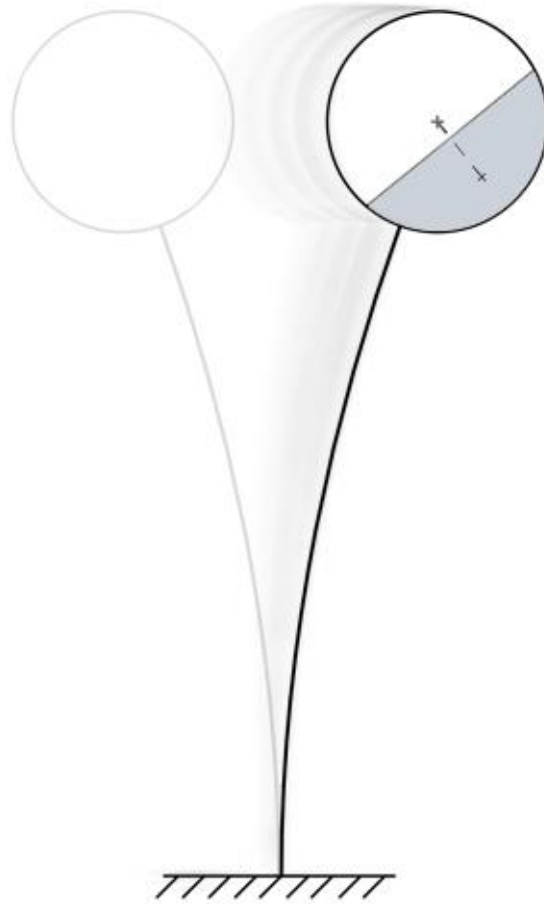


Víztornyok lengésének egyszerűsített vizsgálata a víztömeg lengésének figyelembevételével



Szerző:

Bárkányi Gellért

Konzulens:

Dr. Vető Dániel

Tanszék:

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

2018.10.26.

Tartalomjegyzék

1. Jelölések	3
2. Absztrakt	5
3. A dolgozat tárgya – kérdésfeltevések	6
4. Kitekintések – hasonló jelenségek	7
4.1 Hajók és más járművek tartályaiban szállított folyadék lengése	7
4.2 Slosh dynamics	7
4.3 Tólagások	9
4.4 Metacentrum – úszó testek egyensúlyi állapota	10
5. Vizsgálatok célja	12
6. Víztoronyok fajtái, statikai működésük	13
6.1 Víztoronyokról általában	13
6.2 Típusok	13
a) Vasbeton víztoronyok	13
b) Acél víztoronyok	14
6.3 Statikai működés	15
7. Lengésidő meghatározása	16
7.1 Mechanikai modell	16
7.2 Saját periódusidő számításának módszere	17
1. Üres víztorony periódusidejének meghatározása	18
2. Vízrel részben töltött súlytalan víztorony periódus idejének meghatározása	18
3. 1. és 2. lépésben kiszámolt periódusidők összegzése Dunkerley tétellel	19
7.3 Számítások	20
8. Eredmények	26
8.1 Víztorony paraméterei, vizsgálat módszere	26
8.2 Egy adott víztorony lengésidejének elemzése	27
a) Egy víztorony összegzési tételekkel számolt periódusidő-telítettség diagramja	27
b) Összehasonlítás pontos értékekkel	30
c) Ha a víz lengését nem vesszük figyelembe...	31
8.3 A periódusidő víztorony magasságától való függésének elemzése	34
8.4 Saját rezgésalakok	34

8.5 A földrengési hatásokról	36
8.6 Összefoglalás	37
9. Alkalmazási lehetőségek	38
10. További kutatási lehetőségek	38
11. Köszönetnyilvánítás	39
12. Hivatkozások, felhasznált irodalom	40
12.1 Felhasznált irodalom	40
12.2 Ábrák forrásai	41
13. Mellékletek	42
13.1 Összegzési tételek	42
a) Dunkerley összegzés	42
b) Föppl-Papkovics összegzés	43
c) Southwell összegzés	43
13.2 Gömbsüveg térfogata	44
13.3 Gömbsüveg tömegközéppontjának távolsága a gömbi középponttól	44
13.4 Gömbsüveg tehetetlenségi nyomatéka	45

1. Jelölések

Latin betűk

A – amplitúdó [m]

d – gömbsüvegre illesztett 'O' csúcspontú kúp alapjának sugara [m] (13.4.3 ábra)

E – acél rugalmassági modulusa [N/mm²]

g – nehézségi gyorsulás, értéke 9,81 m/s²

h – tartályban lévő víz szintjének magassága a tartály alsó pontjához képest [m] (7.3.7 ábra)

h_{M0} – metacentrum magassága, vagyis a metacentrikus sugár [m]

H – tartály középpontjának (vagyis súlypontjának) magassága [m] (7.3.7 ábra)

I – törzs keresztmetszetének átlagos inerciája [mm⁴]

I_{M0} – egyensúlyban lévő úszó test esetén az úszófelület másodrendű nyomatéka az elfordulás tengelyére [mm⁴]

I_M – az úszófelület másodrendű nyomatéka kitérített úszó test esetén [mm⁴]

m – tartályban lévő víz tömege [kg]

m_{kúp} – gömbsüvegre illesztett 'O' csúcspontú kúp tömege [kg]

m_{gömb} – tele töltött tartályban lévő víz tömege [kg]

M – az egész toronyszerkezet tömege [kg]

M_{tartály} – a tartály szerkezetének tömege [kg]

M_{törzs} – a törzs szerkezetének tömege [kg]

M_{yx} – forgástest (gömbsüveg) statikai nyomatéka az (y, x) síkra [m⁴]

O – gömb alakú tartály középpontja, vagyis súlypontja (7.3.7 ábra)

r – gömbi koordináta: pont távolsága 'O' ponttól [m]

R – gömb alakú tartály sugara [m] (7.3.7 ábra)

s_z – tartályban lévő víz súlypontjának és 'O' pontnak ('y' forgástengelynek) távolsága [m]

S_z – víz súlypontja (7.3.7 ábra)

T_{s,1} – víztorony alap saját periódusideje (víz lengését figyelembe vesszük) [s]

T_{s,1}^{*} – víztorony alap saját periódusideje (víz lengését nem vesszük figyelembe) [s]

T_{s,2} – víztorony második rezgéslekhöz tartozó lengésideje [s]

T_{1a}; T_{1b}; T_{2a}; T_{2b}; T₁; T₂ – összegzéseknél használt külön-külön felírt periódusidők [s]

V – úszó test által kiszorított folyadéktérfogat [m³]

V_{gömb} – gömb geometriájú tartály térfogata [m³]

V_{gömbsüveg} – víz (gömbsüveg test) térfogata [m³]

V_{kúp} – gömbsüvegre illesztett 'O' csúcspontú kúp térfogata [m³]

Görög betűk

α – kúp alkotójának 'z' tengellyel bezárt szöge [rad] (13.4.2 ábra)

μ – tartály telítettsége [%]

ρ – víz sűrűsége, értéke 1000 kg/m^3

φ – gömbi koordináta: 'z' tengellyel bezárt szög [rad] (13.4.2 ábra)

ω – gömbi koordináta: 'y' tengellyel bezárt szög [rad] (13.4.2 ábra)

Θ_y (süveg) – gömbsüveg 'y' tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka [kgm^2] (13.4.3 ábra)

Θ_y (kúp) – kúp 'y' tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka [kgm^2] (13.4.1 ábra)

Θ_y (süveg + kúp) – gömbsüveg és kúp által alkotott test 'y' tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka [kgm^2] (13.4.1 ábra)

Θ_y (gömb) – gömb 'y' tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka [kgm^2]

2. Absztrakt

A víztorony tulajdonképpen egy magasan elhelyezett víztartály, ebből adódóan a súlypontja viszonylag magasan van. Könnyen belátható, hogy ha a tartály valamilyen okból vízszintes irányban mozdul el (kileng), akkor a tárolt víz viselkedése eltér a szilárdan helyéhez kötött tömeg viselkedésétől, a torony és a víz összekapcsolt mozgást végez. Dolgozatom első sorban ezen rendszer rezgéstani modelljével, saját rezgésszámának meghatározásával foglalkozik. Hasonló jelenség a hajók, szárazföldi járművek tartályaiban szállított folyadék lengése, amely akár stabilitásvesztéshez is vezethet, de az úrhajók esetében is katasztrófa adódhat az üzemanyag periodikus mozgásából ('slosh dynamics'). Ezekon kívül pedig a vízben úszó hajótestek stabilitásának jellemzésére szolgáló metacentrum fogalma is a témához kapcsolódik – ebben az esetben a kiszorított víz súlypontja, tehát a felhajtóerő hatásvonala tud eltolódni.

Egy többszabadságfokú rendszer mozgásának vizsgálata, értelmezése számomra nagyon érdekes, azonban kissé megfoghatatlan feladat volt, de a dolgozat készítése közben megtapasztaltam, hogy jól feltett kérdésekkel, a valóságot közelítő, egyszerű modellekkel sokkal könnyebben közelíthető meg egy probléma.

Szerkezeti kialakítás szempontjából sokféle víztorony létezik, ezek közül a dolgozatban azokat vizsgáltam, amelyek befogott konzolként modellezhetők, a tartály pedig gömb alakú (hidroglóbusz). Első lépésként egy lengéstani modellt állítottam fel, és ez alapján az összetett rendszerek saját rezgésidejének meghatározására szolgáló összegzési tételket használva tudtam meghatározni a vízzel töltött víztorony lengési periódusidejét. A kapott lengésidőt a tartály-telítettség, mint paraméter függvényében ábrázoltam, és összevetettem az irodalomban található összefüggéssel. Elemeztem a többi paraméternek a lengésidőre gyakorolt hatását is. Az ilyen jellegű szerkezetek (rendszerek) részletes vizsgálata elengedhetetlen a földrengési hatás figyelembevételénél, ugyanakkor egyes esetekben pozitív hatásuk miatt is praktikus az ehhez kapcsolódó jelenségek ismerete: víztartályok alkalmazásával az épületek földrengés elleni védelmére is törekedhetünk.

3. A dolgozat tárgya – kérdésfelvetések

A víztorony többek között magas súlypontjának köszönhetően szél vagy földrengés hatására könnyen kilengéseket végezhet, mely mozgás az idő függvényében általában ismétlődő, a torony periodikus rezgőmozgást végez.

A dolgozat fő tárgya az aquaglóbusz víztoronyok (6.2 fejezet) sajátfrekvenciájának illetve sajátperiódus idejének meghatározása a víztöltöttség függvényében.

Elsőre ez egy rejtett problémának tűnhet, hiszen kívülről egy viszonylag egyszerű szerkezetet látunk, melynek lengését könnyen modellezhetjük. Azonban, ha jobban belegondolunk, ebben az esetben figyelmen kívül hagyjuk, hogy a toronyban víz van, és a torony vízszintes elmozdulásai esetén a víztömeg és súlypontja – kiterjedt testként kezelve – a toronytól 'függetlenül' el tud mozdulni. A későbbiekben láthatjuk, hogy ezzel viszonylag nagyot tévedhetünk: a víztorony kilengései közben a víz viselkedése fizikai ingaként modellezhető, a víz és a torony hatással vannak egymásra, összekapcsolt mozgást végeznek – innentől kezdve egy többszabadságfokú rendszer összekapcsolt rezgésének tekinthetjük a víztorony lengését. Hogyan modellezhetjük ezt az összetett mozgást? Milyen módszerekkel számolhatjuk ki egy többtömegű rezgőrendszer periódusidejét? A víz lengésének figyelembevétele hogyan befolyásolja a végeredményt? Többek között ezeken a fő kérdéseken, és megoldásukon haladunk végig.

4. Kitekintések – hasonló jelenségek

4.1 Hajók és más járművek tartályaiban szállított folyadékok lengése

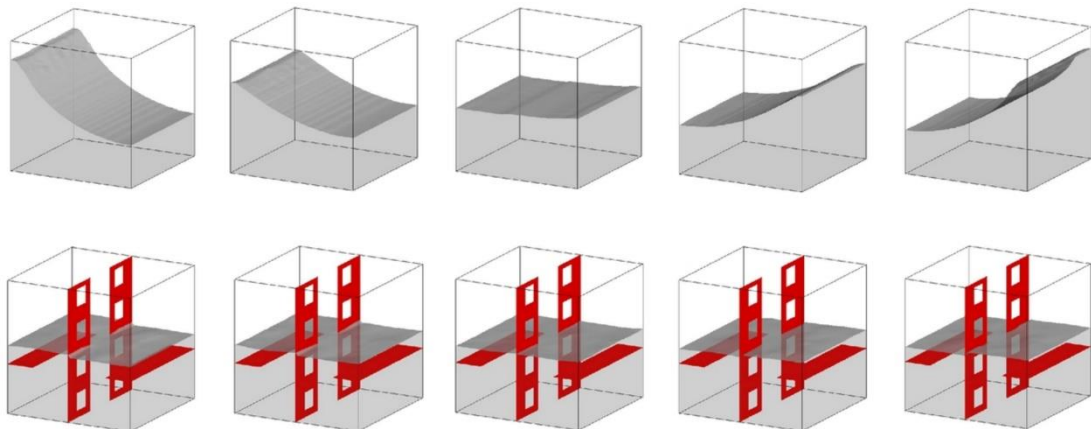
A hajók, tartálykocsik és egyéb járművek gyakran szoktak folyadékot (pl. cseppfolyós földgáz, stb.) szállítani.

Szárzsföldi járművek esetében főleg az oldalirányú gyorsulást okozó kanyarodó manőverek okozhatnak problémát – illetve a gyorsítás és lassítás is –, amikor a szabad felületű folyadék hirtelen elmozdul, erőt fejt ki a tartály oldalára, súlypontja eltolódik és megemelkedik – a jármű felborulhat ('free surface effect').^[1]

A hajók a tenger hullámainak köszönhetően folyamatosan elfordulhatnak tengelyeik körül, és részben töltött tartályaikban a folyadék erre szintén lengéssel fog reagálni. Itt is a súlypont eltolódása okozza a problémát: ha a hajó oldalra dől, akkor a folyadék ezt a mozgást követi, instabilabb állapotba helyezve a rendszert.^[1]

A jelenségre megoldást jelenthet az összefüggő víztömeg szakaszolása, kisebb egységekre bontása, az összefüggő szabad vízfelszín területének csökkentése. Ezt általában terelő-bordákkal érik el (4.1.1 ábra).^[2]

A szabad felületi hatással szorosan összefüggő jelenség a 'slosh dynamics', ez a következő pontban lesz tárgyalva.

