

Oszlányi-Salacz Máté Iván

AKUSZTIKUSAN GERJESZTETT

GÁZBUBORÉKOKRA HATÓ ERŐK VIZSGÁLATA

Konzulensek: Dr. Hegedűs Ferenc, Dr. Klapcsik Kálmán Budapest, 2023

Tartalomjegyzék

Bevezetés	
A buborék modellezése	5
Rayleigh–Plesset egyenlet	5
Keller-Miksis formuláció	
Bjerknes-erő fizikai háttere	
Pozíció stabilitás vizsgálata	14
Részletes paramétertanulmány	16
Eredmények kiértékelése	19
További feladatok	
Felhasznált források	20

Bevezetés

A szonokémia a tudomány és technológia multidiszciplináris területe, amely az ultrahanghullámok vagy nagyfrekvenciás hanghullámok folyékony közegben történő alkalmazása által kiváltott kémiai hatásokat és átalakulásokat vizsgálja. A fizikai kémiának ez az ága többek között a tiszta és hatékony vegyipar elérése érdekében került előtérbe. De számos alkalmazása létezik. A szonokémia segítségével a szennyvíztisztítási folyamatokban, valamint a talajok fertőtlenítésében és a veszélyes hulladéklerakók kármentesítésében elősegíthető a visszahúzódó szerves szennyező anyagok lebontása. Ezenkívül a szonokémia alkalmazásra talált az élelmiszer- és italiparban, ahol javíthatja az élelmiszer-feldolgozást és a tartósítást.

Lényegében a szonokémia az akusztikus kavitáció jelensége körül forog. A kavitáció egy fizikai jelenség, amikor egy folyadékban nagy sebességű mozgás hatására gőzbuborékok keletkeznek, amelyek összeomlásukkor erős lökéshullámot hoznak létre. A kavitáció eróziót okoz a környező anyagokban, ezért is fontos a mérnöki gyakorlatban. Ennek egy speciális esetét akusztikus kavitációnak hívjuk, amely során az intenzív ultrahanghullámok folyadékon keresztüli terjedése mikrométeres nagyságrendű gázbuborékokat vagy üregeket hoz létre, amelyek ezt követően gyors és ismétlődő tágulási és összeomlási ciklusokon mennek keresztül. Ez a kavitációs folyamat jelentős mechanikai energia felszabadulását és szélsőséges helyi körülményeket eredményez, beleértve a magas nyomást és hőmérsékletet. Ezek a feltételek fizikai és kémiai hatásokat váltanak ki, amelyeket kihasználva és megértve sokféle alkalmazáshoz és felismeréshez vezethetnek.

Akusztikus kavitáció során a buborék sugara rendkívül rövid idő alatt a töredékére is csökkenhet. Az összeroppanó buborékokban akár 4000 Celsius fok hőmérséklet és 2000 bar nyomás is kialakulhat. Így akár kémiai reakciókhoz indukálására vagy katalizátorként is alkalmas lehet. Katalizátornak azt nevezzük amikor valami felgyorsít egy kémiai reakciót, viszont nem vesz benne részt, azaz a katalizátor nem változik.

Viszont a megfelelő kémiai alkalmazáshoz a buborékok jelenléte nem elég, fontos azok elhelyezkedése a közegen belül. Annak érdekében, hogy tiszta, melléktermék nélküli, időben és térben homogén reakció alakulhasson ki elengedhetetlen, hogy a buborékokból egy előre meghatározott struktúrát alakítsunk ki az akusztikus közegen belül. A kívánt struktúra a kémiai reakció alapján a buborékok mérete és egymástól vett távolsága vagy sűrűsége alapján határozható meg.

Ahhoz, hogy ezt a struktúrát elérjük nem elég megfelelő méretű buborékokat létrehozni, azok pozícióját is tudnunk kell irányítani. Egy szonokémiai folyamat irányításához szükség van egy buborék viselkedésének a pontos ismeretére. A pozíciószabályozáshoz pedig létfontosságú, a buborékra ható erők tanulmányozása.



