



**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
EGYETEM**
Építészmérnöki Kar
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

**REPEDEZETT SZIKLAFELSZÍN RŐL
SZÁRMAZÓ FRAGMENSEK MORFOLÓGIAI
ELEMZÉSE**

KEREKES ADRIA FLÓRA, BÜKI DÁVID
KONZULENSEK: DR. DOMOKOS GÁBOR
Tudományos Diákköri Konferencia 2017

Tartalomjegyzék

I. Bevezetés.....	2
II. Vizsgálat.....	4
III. Adatok elemzése, összehasonlítása	5
IV. Törésszimuláció.....	17
IV.1 Véletlenszerűen kiválasztott kő törése	17
IV.2 Minden kő vizsgálata egyesével.....	20
IV.3 Hatványra emelés bevezetése	23
V. Összefoglalás	27
Köszönetnyilvánítás.....	28
Irodalomjegyzék	28

I. Bevezetés

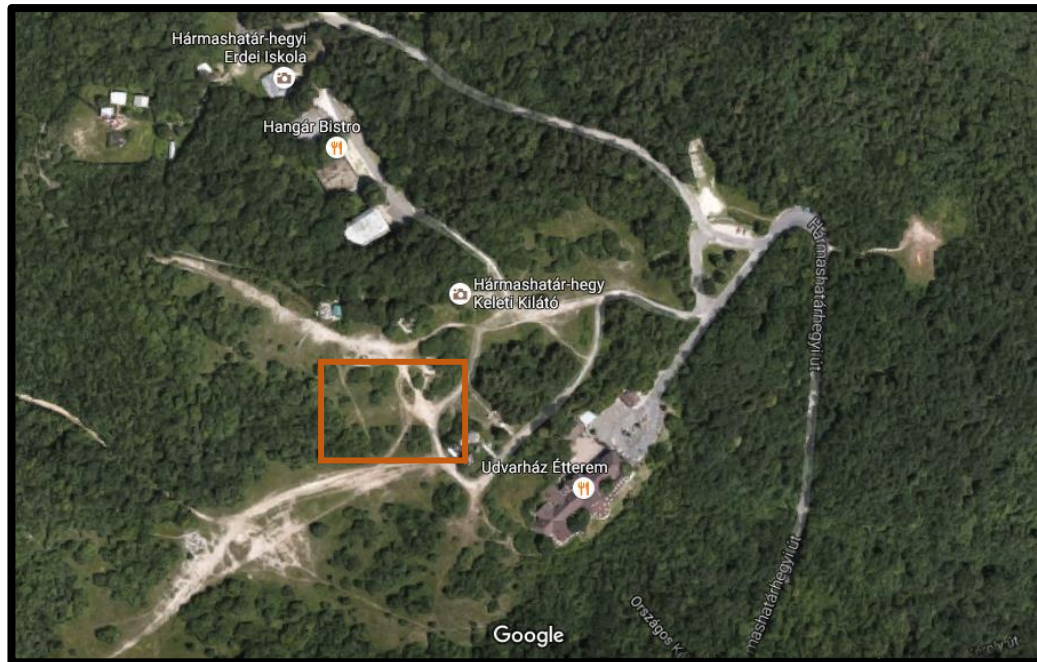
A fragmentáció szerteágazó jelenség, amely széleskörű irodalommal rendelkezik. Számos érdekes és gyakorlati szempontból is fontos jelenség megértésében van döntő szerepe, mint például domborzati formák létrejötte és folyamatos változása, vagy például az ürszemét felhalmozódása [3] [4] [5].

Korábbi kutatások különböző törési folyamatok (mállás, robbanás, ütközés) által létrejövő fragmensek méretét és formáját is vizsgálták már [1] [2]. Az eltérő folyamatok által létrejött fragmenshalmazokon végzett vizsgálatok mind a fragmensek méretét, mind formáját illetően feltártak univerzális törvényszerűségeket.

Munkánk célja a 2016-ban megkezdett, repedezett sziklafelszín morfológiai elemzésével foglalkozó kutatásunk [6] folytatása.

Ezen előzményben a Szilárdságtani Tanszéken már évek óta folyó kutatások során [1] [2] az egyedi geometriai jellemzőket feltáró vizsgálati módszereket használtuk felszíni repedésképen, 2D-s mintákat vizsgálva.

A korábban is vizsgált helyszínről (1. ábra, 2. ábra), a Hármashatár-hegy tetejéről (é. sz. $47^{\circ} 33'$, k. h. $18^{\circ} 59'$) véletlenszerűen begyűjtésre került 556 darab fragmens, melyekről okkal feltételezhető, hogy az előző kutatásunkban [6] vizsgált repedezési folyamat során keletkeztek. Ezek már 3D-s minták, de hasonló elvek alapján vizsgálva őket, össze lehet vetni a korábbi TDK-munka [6] kereteiben kapott 2D-s minták eredményeivel.



1. ábra: A Hármashatár-hegy területe madártávlatból, bejelölve a gyűjtés helyszínével [7]



2. ábra: A fragmensek gyűjtésének helyszíne (2016-os saját fotó)

II. Vizsgálat

Először ennek a válogatás nélkül begyűjtött 556 darab fragmensnek a fizikai paramétereit kezdtük el vizsgálni. Első lépésként minden fragmenst sorszámmal láttunk el a későbbi azonosíthatóság érdekében (3. ábra).

Ezután a fragmenseket egyenként, manuálisan mértük le, a következő módszerrel: minden fragmensnek megmértük a tömegét, majd hossz mérésre alkalmas mérőeszközzel megkerestük a fragmensek leghosszabb tengelyét, melyet „a”-nak neveztünk el. Ezután e körül a tengely körül forgatva a követ, megkerestük az „a”-ra merőleges leghosszabb tengelyt, melyet „b”-nek neveztünk el. A követ 90 fokkal elforgatva az utolsó mért érték az „a”-ra és „b”-re is merőleges leghosszabb tengely, mely a „c” megjelölést kapta.

Ezután a fragmensek stabil és instabil egyensúlyi helyzeteinek megtalálása következett, melyet szintén manuális úton, „próbálgatással” állapítottunk meg. A stabil egyensúlyi helyzetek számát „s”-el, az instabilokét „u”-val jelöltük.



3. ábra: A saját mérésünk közben készült fotó

A mérés során ügyeltünk arra, hogy az egyes fragmensek mérésével közel azonos időt töltsünk el, hogy ezzel is csökkentsük a statisztikai hibákat. Erre főleg azért volt szükség, mert a stabil,

illetve az instabil egyensúlyi pontok számának meghatározásakor a talált pontok száma arányosan nő a kereséssel eltöltött idővel.

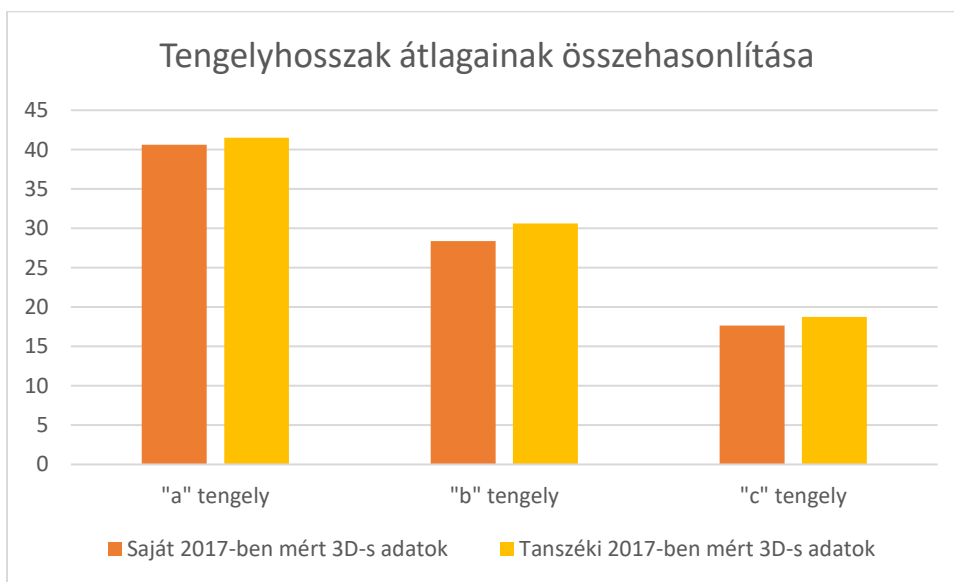
Az így lemért adatokat felhasználva egy olyan adathalmazt kaptunk, mely tartalmazza az összes begyűjtött fragmens legfontosabb paramétereit.

A Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszéken folyó kutatás keretein belül mind az 556 mintát – tőlünk függetlenül – más személy is ugyanezzel a módszerrel lemérte. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a mi mérésünket „*Saját 2017-ben mért 3D-s adatok*”-ként, a tanszéken tőlünk függetlenül kapott adatokat „*Tanszéki 2017-ben mért 3D-s adatok*”-ként fogjuk említeni.

Az általunk kapott, illetve az ettől független tanszéki adathalmaz összehasonlítható volt, mivel az adatok a fragmensek sorszámához vannak rendelve. Az összehasonlításnak két célja volt: igazolni a mérési módszer pontosságát, illetve megkeresni az eltéréseket, és vizsgálni ezek valószínű okait. Ez különösen a stabil és instabil egyensúlyi pontok keresésénél vezetett érdekes eredményekre.

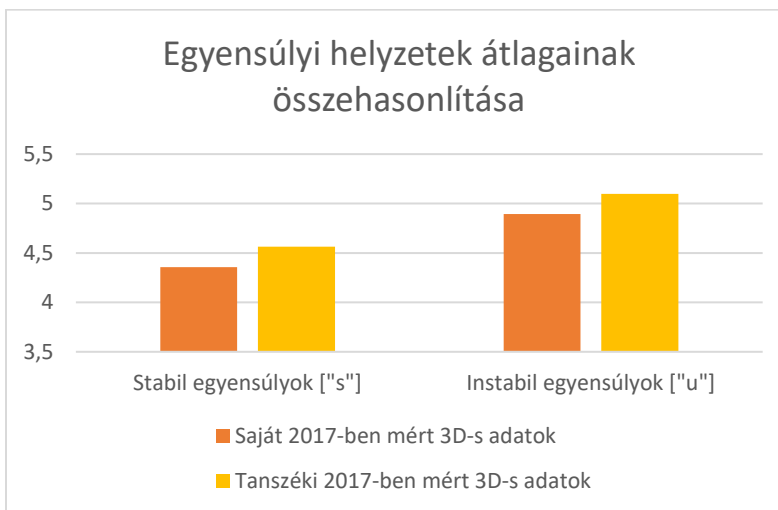
III. Adatok elemzése, összehasonlítása

Először a teljes adathalmazokra vonatkozó adatokat vetettük össze. Az első lépés az öt mért érték átlagainak összehasonlítása volt, ezt mutatjuk be a következő két grafikonon. Az 4. ábrán jól látható, hogy a tengelyhosszak esetében a „Tanszéki 2017-ben mért 3D-s adatok” átlagai minden érték esetén magasabbak voltak a „Saját 2017-ben mért 3D-s adatok”-nál:



4. ábra: A mérés során kapott tengelyhosszak átlagainak összehasonlítása

A 5. ábrán ugyanilyen módon hasonlítottuk össze a két adatsort, ahol szintén azt kaptuk, hogy az átlagok a „Tanszéki 2017-ben mért 3D-s adatok” esetében nagyobb értékeket vesznek fel:



5. ábra: A mérések során talált egyensúlyi helyzetek száma átlagainak összehasonlítása

A 4. és 5. ábrán továbbá jól látható, hogy az 556 fragmensből nyert adatok átlagai közötti eltérés viszonylag alacsony. A legnagyobb eltérés a „b” érték esetén adódott, ez 7,3 %, míg az egyensúlyi helyzeteknél 4-4,5 % a különbség. Ezekből még nem vonható le igazi következtetés a mérések pontosságával kapcsolatban, ehhez érdemes az egyes adatsorokat külön-külön vizsgálni.