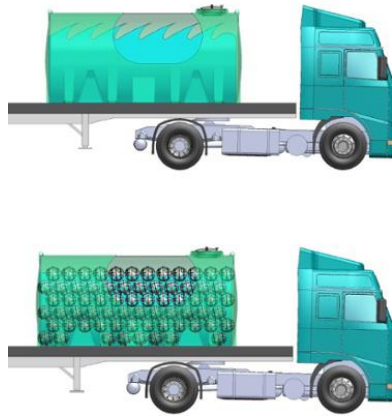


4.1.1 ábra Terelő-bordák jótékony hatása a folyadék lengésére

4.2 Slosh dynamics

A fent említett kifejezés a folyadékok dinamikájában egy mozgást végző objektumban lévő folyadék egyedi viselkedésére utal – a vízfelszín elkezd hullámozni, 'csapkodni'. Ehhez szükséges, hogy az objektum – esetünkben tartály – csak részben legyen töltött állapotban, tehát a szabad felületi hatás és a 'slosh' sokszor egyszerre jelennek meg.^[3]

Ugyanúgy érinthet minden járművet, mely egy tartályban folyadékot szállít: tankhajót, tűzoltó autót, repülőgépeket, stb. A tartályfalak szilárdsági vizsgálatánál is érdemes figyelembe venni, mint dinamikus hatást, de a szabad felületi hatással egymást erősítve járulhatnak hozzá az instabilitáshoz. Itt is megoldást jelenthetnek a tartályba szerelt terelő-bordák. [2]

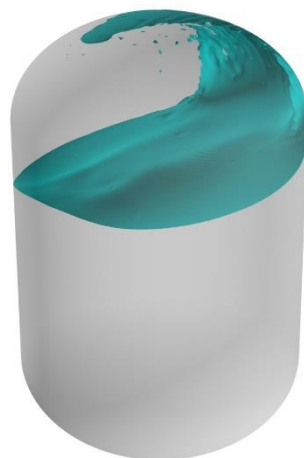


4.2.1 ábra 'Baffle Balls' – műanyag üreges labdákkal is csökkenthető a folyadékok 'slosh' jelensége

Érdekes azonban, hogy az űrhajók esetében is komoly gondokat tud okozni ez a hatás. Az űrrakéta üzemanyagcellái sokszor közel gömb alakúak, és természetesen részben töltöttek tekinthetők a kilövés után.

Az üzemanyagmozgás kölcsönhatásba léphet a vezérlő és érzékelő rendszerrel, ami nem várt manővereket eredményezhet (röppálya módosul); forgó mozgást végző űrhajó, műhold esetében pedig periodikus 'slosh' hatást kaphatunk, ami rezonancia veszéllyel fenyeget. A NASA több küldetése is az üzemanyag viselkedése miatt hiúsult meg. [4]

A folyadékok ilyen jellegű mozgása és hatása nehezen vizsgálható, szimulációs programokkal modellezhető.



4.2.2 ábra NASA által végzett CFD (computational fluid dynamics) szimuláció

4.3 Tólengések

A tólengés első megközelítésben az állóvizek nagyobb mértékű kibillenése, amelyet a hidrológia tudománya vizsgál.

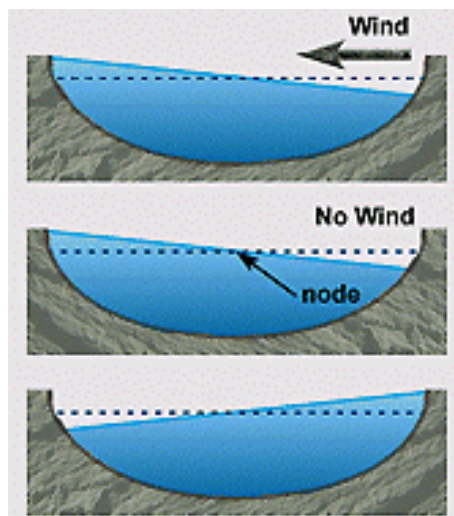
A légkörben zajló áramlási viszonyok nem kiegyensúlyozott jellege miatt a nagyobb állóvizek (pl. tavak, tengerek) egy bizonyos részeit alacsonyabb légnyomás éri, mint másikat.

Ezen természeti jelenség minden állóvízen létezik viszont csak a nagy kiterjedésű tavakon lehet számszerű paraméterekkel mérni és következményeit egyértelműen beazonosítani.

A jelenségnél a magasabb légnyomású részről víz áramlás indul meg az alacsonyabb felé.

Amikor a légköri viszonyok egyensúlyba kerülnek, valamint a Földön fellépő gravitációs hatás miatt a feltorlódott víztömeg visszaáramlása megtörténik, akkor egy periodikus fizikai inga -szerű mozgás következik be, melyet tólengésnek nevezünk. E fajta vízmozgást tehát periodicitás jellemez. A tólengés periodicitását és lengésidejét a meder méretei, valamint a légköri viszonyok határozzák meg. [5]

A lengésidő egyenesen arányos a tómeder hosszával, és fordítottan arányos a vízmélység gyökével. A Balaton esetében például körülbelül 10-12 óra [5] a periódusidő.



4.3.1 ábra Egyszerű példa a tólengésre

4.4 Metacentrum – úszó testek egyensúlyi állapota

Egy úszó test lengése és egy testben lévő folyadék lengése (pl. víztorony esete) nagyon hasonló jelenség, ezért is fontos a metacentrum fogalmának megismerése.

A metacentrum, és a metacentrikus magasság fogalmakat általában hajótestek stabilitásának jellemzésére használjuk. Minél nagyobb a metacentrikus magasság (a metacentrum és a hajótest tömegközéppontjának távolsága), annál stabilabbnak tekinthető az úszó test.

A kezdeti metacentrikus magasságot képlettel számolhatjuk: $h_{M_0} = \frac{I_{M_0}}{V}$ [6]

I_{M_0} - az úszófelület másodrendű nyomatéka az elfordulás tengelyére (úszó test és a folyadékfelszín metszéséből származó síkidom inerciája)

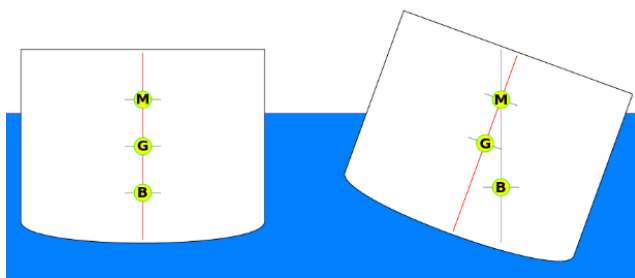
V - a kiszorított folyadéktérfogat

Ha az úszótestet valamilyen hatás kitéríti, akkor az új helyzetbe került testre ható felhajtóerő és súlyerő hatásvonala nem esik egy egyenesbe. Egyes esetben az ebből származó nyomaték következtében a hajótest az eredeti állapota felé mozdul (stabil), máskor pedig még jobban távolodik attól (instabil).

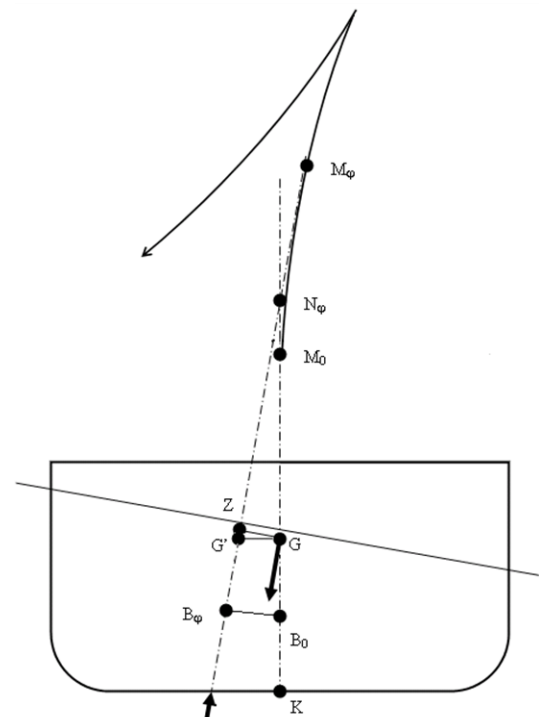
Kitérített helyzetben a metacentrum helyzete is változik, hiszen ' I_M ' értéke módosul.

A metacentrum helyét (M pont) ilyenkor legegyszerűbben grafikusán határozhatjuk meg: az úszási tengely és a felhajtóerő eltolódó hatásvonalának metszeteként kaphatjuk meg. [6]

(4.4.1 ábra)

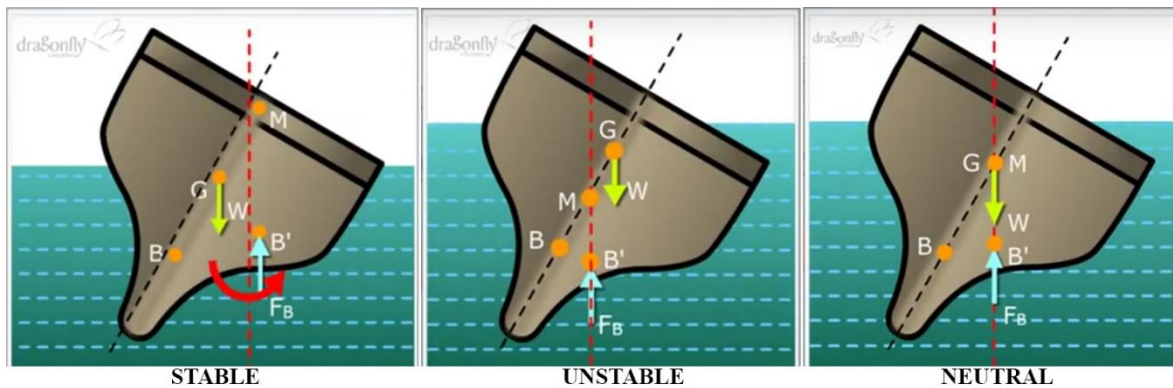


4.4.1 ábra Metacentrum helyének meghatározása



4.4.2 ábra A metacentrum 'vándorlása'.
A törésponton árasztódik el a fedélzet, a stabilitás hirtelen csökken

Jól látható, hogy M pont helye az úszó test egyensúlyi állapotát is meghatározza. A test egyensúlyi állapota stabil, ha M a tömegközéppont fölött helyezkedik el, instabil, ha alatta, és közömbös az egyensúlyi állapot, ha M egybeesik a tömegközépponttal – pl. egy úszó gömb esete. (4.5.1 ábra)



4.5.1 ábra Hajótest egyensúlyi állapotainak összefüggése a metacentrummal

A stabil úszó testekhez is társíthatunk egyfajta saját lengési időt ('rolling period'), ami kifejezi, hogy a kitérített úszó test mennyi idő alatt tér vissza álló helyzetbe.

Érdekességképpen megjegyzendő, hogy a metacentrum közvetlen kapcsolatban áll ezzel a periódusidővel. Kis metacentrikus magasság esetén a hajó 'lágý' lesz, nagyobb lesz a periódusideje, és kisebb az amplitúdója. Nagy magasság esetén pedig a hajó 'mrev' lesz, kis periódusidejű, nagy amplitúdójú mozgással reagál a kilengésekre. A 'lágý' hajó kényelmesebb utazást biztosít, de fennáll a felborulás veszélye a kis metacentrikus magasság miatt, a 'mrev' hajó pedig növeli a test és a rakomány sérülésének kockázatát, tehát a metacentrum helyének precíz meghatározása fontos feladat ebből a szempontból is. ^[6]

Egyes irodalom ^[7] a víztoronyokra is definiálja a metacentrumot, és a metacentrikus sugarat (magasságot) - melyeket az úszó testek analógiájára határozunk meg-, és leírja, hogy a stabilitás ellenőrzésénél a metacentrikus sugárral megnövelt magasságban kell feltételezni a víztömeget, így figyelembe véve a víztükör elfordulását. Ezzel egy karcsúbb szerkezetet kapunk, a metacentrikus sugár jelentősen megnövelheti a víztorony virtuális magasságát.

5. Vizsgálatok célja

A dolgozat fő célja az aquaglóbusz víztorony sajátperiódus idejének illetve sajátfrekvenciájának meghatározása a tartályában lévő víz lengésének figyelembevételével. Ahogy korábban is elhangzott, ez elsőre rejtett problémának tűnhet, ezért is fontos a kifejtése. Kétszabadságfokú rendszerrel, víztorony lengésével foglalkozó irodalmak általában csak a megoldást közlik egy bikvadratikus egyenlet formájában, amelynek két megoldása adja az első és második rezgésalakhoz tartozó sajátfrekvenciát (két szabadságfok esetén két sajátfrekvencia van); illetve utalnak rá, hogy a probléma differenciálegyenlet rendszerét megoldva kaphatjuk a képletet.

A pontos eredmény meghatározásához valóban elengedhetetlen, hogy differenciál egyenletet használjunk, de még ha mi magunk is írjuk fel az egyenleteket, vezetjük le pontról pontra a megoldást, nem biztos, hogy sokkal közelebb kerülünk a jelenség megértéséhez, főleg ha egy laikus szemlélőre gondolunk.

Így először érdemes egyszerűbb, közelítő módszereket használni, hogy eljussunk a megoldáshoz. Az egyes lépések fizikai hátterét értelmezve pedig a jelenséget is jobban megérthetjük.

Esetünkben az egyszerűbb megközelítést a rendszerek saját rezgésidejének meghatározására szolgáló összegzési tételek használata jelenti. Ezeknek a tételeknek az alapja a rendszer elemeire bontása (egy elem lehet tömeg vagy merevség), majd az ezekből alkotott egyes részesetek periódusidejének bizonyos összegzése (*13.1 fejezet*).

Tehát a rendszer egyes részeinek viselkedését is jobban megérthetjük, a különböző összegzésekkel pedig külön részeseteket állíthatunk elő – pl. figyelembe vesszük, hogy a víztömeg mozog, vagy nem vesszük figyelembe.

A tételekkel és konkrét használatukkal későbbi fejezet foglalkozik.

6. Víztoronyok fajtái, statikai működésük

6.1 Víztoronyokról általában

A víztoronyok tulajdonképpen a fogyasztás földrajzi szintjénél magasabb szinten elhelyezett víztároló medencék, amelyek tárolt vize a fogyasztói igényeknek megfelelő ütemezés szerint, gravitációs úton juthat el a felhasználóhoz. A víztorony két egymást kiegészítő funkciója a vízszállításához elegendő nyomás fenntartása és a tárolás. A vízszállítás helyétől a víztoronyig, ill. a víztoronytól a felhasználóig futó vezetékek és maga a víztorony folyamatos felügyeletet és szabályzást igénylő hidraulikus rendszer. [7]

6.2 Típusok

Anyaghasználat szempontjából a tornyokat két nagy csoportra oszthatjuk: a vasbeton és az acél szerkezetű víztoronyokra.

A dolgozat első sorban az aquaglóbusz acél szerkezetű víztoronnyal fog foglalkozni.

Ez azért is fontos, mert a víz tömegének és a torony tömegének aránya számunkra az acél szerkezet esetében előnyösebb, mivel ebben az esetben a tartályban lévő víz jobban befolyásolja a rendszer mozgását.

Ettől függetlenül érdemes néhány szóban a vasbeton víztoronyokat is áttekinteni.

a) Vasbeton víztoronyok

A 19-20. század fordulójától kezdve építettek minden szerkezeti elemükben vasbeton víztoronyokat. Kezdetben ezeket is a kor ízlésének megfelelő ornamentikus elemekkel látták el.