1. ábra Kavitációs buborékok csoportosulása álló hanghullámokkal gerjesztett nyomásmezőben. A kép hosszú expozíciós idővel készült.

A dolgozatban bemutatom buborék modellezésének alapvető fizikai matematikai modelljét. A Bjerknes-erő számítását, jelentőségét. Sorban leírom a rendszer paraméterei, amelyek eredményre gyakorolt hatásait is bemutatom. A dolgozatban kitérek a kavitációs buborékok stabilitására. Majd végül bemutatom a modell számított eredményeit egy választott paraméter tartományban.

A szonokémiában nagyon sok paramétertől függhet egy feladat megoldása, ezért kimondottan fontos minél gyorsabb és nagyobb teljesítményű számítógépes rendszerek kihasználása. A modern szimulációk világában az informatikailag párhuzamosítható számítási problémák megoldására a videókártyák (GPU-k) a legalkalmasabbak. Ezért a feladat megoldásához saját, a videókártya teljesítményét kihasználó programkódot írtam C++ nyelven. Ehhez az NVIDIA Cuda programcsomagjait használtam fel. Így a megoldó párhuzamosításával részletes paramétertanulmányt tudtam készíteni.

A buborék modellezése

Folyadékban található gázbuborék viselkedését vizsgáljuk. A gázbuborék a modellünkben tökéletes gömbökként jelennek meg, így a méretükkel, azaz esetünkben a gömb rádiuszával könnyen jellemezhetőek.

Rayleigh-Plesset egyenlet

A víz egy rugalmas közeg, ezért a periodikus mechanikai behatások hanghullámok formájában gondtalanul tovább terjednek benne. Ennek a jelenségnek a leírására a közegben meghatározható hangsebességre van szükség, ennek alapján határozhatjuk meg az adott frekvenciához tartozó hullámhosszt.

$$c = \lambda \cdot f$$

Ahol *c* a hangsebesség, λ a hullámhossz, *f* a frekvencia. Így létre tudunk hozni egy akusztikus teret a folyadékban, amely értelmezhető egy periodikusan változó nyomástérként is. Az ideális gázok elméletéből tudjuk, hogy egy állandó hőmérsékletű izolált rendszerben a gáz térfogata fordítottan arányos a nyomással. Így a változó akusztikus nyomástér is hatással lesz a folyadékban elhelyezett buborékra. Ha pedig a vizsgált buborékot periodikusan változó nyomástérrel gerjesztjük, periodikusan fog változni a buborék térfogata.



2. ábra A buborék geometriai modelljének ábrája, a gázbuborék belső illetve a folyadék távoli nyomásfüggvényeinek a feltüntetésével.

A jelenséget először Lord Rayleigh és Milton S. Plesset vezették le a Navier-Stokes egyenletek felhasználásával. Állandó sűrűséget feltételezve felírhatjuk a tömeg megmaradás törvényét.

$$v_r(R,t) \cdot 4\pi \cdot R^2 = v_r(r,t) \cdot 4\pi \cdot r^2$$

Ahol r a buborék középpontjától vett távolság, R a buborék sugara, v_r a sugár irányban vett sebesség. A tömegmegmaradás törvénye leírja, hogy a tömegáram a buborék külső felszínén megegyezik az r sugarú gömbfelszínen áthaladó tömegárammal. Viszont a kavitáció során a folyadék elpárolgása, illetve a gáz kondenzációjával is számolnunk kell. Ezért a sugár irányban vett sebesség nem egyenlő a buborék sugarának változásával. A gőzképződés térfogatárama megegyezik a buborék térfogatának növekedésével

$$\dot{m_v} = 4\pi \cdot R^2 \dot{R} \cdot p_v(T_B),$$

ahol p_v a telített gőz sűrűsége a buborék hőmérsékletén. A buborék felé áramló folyadék tömeg árama r = R helyen felírva

$$\dot{m}_l = 4\pi \cdot R^2 \cdot v_r(R, t) \cdot \rho_l,$$

ahol v_r a relatív sebesség $v_r(R, t) = \dot{R} - v_r(R, t)$. A két tömegáramnak továbbra is meg kell egyezzenek egymással.