Következő lépésben külön vizsgáltuk a megtalált stabil, illetve instabil egyensúlyi helyzetek számait a két mérés esetén. A vizsgálat pontossága érdekében az egyezéseket manuális módszerrel, fragmensenként kerestük meg, ennek eredménye látható a 6. ábrán. (Kevésbé pontos módszer lett volna az egyes egyensúlyi helyzetek számértékeihez darabszámot rendelni, és a két mérés közül a kisebb darabszámot venni egyezőnek). A nem egyező eseteket eltávolítottuk, de az érdekesség kedvéért megnéztük az eltérés mértékeit, melyre a 6. ábra jobb oldali oszlopainál látható példa:

		CSAK AZ EGYEZŐK:		ELTÉRÉS:	
		Stabil	Instabil	Stabil	Instabil
				-1	-4
			6	-1	0
		4		0	-2
		3		0	-1
				-1	-2
		5		0	-2
				1	-2
		4		0	-1
			8	-1	0
		5		0	1
				-3	-1
				-3	2
		5	6	0	0
		3	2	0	0
				1	1
.....					
		3		0	2
		5		0	1
		4		0	-1
		4		0	1
		3	5	0	0
				-1	-2
		4	4	0	0
		Egyezések száma:	353 129	Eltérések mértéke:	-0,21 -0,20
			63,49% 23,20%	Maximum + eltérés:	4 5
			Az egyezések %-ban	Maximum - eltérés:	-3 -6

6. ábra: Az egyezések és eltérések vizsgálatának módszere és az eredmények bemutatása

A „-”, előjel azt jelenti, hogy a „Tanszéki 2017-ben mért 3D-s adatok” esetében volt nagyobb az egyensúlyi helyzetek száma.

A előjel hiánya azt jelenti, hogy a „Saját 2017-ben mért 3D-s adatok” esetében volt nagyobb az egyensúlyi helyzetek száma.

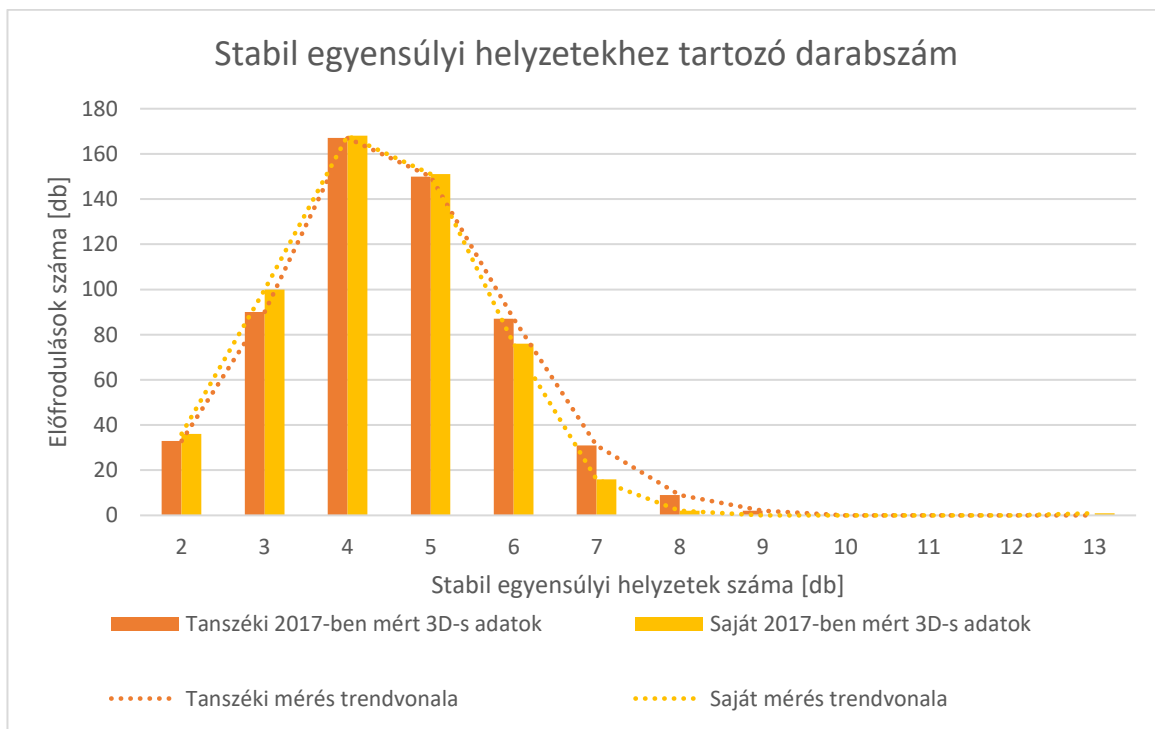
A 0 jelöli az egyezést a két adatsor között.

Az egyezéseket vizsgálva (6. ábra bal oldali oszlopai) azt láthatjuk, hogy nagy az eltérés a stabil és az instabil egyensúlyi helyzetek számát tekintve: míg a stabil egyensúlyi helyzetek száma az 556 fragmensről levett adatból 353 esetben egyezik a két mérésnél (63,49%-os pontosság), addig az instabil egyensúlyi helyzetek esetén ez a szám csak 129 (23,2%-os pontosság). Már ebből is jól sejthető, amit a mérések során is tapasztaltunk, hogy a stabil egyensúlyi helyzeteket könnyebb pontosan megtalálni, viszont az instabil egyensúlyi helyzeteknél bizonytalanok és kevésbé pontosak a mérések.

Az eltéréseket vizsgálva (6. ábra jobb oldali oszlopai) a stabil egyensúlyi helyzetek esetén a két szélsőérték a -3 és a 4 volt, míg az instabil egyensúlyi helyzeteknél a -6 és az 5 volt. Ez is igazolja a fentebb feltett állításunkat, hogy az instabil egyensúlyi helyzetek megtalálása kevésbé pontos, mint a stabil egyensúlyi helyzeteké.

Az eltérésének átlagai szintén leolvashatók a 6. ábráról (-0,21 és -0,20), és kiadják a 4. ábráról is leolvasható tény, hogy mind a stabil, mind az instabil esetben a „Tanszéki 2017-ben mért 3D-s adatok”-ban volt nagyobb a megtalált egyensúlyi helyzetek száma. Érdekes azonban, hogy az eltérés mértéke közel azonos a stabil (-0,21) és az instabil (-0,20) egyensúlyi helyzetek számánál, ellentétben az egyezések darabszámánál (6. ábra) tapasztalt nagy különbséggel. Azonban ezek az átlagok stabil esetben 203 eltérésből, míg instabil esetben 429 eltérésből adódnak.

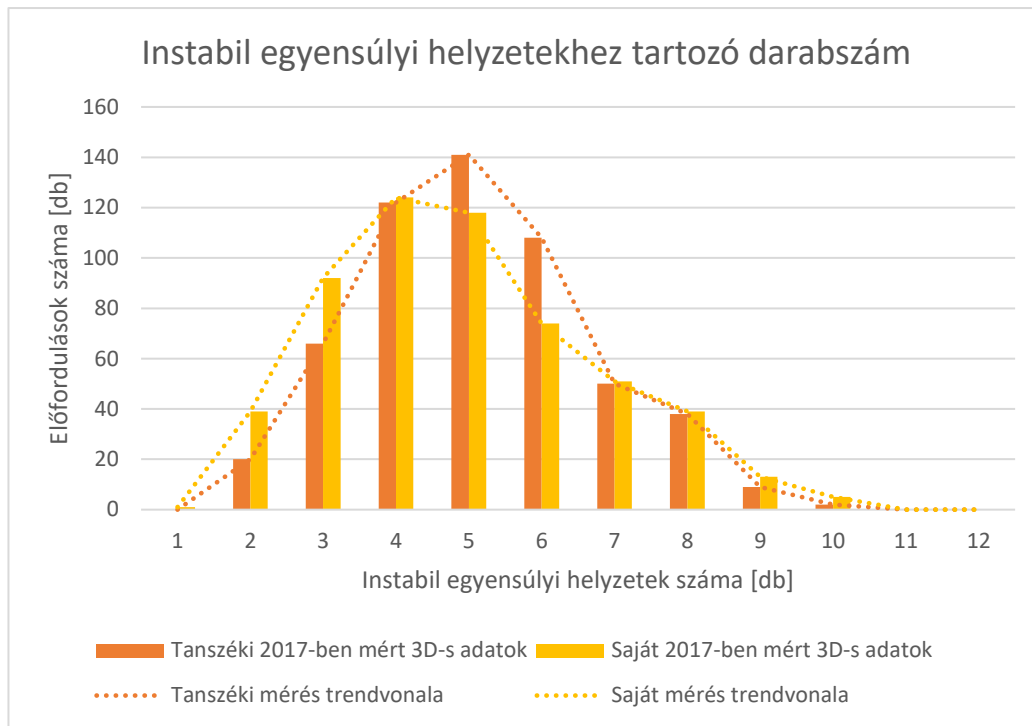
Az ezután következő lépés az volt, hogy az adatsort még jobban felbontva vizsgáljuk a stabil és az instabil egyensúlyi helyzetek számának egyezéseit. Legelőször a két adatsorból kinyertük az egyes egyensúlyi helyzetekhez tartozó előfordulások számát (7. ábra, 8. ábra).