6.2.1 ábra A szegedi "Öreg Hölgy" Zielinski Szilárd tervei alapján épült

Később egyre inkább elhagyták ezeket a műszaki funkció nélküli díszeket, így a megjelenésben a víztornyok funkcióját hangsúlyozó, letisztult formák váltak jellemzővé. A vasbeton víztornyok alkalmazásában Magyarország az élen járt: Zielinski Szilárd műegyetemi professzornak a XX. század első két évtizedében épült víztornyai pl. a Margitszigeten, és a Svábhegyen nemzetközi mércével mérve is kiemelkedő alkotások. A torony alakjánál, szerkezeti kialakításánál figyelembe kell venni a torony erőjátékát, a kivitelezés nehézségeit, és ezzel együtt a költségeket is. ^[7]

b) Acél víztornyok

Minél nagyobb a tartály, annál kedvezőbb a vasbeton alkalmazása. ^[7]

Kicsiny tárolóterű, de magas víztornyok építése esetén pedig érdemes az acél szerkezeteket választani. ^[7]

A leginkább kézenfekvő tartályalak valamilyen forgásfelület. Ettől csak kivételes esetben térünk el (vasbeton víztornyok esetében is). Ha az optimális tartályalakot tisztán geometriai szempontból vizsgáljuk, és a maximális köbtartalom/felület arányt keressük, a tartály geometriailag optimális alakja a gömbalak. Vasbeton víztornyok esetében szerkezetileg és gazdaságilag optimális kialakítás során eltérő alakokat kapunk, de acélszerkezetet használva megvalósítható ez a forma, és így a leggyakrabban használt tartályalak is a gömbalak. ^[7]

A leggyakoribb acél víztornyok, néhány különleges típussal együtt: ^[8]

Klasszikus hidrolóbusz (Hg)

Főbb tulajdonságaik: gömbcsuklón álló csőoszlop, tetején a gömbformájú tartály. A víztorony 6 db sodronykötéllal van kikötve. (magyar szabadalom: Harsányi Szabolcs, 1956)

Hidrohenger (Hh)

Tulajdonságai hasonlítanak a Hg típusokhoz. Gömbcsuklón álló csőoszlop hengeres tartállyal, 6 db kötéllel. A 12.5, 25 és 30m³-es víztornyokba a csőoszlopra szerelt létrán lehet feljutni.

Az 50 m³-es toronyba a csőoszlopban lehet feljutni, mint a Hg típusokban.

Aquaglóbusz (Ak)

A Hg típusokat váltották le az Ak típusú víztornyokkal. Nagy előnyük, hogy kicsi a helyigényük, mert elmaradt a kikötés.

Agro (Ag)

Az Ag típusoknak fő tulajdonsága, hogy a csőoszlopban is víz van. Ez a mennyiség tűzoltóvízként funkcionál.

Szupersztát (Szs)

A kisebb típusok főleg a mezőgazdaságban voltak népszerűek. Nagy hátrányuk a magasságukból eredően az alacsony víznyomás.

Aqua – buzogány

Szs típusok átalakított változatai.

Aqua – tórusz

Kuriózumnak számító típus. A tartály, hengeres keresztmetszetű gyűrű. Csak pár darab található belőle.

Aqua – kehely

Acél csőoszlopon kehely formájú acél fej.

6.3 Statikai működés

Statika működés szempontjából két nagy csoportra oszthatjuk a víztornyokat: gömbcsuklón álló, kikötött víztornyokra és kikötés nélküli befogott törzsű tornyokra (6.3.1 ábra).

Ha a torony ki van kötve, akkor kis elmozdulások fordulhatnak elő, így nem keletkezhet számottevő nyomaték a törzsben, ezért célszerű alul csuklósként kialakítani a szerkezetet. Ha nincs kikötve, akkor csak a törzs tudja felvenni a vízszintes terheket, így befogott lesz, ami egy merev törzs - alaptest kapcsolatot követel.

A dolgozat a befogott konzolként modellezhető szerkezettel fog foglalkozni.



6.3.1 ábra Kikötött gömbcsuklós (Hg típusú) és befogott (Ak típusú) víztorony

7. Lengésidő meghatározása

7.1 Mechanikai modell

A befogott víztoronyokat vizsgáljuk, melyek alapozását és tartályát merevnek, míg a törzsét hajlékonynak tekinthetjük.

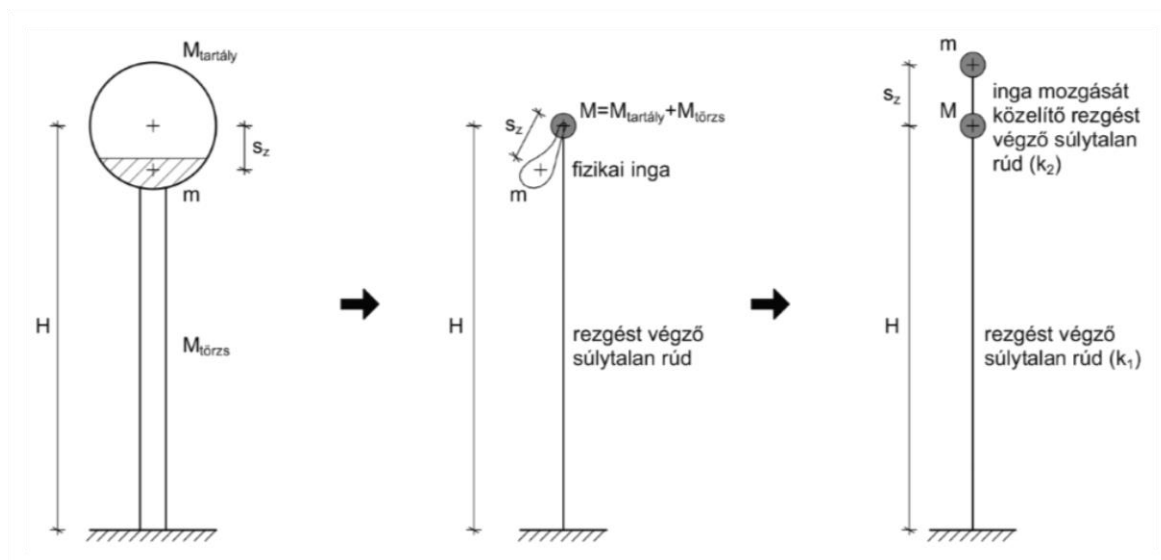
A törzs merevsége a valóságban felfelé haladva csökken, mivel egyre kisebb nyomatékot kell felvennie, ezt most egy végig azonos átlagos merevséggel (EI) közelítjük.

A rendszert két nagy részre bontjuk: a szerkezetre (törzs + tartály) és a benne lévő vízre.

A toronyszerkezet (tömege: M , adott torony esetén állandó) tulajdonképpen egy harmonikus rezgést végző konzolnak tekinthető, míg a víztömeg (tömege: m , mely a töltöttségtől függően változik) fizikai ingaként modellezhető – fontos, ha a tartályban lévő vizet matematikai ingaként kezeljük, akkor az nagy különbségeket eredményez a periódusidőkben, tehát az nem megfelelő modell.

A fizikai inga csak közelítés, mivel a víz nem mint egyetlen merev test mozog a tartályban, hanem deformálódik, hullámszik, örvénylik, stb. Tehát feltételezzük, hogy a vízfelszín sík marad, és a 4. fejezetben említett 'slosh' hatásoktól is eltekintünk – ez csak kis elmozdulások esetén teljesül.

A víztorony rezgéstani modellje ezek szerint az 7.1.1 ábrának felel meg: a víztorony szerkezetének tömege (M) egy súlytalan ' k_1 ' merevségű rezgést végző rúddal csatlakozik a talajhoz (harmonikus rezgés), a lengő víztömeg (m) pedig fizikai ingaként leng a tartályhoz képest. Kis kitérések esetén a fizikai inga mozgása is harmonikus rezgésnek tekinthető, így ezt a mozgást is modellezhetjük egy rezgést végző rúddal, melyhez az ingának egy fiktív ' k_2 '



7.1.1 ábra Lengéstani modell

merevségét társíthatjuk – ezen merevséggel rendelkező súlytalan konzolos rúd a végén 'm' tömeggel ugyanolyan saját periódusidővel rendelkezik, mint a harmonikus mozgást végző fizikai inga. Természetesen a víztömeg súlypontja nem lehet feljebb a tartály középpontjánál, az ábrásor utolsó ábrája az elemek egymásra épülésének, viszonyainak logikáját szeretné szemléltetni, nem pedig a valós fizikai helyzetüket.

Megjegyzendő, hogy ugyan kétszabadságfokúként modellezzük a rendszert, de valójában több szabadságfokú. A toronyszerkezet is két tömegré bontható: a törzs és a tartály tömegére. Azonban maga a törzs sem tekinthető egy tömegpontnak, végtelen tömegpont kapcsolata, és ezért rendelhetünk hozzá merevséget is. Egyes irodalom ^[9] a törzs úgynevezett redukált tömegével való számítást javasolják (ez kb. $0,25 M_{\text{törzs}}$), amelyet a súlytalannak tekintett konzol végére helyezve pontosan megkapjuk a folytonos tömegeloszlású konzol sajátrezgésszámát. A dolgozatban más eljárás lesz bemutatva ennek a ténynek a figyelembevételére.

7.2 Saját periódusidő számításának módszere

Összetett rendszerek saját periódusidejének meghatározása bonyolult feladat lehet, de ismerünk olyan közelítő módszereket, amelyek egyszerűsítik számításainkat.

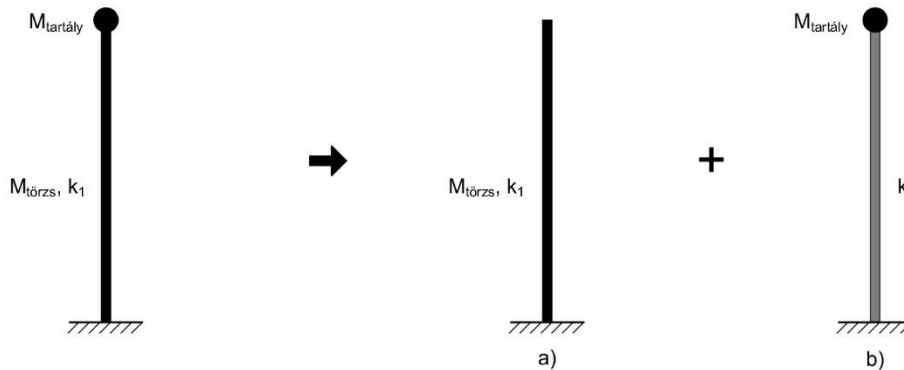
Ezekről általános leírás a mellékletek 13.1 fejezetében található.

Jelen esetben a felsoroltak közül a Dunkerley és a Föppl-Papkovics összegzések lesznek segítségünkre. ^[10] Ezeket a tételeket használva a pontos értékeknél nagyobb periódusidőt kapunk, tehát felülről közelítjük a pontos megoldást.

Látható, hogy a modellt tekintve egyik összegzés sem fog elsőre megoldáshoz vezetni, különböző lépések során juthatunk el a párhuzamosan kapcsolt különböző merevségekből és különböző tömegekből álló rendszer saját periódusidejéhez. Egy összegzéssel fogjuk megoldani az 'M' tömeg több tömegekből állóságának problémáját is (előző fejezet vége).

A lépések a következők:

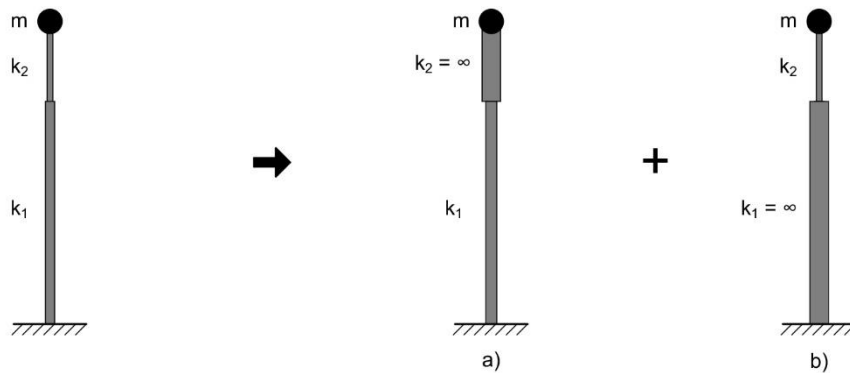
1. Üres víztorony periódusidejének meghatározása Dunkerley összegzéssel
2. Vízrel részben töltött súlytalan víztorony periódus idejének meghatározása Föppl-Papkovics összegzéssel
3. 1. és 2. lépésben kiszámolt periódusidők összegzése Dunkerley tétellel

1. Üres víztorony periódusidejének meghatározása (Dunkerley)a) törzs, mint tömeggel rendelkező konzol (T_{1a})b) tartály, mint tömegpont egy súlytalan rúd végén (T_{1b})

7.2.1 ábra Az összegzés ábrái

Dunkerley összegzés:
$$T_1 \approx \sqrt{T_{1a}^2 + T_{1b}^2} \quad [10]$$
2. Vízzel részben töltött súlytalan víztorony periódus idejének meghatározása

(Föppl-Papkovics)

a) törzs alakváltozik, víztömeg 'befagyasztva', nem mozog (T_{2a})b) törzs végtelen merev, víztömeg mozog (T_{2b})

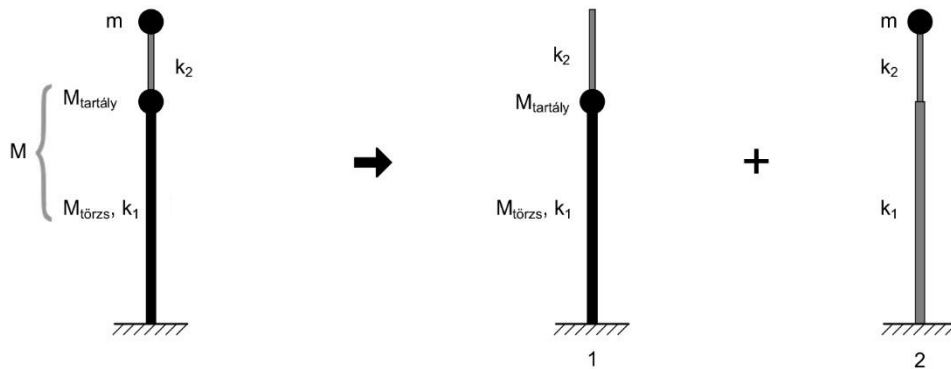
7.2.2 ábra Az összegzés ábrái

Föppl-Papkovics összegzés:
$$T_2 \approx \sqrt{T_{2a}^2 + T_{2b}^2} \quad [10]$$

3. 1. és 2. lépésben kiszámolt periódusidők összegzése (Dunkerley)

1) üres víztorony (M) – 1- es pontban meghatározott periódusidő (T_1)