$$\dot{m_v} = \dot{m_l} = 4\pi \cdot R^2 \dot{R} \cdot p_v(T_B) = 4\pi \cdot R^2 \cdot \left(\dot{R} - v_r(R, t)\right) \cdot \rho_l$$

Ebből már kifejezhetjük $v_r(R, t)$ -t.

$$v_r(R,t) = \dot{R} - \frac{\rho_v(T_B)}{\rho_l} \dot{R} = \dot{R} \left(1 - \frac{\rho_v(T_B)}{\rho_l} \right)$$

A folyadék sűrűsége a gyakorlati alkalmazásokban nagyságrendekkel nagyobb a buborékban található gáz sűrűségénél, ezért $\rho_v(T_B)/\rho_l$ egy nullához közeli szám, mérnöki, matematikai modellezési feladatok során ezt elhanyagolhatjuk. Ebből $v_r(r,t)$ is kifejezhető.

$$v_r(r,t) = \frac{R^2}{r^2} \dot{R}$$

A további levezetéshez a Navier-Stokes egyenleteket használjuk. Ezek parciális differenciálegyenletek, amelyek matematikailag kifejezik a lendületmegmaradás és tömegmegmaradás jelenségét Newtoni folyadékokban. A Navier-Stokes egyenletet gömbi koordináta-rendszerben és a sugárirányú komponensre felírva használjuk. A modellünkben a

buborék gömbszimmetriáját kihasználva a θ és φ gömbi koordináták szerinti parciális deriváltak egyenlőek nullával. Így az egyszerűsített parciális differenciálegyenletünk:

$$\rho_l \cdot \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p_l}{\partial t} + \frac{v_r}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}$$

A radiális sebesség deriváltjait behelyettesítve:

$$\rho \cdot \left[2\frac{R^2}{r^2} \dot{R}^2 + \frac{R^2}{r^2} \ddot{R} + \frac{R^2}{r^2} \dot{R} \cdot \left(-2\frac{R^2}{r^3} \dot{R} \right) \right] = -\frac{\partial p_l}{\partial t} + \frac{R^2}{r^4} \dot{R} + 2\frac{R^2}{r^4} \dot{R} - 3\frac{R^2}{r^4} \dot{R}.$$

Az egyenlet jobb oldala jelentősen kiegyszerűsödik az összeadás elvégzésével. Ha ezt integráljuk *r* szerint $r \in [R; \infty]$ intervallumon megkapjuk a Rayleigh-Plesset egyenletet:

$$\left[-2\frac{R}{r}\dot{R}^{2} - \frac{R^{2}}{r}\ddot{R} + \frac{R^{4}}{2r^{4}}\dot{R}^{2}\right]_{R}^{\infty} = R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^{2} = \frac{p_{l}(R,t) - p_{\infty}(t)}{\rho_{l}}$$

A buborék falára felírt mechanikai egyensúlyi egyenletből kifejezhetjük a p_l függvényt:

$$p_l(R,t) = p_B(t) - 4 \cdot \mu_l \cdot \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R}$$

ahol μ_l a folyadék kinematikai viszkozitása, σ pedig a felületi feszültsége. Így a Rayleigh-Plesset egyenlet kifejtve a folyadék nyomásával:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^{2} = \frac{1}{\rho_{l}} \left(p_{B}(t) - 4 \cdot \mu_{l} \cdot \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} - p_{\infty}(t) \right)$$