7. ábra: A mérések során kapott stabil egyensúlyi helyzetek előfordulásának összehasonlítása

A 7. ábrán a trendvonalakkal kiemelve az látható, hogy az előfordulások száma a stabil egyensúlyi helyzetek számának függvényében mindkét mérés esetében közelítőleg Gauss-görbe alakot vesz fel, és a két görbe között nagyon minimális az eltérés. Továbbá mérési pontatlanság is

felfedezhető, ugyanis míg 10, 11, illetve 12 egyensúlyi helyzettel rendelkező követ nem talált egyik mérés sem, a „Saját 2017-ben mért 3D-s adatok” között található 1 darab 13 stabil egyensúlyi helyzettel rendelkező fragmens. Ennek oka lehet mérési hiba vagy manuálisan elkövetett (pl. az adat bevitelekor történő elgépelés) hiba.



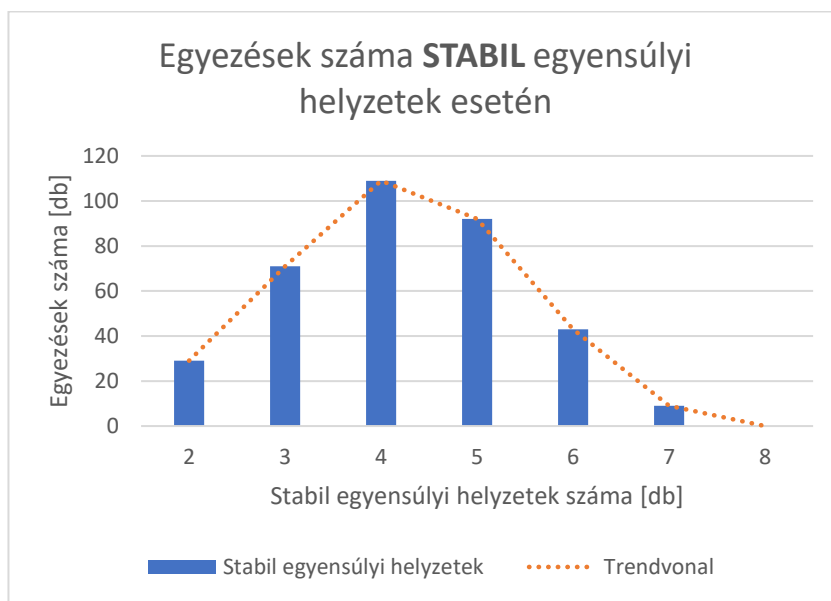
8. ábra: A mérések során kapott instabil egyensúlyi helyzetek előfordulásának összehasonlítása

Az 8. ábra mutatja az előfordulásokat az instabil egyensúlyi helyzetek esetében. Itt is Gauss-görbe jelleget mutatnak a trendvonalak, azonban itt már nagyobbak az eltérések a két mérés között, például eltérő helyen található a görbék maximuma. Ennek legvalószínűbb oka a már korábban is említett bizonytalanság az instabil egyensúlyi helyzetek mérésénél.

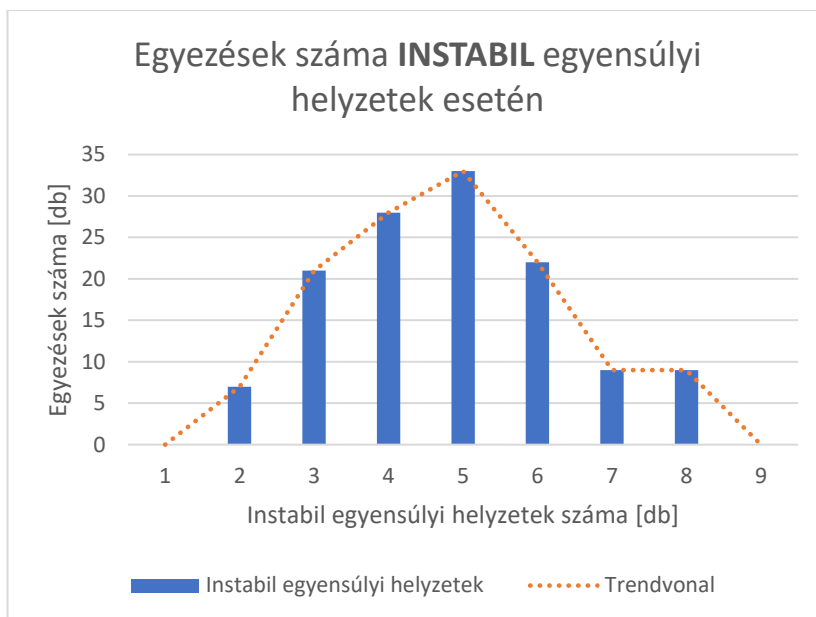
Az így kinyert újabb adatokat ezután összehasonlíthattuk az előző adatsorból kinyert egyezések darabszámával, az egyensúlyi helyzetek számához rendelt módon. Ehhez először az egyensúlyi helyzetek számához hozzárendeltük az egyezések számát. Ezt mutatja a következő táblázat:

STABIL egyensúlyi helyzetek száma	Egyezések száma	INSTABIL egyensúlyi helyzetek száma	Egyezések száma
2	29	1	0
3	71	2	7
4	109	3	21
5	92	4	28
6	43	5	33
7	9	6	22
8	0	7	9
9	0	8	9

A táblázat adatait a 9. és 10. ábrán ábrázoltuk. Az egyezések esetében is a két adatsornál külön-külön (7. és 8. ábra) is tapasztalt Gauss-görbe eloszlást láthatjuk:



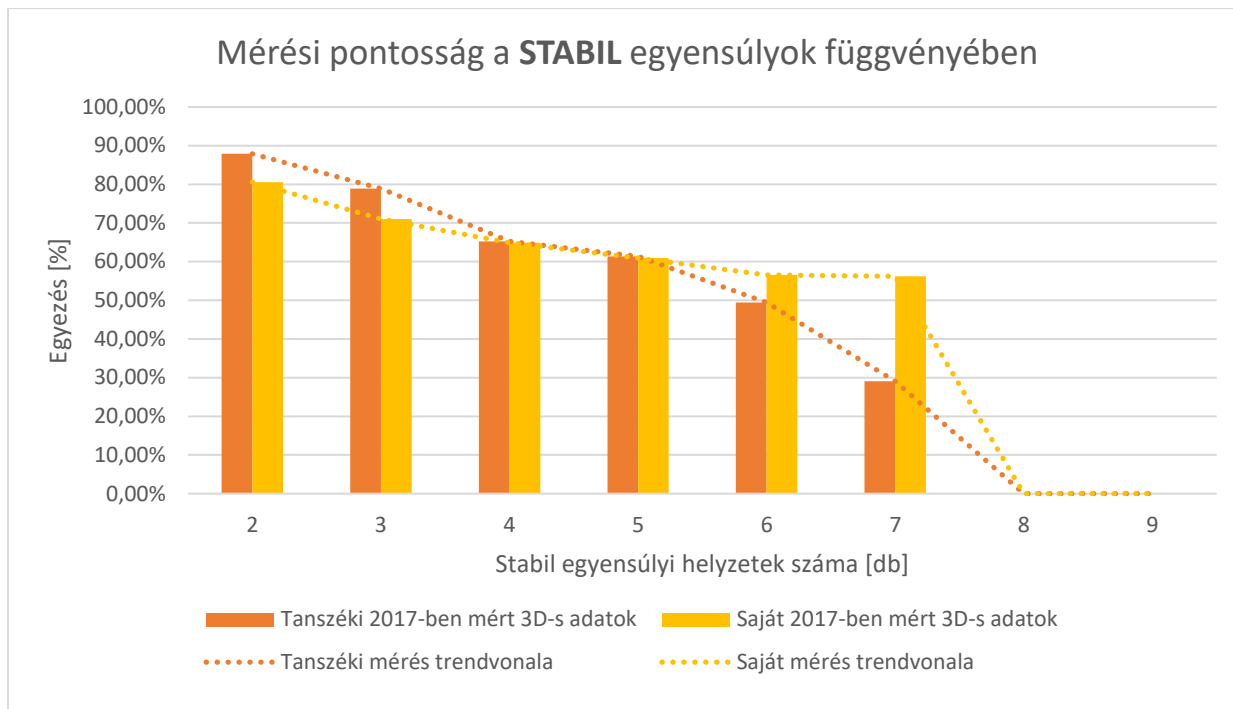
9. ábra: A két mérés közötti egyezések száma a különböző **stabil** egyensúlyi helyzetek számához viszonyítva



10. ábra: A két mérés közötti egyezések száma a különböző **instabil** egyensúlyi helyzetek számához viszonyítva

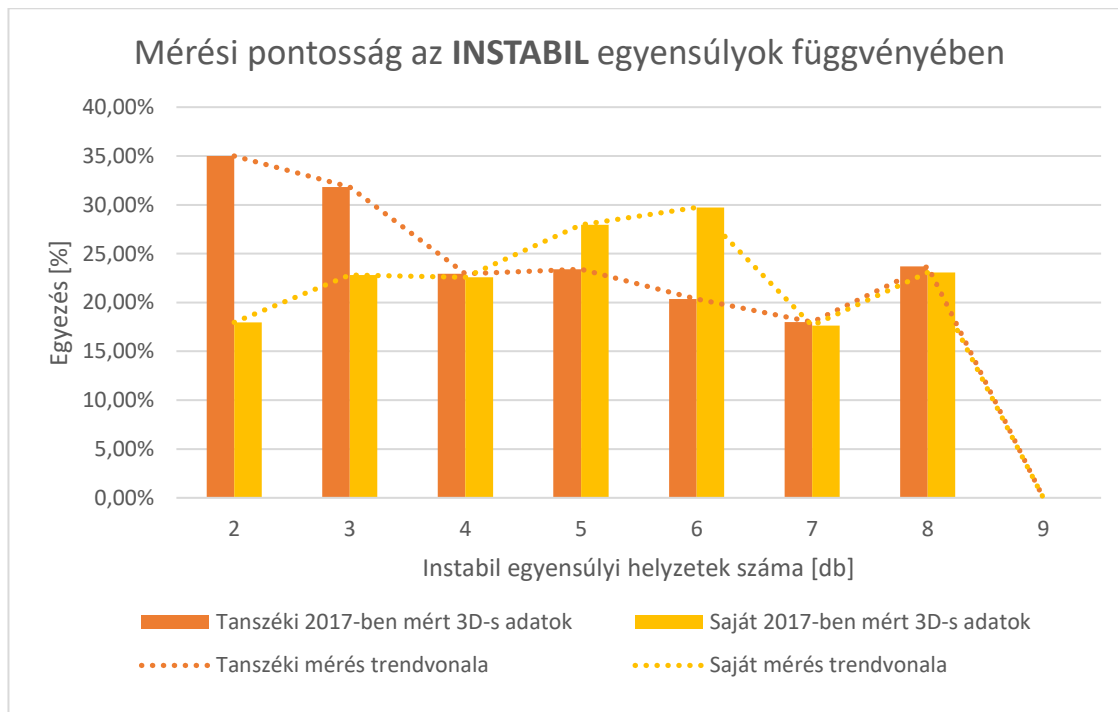
Ennek a folyamatnak az utolsó lépéseként arra voltunk kíváncsiak, hogy mennyire volt pontos a két mérés esetében az egyensúlyi helyzetek megtalálása. A sejtésünk az volt, hogy minél kevesebb az egyensúlyi helyzetek száma, annál nagyobb valószínűséggel meg is találjuk azokat. Ez a sejtés már a mérés közben is felmerült, és logikusnak tűnik, hogy ha egy fragmensnek például 2 darab stabil egyensúlyi helyzete van, akkor azokat jó eséllyel meg is találjuk.

