin{bmatrix} \ddot{y}_g(t) \\ \dot{y}_g(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d}{m_{red}(y)} & -\frac{s}{m_{red}(y)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_g(t) \\ y_g(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} f^*(t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t)}.$$

Rendszermátrix segítségével felírva:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathcal{A} \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t).$$

A sajátfrekvencia meghatározásához első lépésben az \mathcal{A} rendszermátrix sajátértékét kell meghatározni, melyhez első lépésként a karakterisztikus polinom segítségével felírt karakterisztikus egyenlet megoldásával juthatunk. A karakterisztikus polinom:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = \det\left(\begin{bmatrix} -\frac{d}{m_{red}(y)} & -\frac{s}{m_{red}(y)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

alakú. A karakterisztikus egyenlet pedig:

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\frac{d}{m_{red}(y)} & -\frac{s}{m_{red}(y)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\frac{d}{m_{red}(y)} - \lambda & -\frac{s}{m_{red}(y)} \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \frac{d}{m_{red}(y)} \cdot \lambda + \frac{s}{m_{red}(y)} = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása adja a két sajátértéket. Továbbá bevezetve az,

$$\alpha^2(z) = \frac{s}{m_{red}(y)}$$

$$\beta(z) = -\frac{d}{2m_{red}(y)}.$$

Ahol α a csillapítatlan rendszer sajátfrekvenciája, β rezgő rendszer saját frekvenciájára jellemző érték. Feltételezve, hogy a rendszer egy gyengén csillapított, azaz a diszkrimináns értéke negatív. Továbbá bevezetve a:

$$\gamma(z) = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{s}{m_{red}(y)}\right) - \left(-\frac{d}{2 \cdot m_{red}(y)}\right)^2} > 0.$$

Így a két komplex konjugált gyökpár a következő alakú:

$$\lambda_1(z) = \beta + i \cdot \gamma(y); \lambda_2 = \beta - i \cdot \gamma(y).$$

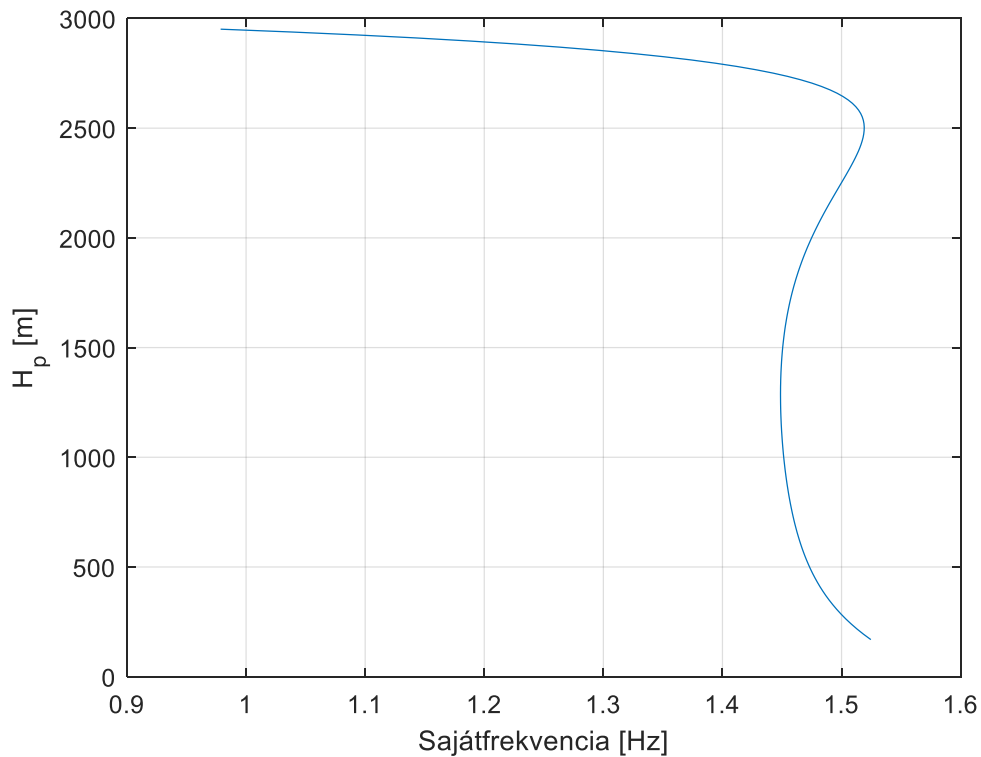
Ezek alapján a saját körfrekvencia és a saját frekvencia:

$$\omega(z) = |\text{Im}\lambda| = \gamma; [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f(z) = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\gamma}{2\pi}; [f] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$$

Mivel az áramszedő redukált tömege magasság függő érték, így a saját frekvencia is magasságfüggő érték lesz.