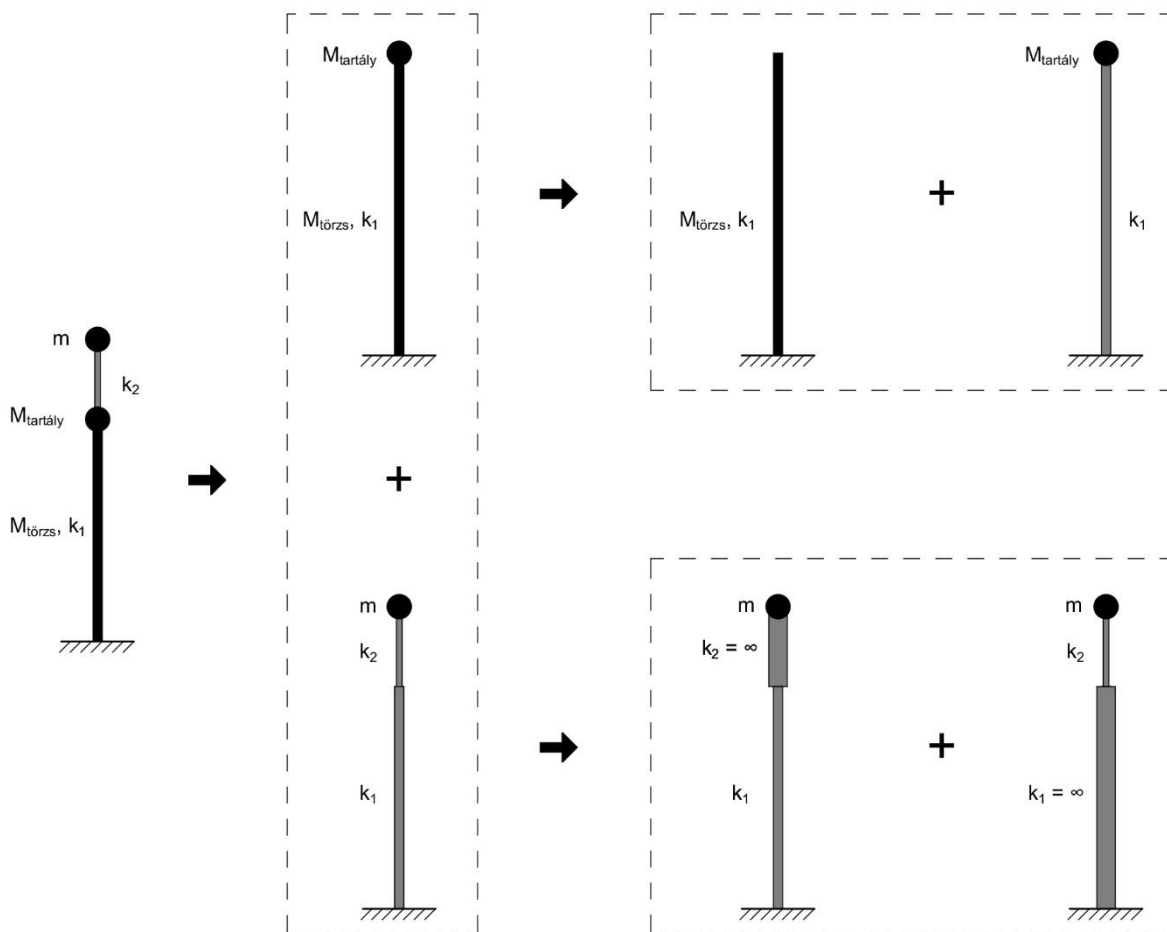
2) részben töltött súlytalan víztorony (m) – 2- es pontban meghatározott periódusidő (T_2)



7.2.3 ábra Az összegzés ábrái

Dunkerley összegzés:
$$T_{s,1} \approx \sqrt{T_1^2 + T_2^2} \quad [10]$$

Egy ábrában összefoglalva az összegzésekhez szükséges felbontásokat:



7.2.4 ábra Összefoglaló ábrásor az összegzés lépéseiről

7.3 Számítások

A legtöbb alapesetben az irodalom közöl összefüggéseket a saját periódusidő pontos számításához, de előfordulhat, hogy nekünk kell meghatározni a szükséges képleteket.

Harmonikus rezgőmozgás periódusidejét általános esetben a

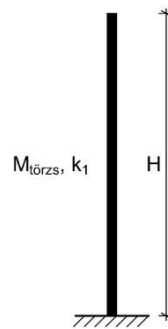
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

összefüggésből számíthatjuk.

A 'D' direkciós állandó az egységnyi elmozduláshoz szükséges erőt adja meg.

A definíció alapján az adott konzolok esetén is meghatározhatjuk ezt az állandót, így a periódusidő számítható.

T_{1a} számítása

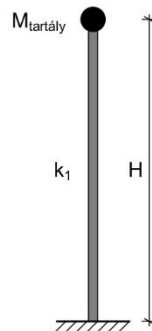


7.3.1 ábra

Egyenletes tömegeloszlású, $k_1=EI$ hajlítási merevségű konzol saját periódusidejének pontos értéke a következő összefüggéssel számítható: ^[11]

$$T_{1a} = 1,786 \sqrt{\frac{M_{törzs} H^3}{EI}}$$

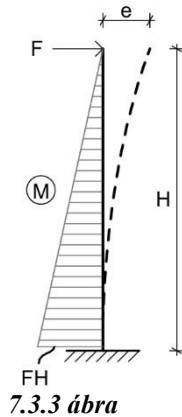
T_{1b} számítása



7.3.2 ábra

Súlytalan $k_1=EI$ hajlítási merevségű konzol végére erősített súlyos anyagi pontból álló modell esetén pontos eredményt kapunk, ha a 'D_{1b}' direkciós állandót a konzol végpontjának elmozdulásából számítjuk. [1]

A legegyszerűbben erőmódszerrel határozhatjuk meg az elmozdulást (7.3.3 ábra):



$$Fe = \frac{FH^2}{2} \frac{2}{3} FH \frac{1}{EI}$$

$$e = \frac{FH^3}{3EI}$$

Tehát a direkciós állandó:

$$D_{1b} = \frac{F}{e} = \frac{3EI}{H^3}$$

Az első rezgésalakhoz tartozó periódusidő pedig az előzőek alapján:

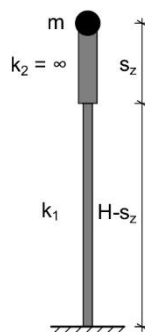
$$T_{1b} = 2\pi \sqrt{\frac{M_{tartály} H^3}{3EI}}$$

T₁ számítása

A 7.2 fejezet és az előző pontok alapján a T₁ periódusidő:

$$T_1 \approx \sqrt{T_{1a}^2 + T_{1b}^2} = \sqrt{3,189 \frac{M_{törzs} H^3}{EI} + 4\pi^2 \frac{M_{tartály} H^3}{3EI}} = \sqrt{\frac{H^3}{EI} \left(3,189 M_{törzs} + \frac{4}{3} \pi^2 M_{tartály} \right)}$$

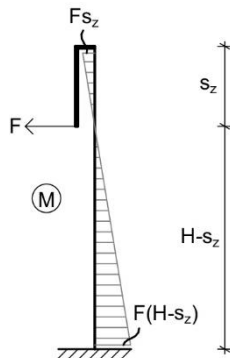
T_{2a} számítása



7.3.4 ábra

Ebben az esetben a $k_1=EI$ merevségű konzolhoz végtelen merevségű 's_z' hosszúságú rúdelemmel (víz tömegközéppontjának és a tartály tömegközéppontjának távolsága) csatlakozik az 'm' tömeg (víz tömege). Itt is az erőmódszer segítségével határozzuk meg a

' D_{2a} ' állandót, azonban a 7.1.1 ábrás utolsó ábrájától eltérően 'valós' alakot kell felvennünk, hogy megfelelő helyen vehessük fel a fiktív erőt. (7.3.5 ábra)



7.3.5 ábra

$$F_e = \left(\frac{F s_z^2}{2} \frac{2}{3} F s_z + \frac{F (H - s_z)^2}{2} \frac{2}{3} F (H - s_z) \right) \frac{1}{EI}$$

$$e = \left(\frac{F s_z^3}{3} + \frac{F (H - s_z)^3}{3} \right) \frac{1}{EI} = \frac{F}{3EI} (s_z^3 + (H - s_z)^3)$$

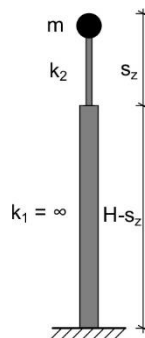
Tehát a direkciós állandó:

$$D_{2a} = \frac{F}{e} = \frac{3EI}{s_z^3 + (H - s_z)^3}$$

Az első rezgésalakhoz tartozó periódusidő pedig az előzőek alapján:

$$T_{2a} = 2\pi \sqrt{\frac{m (s_z^3 + (H - s_z)^3)}{3EI}}$$

T_{2b} számítása



7.3.6 ábra

A modell szerint egy végtelen merevségű elemhez kapcsoljuk egy hajlékony rúdelemmel a víz tömegét, de ezzel tulajdonképpen a víztömeg fizikai inga -szerű mozgását közelítjük. Tehát ebben az esetben a gömbsüveg alakú víztömeg, mint fizikai inga periódusidejének összefüggését írjuk fel, a ' k_2 ' merevséget és direkciós állandót egyébként is csak ennek ismeretében tudnánk megállapítani.

Kis kitérések esetén a fizikai inga periódus idejének ismeretes képletéből:

$$T_{2b} = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_{y(süveg)}}{m g s_z}}$$

Ahol $\Theta_{y(süveg)}$ a víznek a tartály középpontján átmenő vízszintes tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka. Részletes számítása a mellékletek 13.4 fejezetében található.

T₂ számítása

A 7.2 fejezet és az előző pontok alapján a T₂ periódusidő:

$$T_2 \approx \sqrt{T_{2a}^2 + T_{2b}^2} = \sqrt{4\pi^2 \frac{m(s_z^3 + (H - s_z)^3)}{3EI} + 4\pi^2 \frac{\Theta_{y(süveg)}}{mgs_z}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(s_z^3 + (H - s_z)^3)}{3EI} + \frac{\Theta_{y(süveg)}}{mgs_z}}$$

T_{s,1} számítása

A 7.2 fejezet és az előző pontok alapján a víztorony első rezgéalakjához tartozó saját periódusidőt a következőképpen kapjuk:

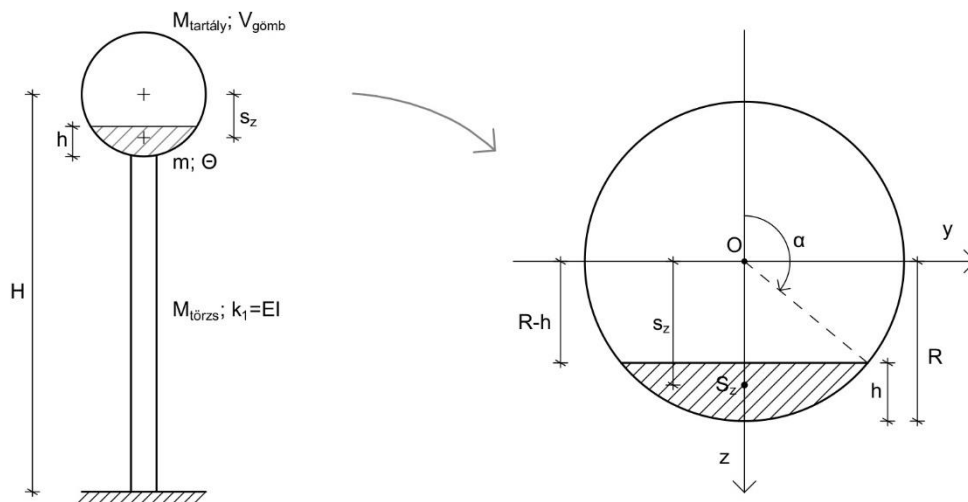
$$T_{s,1} \approx \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = \sqrt{\frac{H^3}{EI} (3,189M_{törzs} + \frac{4}{3}\pi^2 M_{tartály}) + 4\pi^2 \left(\frac{(s_z^3 + (H - s_z)^3)}{3EI} m + \frac{\Theta_{y(süveg)}}{mgs_z} \right)}$$

Jól látható, hogy ismerve a törzs hajlítási merevségét, a víztorony geometriai és tömegadatait, illetve a tartályban tárolt víz tömegét, és a víz tömegközéppontjának helyét a tehetetlenségi nyomatékkal együtt, a periódusidő meghatározható.

A dolgozat célja első sorban, hogy meghatározzuk a periódus időt a telítettség függvényében. Ehhez szükséges még néhány jellemzőt, és számítását kifejtteni.

A törzs tömege, a tartály tömege, a torony magassága, a tartály térfogata 'V_{gömb}' előre megadott paraméterek, a tartályban lévő víz magassága 'h' változó paraméter.

Szükséges, hogy minden jellemző kifejezhető legyen ezekkel a paraméterekkel.



7.3.7 ábra Jellemzők, jelölések magyarázó ábrái

A tartályban lévő víz minden esetben gömbsüvegnek tekinthető – kivéve persze, ha tele van a tartály – ennek a 'testnek' a jellemzőinek részletes meghatározása a mellékletekben található.

Tartály sugara

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V_{\text{gömb}}}{4\pi}}$$

Víz, mint gömbsüveg térfogata (13.2)

$$V_{\text{gömb}} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$$

Víz tömege

$$m = \rho V_{\text{gömb}} = \frac{1000}{3}\pi h^2 (3R - h)$$

Gömbsüveg tömegközéppontjának távolsága a gömbi középponttól (13.3)

$$s_z = \frac{\frac{1}{4}\pi h^2 (h - 2R)^2}{\frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)} = \frac{3(h - 2R)^2}{4(3R - h)}$$

Gömbsüveg tehetetlenségi nyomatéka (13.4)

Ha $h \leq R$, akkor:

$$\alpha = \pi - \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$\Theta_{y(\text{süveg})} = 10^3 \frac{1}{5}\pi R^5 \left(\frac{4}{3} + \cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha\right) - 10^3 \frac{1}{20}\pi (R^2 - (R-h)^2)(R-h)(R^2 + 3(R-h)^2)$$

Ha $h > R$, akkor:

$$\alpha = \pi - \arccos\left(\frac{h}{R} - 1\right)$$

$$\Theta_{y(\text{süveg})} = 10^3 \frac{2}{5}V_{\text{gömb}}R^2 - 10^3 \frac{1}{5}\pi R^5 \left(\frac{4}{3} + \cos\alpha + \frac{1}{3}\cos^3\alpha\right) - 10^3 \frac{1}{20}\pi (R^2 - (R-h)^2)(R-h)(R^2 + 3(R-h)^2)$$

Telítettség %-ban

(Ennek függvényében ábrázoljuk majd a periódusidőt)

$$\mu = \frac{V_{\text{gömbcsüveg}}}{V_{\text{gömb}}} 100 = \frac{\frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)}{\frac{4R^3 \pi}{3}} 100 = 100 \frac{h^2 (3R - h)}{4R^3}$$

8. Eredmények

8.1 Víztorony paramétere, vizsgálat módszere

A számításokhoz szükséges a paraméterek megadása. Ehhez először konzulensem, Dr. Vető Dániel által korábban vizsgált, megépült víztoronyok adataiból következtettem egy 'minta' torony jellemzőire.

	Névleges térfogat [m ³]	Magasság [m]	Tartály tömege [t]	Törzs tömege [t]
Víztorony1	200	32,6	20,3	20,1
Víztorony2	200	28,1	20,3	13,3
Víztorony3	200	32,6	20,3	15,9
Víztorony4	200	32,6	20,3	14,4
Víztorony5	200	21,5	20,3	9,5
Víztorony6	50	31,5	6,9	8,4
Víztorony7	100	30,0	10,0	12
Minta víztorony	200	30,0	20,3	14,9

A 200 m³- es víztoronyok törzse jellemzően 2200 mm külső átmérőjű, a falvastagság pedig átlagosan 8 mm (alulról felfele haladva csökken). 2200 mm külső átmérőjű, 8mm falvastagságú cső inerciája $33,1 \times 10^9 \text{ mm}^4$, az acél rugalmassági modulusa 206000 N/mm^2 , így ezekből az adatokból kaphatjuk a törzs átlagos 'EI' hajlítási merevségét.