A buborékon belüli folyadékból képződött gőzön kívül jelen lehet olyan gáz is, amely nem megy át kondenzáción. Ez a gáz a modellünkben egy a gőzzel homogén módon keveredő ideális gázként jelenik meg. A buborékon belüli teljes nyomás ezáltal nem csak az elpárolgott folyadék nyomásából áll, hanem az ideális gáz nyomását is tartalmaznia kell.

$$p_B(R, T_{\infty}) = p_v(T_{\infty}) + p_{ig}(R)$$

A gőznyomás T_{∞} a közeg távoli hőmérsékletétől függ, viszont mivel ez a modellünkben nem változik $p_v(T_{\infty})$ értékét tekinthetjük konstansnak. Viszont a $p_{ig}(R)$ ideális gáznyomást politropikus állapotváltozással számolva kaphatjuk meg. Mivel esetünkben az állapotváltozás során a termodinamikai rendszer és környezete között nem jön létre számottevő hőátadás, ezért adiabatikus folyamatot feltételezve a politropikus kitevő n értéke 1,4 lesz a számításainkban.

$$p_{ig}(R) = p_{ig0} \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3n}$$

Ahol p_{ig0} az egyensúlyi gáznyomás, R_0 pedig az egyensúlyi buboréksugár. Az utóbbiakat behelyettesítve megkapjuk a Rayleigh-Plesset egyenlet végső alakját:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^{2} = \frac{1}{\rho_{l}} \left(p_{\nu}(T_{\infty}) + p_{ig0} \cdot \left(\frac{R_{0}}{R}\right)^{3n} - 4 \cdot \mu_{l} \cdot \frac{\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} - p_{\infty}(t) \right)$$

ahol ρ_l és μ_l a buborékot körülvevő közeg sűrűségét, illetve kinematikai viszkozitását leíró konstansok, R(t) a buborék geometriáját leíró gömb sugara, \dot{R} és \ddot{R} a sugár első és második időszerinti deriváltjai, σ a buborék és a folyadék határán fellépő felületi feszültség.

Keller-Miksis formuláció

A modellünkben a Keller-Miksis formulát használjuk, ami a Rayleigh-Plesset egyenletnek egy speciális verziója. Ez számol a viszkozitással, a felületi feszültséggel, a beeső hanghullámmal, illetve az akusztikus sugárzással is. Amíg a Rayleigh-Plesset egyenlet a folyadékot összenyomhatatlannak tekinti, a Keller-Miksis formula ezzel szemben a folyadékot összenyomhatónak veszi. Az új modell ezen tulajdonsága a buborék gyors tágulása és összeomlása esetén egy jóval pontosabb leírást jelent. Ez az egyenlet formailag is nagyon hasonló a már fent bemutatott Rayleigh-Plesset egyenlethez.

$$\left(1-\frac{\dot{R}}{c_l}\right)R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1-\frac{\dot{R}}{3c_l}\right) = \left(1+\frac{\dot{R}}{c_l}\right)\frac{1}{\rho_l}\left[p_B(R,t) - p_A\left(t+\frac{R}{c_l}\right) - P_\infty\right] + \frac{Rp_B(R,t)}{\rho_l}$$

Ahol c_l a folyadék hangsebessége. Megfigyelhetjük, hogy az eddigi modell első sorban olyan tagokkal egészül ki, amelyek a buborék falának sebességének, illetve a folyadék hangsebességének hányadosát tartalmazzák. Belátható, hogy ahogy a fal sebessége megközelíti a hangsebességet a folyadék nem tud elég gyorsan elfolyni a fal elől, ezért a folyadék összenyomódik. Így gyors falsebességek esetén fontos ezekkel a tagokkal kiegészíteni a modellt.