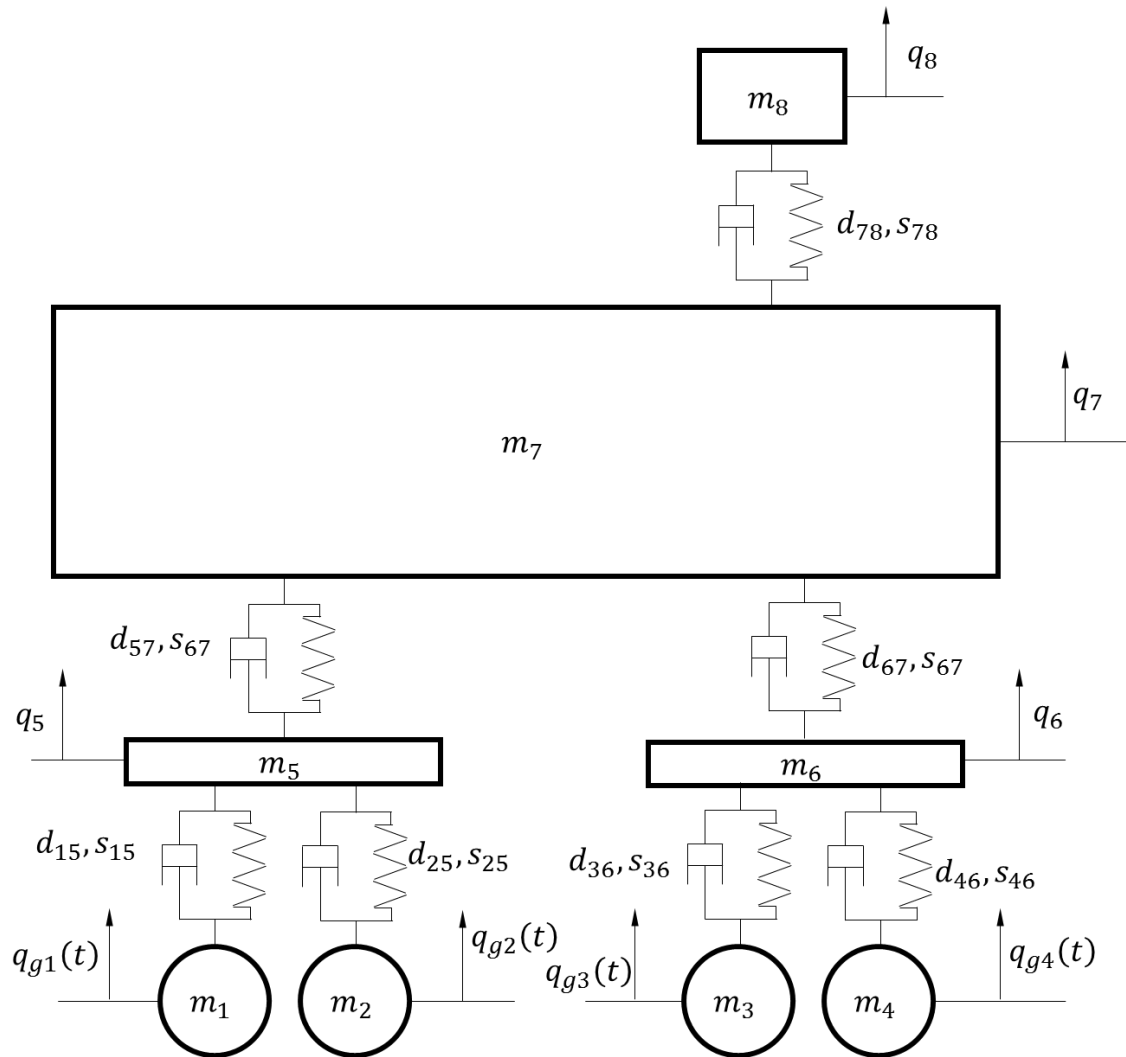
A példa áramszedő sajátfrekvencia görbéje következő képen alakul (20. ábra):