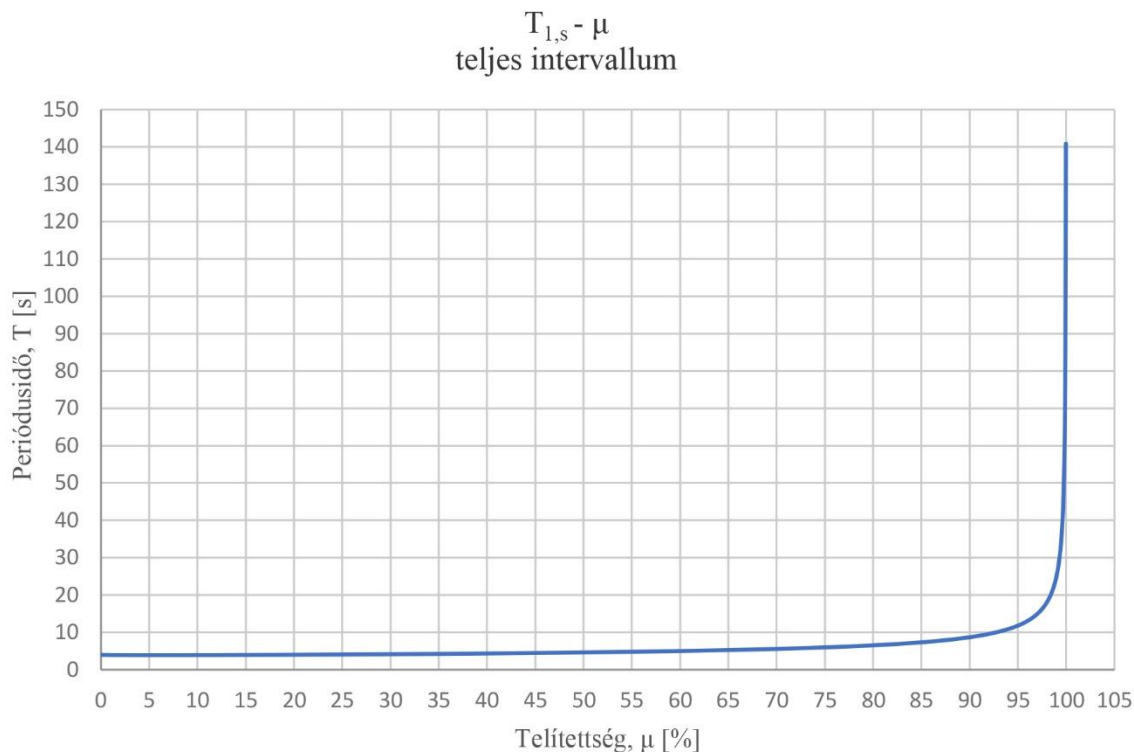
Az összefüggéseket, képleteket Excel táblázatba vittem be. A 'h' magasságot 0-tól 2'R' magasságig 100 részre osztottam fel, hogy egy finom felosztást kapjak.

Minden egyes 'h' értékhez így kapunk periódusidőket, telítettséget stb., vagyis olyan adatsorokat amelyek már ábrázolhatunk diagramon.

8.2 Egy adott víztorony lengésidejének elemzése

a) Egy víztorony összegzési tételekkel számolt periódusidő-telítettség diagramja

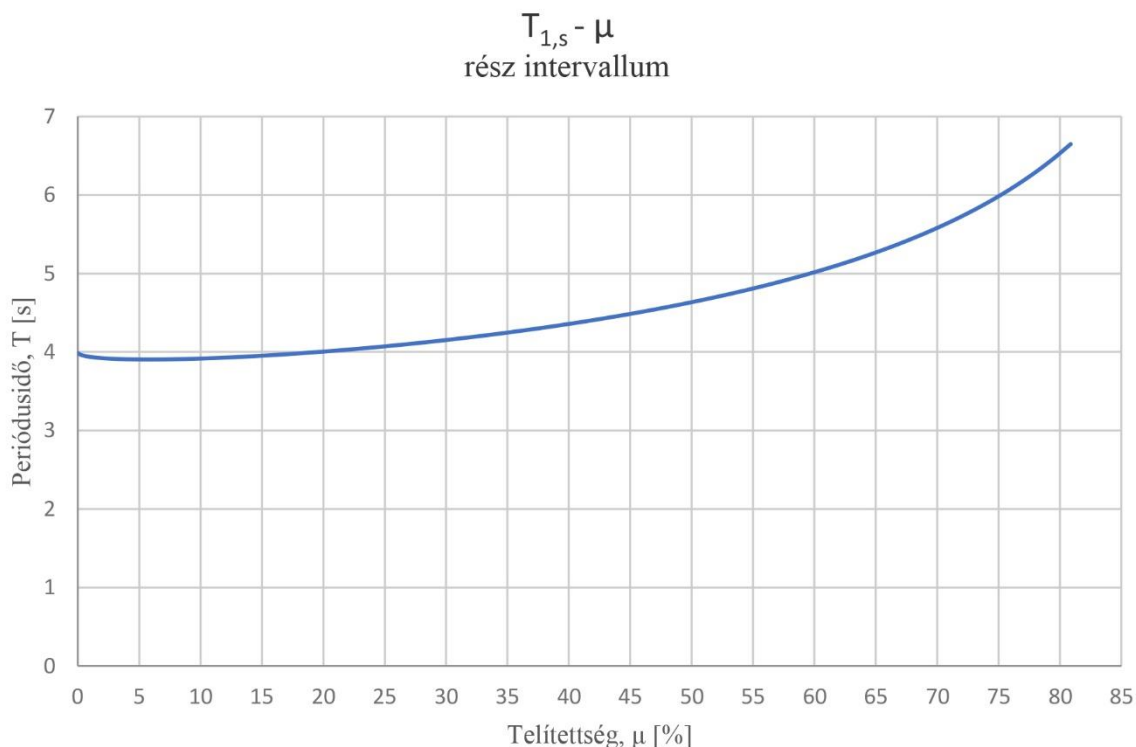
A minta víztoronyot alapul véve a következő periódusidő-telítettség diagramot kapjuk:



8.2.1 diagram *Összegzési tételekkel számolt saját periódusidő a telítettség függvényében*

Egyértelműen megállapítható, hogy minél több víz van a tartályban, annál 'lágyabb' a szerkezet – nagyobb a periódusidő. Jól látható, hogy 90 %-os telítettség fölött a függvény értéke ugrásszerűen növekszik. Míg 90 %-nál a periódusidő kb. 9 s, 100 %-nál már 140 s. A bonyolult összefüggésekből nehéz következtetni arra, hogy ezt az ugrást mi okozhatja, de elmondható hogy a szélsőséges esetben már nem jól közelíti a modellt a valóságot – a gömb, vagy közel gömb alakú alakú víztömeg biztos nem fog forogni tengelye körül, mint egy szilárd test, a valóságban örvényléseket, zavaros belső mozgásokat tapasztalunk.

A görbe első szakasza nehezen vizsgálható ezen a diagramon, ezért nézzünk egy kisebb intervallumot:



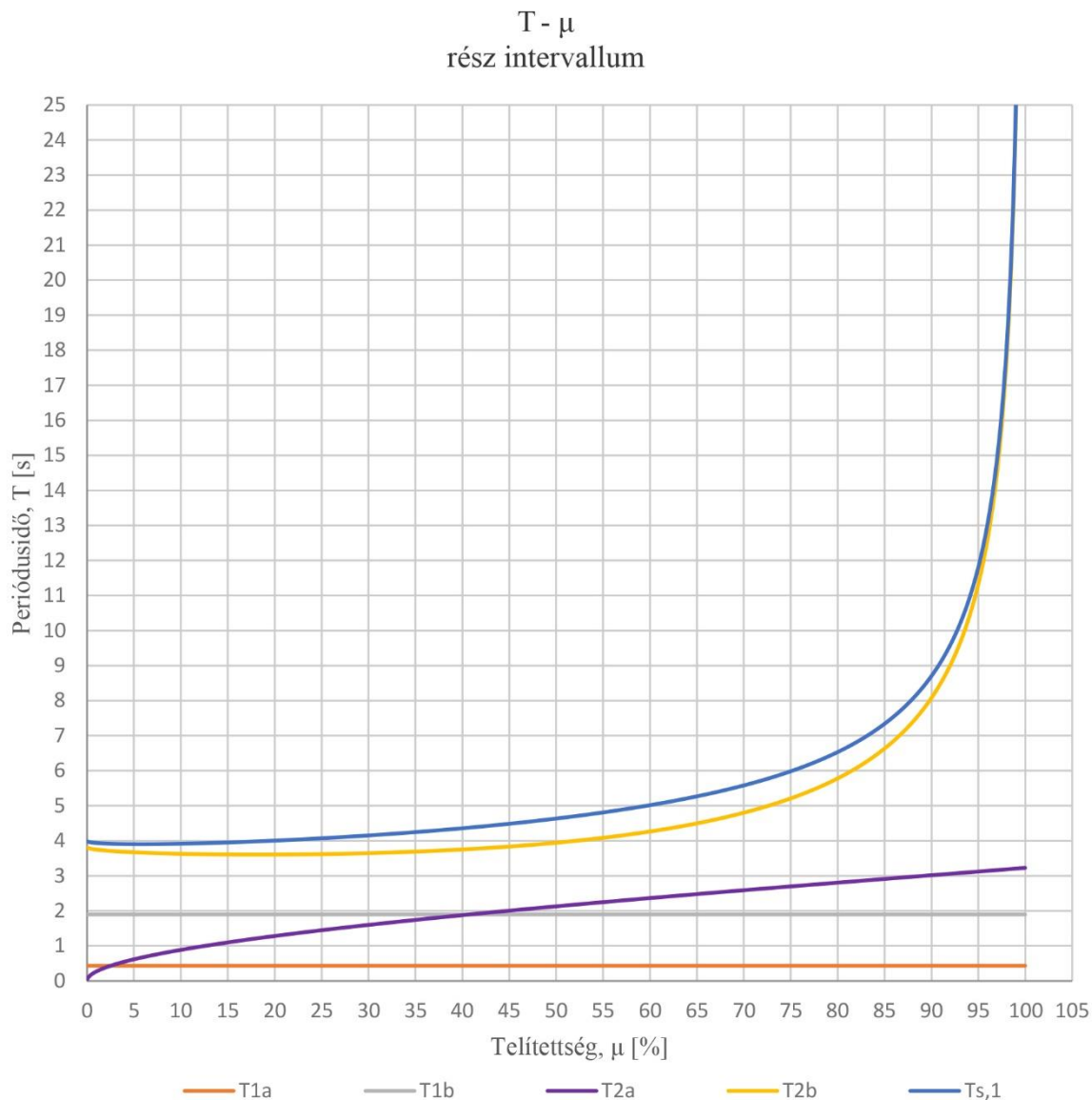
8.2.2 diagram Periódusidő 80%-os telítettségig

Erről a diagramról már jobban leolvasható a függvény első szakaszának viselkedése.

Szinte monoton növekvő a görbénk, de látható, hogy eleinte kissé csökkenő tendenciát mutat, egészen pontosan 6 %-os telítettségig csökken a függvény, utána már folyamatosan nő.

Mielőtt tovább haladunk egyéb elemzésekre, vizsgáljuk meg a ' $T_{s,1}$ ' periódus idő képletének tagjait is. A 7.2 és 7.3 fejezetekben láthattuk, hogy a rendszer saját lengésidejét a

$T_{s,1} = \sqrt{T_{1a}^2 + T_{1b}^2 + T_{2a}^2 + T_{2b}^2}$ összefüggésből számolhatjuk, illetve ott ezt a képletet ki is fejtettük. A későbbi értelmezések megkönnyítése érdekében érdemes lehet megnézni, hogy melyik tag milyen súllyal befolyásolja a végeredményt. Az egyszerűbb ábrázolás végett is érdemes külön-külön a tagokat ábrázolni, tehát a T_{1a} , T_{1b} , T_{2a} , T_{2b} értékeket a $T_{s,1}$ adatsor mellett. (8.2.3 diagram)



8.2.3 diagram A saját periódusidő és 'összetevői'

A ' T_{1a} ' és ' T_{1b} ' idők az üres toronyszerkezetre vonatkoznak, tehát egyértelmű, hogy konstans görbét kell kapjunk egy adott torony esetén.

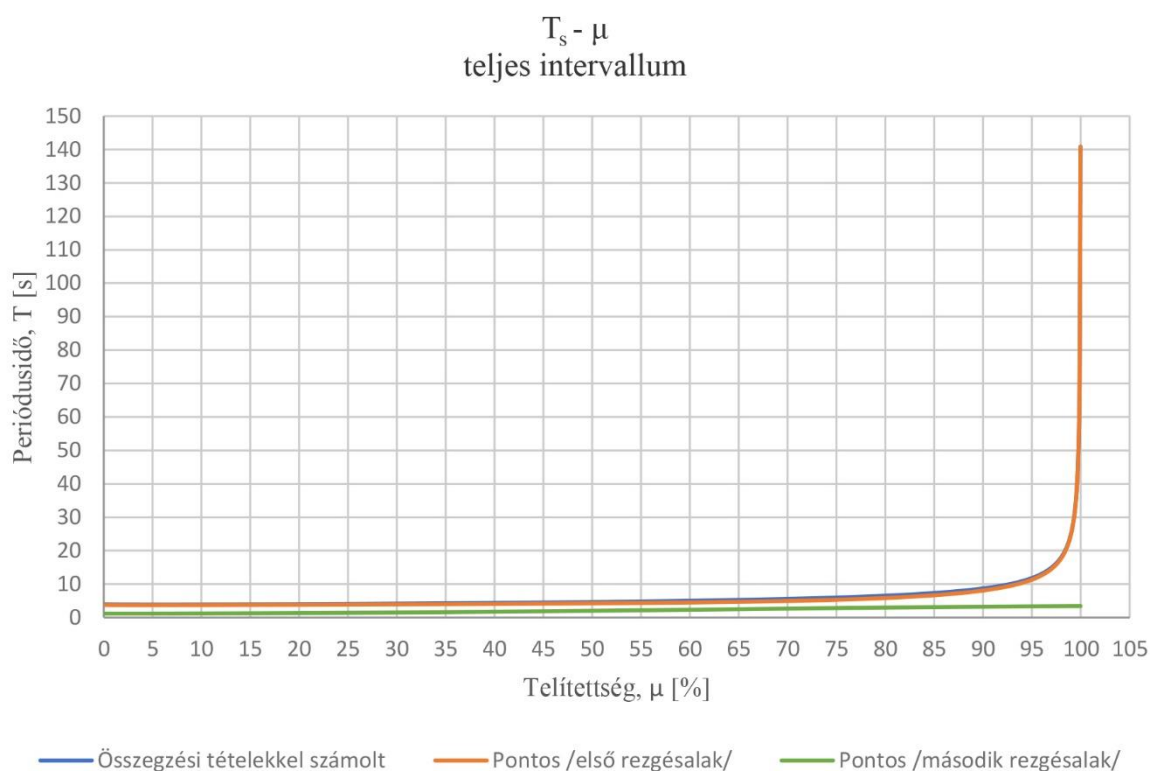
' T_{2a} ' esetén a korábban felírt összefüggését vizsgálva belátható, hogy a lengésidő leginkább az ' m ' tömegtől függ, tehát a telítettség növekedésével az értéke is nőni fog.

Ami viszont a legfontosabb észrevétel ezen a diagramon, hogy ' T_{2b} ', vagyis a fizikai ingára felírt periódusidő nem csak jellegében, de értékeiben is nagyon hasonló görbét ad, mint a rendszer saját periódusideje, tehát ő nagy mértékben, szinte kizárólagosan meghatározza a végeredményt.

b) Összehasonlítás pontos értékekkel

Az irodalomban megtalálható a differenciálegyenletek segítségével meghatározott pontos képlet a saját periódusidők meghatározására. ^[9] Ez a már korábban is említett bikvadratikus egyenlet, mely másodfokú egyenletre vezethető vissza, és két valós megoldást ad: az első és második rezgésalakhoz tartozó periódusidőt, hiszen kétszabadságfokúként értelmezzük a rendszert.