Ehhez összevetettük egyensúlyi helyzetek számához tartozó előfordulások számát az egyezések számával, százalékos formában (11. ábra, 12. ábra).



11. ábra: Mérési pontosság a **stabil** egyensúlyi helyzetek számának függvényében

A stabil egyensúlyok esetében nagyon szépen látható, hogy a feltevésünk igaz volt, és az egyensúlyi helyzetek számának növekedésével csökken a mérési pontosság mindkét mérés esetében (11. ábra). Fontos megjegyezni még, hogy még a 6-8 stabil egyensúlyi helyzet esetén is legalább minden második kő esetében mindkét mérés megtalálta ezeket az egyensúlyi helyzeteket, ami jó eredménynek mondható a pontosságot illetően.



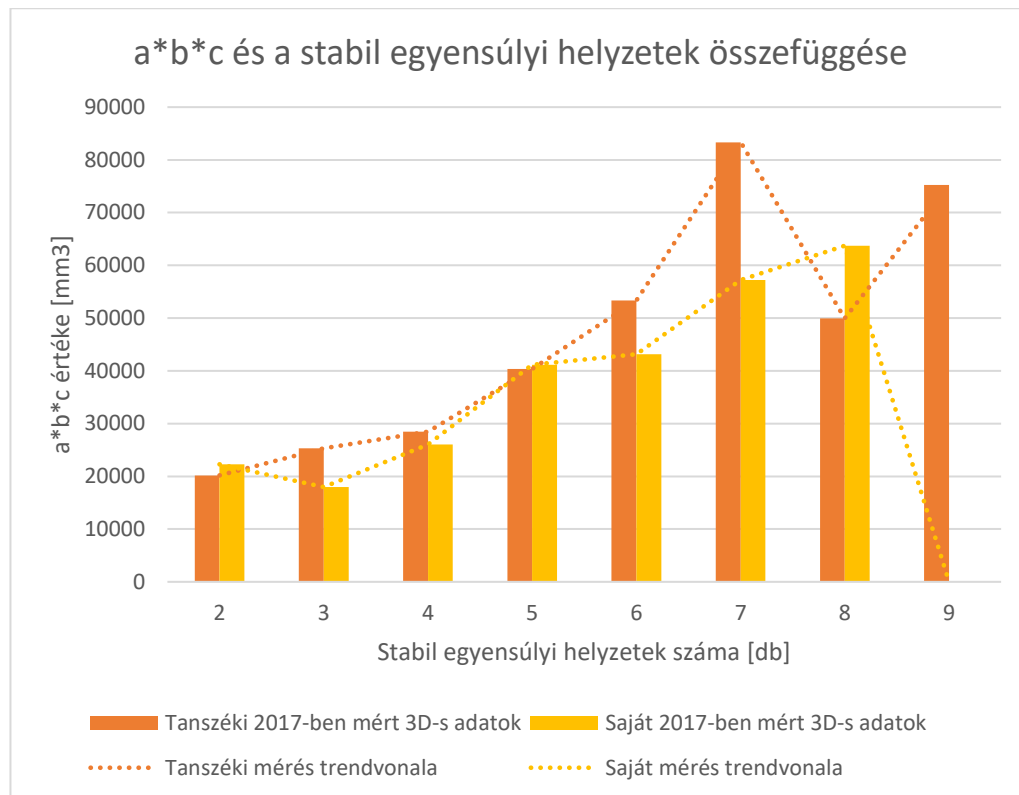
12. ábra: Mérési pontosság az **instabil** egyensúlyi helyzetek számának függvényében

Az instabil egyensúlyi helyzetek esetében (12. ábra) újra látható, hogy sokkal kevésbé pontosak az eredmények – például a 2-es esetben a stabil egyensúlyi helyzeteknél tapasztalt 80-90%-os pontossággal ellentétben, itt már csak 17% és 35% volt a két mérés pontossága. A százalékos értékekben való nagyobb eltérések betudhatók annak, hogy sokkal kevesebb számú egyezést találtunk, ahol már egy adat is nagyobb eltérést eredményez. A két görbe jellegét vizsgálva a „Tanszéki 2017-ben mért 3D-s adatok” egyértelműen ugyanazt a csökkenő tendenciát mutatják, mint amit a stabil egyensúlyi helyzeteknél (11. ábra) tapasztaltunk. A „Saját 2017-ben mért 3D-s adatok” esetében már nehezebb következtetést levonni. Ez a fajta tendencianélküliség valószínűleg a korábbi grafikonokon is tapasztalt eltérésekből, illetve az egyezések számának alacsonyágából következhet.

A két független adatsor lehetőséget adott még arra, hogy bizonyos összefüggéseket úgy vizsgálhassunk, hogy azt két független mérés is alátámasztja. Ilyen volt többek között a stabil egyensúlyi helyzetek számának, valamint a fragmensek geometriai jellemzőinek összehasonlítása.

A mérések során tapasztaltak alapján az volt a sejtésünk, hogy minél nagyobb egy adott fragmens, annál valószínűbb, hogy nagyobb lesz a stabil egyensúlyi helyzeteinek száma. Ehhez

először az adatokat a stabil egyensúlyi helyzetek darabszáma alapján csoportokba rendeztük, majd vizsgáltuk az egyes csoportokban lévő adatsorok geometriai jellemzőit. Az összehasonlításhoz a kövek „nagyságát” a tengelyhosszak szorzataként jellemeztük, azaz $a*b*c$ értékkel. A 13. ábra mutatja a stabil egyensúlyi helyzetek száma alapján beosztott csoportok adatsorainak $a*b*c$ értékeinek átlagait:



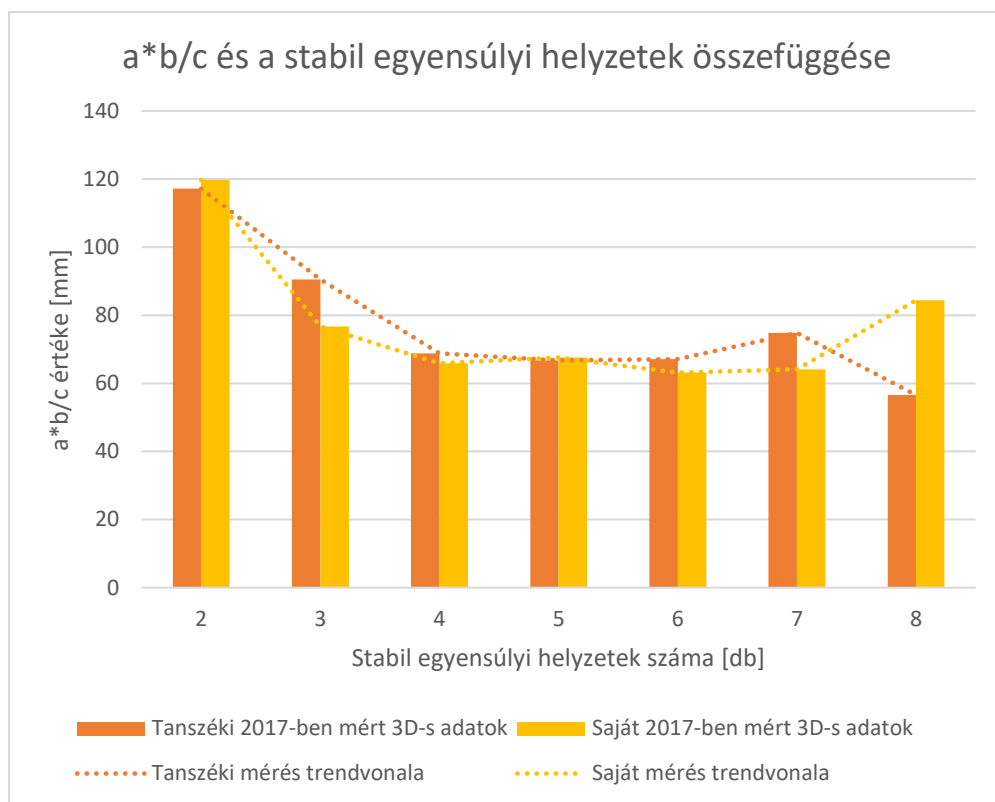
13. ábra: $a*b*c$ geometriai jellemző és a stabil egyensúlyok számainak összefüggése

Mivel 9-nél több stabil egyensúlyi helyzettel rendelkező fragmensből nagyon csekély számú volt, így ezeket kivettük az átlagolásból.

A 13. ábra igazolja a felvetésünket, miszerint az $a*b*c$ szorzat értékének növekedésével nő a stabil egyensúlyi helyzetek száma.

A mérések során tapasztaltuk még, hogy ha egy fragmens „lapos”, azaz az „a” és a „b” tengely nagyságrenddel nagyobb a „c” tengelynél mért értéknél (melyet egyszerűsítve az $a*b/c$ értékkel jellemeztünk), akkor jó eséllyel a fragmensnek 2 darab stabil egyensúlyi helyzete lesz. Az előző módszerhez hasonlóan itt is a stabil egyensúlyi helyzetek száma alapján osztottuk csoportokra az adatokat, majd az $a*b/c$ értékek átlagai alapján kaptuk a 14. ábrát.