A Keller-Miksis modell változója a buborék rádiusza. A rendszert hanghullámokkal szeretnénk irányítani, ennek megfelelően a folyadékban jelen lévő távoli nyomást kell a rendszer

bemenetének választani. Ezt a nyomást tudjuk mechanikai módon változtatni, és periodikus, szinuszos jellel szeretnénk befolyásolni a hanghullámokat. Ezek alapján a rendszer gerjesztése:

$$p_{\infty}(t) = p_k + p_A \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Ahol p_k a környezeti nyomás, p_A a hanghullám nyomásamplitúdója, ω pedig a hanghullám körfrekvenciája. A könnyebb és egységesebb számítás érdekében javasolt az idő dimenziótlanítása:

$$\tau = t \cdot \frac{\omega}{2\pi} = t \cdot f \ [-],$$

ahol τ a dimenziótlan idő, f pedig a gerjesztő hanghullám frekvenciája.



3. ábra A Keller Miksis egyenletek numerikus megoldása. Avagy egy akusztikusan gerjesztett buborék sugarának függvénye ábrázolva diuszkrét időben. Felhasznált paraméterek: pA nyomásamplitúdó: 1,3 [bar]; f gerjesztési frekvencia: 25 [kHz]; R0 egyensúlyi buborékméret: 8 [µm]

A Keller-Miksis modell egy nemlineáris másodrendű közönségek differenciálegyenlet, amelynek nincs általános analitikus megoldása, de numerikus módszerekkel megoldható. Én a Runge-Kutta megoldók családjába tartozó Cash-Karp metódussal oldottam meg. Ez negyed és egy ötöd rendű megoldást is számít, amelyekből aztán hibát is lehet számolni. Ezzel kimondottan alkalmas adaptív lépésköz alkalmazásra. A 3. ábrán látható függvényalakot

tekintve könnyen beláthatjuk, hogy az adaptív lépésköz sok teljesítményt megspórol nekünk a számítás során, mivel a kis hibával is becsülhető részeken nagy lépésközt alkalmaz, a nagyobb hibaértékeknél kis lépésközzel becsüli a függvényértéket. Így a számítás során ugyanazt a hibát kevesebb lépéssel érhetjük el. Ez a dolgozat további részében olvasható alkalmazásoknál nagyon hasznos lehet.

Bjerknes-erő fizikai háttere

A buborékok transzlációs mozgása akusztikus terekben egy fontos jelenség a szonokémia témakörében, ugyanis a buborékok pozíciószabályozása elengedhetetlen homogén kémiai folyamatokhoz. Az elsődleges Bjerknes erő a második legnagyobb buborékot mozgató erő a felhajtóerő után. Mindkét erő azonos alapelv szerint működik, amely szerint a buborék a nyomásgradiensen felfelé kell elmozduljon. A felhajtóerő a gravitáció által a folyadékban, a folyadék súlya miatt létrejövő nyomásgradiensen mozdul el. A folyadéknál jelentősen kisebb sűrűségű buborék a kisebb potenciálú hely felé fog vándorolni. A buborék térfogati kiterjedése miatt, ha nemnulla nyomás gradiens terében helyezkedik el, az egyik oldalán nagyobb lesz a nyomás, mint a másikon. Ez a nyomáskülönbség pedig a buborék felszínén egy oldalirányú erőt fog indukálni. Ezt mondja ki Arkhimédész törvénye is, amellyel analóg a Bjerknes-erő működési elve. A nyomás gradienst a Bjerknes-erő esetében a hanghullámok okozzák. Ennek megfelelően egy V térfogatú testre egy ∇P nyomásgradiensben a következő erő fog hatni:

$$F(t) = -V \cdot \nabla P$$

Folyadékban elhelyezett gázbuborékot akusztikus nyomásmezővel gerjesztünk, a fentieknek megfelelő módon a térfogata pulzálni fog. Ha az akusztikus gradiens nem nulla, akkor a buborék oszcillációjával párosulva egy transzlációs erőt fejt ki a buborékra. Ezt hívjuk elsődleges Bjerknes erőnek. Ez egy akusztikus sugárzási erő.



4. ábra Az állóhullámban elhelyezett buborékra ható amplitúdó pozíciófüggését szemléltető ábra.