20. ábra: A példa áramszedő sajátfrekvencia görbéje

7. VILLAMOS VONTATÓJÁRMŰVEK MINT TÖBBSZABADSÁGFOKÚ LENGŐRENDSZEREK

Egy villamos vontatójármű dinamikai modelljét a 21. ábra szemlélteti:



21. ábra: Négytengelyes villamos vonataójármű dinamikai modellje

Látható, hogy a kerékpárok rugón és csillapítón keresztül vannak bekötve a forgóváz keretbe, továbbá a forgóvázak szintén rugók és csillapítókkal vannak kapcsolatban a járműszekrényvel, melynek tetején rugó és csillapítóval kapcsolódó áramszedő található meg.

Többszabadságfokú rendszer [7]: ha a rendszer mozgását leíró általános koordináták száma egynél több.

Többszabadságfokú diszkrét lengőrendszer [7]: merev testekből, tömegpontokból és köztük lévő súlytalan rugalmas elemekből felépített rendszer, mely tartalmazhat csillapítókat és gerjesztéseket is.

7.1 Másodfajú Lagrange – mozgásegyenlet endszer felírása

Egy négytengelyes forgóvázaz villamos vontatójárművek esetén akár egy $N = 8$ szabadságfokú rendszerről is lehet beszélni, attól függően, hogy milyen részletességgel van figyelembe véve a járműmodell. Jelen példában egy $N = 4$ szabadságfokú rendszerről van szó, melyre az általános koordináta vektor [6]:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_4]^T \in R^4,$$

ennek idő szerinti deriváltja az általános koordináta sebesség vektor:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_4]^T \in R^4$$

alakú. Az ezekből előállított 2×4 dimenziós hipervektor, ami a mozgás állapot vektora:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T \in R^{2 \times 4}$$

A rendszer mozgását leíró mozgásegyenlet rendszer a következő alakot ölti:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i.$$

Megvizsgálva az ábrát, látható, hogy útgerjesztés esete van jelen, méghozzá tömegén keresztül.

A dinamikai rendszerben a mozgás miatt létrejövő összes kinetikus energia, $E(q_1, q_2, \dots, q_8)$:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_{g1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_{g2}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{q}_{g3}^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{q}_{g4}^2 + \frac{1}{2} m_5 \dot{q}_5^2 + \frac{1}{2} m_6 \dot{q}_6^2 + \frac{1}{2} m_7 \dot{q}_7^2 + \frac{1}{2} m_8 \dot{q}_8^2.$$

A rendszerben felhalmozódott összes potenciális energia, melyek a tömegeket összekötő rugókban ébred:

$$\begin{aligned}
U(q_1, q_2, \dots, q_8) &= \\
&= \frac{1}{2} s_{15} (q_5 - q_{g1})^2 + \frac{1}{2} s_{25} (q_5 - q_{g2})^2 + \frac{1}{2} s_{36} (q_6 - q_{g3})^2 \\
&+ \frac{1}{2} s_{46} (q_6 - q_{g4})^2 + \frac{1}{2} s_{57} (q_5 - q_7)^2 + \frac{1}{2} s_{67} (q_6 - q_7)^2 + \frac{1}{2} s_{78} (q_7 - q_8)^2.
\end{aligned}$$

Továbbá a rendszerben disszipált energia:

$$\begin{aligned}
D(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_8) &= \\
&= \frac{1}{2} d_{15} (\dot{q}_5 - \dot{q}_{g1})^2 + \frac{1}{2} d_{25} (\dot{q}_5 - \dot{q}_{g2})^2 + \frac{1}{2} d_{36} (\dot{q}_6 - \dot{q}_{g3})^2 \\
&+ \frac{1}{2} d_{46} (\dot{q}_6 - \dot{q}_{g4})^2 + \frac{1}{2} d_{57} (\dot{q}_5 - \dot{q}_7)^2 + \frac{1}{2} d_{67} (\dot{q}_6 - \dot{q}_7)^2 + \frac{1}{2} d_{78} (\dot{q}_7 - \dot{q}_8)^2.
\end{aligned}$$