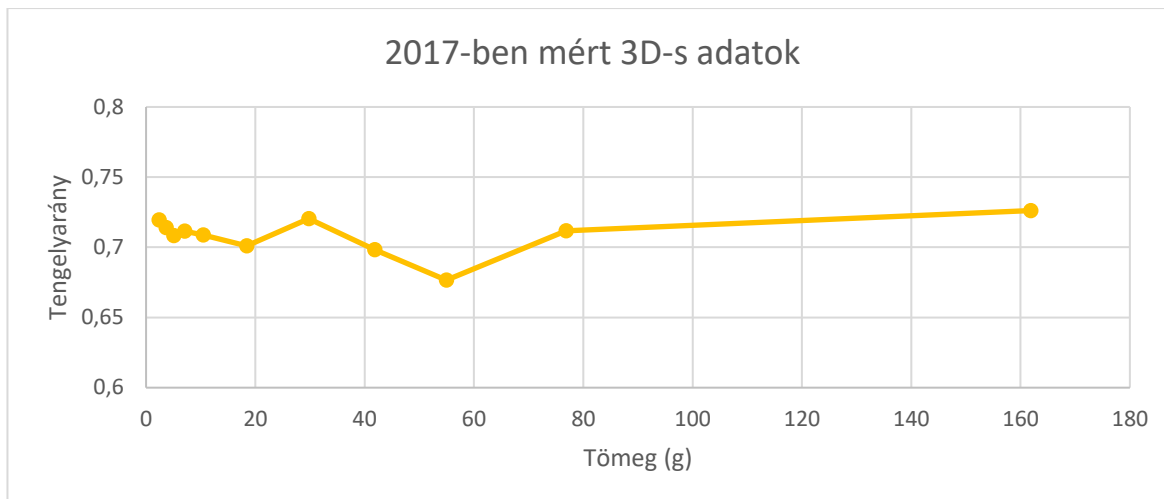
A 14. ábrán jól látható, hogy az $a*b/c$ értéke 2 darab stabil egyensúlyi helyzet esetén jelentősen nagyobb értéket mutat, 3 esetében kisebb mértékben, de szintén pozitív irányú eltérést mutat. Majd 4 stabil egyensúlyi helyzettől kezdődően közel konstans értékeket vesz fel (8-nál már kisebb számú minta állt rendelkezésre, ez okozhatja az eltérést):



14. ábra: $a*b/c$ geometriai jellemző és a stabil egyensúlyok számainak összefüggése

Mivel 8-nál több stabil egyensúlyi helyzettel rendelkező fragmensből nagyon csekély számú volt, így ezeket kivettük az átlagolásból.

Az adatsorok elemzésének következő lépéseként egy grafikonon (15. ábra) ábrázoltuk a tömeg és a tengelyarány összefüggését a „Saját 2017-ben mért 3D-s adatok” alapján:



15. ábra: A mért tömeg és a tengelyarány összefüggése a „Saját 2017-ben mért 3D-s adatok” esetében

Ezután az idén mért adatokat („Saját 2017-ben mért 3D-s adatok”) közös grafikonon (16. ábra) ábrázoltuk a tavalyi lemerít 2D-s adatokkal (tömeg helyett a 2D-s adatok esetében a területet használtuk, tavalyi dolgozatunkban [6] kifejtettük, hogy miért tehetjük meg ezt) és az [1]-es cikk adataival. Az összehasonlíthatóság érdekében az összes adatsor tömegét vagy területét az adott adatsor legnagyobb értékével leosztva vettük, így a legnagyobb tömeg minden adatsor esetén 1.



16. 1 ábra: Tengelyarány-terület összehasonlítás három különböző mérés esetén

IV. Törésszimuláció

Ez alapján a grafikon alapján alkottuk meg azt a feltevést, hogy a három különböző adatsor a kövek időrendben egymást követő három különböző állapotát rögzítik. A legkorábbi állapot a 2D-s repedéskép, ezután az idén általunk lemerő kövek állapota következik. Mivel ezeket a köveket a repedések helyszínéről hoztuk el, feltételezhetjük, hogy a kövek korábban szintén a repedéskép részei voltak. A harmadik adatsor azt az állapotot mutatja, amikor a kövek már kopottabbak.

Feltevésünk igazolására azt a módszert választottuk, hogy szimuláljuk egy program segítségével a kövek törését, és így megvizsgáljuk, hogy a különböző állapotok valóban egymásba vihetők-e.

A kövek törését végző programot Visual Basic programnyelven, Excel makró felületen készítettük. Többféle verziót is teszteltünk a kövek szimulált törésére, mind az eltörő kövek kiválasztásában, mind pedig a törés végbemenetelében. Mivel a 3D-s adatok mellett 2D-s adatok is rendelkezésünkre álltak, ezért minden adatsor esetén az „a” és „b” átló hosszával számoltunk. Így a 2D-s és 3D-s adatok összevethetőek.

A program a fragmenseket olyan téglalapoknak tekinti, amiknek hosszabbik oldala „a” hosszúságú, rövidebbik oldala „b” hosszúságú, és területe „A”.

IV.1 Véletlenszerűen kiválasztott kő törése

Az első verzióban a következő módon gondolkodtunk:

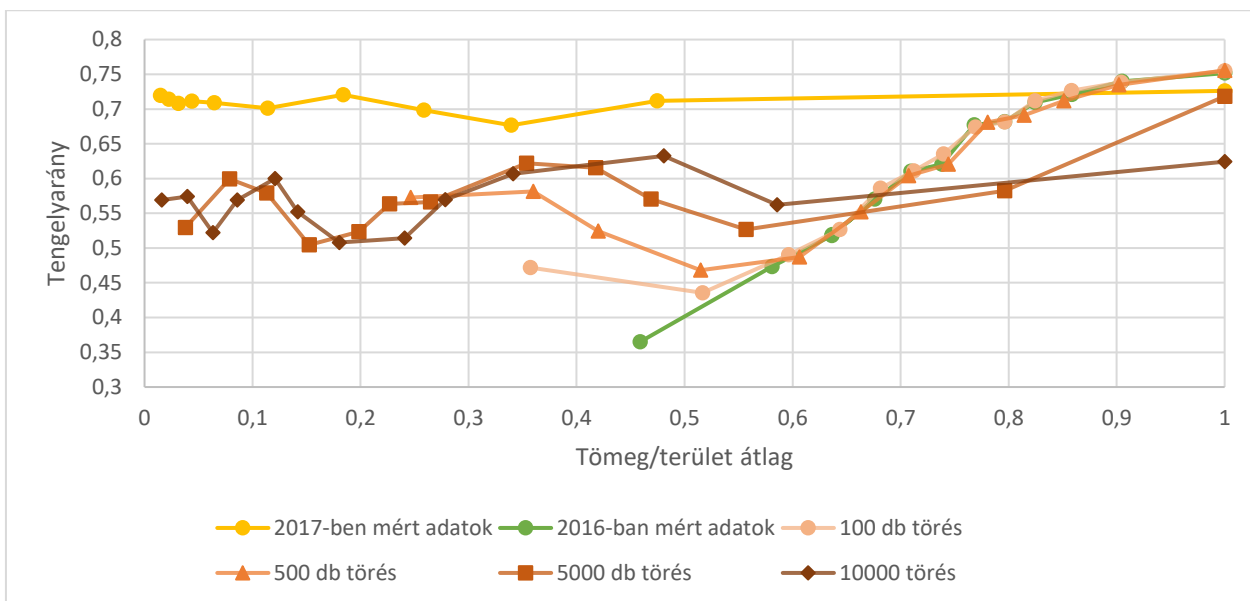
Tegyük fel, hogy a természet úgy tör el a köveket, hogy kiválaszt véletlenszerűen egy követ, majd szintén véletlenszerűen kiválasztja a kő egyik oldalát, ezután pedig pontosan kettő ugyanakkora darabra töri azt. Ezután a két ugyanakkora darab visszakerül az eredeti halmazba, és kezdődik előlről a folyamat – most már egyel több kő közül kiválasztva az eltörendőket.

Az eltörendő kő véletlenszerű kiválasztásához a program generál egy random számot 0 és 1 között, majd ezt megszorozza a kövek darabszámával (n), és egészre kerekíti a kapott számot. Így megkapjuk, hogy melyik kő fog eltörni.

Ezután kiválasztja, hogy „a” vagy „b” oldal fog-e eltörni. Generál egy újabb random számot 0 és 1 között, majd azt megszorozza („a”+ „b”)-vel. Ha az így kapott érték kisebb, mint „a”, akkor „a” oldal fog törni, ellenkező esetben pedig „b”. Mivel minden esetben igaz, hogy „a” > „b”, ezért „a” oldal nagyobb eséllyel tör el, és minél elnyúltabb a kő, annál nagyobb eséllyel tör el „a” oldal.

A két új kő pontosan ugyanakkora lesz, és visszakerül az eredeti halmazba, és így a kövek száma eggyel nő.

Ezután a program kiválaszt egy újabb követ, és azt is eltöri. Az, hogy hány darab törés történik, az elején megadott szám alapján dől el. Miután a törések végbementek, az új adatsort ugyanazon a grafikonon ábrázoljuk (17. ábra).



17. ábra: 2016-ban mért adatok törésének szimulációja az egyes számú programmal

A továbbiakban a következő elnevezéseket vezetjük be:

A17: 2017-ben mért kövek adatai (a grafikonon sárga színnel jelölve);

A16: 2016-ban mért fragmensek adatai (a grafikonon zöld színnel jelölve);

M(A16): a 2016-ban mért fragmensek szimulált törése utáni adatok (a grafikonon barnával jelölve).

A grafikonok alapján megállapítottuk, hogy minél többszöri törést szimulálunk A16 adatsoron, annál jobban emlékeztet a grafikon alakja A17 grafikonjára jellegében. A szimuláció tehát részben bebizonyítja a hipotézisünket.

Azonban M(A16) tengelyarányainak értéke nem közelít A17 tengelyarányainak értékéhez. Ha az egyes mérések és szimulált törések összes tengelyarányát kiátlagoljuk, a következő értékeket kapjuk:

A17	0,708785137
A16	0,612104112

M(A16) 100 törés	0,618790446
M(A16) 500 törés	0,61421029
M(A16) 5000 törés	0,576997366
M(A16) 10000 törés	0,569535397

Tehát A16 törése esetén a tengelyarányok átlaga csökken, és nem közelíti meg A17 tengelyarányainak átlagát. A tengelyarányok csökkenésének oka a következő:

A program véletlenszerűen dönti el, hogy az adott kő hosszabbik vagy rövidebbik oldala törjön ketté. Amennyiben a hosszabbik oldal törik ketté, akkor a tengelyarány nő, hiszen

$$\frac{b}{a} < \frac{b}{\frac{a}{2}}$$

ha pedig a rövidebbik oldal törik ketté, akkor a tengelyarány csökken, mivel

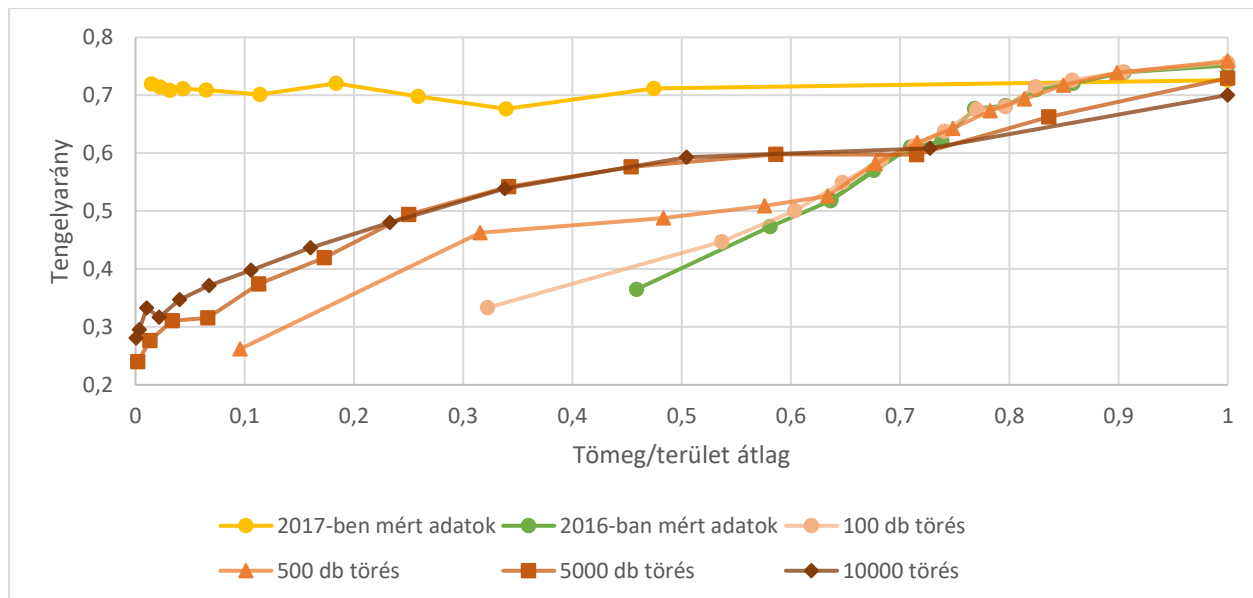
$$\frac{b}{a} > \frac{b}{\frac{a}{2}}$$

Tehát ha az összes tengelyarány átlaga csökken, akkor az azt jelenti, hogy nagyobb mértékben csökkennek a tengelyarányok a rövidebb oldal törése miatt, mint ahogyan nőnek a hosszabbik oldal törése miatt. Ebből az következik, hogy ahhoz, hogy A17 tengelyarányainak átlagához közelítsen M(A16) tengelyarányainak átlaga, más módszer alapján kell kiválasztani azt, hogy melyik oldal törjön ketté. Tehát a megfelelő algoritmus megtalálása az eltörendő oldal kiválasztására a törésszimuláció fejlesztésének lehetséges iránya.

A második programváltozat a kövek kiválasztásában nem módosult. Tehát a program szintén azzal kezd, hogy random választ egy követ. Ezután ismét random kiválasztja a kő egyik oldalát, de a törés maga itt más algoritmus alapján megy végbe.

A pontos félbetörés helyett a program ismét generál egy random számot, és az alapján dönti el, hogy a kiválasztott oldal mentén hol töri el az adott követ.

Az ezzel a módszerrel kapott eredményeket is ábrázoltuk (18. ábra).



18. ábra: 2016-ban mért adatok törésének szimulációja a kettes számú programmal

A kapott grafikon alapján megállapítottuk, hogy ez a módszer kevésbé jó eredményeket ad, mint az előző. Tehát a természetben végbemenő törések jobban közelíthetők azzal a módszerrel, ha minden követ pontosan félbetörünk, mint azzal, ha véletlenszerűen döntjük el, hogy hol törjön el.

IV.2 Minden kő vizsgálata egyesével

A harmadik programváltozat alapjaiban tér el az előzőektől. Ebben az esetben úgy vizsgáljuk a kövek törését, hogy minden egyes kő esetében külön eldöntjük, hogy az a kő eltörik-e vagy sem. Ezzel a módszerrel végigmegyünk mind a 3619 db mintán, majd a következő körben ismét végigmegyünk a már eltört köveken is.

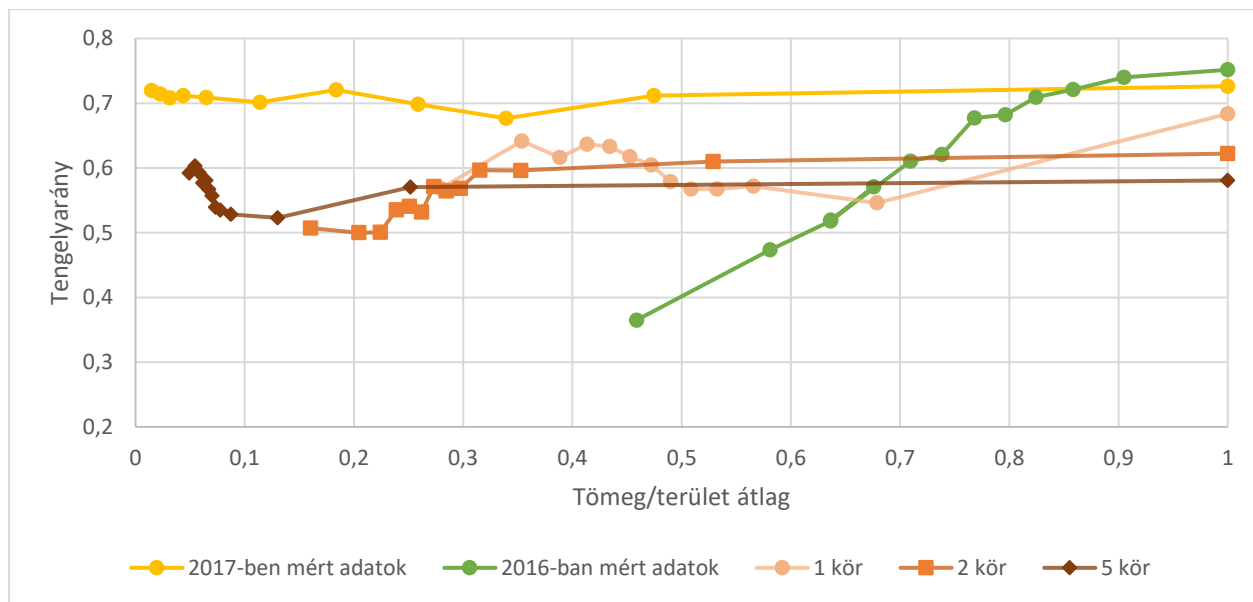
Amennyiben egy kő az első körben nem törik el, akkor kikerül az alaphalmazból olyan módon, hogy többet egyik körben se törhet el, de a legvégén a törések lefolyása után a grafikon felrajzolásakor figyelembe vesszük. A további körökben is minden olyan kő, ami nem törik el, kikerül az alaphalmazból. Így az n -edik kör végén az alaphalmaz $(2p)^n \cdot N_0$ követ tartalmaz.

Amennyiben egy kő eltörik, akkor véletlenszerűen valamelyik oldala mentén pontosan kettétörik. Ezután a két egyforma darab visszakerül az alaphalmazba, és a következő körben már ezekről dönti majd el a program, hogy törjenek-e vagy sem.

A kövek törésének gyakoriságát azzal befolyásoltuk, hogy mekkora a valószínűsége (p) annak, hogy egy kő eltörik.

Az első esetben $p = 0,8$ -at vettünk fel.

A kapott eredményeket grafikonon ábrázoltuk (19. ábra).



19. ábra: 2016-ban mért adatok törésének szimulációja a hármas számú programmal

A program működésének ellenőrzésére azt a módszert alkalmaztuk, hogy kiszámoltuk „ n ” darab lefutás esetén a kövek várható darabszámát, és ezt összevetettük a program tényleges lefutása utáni darabszámmal. A várható darabszámokra a következő általános képletet írtuk fel:

$$N_n = \left(1 + \sum_{i=1}^n 2^{i-1} \cdot p^i \right) \cdot N_0$$

Ahol: N_n : a program n -edik lefutása után a kövek darabszáma;

N_0 : a kiindulási adatsorban szereplő kövek száma (jelen esetben 3619);

p : annak a valószínűsége, hogy az adott kő eltörik.

Bizonyítás:

A bizonyítást a teljes indukció módszerével fogjuk elvégezni.

Ehhez első lépésben bebizonyítjuk, hogy $n=1$ és $n=2$ esetben igaz a képlet.

Először írjuk fel, mi történik, ha a program egyszer lefut, ha eredetileg N_0 db kő van. $N_0 \cdot p$ db kő eltörik, ezért ebből $2 \cdot N_0 \cdot p$ db kő lesz. $N_0 \cdot (1 - p)$ db kő pedig nem törik el. Ebből adódik, hogy

$N_1 = 2 \cdot N_0 \cdot p + N_0 \cdot (1 - p) = (2p + 1 - p) \cdot N_0 = (1 + p)N_0$ általános képletbe behelyettesítve:

$$N_1 = (1 + 2^0 \cdot p^1) \cdot N_0 = (1 + 1p)N_0 = (1 + p)N_0$$

Tovább gondolva N_2 esetben, ahol az előző körben eltörött kövek p -szerese törik el (lesz kétszer annyi belőlük) és $(1-p)$ -szerese nem, ezeken kívül pedig hozzá kell még az előző körben nem eltörött köveket, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} N_2 &= 2 \cdot p \cdot (2 \cdot p) \cdot N_0 + (1 - p) \cdot N_0 + (1 - p) \cdot 2 \cdot p \cdot N_0 = (4p^2 + 1 - p + 2p - 2p^2) \cdot N_0 \\ &= (1 + p + 2p^2)N_0 \end{aligned}$$

Az általános képletbe behelyettesítve:

$$N_2 = (1 + 2^0 \cdot p^1 + 2^1 \cdot p^2) \cdot N_0 = (1 + 1p + 2p^2)N_0 = (1 + p + 2p^2)N_0$$

Ezután bebizonyítjuk, hogy amennyiben a képlet igaz $n=k$ -ra, akkor $n=k+1$ -re is.

$$N_k = \left(1 + \sum_{i=1}^k 2^{i-1} \cdot p^i \right) \cdot N_0$$

A $k+1$ -edik körben $N_k + p \cdot (2p)^k \cdot N_0$ db kő lesz, mivel $(2p)^k \cdot N_0$ db követ p valószínűséggel törünk el.

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= \left(1 + \sum_{i=1}^k 2^{i-1} \cdot p^i \right) \cdot N_0 + p \cdot (2p)^k \cdot N_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^k 2^{i-1} \cdot p^i + 2^k \cdot p^{k+1} \right) \cdot N_0 \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} \cdot p^i \right) \cdot N_0 \end{aligned}$$

A teljes indukció módszerével bebizonyítottuk, hogy a képlet bármely n esetén igaz.