A kavitációs buborékot állóhullámmal gerjesztjük, így a hullám terjedési irányának tengelyén elmozdítva a buborékot, az eddigi nyomásgradiens is megváltozik. Mondhatjuk azt is, hogy eddig a buborék az állóhullám amplitúdópontjában helyezkedett el a buborék. Most viszont az állóhullám irányába elmozdulva egyre kisebb amplitúdókkal találkozunk, míg elérünk a holtpontba, ahol a hullámnak nincs hatása. Tehát a buborékunkat egy egydimenzióst térben elhelyezve, a buborék pozíciójától függ a nyomásmező nagysága. Ez alapján a folyadék nyomás függvénye kiegészül egy cosszinuszos taggal:

$$p_{\infty}(x,t) = p_k + p_A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

ahol λ a hullámhossz. Ez a függvény térben egydimenziós, így a gradiensét könnyen számíthatjuk az x koordinátával való parciális deriválással:

$$\nabla p_{\infty}(x,t) = \frac{\partial p_{\infty}(x,t)}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot p_{A} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Ezt behelyettesítve a $F(t) = -V \cdot \nabla P$ egyenletbe, a gömbszimmetrikus modellünknek megfelelően kiszámíthatjuk a buborékra ható erőt, az idő függvényében

$$F(t) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot p_A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3 R^3$$

Az x koordinátát is dimenziótlan mennyiséggé változtathatjuk a következő összefüggés alapán:

$$\xi = \frac{x}{\lambda} \ [-]$$

Ezzel az x koordináta, mint paraméter szerinti vizsgált tartomány állandó értékeket fog felvenni. Diszkretizáció nélkül a hullám periodikusságát kihasználva a $x \in [0; \lambda/4]$ tartományt kellett volna vizsgáljuk, ahol a hullámhossz a hangsebességtől és a frekvenciától függő mennyiség lett volna. Viszont $\xi \in [0; 1/4]$ minden esetben megfelel értelmezési tartománynak.

$$F(t) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot p_A \cdot \sin(2\pi \cdot \xi) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3 R^3$$

Ezzel már meghatározhatjuk a buborékra ható erőfüggvényt.



5. ábra A buborékra ható erő időfüggvénye.

Ez az erő egy idő szerint nagyon gyorsan változó, periodikus érték. (5. ábra) Ezért aztán a további számításokhoz nem is ezt fogjuk használni, hanem egy egyszerűbb, és a valóságot jobban reprezentáló értéket számítunk belőle. A buborékot valóban mozgató, összes buborékra ható erőt a fent már meghatározott erő idő szerinti átlagaként kaphatjuk meg. Ezt az értéket megkapjuk, ha az erő összegzéseként az integrálját számíthatjuk ki, majd az eltelt idővel leosztjuk.

$$F_B = -\langle V(t) \cdot \nabla P(x,t) \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T V(t) \cdot \nabla P(x,t) dt$$

A pozitív előjelű Bjerknes-erő a buborékot az x koordináta növekvő értékei felé tolja, a negatív előjelű pedig a kisebb koordináták felé.



6. ábra Az átlagos elsőrendű Bjerknes-erő értékének alakulása az idő függvényében.

Pozíció stabilitás vizsgálata

A mechanikai rendszerekhez hasonlóan a gázbuborékoknak is van természetes frekvenciájuk, ez a mi modellünkben szintén a buborék átmérőjétől függ. Ha ez a természetes frekvencia megegyezik a buborékot gerjesztő hangmező frekvenciájával, rezonancia lép fel. Az akusztikus nyomásmezőbe helyezett gázbuborékok a rezonáns buborék mérethez képest a saját méretüknek megfelelő irányba mozdulnak el. Ha a buborék kisebb, mint a rezonáns méret, a nyomásgradiensen felfelé mozdulnak el, ha pedig nagyobb, akkor lefelé fognak mozogni. Így egy síkbeli állóhullám mezőben a rezonánsnál kisebb buborékok a nyomásmező amplitúdópontjaiban, a nagyobb buborékok pedig a nyomásmező holtpontjaiban fognak összegyűlni. [6] Az általunk Keller-Miksis modellben leírt buborékok pulzálása során a méretük folyamatosan változik, pulzál.