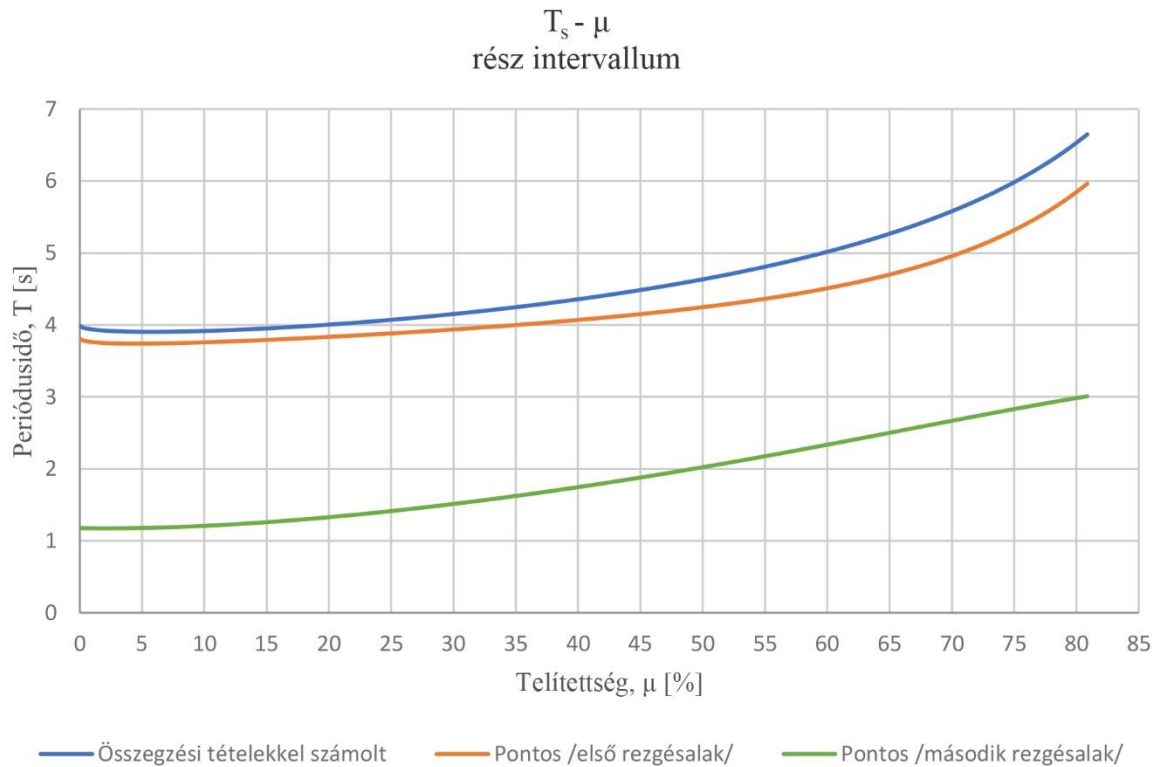
Előzőekhez hasonlóan ebben az esetben is számolható mind a két periódusidő minden 'μ' telítettséghez, így ábrázolható a diagramon:



8.2.4 diagram A dolgozatban számolt és a pontos irodalmi értékek összehasonlítása

Ezen a diagramon a narancssárga és kék görbék tulajdonképpen teljesen fedik egymást, tehát az a következtetés már levonható, hogy az összegzési tételekkel számolt értékek jól közelítik a pontos értékeket.

Itt is érdemes egy kisebb intervallumot is megvizsgálni.



8.2.5 diagram A dolgozatban számolt és a pontos irodalmi értékek összehasonlítása

Ezen a diagramon már jobban láthatóak a különbségek, de ugyanakkor az is, hogy milyen jól követi jellegében a közelítő görbe a pontosat.

30 %-os telítettségig szinte állandó 4-5 %-os az eltérés. A legnagyobb eltérést 60-80%-os intervallumú telítettségénél tapasztalhatjuk, ez 10-12%-os hibákat jelent.

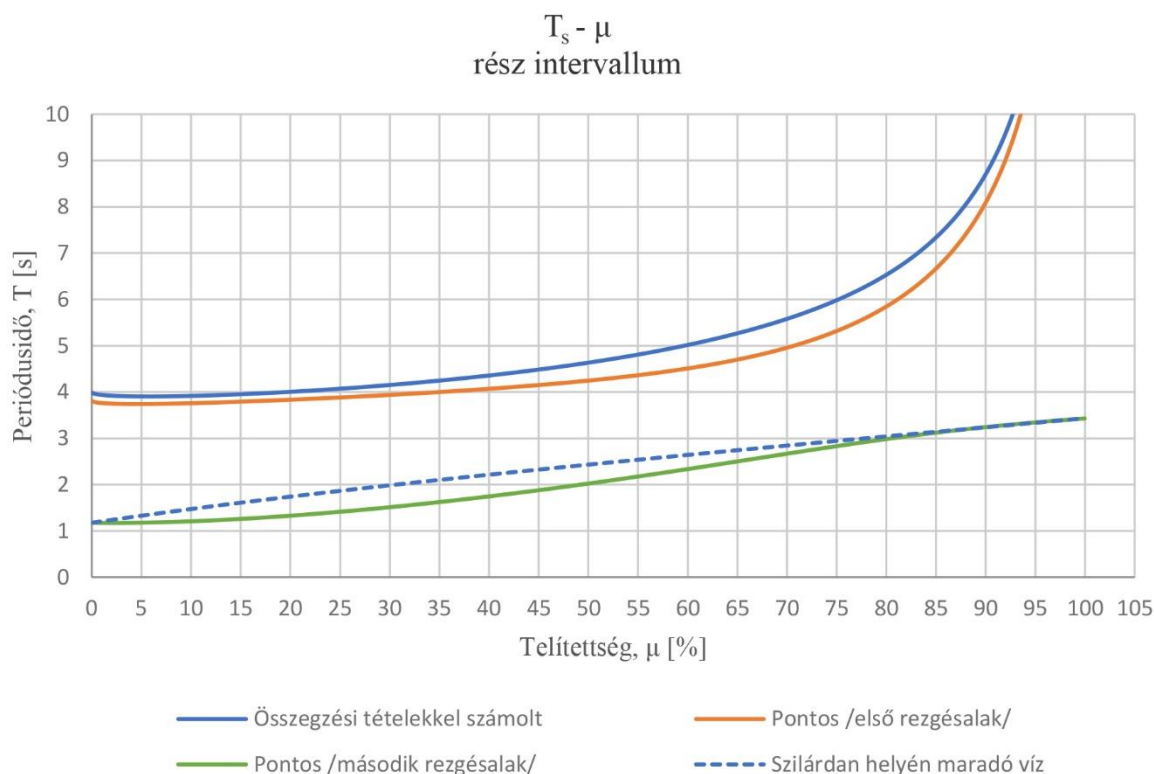
c) Ha a víz lengését nem vesszük figyelembe...

A dolgozat egyik alapfeltevése, hogy a víz lengésének figyelembevétele nagyban befolyásolja a végeredményt. Érdekes ezt is megvizsgálni, ehhez azonban meg kell határoznunk a szilárdan helyén maradó víztömeggel lengő víztorony ('befagyasztott' víz esete) periódusidejét.

A 7.2.4 ábra alapján belátható, hogy ezt a lengésidőt a ' T_1 ' (üres víztorony periódusideje) és ' T_{2a} ' (víz tömege egy merev rúdelemmel kapcsolódik a hajlékony törzshöz) lengésidők Dunkerley összegzéséből kaphatjuk:

$$T_{s,I}^* = \sqrt{T_1^2 + T_{2a}^2} = \sqrt{\frac{H^3}{EI} \left(3,189M_{\text{törzs}} + \frac{4}{3}\pi^2 M_{\text{tartály}} \right) + 4\pi^2 \frac{(s_z^3 + (H - s_z)^3)}{3EI}} m$$

Ezt az adatsort is ábrázolja:



8.2.6 diagram 'Befagyasztott' víz esetén számolt eredmények összehasonlítása a valós értékekkel

Először tekintsük a folyamatos kék és a szaggatott kék görbéket, azaz az összegzési tételekkel számolt periódusidőket és a szilárdan helyén maradó víz esetében számolt értékeket.

Jól érzékelhető a különbség, szinte mindenhol minimum kétszer akkora periódusidőt kapunk, ha figyelembe vesszük a víz lengését, tehát feltevésünk igazolódik. Ugyanakkor itt ellentmondásba is kerülünk, hiszen azt várnánk el, hogy üres víztorony esetén ugyanakkora értékeket kellene kapni akkor is ha mozog a víz és akkor is ha nem.

Itt egyrészt nem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy kis vízmennyiség esetén nem működik jól a modell, mivel a 'slosh' hatásoktól biztos nem tekinthetünk el, a víztömeg deformálódni fog. Másrészt a 8.2.3 diagramnál leírtak alapján már tudjuk, hogy a fizikai ingaként modellezhető víztömeg mozgása a legkisebb vízmennyiség esetén is meghatározó eleme a lengésidőnek.

Másképp átgondolva: egy kis tömeg feltehetően nagy amplitúdóval (A) mozogva nagy energiával rendelkezik, egy nála jóval nagyobb tömegű, hozzá csatolt rendszer viselkedését is nagyban befolyásolhatja. Vagyis ha $h \rightarrow 0$ akkor feltételezzük, hogy $A \rightarrow \infty$, ez okozhatja a nagy eltérést kis vízmennyiség esetén is.

Megjegyzendő, hogy a $T_{s,1}$ és $T_{s,1}^*$ képleteket vizsgálva látható, hogy üres torony esetén a $T_{s,1}$ összefüggése elvileg nem értelmezhető zéróosztó miatt (utolsó tag), a határérték vizsgálatához viszont túl bonyolult.

$$T_{s,1} \approx \sqrt{\frac{H^3}{EI} (3,189M_{\text{törzs}} + \frac{4}{3}\pi^2 M_{\text{tartály}}) + 4\pi^2 \left(\frac{(s_x^3 + (H - s_x)^3)}{3EI} m + \frac{\ominus y(\text{siüveg})}{mgs_z} \right)}$$

$$T_{s,1}^* \approx \sqrt{\frac{H^3}{EI} (3,189M_{\text{törzs}} + \frac{4}{3}\pi^2 M_{\text{tartály}}) + 4\pi^2 \frac{(s_x^3 + (H - s_x)^3)}{3EI} m}$$

Azonban tudjuk, hogy $h=0$ esetén üres a víztorony, az üres víztorony képletét pedig már levezettük:

$$T_1 \approx \sqrt{\frac{H^3}{EI} (3,189M_{\text{törzs}} + \frac{4}{3}\pi^2 M_{\text{tartály}})} = \text{konstans}$$

Tehát $h=0$ esetén (üres víztorony) $T_{s,1}$ igenis egyenlő $T_{s,1}^*$ értékével, csak a jelenlegi problémánál (összekapcsolt többszabadságfokú rezgés), tehát a teljes rendszer periódusidejének számítása esetében ez a tartomány nem értelmezhető – ha nincs víz a toronyban, akkor az egy másik 'feladat'.

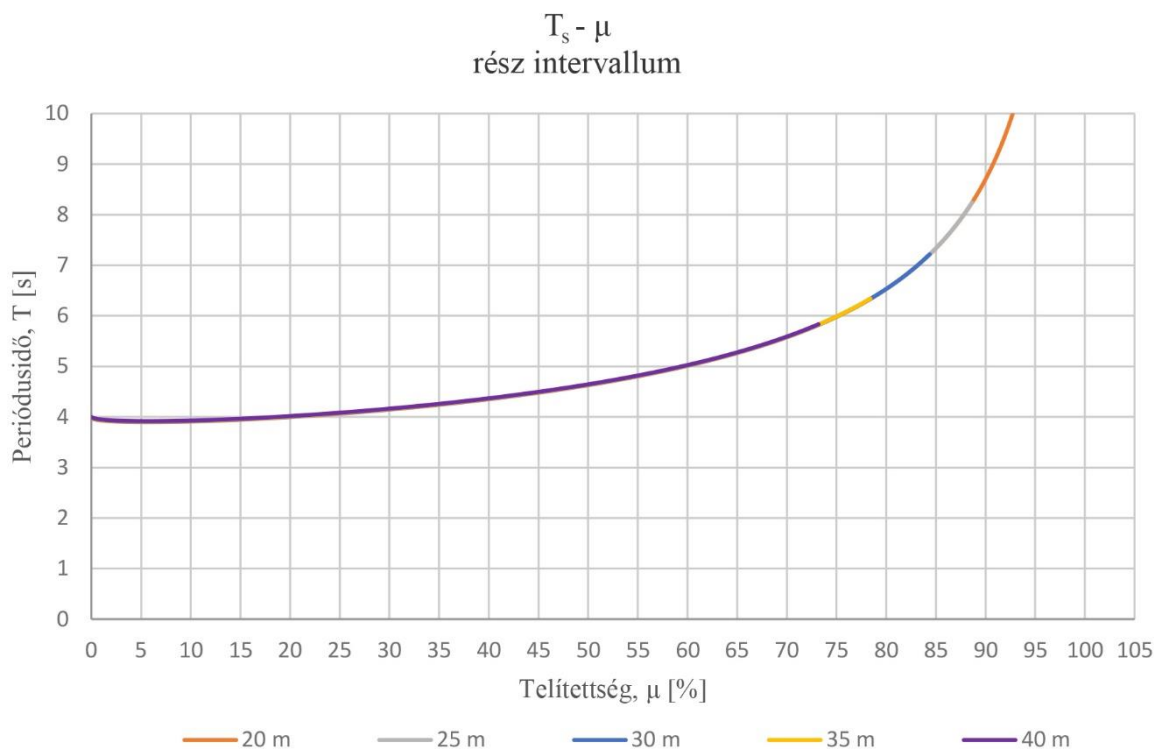
Most tekintsük a folyamatos zöld és a szaggatott kék görbéket, azaz a pontosan számolt második rezgéslekhöz tartozó periódusidőket, és a szilárdan helyén maradó víz esetében számolt értékeket.

Az előző összefüggésekből látható, hogy $m=0$ (vagyis $h=0$) estén $T_{s,1}^* = T_1$ teljesül. Míg az előzőekben meg kellett magyarázni, hogy grafikusán ábrázolva miért nem közel egy pontból indulnak a görbék, itt látszólag ez az elvárásunk teljesül – azonban fontos megjegyezni, hogy a folyamatos zöld (és narancssárga) függvényt szintén nem tudjuk $h=0$ esetében értelmezni, és a második rezgésalaknál a víz mozgása ugyanúgy nagyban befolyásolhatja a szerkezet mozgását.

Így feltételezhető, hogy a közel egy pontból indulás csupán véletlen, mint ahogyan az is, hogy a két görbe kissé szétválva, de követi egymást, majd végül találkozik, csak véletlen egybeesés lehet, ismereteim alapján nem magyarázható.