Elvégezve a deriválásokat:

Kinetikus energiákra:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_5} \right) = \frac{d}{dt} (m_5 \dot{q}_5) = m_5 \ddot{q}_5$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_6} \right) = \frac{d}{dt} (m_6 \dot{q}_6) = m_6 \ddot{q}_6$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_7} \right) = \frac{d}{dt} (m_7 \dot{q}_7) = m_7 \ddot{q}_7$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_8} \right) = \frac{d}{dt} (m_8 \dot{q}_8) = m_8 \ddot{q}_8$$

Potenciális energiákra:

$$\frac{\partial U}{\partial q_{g1}} = s_{15} (q_5 - q_{g1}) (-1) = s_{15} q_{g1} - s_{15} q_5$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_{g2}} = s_{25} (q_5 - q_{g2}) (-1) = s_{25} q_{g2} - s_{25} q_5$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_{g3}} = s_{36} (q_6 - q_{g3}) (-1) = s_{36} q_{g3} - s_{36} q_6$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_{g4}} = s_{46} (q_6 - q_{g4}) (-1) = s_{46} q_{g4} - s_{46} q_6$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial q_5} &= s_{15}(q_5 - q_{g1}) + s_{25}(q_5 - q_{g2}) + s_{57}(q_5 - q_7) \\ &= s_{15}q_5 - s_{15}q_{g1} + s_{25}q_5 - s_{25}q_{g2} + s_{57}q_5 - s_{57}q_7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial q_6} &= s_{36}(q_6 - q_{g3}) + s_{46}(q_6 - q_{g4}) + s_{67}(q_6 - q_7) \\ &= s_{36}q_6 - s_{36}q_{g3} + s_{46}q_6 - s_{46}q_{g4} + s_{67}q_6 - s_{67}q_7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial q_7} &= s_{57}(q_5 - q_7)(-1) + s_{67}(q_6 - q_7)(-1) + s_{78}(q_7 - q_8) \\ &= s_{57}q_7 - s_{57}q_5 + s_{67}q_7 - s_{67}q_6 + s_{78}q_7 - s_{78}q_8\end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_8} = s_{78}(q_7 - q_8)(-1) = s_{78}q_8 - s_{78}q_7$$

Disszipatív energiákra:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_{g1}} = d_{15}(\dot{q}_5 - \dot{q}_{g1})(-1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_{g2}} = d_{25}(\dot{q}_5 - \dot{q}_{g2})(-1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_{g3}} = d_{36}(\dot{q}_6 - \dot{q}_{g3})(-1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_{g4}} = d_{46}(\dot{q}_6 - \dot{q}_{g4})(-1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_5} = d_{15}(\dot{q}_5 - \dot{q}_{g1}) + d_{25}(\dot{q}_5 - \dot{q}_{g2}) + d_{57}(\dot{q}_5 - \dot{q}_7)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_6} = d_{36}(\dot{q}_6 - \dot{q}_{g3}) + d_{46}(\dot{q}_6 - \dot{q}_{g4}) + d_{67}(\dot{q}_6 - \dot{q}_7)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_7} = d_{57}(\dot{q}_5 - \dot{q}_7)(-1) + d_{67}(\dot{q}_6 - \dot{q}_7)(-1) + d_{78}(\dot{q}_7 - \dot{q}_8)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_8} = d_{78}(\dot{q}_7 - \dot{q}_8)(-1)$$

A gerjesztés:

$$Q = s_{15}q_{1g}(t) + d_{15}q_{1g}'(t) + s_{25}q_{2g}(t) + d_{25}q_{2g}'(t) + s_{36}q_{3g}(t) + d_{36}q_{3g}'(t) + s_{46}q_{4g}(t) + d_{46}q_{4g}'(t)$$