7. ábra Az egyes frekvenciákhoz tartozó rezonáns egensúlyi buborékmétertek.

A pozíció irányítás szempontjából elsősorban az a fontos, hogy melyik irányba mozgatja a buborékot az arra ható transzlációs erő. Illetve ehhez kapcsolódóan fontos kérdés, hogy vannake olyan pontjai a térnek, ahol a buborékokra ható elő nulla. Ugyanis a kavitációs buborékok ezekben a pontokban tudnak csak megállni. Továbbá ezen pontokat ki kell értékeljük stabilitás szerint is, ugyanis előfordulhat, olyan matematikai megoldás, ahol a buborékot még távolabb sodorja az egyensúlyi helyzettől. Stabil egyensúlyi pontnak számít, amely mellett lévő koordináták mindkét oldalon a stabil pont irányába mutatnak. Tehát ha a kisebb koordináták irányából megközelítve a pontot a Bjerkneserő függvényének pozitívnak kell lennie, a nagyobb koordináták felől közelítve viszont negatív előjelt kell felvennie a függvényünknek.



8. ábra Az átlagos Bjerknes-erő az állóhullámban különböző helyeken elhelyezett buborékok esetében. Az négy megoldásfüggvény f=21.66 [kHz] frekvencián készült, változó nyomásamplitúdóértékekkel. Piros nyilak az erők térbeni irányát jelzi az 1,9 báros megoldásfügvénynek. A piros pont pedig a stabil egyensúlyi helyet.

A 8-es ábra értelmezése során fontos figyelembe vennünk a koordináták fentebb már tárgyalt szimmetriáját. Megfigyelhetjük, hogy az x = 0 pozícióban, azaz a hanghullám maximális amplitúdójának helyén a koszinusz függvény szimmetriájából adódóan instabil pont van. A piros vonalat megfigyelve, annak középső metszéspontja az x tengellyel egy stabil pont lesz, ugyanis bármelyik oldalon is helyezkedik el a buborék, azt a Bjerknes-erő mindenképpen ezen pont felé fogja mozgatni. Mérnöki alkalmazás szempontjából a stabil egyensúlyi pontoknak van jelentőségük, itt fognak felhalmozódni a kavitációs buborékok is.

Részletes paramétertanulmány

A fizikai modellek alapján beláthatjuk, hogy sok különböző paramétertől függ a Bjerknes-erő nagysága. Még ha az anyagtulajdonságokat, mint például a kinematikai viszkozitás, vagy a folyadék hangsebessége, konstans értékekként értelmezzük, is több változó befolyásolhatja a buborékok mozgását. Ezen hatások többnyire már bemutatásra kerültek a dolgozatban, viszont ahhoz, hogy az összetett hatásukat megvizsgálhassuk, rengeteg paraméterkombinációt végig kéne elemezni. Viszont ahhoz, hogy egyszerre megfigyelhessük a rendszer paraméterfüggését, számítógépes futtatásokkal készíthetünk egy paramétertérképet. Ezzel a technikával vizualizálni is lehet a rendszer válaszreakcióját a paramétertérben.

A választott elsődleges paramétereink a kavitációs buborék R_0 egyensúlyi sugara, illetve az elhelyezkedése az állóhullám x pontjában. Ezek paraméterkombinációit különböző nyomásamplitúdójú, illetve frekvenciájú akusztikus nyomástér-ben is megvizsgálhatjuk. Ezzel tulajdonképpen egy négydimenziós paraméterteret képezünk le.