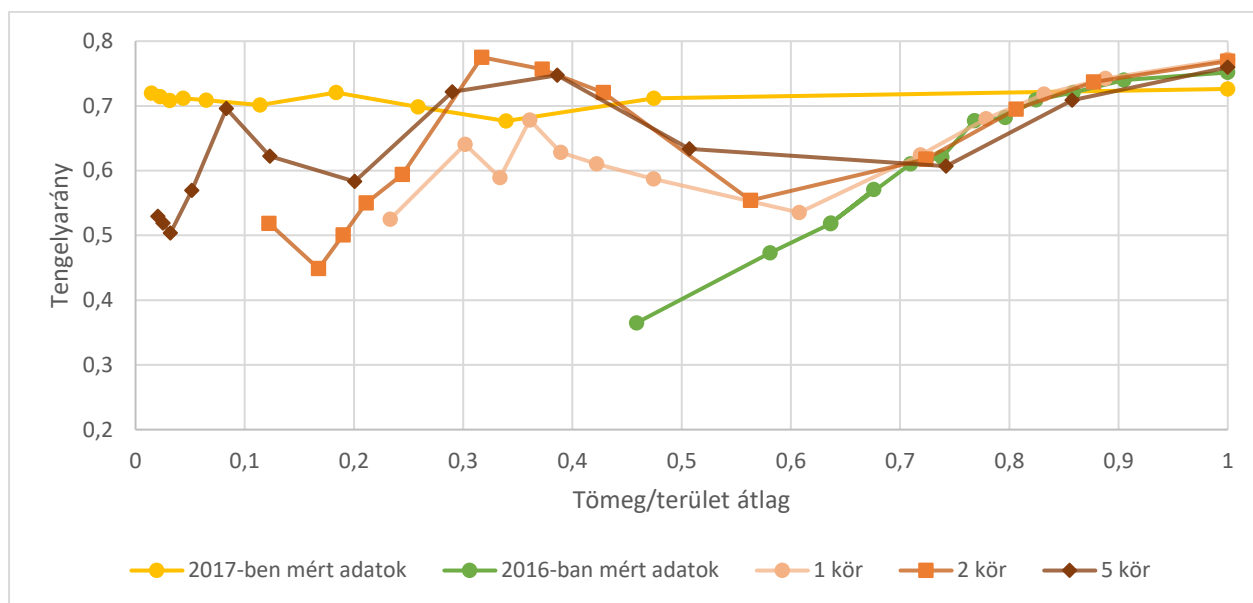
Az eredmények a következők lettek:

	a kövek várható darabszáma	a program lefutása utáni darabszám	%-os eltérés
N_0	3619	3619	0,000%
N_1	6514,2	6502	0,187%
N_2	11146,52	11102	0,399%
N_5	49390,95392	49002	0,788%

Az eltérések elhanyagolhatóan kicsik, ezért a programot a darabszámok alakulásának szempontjából jónak ítéljük.

A második esetben $p = 1 - \frac{b}{a}$ -t vettünk. Ebben az esetben tehát minden egyes kő eltörése függ az adott kő tengelyarányától. Minél elnyúltabb egy kő, annál nagyobb az esélye rá, hogy eltörik.

A kapott eredményeket grafikonon ábrázoltuk (20. ábra).



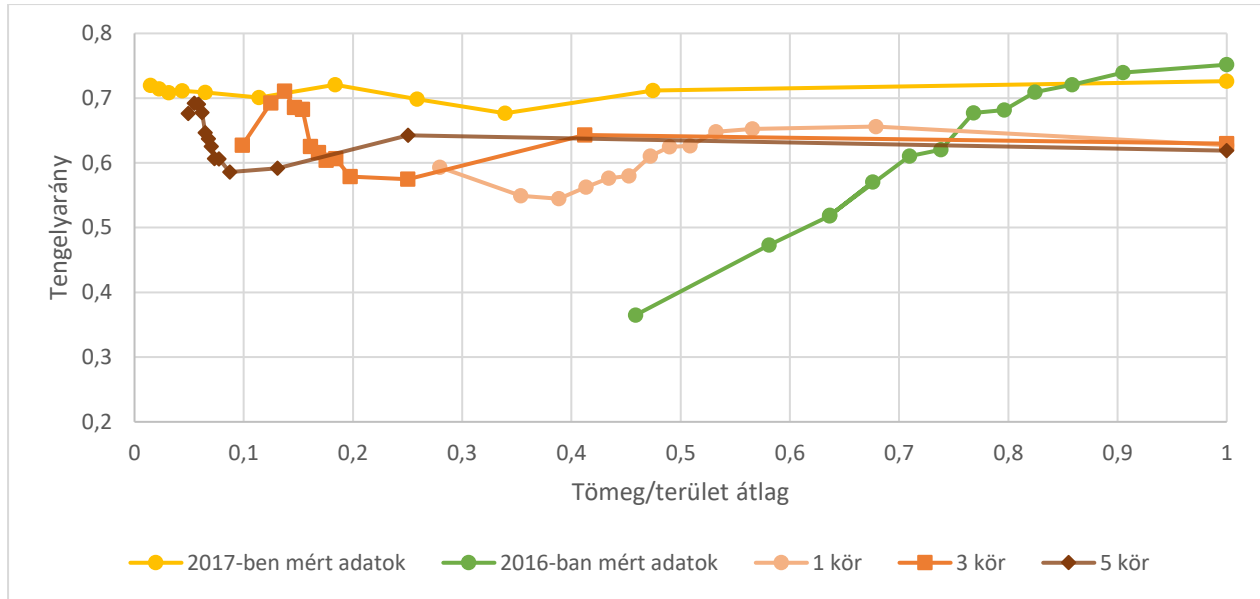
20. ábra: 2016-ban mért adatok törésének szimulációja a négyes számú programmal

IV.3 Hatványra emelés bevezetése

Arra a problémára, hogy A16 törése esetén a tengelyarányok átlaga csökken, és nem közelíti meg A17 tengelyarányainak átlagát, azt a lehetséges megoldást találtuk, hogy amikor a program eldönti, melyik oldal törjön el, akkor nem az oldalhosszak aránya alapján választ, hanem az oldalhosszak hatványával arányosan. Így nagyobb eséllyel választja a hosszabbik oldalt a töréshez, mint a korábbi esetben.

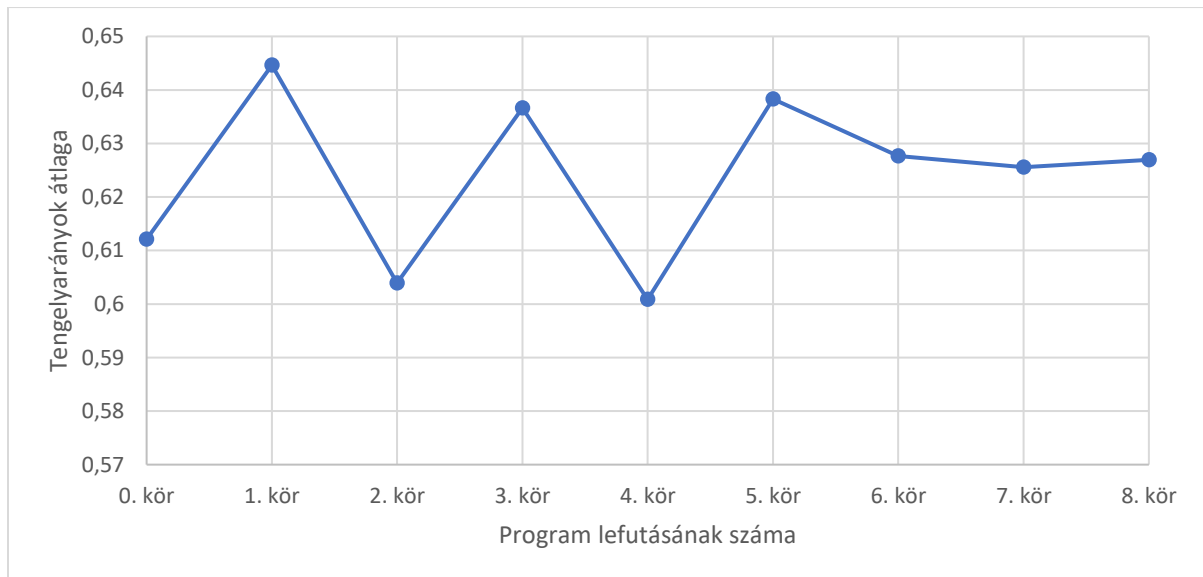
A törés oka a természetben lehet a kőben kialakuló nyomaték. A nyomatéki ábrának kéttámaszú tartó és megoszló erő esetén másodfokú görbéje van. Ezért az első körben az oldalhosszakokat négyzetre emeltük.

A tengelyarány-tömeg grafikon a 21. ábrán látható.



21. ábra Törésszimuláció az oldalhosszak négyzetre emelésével

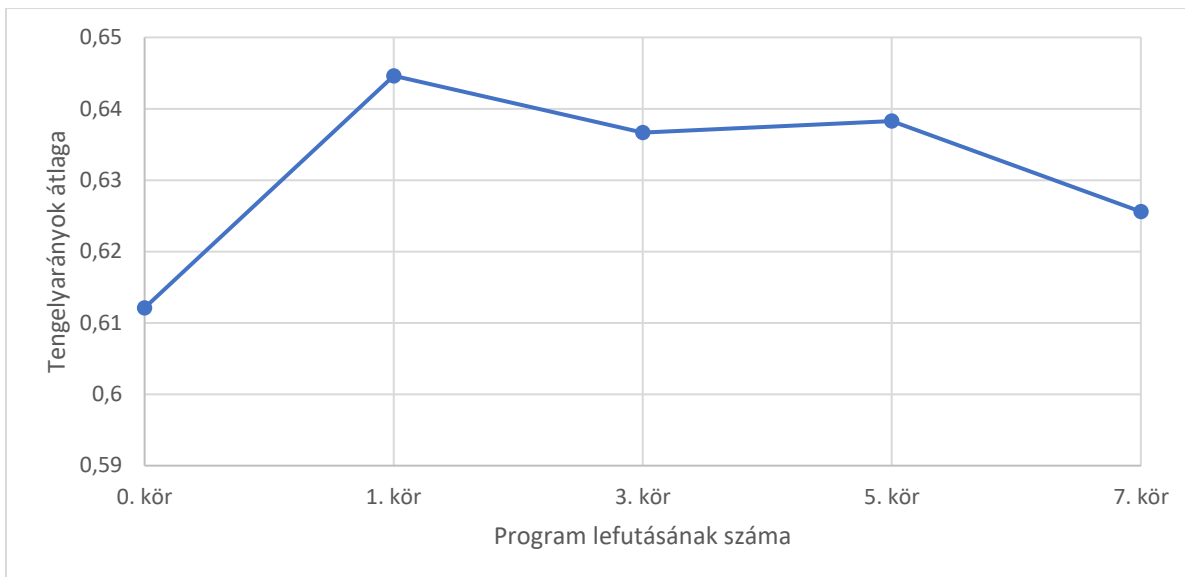
A tengelyarányok átlagának alakulása az egyes törések után a 22. ábrán látható.