Mátrixos alakban:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} s_{15} & 0 & 0 & 0 & -s_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{25} & 0 & 0 & -s_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{36} & 0 & 0 & -s_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{46} & 0 & -s_{46} & 0 & 0 \\ -s_{15} & -s_{25} & 0 & 0 & s_{15} + s_{25} + s_{57} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_{36} & -s_{46} & 0 & s_{36} + s_{46} + s_{67} & -s_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s_{67} & s_{57} + s_{67} + s_{78} & -s_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s_{78} & s_{78} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} d_{15} & 0 & 0 & 0 & -d_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{25} & 0 & 0 & -d_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{36} & 0 & 0 & -d_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{46} & 0 & -d_{46} & 0 & 0 \\ -d_{15} & -d_{25} & 0 & 0 & d_{15} + d_{25} + d_{57} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_{36} & -d_{46} & 0 & d_{36} + d_{46} + d_{67} & -d_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{67} & d_{57} + d_{67} + d_{78} & -d_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{78} & d_{78} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_{g1} \\ q_{g2} \\ q_{g3} \\ q_{g4} \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_{g1} \\ \dot{q}_{g2} \\ \dot{q}_{g3} \\ \dot{q}_{g4} \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Q_s}} = \begin{bmatrix} s_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Q_d}} = \begin{bmatrix} d_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_g = \begin{bmatrix} q_{g1} \\ q_{g2} \\ q_{g3} \\ q_{g4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \dot{\mathbf{q}}_g = \begin{bmatrix} \dot{q}_{g1} \\ \dot{q}_{g2} \\ \dot{q}_{g3} \\ \dot{q}_{g4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ezen mátrixok segítségével a mozgásegyenlet rendszer a következő alakot ölti:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \underline{\underline{D}} \dot{\mathbf{q}}(t) + \underline{\underline{S}} \mathbf{q}(t) = \underline{\underline{Q_s}} \mathbf{q}_g(t) + \underline{\underline{Q_d}} \dot{\mathbf{q}}_g(t)$$

A mozgásegyenlet – rendszer megoldásához tartozik még természetesen egy kezdeti értékek előírt rendszere. A dinamikai egyenletrendszer megoldása a mozgásviszonyait leíró lineáris, inhomogén differenciálegyenlet-rendszer (D.E.R.) és a hozzá tartozó kezdetérték probléma (K.É.P.) megoldása jelenti.

A differenciálegyenlet megoldó algoritmusok elsőrendű egyenletek megoldására adnak lehetőséget, így a lineáris időinvariáns járműdinamikai modellek másodrendű egyenletét a következő képen explicit alakra kell hozni:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{D}} \dot{\mathbf{q}}(t) - \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{S}} \mathbf{q}(t) + \underline{\underline{Q}}_s \mathbf{q}_g(t) + \underline{\underline{Q}}_d \dot{\mathbf{q}}_g(t)$$

Bevezetve az $\mathbf{y}(t) = [\dot{\mathbf{q}}(t) \quad \mathbf{q}(t)]^T \in R^{2n}$ állapot vektort, melynek első sora a sebesség koordinátákat, míg a második sora a hely koordinátákat tartalmazza. Elkészítve ezen vektor első idő szerinti deriváltját, melynek első sora a gyorsulás, míg a második sora a sebesség koordinátákat fogja tartalmazni. Ezek ismeretében:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{D}} \dot{\mathbf{q}}(t) - \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{S}} \mathbf{q}(t) + \underline{\underline{Q}}_s \mathbf{q}_g(t) + \underline{\underline{Q}}_d \dot{\mathbf{q}}_g(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{D}} & -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{Q}}_s \mathbf{q}_g(t) + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{Q}}_d \dot{\mathbf{q}}_g(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t)} \end{aligned}$$