8.3 A periódusidő víztorony magasságától való függésének elemzése

20-25-30-35-40 méter magas víztornyokat vizsgálunk, a fix paraméterek közül csak a víztorony magasságot (H) és ezzel arányosan a törzs tömegét ($M_{\text{törzs}}$) változtatjuk, a hajlítási merevség, tartály térfogat, stb. állandó marad. Így 5 különböző adatsort kapunk a periódusidőre, ezeket ábrázolva a telítettség függvényében a következő diagramot kapjuk:



8.3.1 diagram Lengésidők különböző víztorony magasságok esetén

Az öt görbe szinte teljesen fedi egymást 0-100% telítettség esetén végig (különböző telítettség intervallumon vannak ábrázolva, hogy ne csak egy szint lássunk). A 20 méter és a 40 méter magas tornyot összevetve még 1% -os (!) különbségeket sem kapunk.

Ezek szerint a víztorony magassága önmagában nincs nagy hatással a periódusidőre, ez az előzetes várakozásainktól eltérő eredmény, de 8.2 c) pont alapján elfogadható.

8.4 Saját rezgésalakok

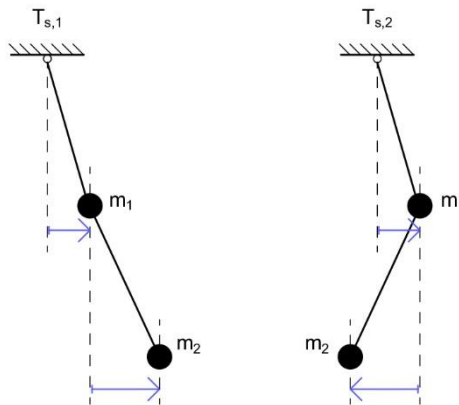
A korábbi fejezetekben többször is szó esett arról, hogy két szabadságfokúként modellezzük a rendszert, és nagyon fontos az alap saját periódusidő ($T_{s,1}$) meghatározása, de egy ilyen szerkezetnek két sajátfrekvenciája és rezgésalakja van. Az összegzési tételekkel csak a lassabb saját periódusidőt, tehát az első rezgésalakhoz tartozó lengésidőt ($T_{s,1}$) tudjuk meghatározni, a pontos számítással kapott bikvadratikus egyenletből pedig mindkét

rezgésalakhoz megkapjuk a periódusidőket.

Fontos kérdés, hogy melyik periódusidőhöz milyen rezgésalak tartozik.

Általánosan igaz, hogy két szabadságfokú rendszer két rezgésalakja a következőképpen különbözik: az első rezgésalak esetén a két tömeg egymáshoz képest egy irányba mozdul el, a második rezgésalak esetén pedig ellentétes irányba. ^{[9] [10] [11]}

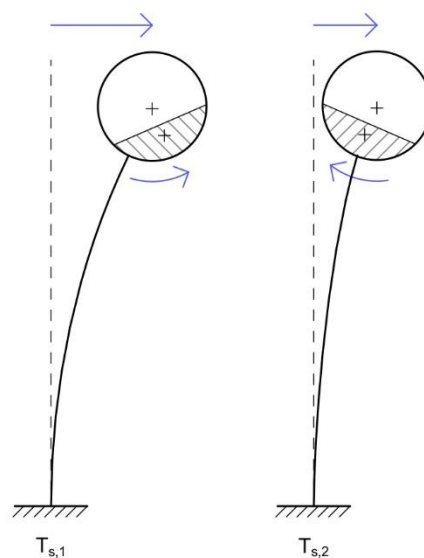
Másképpen fogalmazva a következő rezgésalak általában 'kuszább', mint az előző.



8.4.1 ábra Első és második rezgésalak

Ez végig gondolható a víztorony esetében is: érezhető, hogy ha a víz és a torony egy irányba lengenek akkor a rendszer lágyabban viselkedik, tehát kisebb a frekvencia (első rezgésalak), míg ha ellentétes irányba mozognak, akkor egy merevebb, nagyobb frekvenciájú rendszert kapunk (második rezgésalak).

Víztorony esetében a rezgésalakokat szemléltető ábra:



8.4.2 ábra Első és második rezgésalak víztorony esetében

8.5 A földrengési hatásokról

Víztorony esetében káros rezgések többek között földrengés keltette rezgéshullámok következtében alakulnak ki. Tervezőkor sosem mellőzhető a víztorony részletes földrengésvizsgálata, de most csak néhány szempontról lesz szó.

A földrengés elleni tervezés alapja a válaszspektrum, amely a saját periódusidő függvényében adja meg a várható földrengés hatást, azaz a gyorsulást.

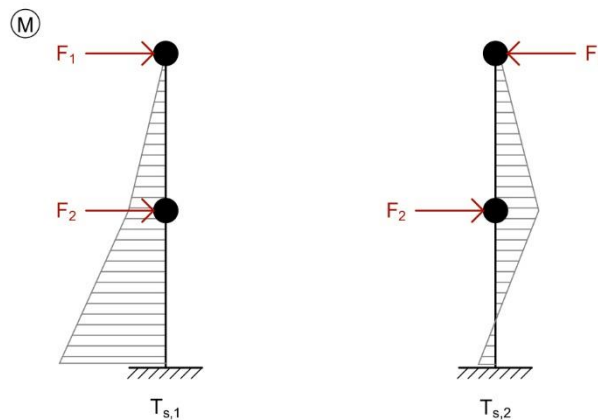
Hazánkban az 1-es típusú spektrumot kell használni, ez alapján körülbelül 0,2-0,8 s saját periódusidővel rendelkező szerkezet a legkedvezőtlenebb, és ahogy haladunk a nagyobb periódusidők fele, nagy mértékben csökken a földrengési hatás mértéke. ^[10]

Általánosságban is elmondható, hogy a lágyabb szerkezet kedvezőbb földrengéskor.

Ezekből az következik, hogy a vizsgált víztorony esetében a második rezgésalakhoz tartozó sajátfrekvenciák a mértékadók (kisebb periódusidők), de érdemes másik szempontot is vizsgálni.

Az előző pontban szó esett a rezgésalakokról.

A földrengésből származó vízszintes gyorsulásokból adódó földrengésterheket az adott tömegpont elmozdulásának irányába vesszük fel. ^[10] Így két szabadságfokú rendszer esetében az első rezgésalaknál mindkét tömegpontra egy irányba mutató erőket veszünk fel, míg a második rezgésalaknál ezek az erők ellentétes irányba mutatnak, tehát azonos erők esetén a mértékadó nyíróerő és nyomaték is kisebb lesz a második esetben.



8.5.1 ábra Nyomatékábrák első és második rezgésalak esetén

Persze az erők nem lesznek azonosak, mivel más lesz a válaszspektrum-gyorsulás értéke, de az ábra jól mutatja, hogy nem feltétlenül a második rezgésalakhoz tartozó saját periódusidők esetén kapunk kedvezőtlenebb hatást.

8.6 Összefoglalás

Több szempontból is vizsgáltam a víztorony periódusidejét. Fontos ismét kiemelni, hogy kis illetve nagy telítettség esetén a modell nem jól közelíti a valóságot, és a számítások is csak kis elmozdulások esetén pontosak.

Az ábrázolt diagramokon látható, hogy minél több víz van a toronyban, annál lágyabb rendszert kapunk, tehát nő a periódusidő, és az összegzésekkel számolt értékek nagyon jól közelítik a pontosan számolt eredményeket.

Egyértelműen megállapítható, hogy a víz lengésének figyelembevétele nagy mértékben befolyásolja a számított periódusidőt, sőt a fizikai ingaként modellezhető víztömeg meghatározó eleme a rendszer periódusidejének. Láthattuk, hogy ezt igazolva a torony magasságának csekély hatása van a szerkezet lengésidejére.

Általános rezgő rendszerek viselkedésére alapozva feltételeztem, hogy az első rezgésalak esetén a víztömeg ugyanabba az irányba leng, mint a toronyszerkezet, a második rezgésalak esetén ellentétes irányba, így mindkét rezgésalakot érdemes vizsgálni földrengés elleni tervezéskor.

9. Alkalmazási lehetőségek

- Épületeknél víztartályok alkalmazásával stabilizálható a szerkezet földrengésre, mivel egy sokkal lágyabb rendszert kaphatunk.
- Bár nem szorosan a víz lengéséhez kapcsolódik, de a 'slosh' hatást kihasználva csökkentik a roller hockey sport labdájának visszapattanási magasságát. ^[3]

10. További kutatási lehetőségek

Most hogy értelmeztem, és dinamikai szempontból vizsgáltam a jelenséget, a következő lépés a mozgás pontos dinamikai leírása differenciálegyenletek felírásával, a periódusidők pontos meghatározásának levezetésével.

A dinamikai leírás után javasolt lenne a földrengéshatásokat és esetleg még a szél dinamikus hatásait is részletesen vizsgálni.

A torony mozgásának fontos jellemzője a saját periódusidő, de még semmit se tudunk az amplitúdókról, a rendszer mozgásának hely-idő függvényéről, és ezek felírását az általunk ismert irodalomban sem találtuk. Így érdemes lenne egy differenciálegyenlet (-rendszer) megoldásával eljutni a szerkezet mozgásának kinematikai összefüggéseinek felírásához – hely, sebesség, gyorsulás, amplitúdó.

És végül, de nem utolsó sorban egy távolabbi célom szimulációs programmal vizsgálni a jelenséget, akár a 'slosh' hatás elemzésével is részletesebben foglalkozva.

11. Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani azoknak az egyetemi oktatóknak, akik lehetővé tették dolgozatom létrejöttét.

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Vető Dánielnek, aki végig biztatott, irányt mutatott és instrukciókkal segített a kutatásom során; és külön köszönöm a jó hangulatú konzultációkat, amik már-már kisebb vitákba is torkollottak, ezzel biztosítva a problémák alaposabb megértését.

Köszönettel tartozok Dr. Sajtos István tanszékvezetőnek, akihez bátran fordulhattunk kérdésekkel, és fontos információkkal segítette a kutatást.

12. Hivatkozások, felhasznált irodalom

12.1 Felhasznált irodalom

[¹] https://en.wikipedia.org/wiki/Free_surface_effect

[²] J. L. Bautista-Jacobo, E. Rodríguez-Morales, J. J. Montes-Rodríguez, and H. Gámez-Cuatzín: Effect of Baffles on the Sloshing in Road Tankers Carrying LPG - A Comparative Numerical Study, Research Article, Mexico, 2015.

(https://www.researchgate.net/publication/279940878_Effect_of_Baffles_on_the_Sloshing_in_Road_Tankers_Carrying_LPG_A_Comparative_Numerical_Study)

[³] https://en.wikipedia.org/wiki/Slosh_dynamics

[⁴] Chatman, Yadira; Gangadharan, Sathya; Schlee, Keith; Ristow, James; Suderman, James; Walker, Charles; Hubert, Carl: Modeling and Parameter Estimation of Spacecraft Fuel Slosh with Diaphragms Using Pendulum Analogs, Conference Paper, Purcellville, Virginia, 2013.

(<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20130012950.pdf>)

[⁵] <https://hu.wikipedia.org/wiki/T%C3%B3leng%C3%A9s>

[⁶] https://en.wikipedia.org/wiki/Metacentric_height

[⁷] Palotás L.: Mérnöki kézikönyv. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

[⁸] <http://www.novus90.hu/viztorony/tipusok>

[⁹] Kollár L.: A szél dinamikus hatása az építményekre (2. átdolgozott kiadás). TERC Kft., Budapest, 2004.

[¹⁰] Dulácska E. – Joó A. L., Kollár L. P.: Tartószerkezetek tervezése földrengési hatásokra. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.

[11] Dulácska E.: Fejezetek a dinamikából. Elektronikus jegyzet, BME Építészmérnöki Kar, Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék, 2015.

12.2 Ábrák forrásai

4.1.1 ábra:

https://www.researchgate.net/figure/Snapshots-of-liquid-sloshing-in-cubic-tank-without-and-with-multiple-baffles-at-t890_fig10_258233417

4.2.1 ábra:

<https://www.nrspp.org.au/resources/nrspp-fact-sheet-baffle-balls-for-truck-stability/>

4.2.2 ábra:

<https://www.nas.nasa.gov/SC13/demos/demo36.html#>

4.3.1 ábra:

<http://www.aquatic.uoguelph.ca/lakes/waves/page2.htm>

4.4.1 ábra:

https://en.wikipedia.org/wiki/Metacentric_height

4.4.2 ábra:

https://en.wikipedia.org/wiki/Metacentric_height

4.5.1 ábra:

<https://www.youtube.com/watch?v=QUgXf2Rj2YQ>

6.2.1 ábra:

<http://www.kitervezte.hu/epuletek/ipar-mezogazdasag/viztorony-oreg-holgy-szeged>

6.3.1 ábra:

<http://www.novus90.hu/viztorony/tipusok>

13.1.1 ábra:

[10] Dulácska E. – Joó A. L., Kollár L. P.: Tartószerkezetek tervezése földrengési hatásokra. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.

Az itt nem szereplő számú ábrák saját ábrák.

13. Mellékletek

13.1 Összegési tételek

A dinamikai vizsgálatok során fontos a szerkezetek alap saját periódusidejének (első rezgésalak) meghatározása. Bonyolultabb esetekben ez meglehetősen nagy nehézséggel járhat, de ismerünk olyan módszereket, amelyek megkönnyítik számításainkat. Több ilyen módszert is ismertetek: a Dunkerley, Föppl-Papkovics és Southwell módszereket. [10]

Tömegek összegzése (Dunkerley, 1894)	
$\frac{1}{\omega_n^2} \approx \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \quad T_n^2 \approx T_1^2 + T_2^2$	
Merevségek szétválasztása (Föppl-Papkovics stabilitásra)	
$\frac{1}{\omega_n^2} \approx \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} \quad T_n^2 \approx T_1^2 + T_2^2$	
Gyámolítás hatása (Southwell, 1921)	
$\omega_n^2 \approx \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad \frac{1}{T_n^2} \approx \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}$	

13.1.1 ábra Összegési tételek

a) Dunkerley összegzés

A módszer szerint ha a rendszer több tömegből tehető össze, melyek azonos, állandó merevségű elemekkel vannak összekötve, akkor a leglassúbb közös periódusidőt (első rezgésalak) a külön-külön meghatározott periódusidők következő összegzéseként kaphatjuk meg:

$$T_{s,1} \approx \sqrt{\sum T_i^2} \quad [10]$$

b) Föppl-Papkovics összegzés

Ebben az esetben a szerkezet merevsége bontható több részre – sorba kapcsolt merevségek – és egy tömeget tartalmaz. A közös saját periódusidő az ábra szerinti egyes merevségrészek saját periódusidejének ismeretében a következő összefüggéssel számítható:

$$T_{s,1} \approx \sqrt{\sum T_i^2} \quad [10]$$

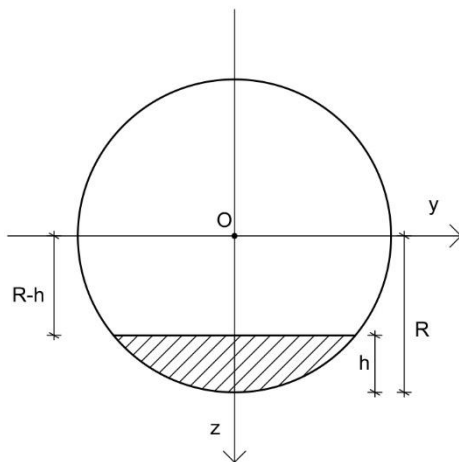
c) Southwell összegzés

A Southwell tétel szerint, ha szintén a merevség tehető össze több részből, de párhuzamosan kapcsolt merevségekről van szó – ilyen eset pl. a két oldalán különböző merevítéssel ellátott épület, ahol a födémek kapcsolják össze a merevségeket – , akkor a következő kifejezést használhatjuk:

$$\frac{1}{T_{s,1}} \approx \sqrt{\sum \frac{1}{T_i^2}} \quad [10]$$

A módszerek néhány százalékos hibával adják az eredményt a pontos értékekhez képest; általánosságban megállapítható, hogy nagyobb periódusidőt kapunk, tehát felülről közelítjük a pontos megoldást. [9] [11]