222. ábra: Tengelyarányok átlagának alakulása második hatványra emelés esetén

A tengelyarányok átlaga tehát a grafikon alapján oszcilláló viselkedést mutat.

Amennyiben csak a páratlan körök lefutása utáni eredményeket vizsgáljuk, akkor a 23. ábrán látható görbét kapjuk.

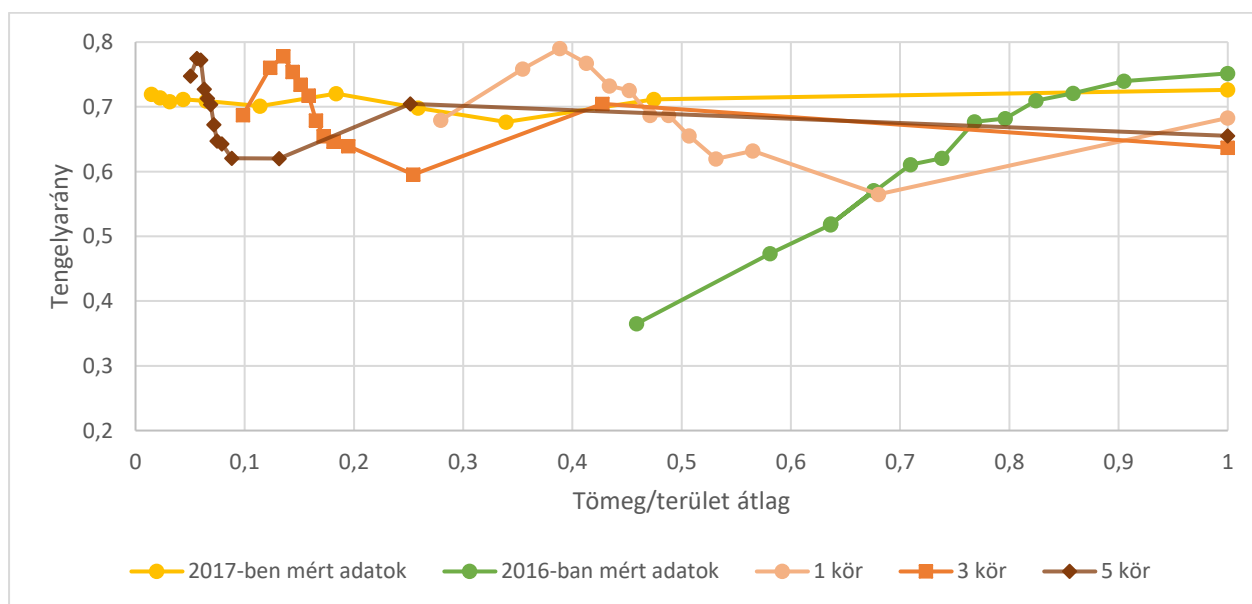


23. ábra: Tengelyarányok átlagának alakulása negyedik hatványra emelés esetén a páratlan körök lefutását nézve

Ez alapján azt állapítottuk meg, hogy a tengelyarányok elkezdtek nőni, de nem monoton módon. Tehát feltehetően valóban többször törik a hosszabbik oldal, de a modell még nem képezi le hibátlanul a természetben végbemenő törési folyamatot.

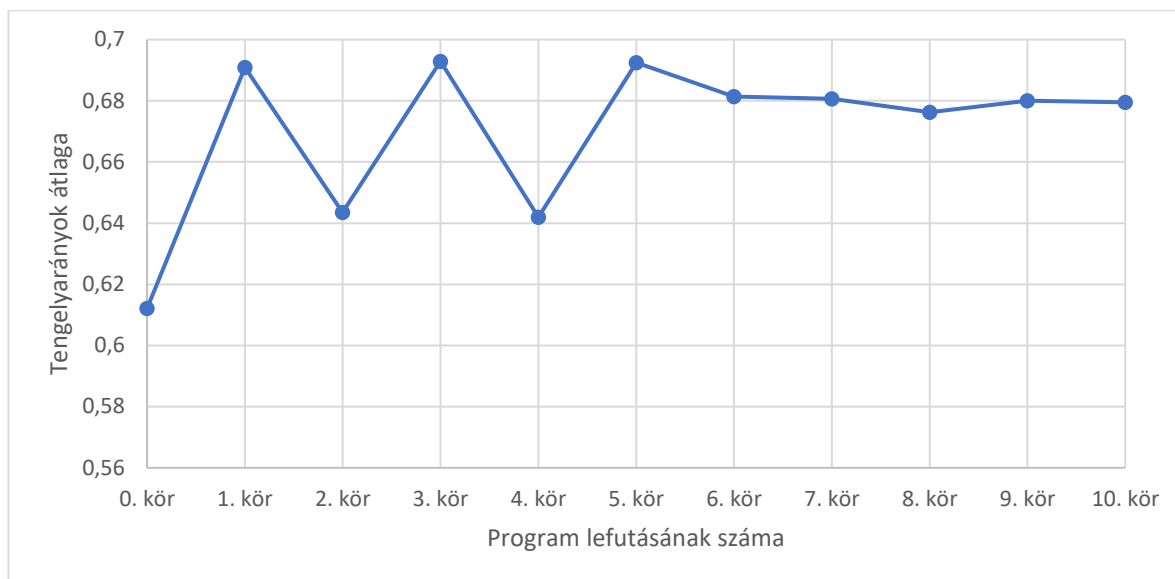
A kövek eltörését okozhatja a deformációjuk is. Mivel kéttámaszú tartó esetén a lehajlásgörbe negyedfokú, így az oldalhosszak negyedik hatványra emelését is leteszteltük.

A tengelyarány-tömeg grafikon a 24. ábrán látható.



24. ábra: Törésszimuláció az oldalhosszak negyedik hatványra való emelésével

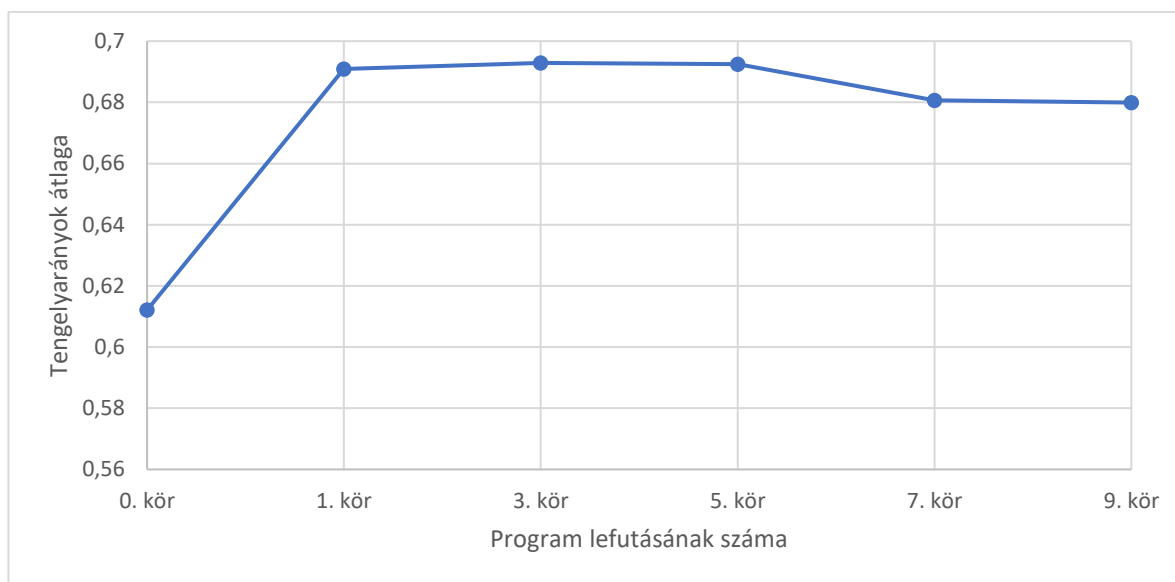
A tengelyarányok átlagának alakulása az egyes törések után a 25. ábrán látható.



25. ábra: Tengelyarányok átlagának alakulása negyedik hatványra emelés esetén

A tengelyarányok átlaga tehát a grafikon alapján ismét oszcilláló viselkedést mutat. Ezt a jelenséget a továbbiakban még vizsgálni szeretnénk.

Amennyiben csak a páratlan körök lefutása utáni eredményeket vizsgáljuk, akkor a 27. ábrán látható görbét kapjuk.



26. ábra: Tengelyarányok átlagának alakulása negyedik hatványra emelés esetén a páratlan körök lefutását nézve

Az eredmények alapján azt állapítottuk meg, hogy az oldalhosszak negyedik hatványra emelése esetén a tengelyarányok átlaga 0,68-hoz közelít.

V. Összefoglalás

Mérési adatainkat két szempont alapján vizsgáltuk. Egyrészt összehasonlítottuk az idén általunk, illetve a tanszék által tőlünk függetlenül kapott mérési adatokat, így vizsgálhattuk a mérések pontosságát, valamint a mért adatok átlagait, eloszlásait. Ezek mellett igyekeztünk vizsgálni a mérés során előforduló esetleges mérési hibákat, pontatlanságokat is.

Másrészt az idén mért adatokat összehasonlítottuk a tavaly mért adatokkal. A két adatsor összefüggését igyekeztünk megtalálni olyan módon, hogy szimuláltuk a törés folyamatát. A kapott eredmények alapján (24. ábra) azt feltételezzük, hogy sikeresen megtaláltuk az alapjait egy olyan programnak, ami tudja szimulálni a kavicsok természetben végbemenő törési folyamatát.

Köszönetnyilvánítás

A munkánk során nyújtott segítségért köszönetünket fejezzük ki konzulensünknek, dr. Domokos Gábornak.

Irodalomjegyzék

[1] G. Domokos, F. Kun, A. Á. Sipos és T. Szabó Universality of fragment shapes Nature, Scientific Reports 5, Article number: 9147, doi:10.1038/srep09147, 2015

[2] H. A. Carmona, F. K. Wittel, F. Kun, és H. J. Herrmann, Fragmentation processes in impact of spheres PHYSICAL REVIEW E 77, 051302, 2008

[3] Liou, J. C. & Johnson, N. L. Risks in Space from Orbiting Debris Science 311, 340–341, 2006

[4] Johnson, N. L., Krisko, P. H., Liou, J. C. & Anz-Meador, P. D. NASA's new breakup model of evolve 4.0. Adv. Space Res. 28, 1377–1384, 2001

[5] Turcotte, D. L. Fractals and Chaos in Geology and Geophysics Cambridge University Press, Cambridge, 1997

[6] A. F. Kerekes és P. Peitl Repedezett sziklafelszín morfológiai elemzése, Tudományos Diákköri Konferencia, 2016

[7] Google Earth