Megfigyelhető, hogy létrejött egy négy elemű *hipermátrix*, mint a lineáris időinvariáns dinamikai rendszer rendszermátrixa, \mathcal{A} -val jelölve (mely függ a rendszer paramétereitől, így szokás még $\mathcal{A}(\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{S}}, \underline{\underline{D}})$ -vel is jelölni). Ezen mátrixnégy darab $n \times n$ -es almatrixot tartalmaz, ahol $\underline{\underline{E}}$ egy $n \times n$ -es egységmatrix, míg a $\underline{\underline{0}}$ pedig szintén $n \times n$ -es zérómatrix. A gerjesztő vektort jelölje $\mathbf{f}(t) \in R^n$, ahol a $\mathbf{0}$ egy n elemű zéróvektor. Továbbá bevezetve az $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 = [\dot{\mathbf{q}}_0 \quad \mathbf{q}_0]^T \in R^{2n}$ kezdetiértékvektort, az elsőrendűvé redukált mozgásegyenlet rendszer a következő tömör formulával írható fel:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathcal{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

8. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen dolgozatban a nagyvasúton széles körben elterjedt félpantográf rendszerű áramszedők tervezési és vizsgálati módszereit mutattam be részletesen. Első lépésben meg kellett tervezni az áramszedő geometriáját. Ezt egy összetett koordináta geometriai összefüggések segítségével lehet megtenni. Ennek a problémának a megoldását MATLAB környezetben könnyen elő lehet állítani. Ezek után lehet megtervezni az áramszedőt, így az egyes tagoknak dinamikai jellemzőket adunk. Így meghatározható az áramszedő emeléséhez és a szorításhoz alkalmazott rugalmas elem méretezése és az áramszedő dinamikai tulajdonságait jellemző redukált tömeg értéke.

A már elkészült áramszedő egy lengésképes rendszert alkot, amit útgerjesztés éri a mozdonyon és a felsővezetéken keresztül. Ezt modellezve, mint egy szabadságfokú rendszer meghatározható a mozgásegyenlete, amit MATLAB segítségével megoldva, előáll a rendszer lengésképe. A lengő rendszerek egyik meghatározó tulajdonsága a sajátfrekvencia, így ezen rendszer magasságfüggő értékeit is meg lehet határozni, szintén MATLAB segítségével.

A mozdony-áramszedő-felsővezeték rendszer egy több szabadságfokú lengőrendszert alkot, melynek a mozgásegyenletei szintén megoldható, ám a feladat komplexitása miatt jelen dolgozatban ettől eltekintettem, ami a téma folytatása lehet.

A rendszer pontos modellezéséhez megfelelő pályamodellel és felsővezeték modellel szükséges, ami további mélyebb kutatásokat igényel, ami a dolgozat folytatását jelenti.

9. IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Raboczki József: *Félpantográf rendszerű áramszedő fejlesztése és üzemi tapasztalatai*
Ganz Villamossági Közlemények, Folyóirat, 23. szám, Budapest, 1986. 80-88. oldal
- [2] M. Louis Fiaveley: *Nouveau dispositif de prise de courant*
Szabadalmi leírás, Gr.3-C1.3 No. 1.129.013, 1955, Francia Köztársaság Ipari és kereskedelmi Minisztérium
- [3] P. Boissonnade, R. Dupont: *VERS LES 300 km/h SOUS CANTÉNAIRE 25 kV – 50 Hz*
Revue Générale des Chemis de Fer, sept 1970., 492-505. oldal
- [4] Hadas Ádám: *Vasútmodell áramszedők méretezése*
Folyóirat, Indóház vasúti magazin, X. évfolyam, 9. szám, 2014. szeptember, 60-61. oldal
- [5] MSZ-EN 50206-1: *Vasúti alkalmazások. Gördülőállomány. Áramszedők: Jellemzők és vizsgálatok*
Magyar Szabvány, 2000 július
- [6] Prof. dr. Zobory István: *Rendszertechnika és rendszeranalízis*
Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem, Vasúti járművek és járműrendszeranalízis Tanszék, Egyetemi jegyzet, Budapest, 2011, 1-60. oldal
- [7] dr. Égert János, dr. Jezsó Károly: *Mechanika, Rezgés*
Universitas-Győr Nonprofit Kft, Egyetemi jegyzet; Győr, 2006, 25-130. oldal
- [8] *Matematika M1 gépészmérnököknek, Interpoláció:*
<http://math.bme.hu/~orlovits/M1-2016-EA-6-interpol.pdf>, letöltve 2017. 10. 29.
- [9] dr. Zsáry Árpád: *Gépelemek, I.*,
Tankönyvkiadó, Budapest, 1989,