13.2 Gömbsüveg térfogata



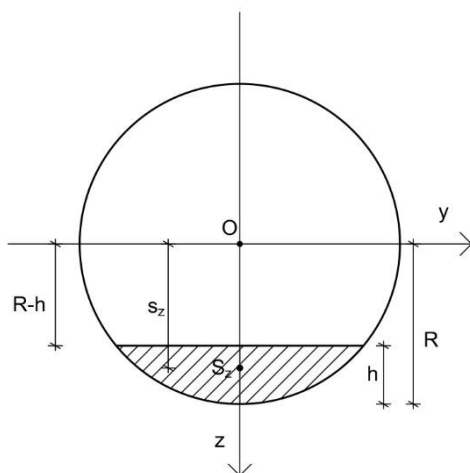
13.2.1 ábra

$$\begin{aligned}
 V_{\text{gömbsüveg}} &= \pi \int_{R-h}^R y^2 dz = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - z^2) dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{R-h}^R = \\
 &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - R^2(R-h) + \frac{(R-h)^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R-h)
 \end{aligned}$$

13.3 Gömbsüveg tömegközéppontjának távolsága a gömbi középponttól

$$s_z = \frac{M_{yx}}{V_{\text{gömbsüveg}}}$$

$$\begin{aligned}
 M_{yx} &= \pi \int_{R-h}^R (zy^2) dz = \pi \int_{R-h}^R z(R^2 - z^2) dz = \pi \int_{R-h}^R (zR^2 - z^3) dz = \pi \left[R^2 \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_{R-h}^R = \\
 &= \pi \left(\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) - \left(\frac{R^2(R-h)^2}{2} - \frac{(R-h)^4}{4} \right) \right) = \frac{1}{4} \pi h^2 (h-2R)^2
 \end{aligned}$$



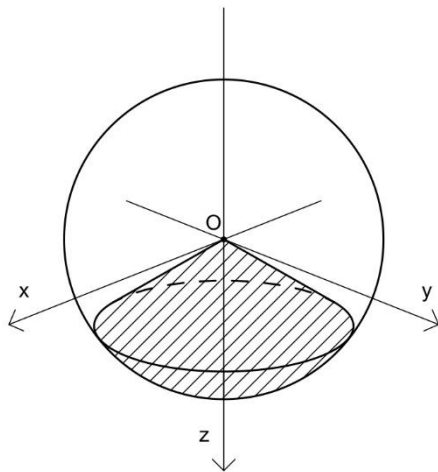
13.3.1 ábra

$$s_z = \frac{\frac{1}{4}\pi h^2 (h - 2R)^2}{\frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)} = \frac{3 (h - 2R)^2}{4 (3R - h)}$$

13.4 Gömbsüveg tehetetlenségi nyomatéka

Térjünk át gömbi koordinátákra, ebben az esetben viszont két lépésben tudjuk meghatározni a gömbsüveg tehetetlenségi nyomatékát: először integrálással felírjuk a süveg + kúp tartomány nyomatékának képletét, majd ebből kivonjuk a kúp tehetetlenségi nyomatékát.

a) Gömbsüveg + kúp tartomány y tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka



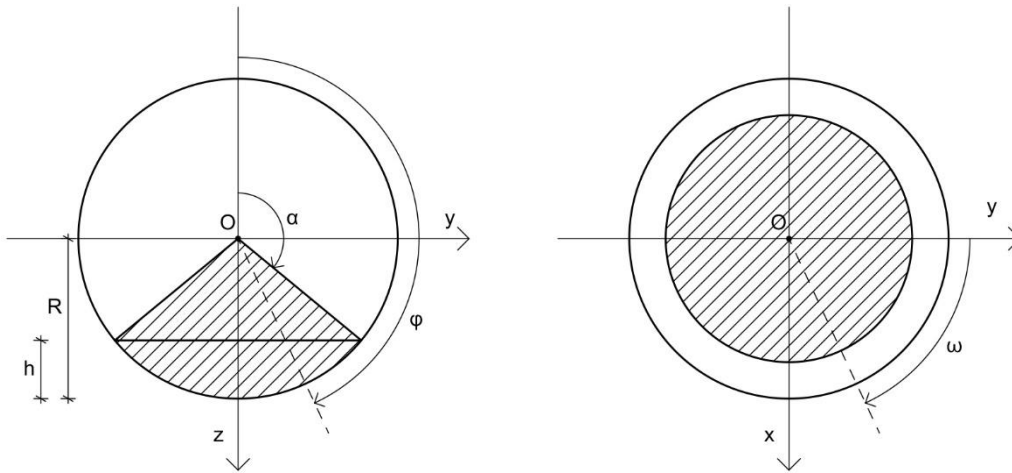
13.4.1 ábra Gömbsüveg+kúp tartomány

Tehetlenségi nyomaték számításának képlete:

$$\Theta_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho \, dx dy dz$$

Sűrűség állandó: $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Áttérés gömbi koordinátákra: $P(r, \varphi, \omega)$



13.4.2 ábra Gömbi koordináták

$P(r, \varphi, \omega)$

$$0 < r < R$$

$$\alpha < \varphi < \pi \quad \alpha = \pi - \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$0 < \omega < 2\pi$$

$$x^2 + z^2 = (r \sin \varphi \cos \omega)^2 + (r \cos \varphi)^2 = r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \omega + r^2 \cos^2 \varphi$$

$$dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\omega$$

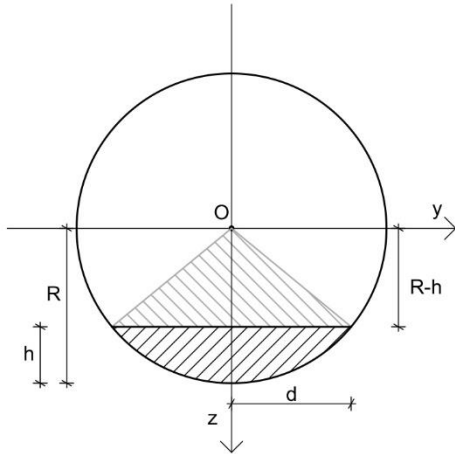
Tehát a határozott integrál:

$$\begin{aligned}
\Theta_{y \text{ (süveg+kúp)}} &= 10^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \omega + r^2 \cos^2 \varphi) r^2 \sin \varphi \, dr d\varphi d\omega = \\
&= 10^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^3 \varphi \cos^2 \omega + r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi \, dr d\varphi d\omega = \\
&= 10^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 (\sin^3 \varphi \cos^2 \omega + \cos^2 \varphi \sin \varphi) \, dr d\varphi d\omega = \\
&= 10^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{r^5}{5} (\sin^3 \varphi \cos^2 \omega + \cos^2 \varphi \sin \varphi) \right]_0^R d\varphi d\omega = \\
&= 10^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{\frac{1}{5} R^5 (\sin^3 \varphi \cos^2 \omega + \cos^2 \varphi \sin \varphi)}_A d\varphi d\omega = \\
&= 10^3 A \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos 3\varphi - 9 \cos \varphi}{12} \cos^2 \omega + \left(-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \right]_\alpha^\pi d\omega = \\
&= 10^3 A \int_0^{2\pi} \left(\left(\underbrace{\frac{\cos 3\pi - 9 \cos \pi}{12}}_B \cos^2 \omega - \underbrace{\frac{\cos^3 \pi}{3}}_C \right) - \left(\underbrace{\frac{\cos 3\alpha - 9 \cos \alpha}{12}}_D \cos^2 \omega - \underbrace{\frac{\cos^3 \alpha}{3}}_E \right) \right) d\omega = \\
&= 10^3 A \int_0^{2\pi} (B \cos^2 \omega - C - D \cos^2 \omega + E) d\omega = A \int_0^{2\pi} (\cos^2 \omega (B - D) - C + E) d\omega = \\
&= 10^3 A \left[\frac{1}{2} (\omega + \sin \omega \cos \omega) (B - D) - C + E \right]_0^{2\pi} = \\
&= 10^3 A \left(\frac{1}{2} (\underbrace{2\pi + \sin 2\pi \cos 2\pi - (0 + \sin 0 \cos 0)}_\pi) (B - D) - C 2\pi + E 2\pi \right) = \\
&= 10^3 A (B\pi - C 2\pi - D\pi + E 2\pi) = \\
&= 10^3 \frac{1}{5} R^5 \left(\frac{1}{12} (\cos 3\pi - 9 \cos \pi) \pi - \frac{2}{3} \pi \cos^3 \pi - \frac{1}{12} (\cos 3\alpha - 9 \cos \alpha) \pi + \frac{2}{3} \pi \cos^3 \alpha \right) = \\
&= 10^3 \frac{\pi}{5} R^5 \left(\frac{1}{12} (-1 + 9) + \frac{2}{3} - \frac{1}{12} (\cos 3\alpha - 9 \cos \alpha) + \frac{2}{3} \cos^3 \alpha \right) = \\
&= 10^3 \frac{\pi}{5} R^5 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{12} (-3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha - 9 \cos \alpha) + \frac{2}{3} \cos^3 \alpha \right) = \\
&= 10^3 \frac{1}{5} \pi R^5 \left(\frac{4}{3} + \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right)
\end{aligned}$$

b) Gömsüveg y tengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka

A gömsüveg tehetetlenségi nyomatékát megkapjuk, ha az a) részben tárgyalt tartomány tehetetlenségi nyomatékából kivonjuk az $(R-h)$ magasságú kúp szintén y tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékát (11.4.3 ábra).

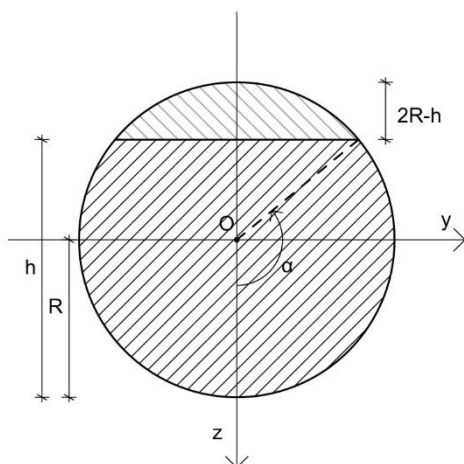
$$\Theta_{y(\text{süveg})} = \Theta_{y(\text{süveg+kúp})} - \Theta_{y(\text{kúp})}$$



13.4.3 ábra

Az integrálási tartomány félgömbi telítettség után már egy teljesen más geometriájú alakzat lesz, így beláthatjuk, hogy az eljárás csak félgömbi telítettségig ($h=R$) működik, tehát $h>R$ esetében egy másik képletet kell meghatároznunk. Szintén kivonással kaphatjuk meg az eredményt: a teljes gömb tehetetlenségi nyomatékából vonjuk ki az előzőekben már meghatározott megfelelő magasságú ($h'=2R-h$) gömsüveg tehetetlenségi nyomatékát – tehát a meghatározott test "komplementerét" (13.4.4 ábra). Figyelni kell a $\Theta_{y(\text{kúp})}$ képletének helyességére: $(R-h)$ itt negatív, tehát előjelet kell váltani.

$$\Theta_{y(\text{süveg})} = \Theta_{y(\text{gömb})} - \Theta_{y(\text{süveg})}'$$



13.4.4 ábra

ba) Gömbsüveg magassága: $h \leq R$

$$\Theta_{y(\text{süveg})} = \Theta_{y(\text{süveg+kúp})} - \Theta_{y(\text{kúp})}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{y(\text{kúp})} &= \frac{3}{5} m_{\text{kúp}} \left(\frac{d^2}{4} + (R-h)^2 \right) = \frac{3}{5} V_{\text{kúp}} \rho \left(\frac{R^2 - (R-h)^2}{4} + (R-h)^2 \right) = \\ &= \frac{3}{5} 10^3 \left(\frac{1}{3} \pi (R^2 - (R-h)^2) (R-h) \right) \left(\frac{R^2 + 3(R-h)^2}{4} \right) = \\ &= 10^3 \frac{1}{20} \pi (R^2 - (R-h)^2) (R-h) (R^2 + 3(R-h)^2)\end{aligned}$$

$$\Theta_{y(\text{süveg})} = 10^3 \frac{1}{5} \pi R^5 \left(\frac{4}{3} + \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right) - 10^3 \frac{1}{20} \pi (R^2 - (R-h)^2) (R-h) (R^2 + 3(R-h)^2)$$

bb) Gömbsüveg magassága: $h > R$

$$\Theta_{y(\text{süveg})} = \Theta_{y(\text{gömb})} - \Theta_{y(\text{süveg})}'$$

$$\Theta_{y(\text{gömb})} = \frac{2}{5} m_{\text{gömb}} R^2 = \frac{2}{5} V_{\text{gömb}} \rho R^2 = 10^3 \frac{2}{5} V_{\text{gömb}} R^2$$

(A gömb térfogata paraméter, mi adjuk meg.)

$$\begin{aligned}\Theta_{y(\text{süveg})} &= 10^3 \frac{2}{5} V_{\text{gömb}} R^2 - 10^3 \frac{1}{5} \pi R^5 \left(\frac{4}{3} + \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right) - \\ &- 10^3 \frac{1}{20} \pi (R^2 - (R-h)^2) (R-h) (R^2 + 3(R-h)^2)\end{aligned}$$

bc) Összegzés

Összesen két paraméterünk van, melyek megadása szükséges, hogy kiszámolhassuk a tehetetlenségi nyomatékokat: ' $V_{\text{gömb}}$ ' - a tartály térfogata, és ' h ' - a vízszint magassága.

A képletekben szerepel még az ' R ' sugár és az ' α ' szög, melyeket az előző két adatból tudunk számolni - lsd. lentebb részletezve.

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V_{\text{gömb}}}{4\pi}}$$

Ha $h \leq R$, akkor:

$$\alpha = \pi - \arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$\Theta_{y(\text{süveg})} = 10^3 \frac{1}{5} \pi R^5 \left(\frac{4}{3} + \cos\alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha\right) - 10^3 \frac{1}{20} \pi \left(R^2 - (R-h)^2\right) (R-h) \left(R^2 + 3(R-h)^2\right)$$

Ha $h > R$, akkor:

$$\alpha = \pi - \arccos\left(1 - \frac{(2R-h)}{R}\right) = \pi - \arccos\left(1 - 2 + \frac{h}{R}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{h}{R} - 1\right)$$

$$\Theta_{y(\text{süveg})} = 10^3 \frac{2}{5} V_{\text{gömb}} R^2 - 10^3 \frac{1}{5} \pi R^5 \left(\frac{4}{3} + \cos\alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha\right) - 10^3 \frac{1}{20} \pi \left(R^2 - (R-h)^2\right) (R-h) \left(R^2 + 3(R-h)^2\right)$$

A pontos számítások helyességét közelítő (szeletelő, azaz a gömbsüveget vékony szeletekre bontva, a tömegközéppont helyét és a tehetetlenségi nyomatékokat elemi eszközökkel meghatározva) módszerrel is ellenőriztük.