A következő két oldalon a paramétertanulmány eredményei láthatóak. Az ábrákon a narancsos szín a pozitív átlagos Bjerknes-erő értékeket jelöli, ez esetben a buborék a jobbra mozdul el az ábrán. A vízszintes vonalak egy-egy x koordinátatengelyt jelölnek, így egy vízszintes vonalon megfigyelhetjük milyen stabil vagy instabil egyensúlyi helyzetek alakulnak ki egyes paraméterkombinációk során.

Megnevezés	Értékkészlet	Felbontás	Jelentősége
f [kHz]	25, 50, 100	3	A rezonanciaértéket és a
frekvencia	23, 30, 100		hullámhosszt is meghatározza
<i>p</i> _{<i>A</i>} [Pa]	0.1. 0.5. 1. 1.0	4	A buborék oszcillációját és az erő
nyomásamplitúdó	0,1, 0,3, 1, 1,0		méretét is nagyban befolyásolja
<i>R</i> ₀ [μm]			A buborák rezonanciája függ tőle
egyensúlyi	$R_0 \in [10 - 150]$	512	A bubblek lezonanciaja lugg tole
buboréksugár			es a mozgas franya
x [-]			A nyomásgradiens nagyságát
dimenziótlan	<i>x</i> ∈ [0 − 0,25]	512	befolyásolja, illetve szemlélteti a
koordináta			szimuláció fizikai terét















Eredmények kiértékelése

Megfigyelhetjük, hogy a rezonáns egyensúlyi buborékméret a nagyobb frekvenciák esetén lecsökken, ezért a vizsgált tartomány jelentős részén pozitív Bjerknes-erő hat a buborékra. Továbbá az ábráról leolvasva a maximális értékeket, láthatjuk, hogy a transzlációs erő értéke a nyomásamplitúdó értékével együtt növekszik. A fentiekben taglalt módon megállapíthatjuk milyen paraméterkombinációk esetén hol található a térben stabil, illetve instabil egyensúlyi pont.

További feladatok

A dolgozatomban leírt projektet több irányban is tovább lehet majd fejleszteni a jövőben.

A modell továbbfejlesztési lehetőségei elsősorban más erőkkel történő kiegészítésében rejlik. Többek között a felhajtóerővel és a súrlódási erővel kiegészítve egy buborékra ható összes jelentős erő modellezhető lenne. Ezeknek az erőknek a hozzáadásával a modell sokkal pontosabb és reálisabb lesz majd. Mivel ezek az erők a valóságban fontos szerepet játszanak a buborékok és a folyadékok viselkedésében, így velük kiegészítve a modellünk sokkal közelebb kerül majd a valóság leírásához.

A számítások kiegészítése további buborékokkal is nagyot lendítene a modellen, a gyakorlati használhatóság irányába. Ez a tovább fejlesztés lehetővé tenné, hogy azt is megvizsgáljuk, hogy a buborékok hogyan befolyásolják egymás viselkedését, milyen hatásra vannak egymásra.

Felhasznált források

- 1. Lord Rayleigh (1917): Ont he pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity.
- 2. Kyle E. Niemeyer, Chih-Jen Sung (2013): Accelerating moderately stiff chemical kinetics in reactive-flow simulations using GPUs
- 3. Dániel Nagy, Lambert Plavecz, Ferenc Hegedűs (2022): The art of solving a large number of non-stiff, low-dimensional ordinary differential equation systems on GPUs and CPUs
- 4. Robert Mettin, Alexander A. Doinikov (2008): Translational instability of a spherical bubble in a standing ultrasound wave
- 5. Dr. Abdul k. Hussein Dagher, Dr.Bassam Taleb mohammad, Aladdin Majeed Hasson (2016): Characterizations of the mathematical models of Ultrasound Contrast Agents
- 6. R. Mettin, S. Luther, C.-D. Ohl, W. Lauterborn (1999): Acoustic cavitation structures and simulations by a particle model
- 7. T G Leighton, A J Walton and M J Pickworth (1989): Primary Bjerknes forces
- 8. Blake, F.G. (1949): The onset of cavitation in liquids