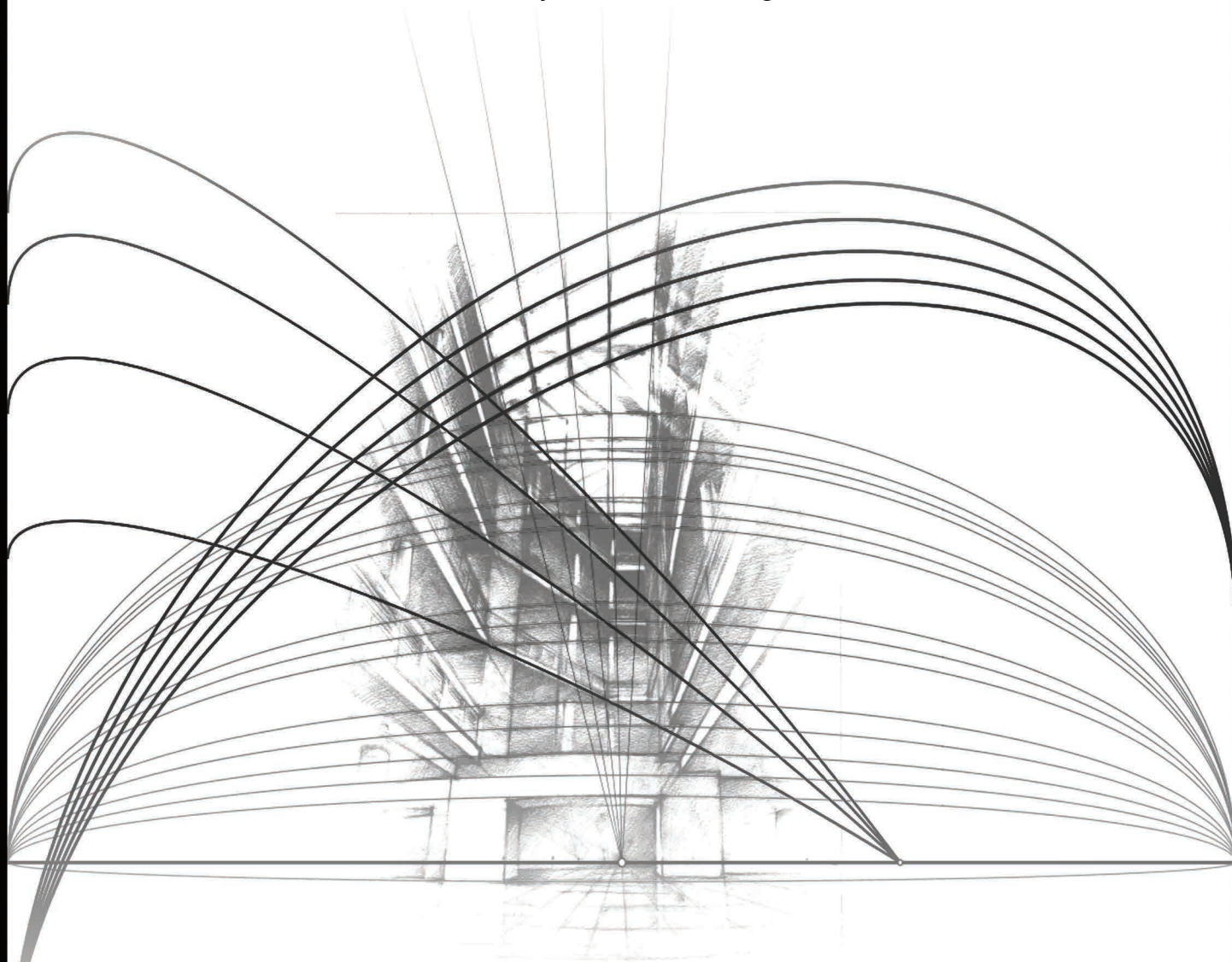


Krajnyák Nándor Bence, Lajos Levente

Vetítés hengerre és gömbre

Tudományos diákköri dolgozat



Konzulens:
dr. Pék Johanna
egyetemi adjunktus

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építésztechnológiai Kar
Építészeti Ábrázolás Tanszék



Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	2
Cilindrikus perspektíva	3
A cilindrikus perspektíva és kapcsolódó alapfogalmak	3
Alapvető geometriai elemek leképezése cilindrikus perspektívában	4
1. A pont képe	5
2. Egyenesek képe.....	8
3. Kör képe és alkalmazásai	18
4. További alakzatok ábrázolása	23
Gyakorlati alkalmazások	24
Átvezetés	24
Esettanulmány	27
Összetett rajz elemzése	31
Gnomonikus perspektíva.....	39
A gnomonikus perspektíva és kapcsolódó alapfogalmak.....	39
Alapvető geometriai elemek leképezése gnomonikus perspektívában	40
1. A pont képe	40
2. Egyenesek képe.....	43
3. Kör képe és alkalmazásai	53
4. További alakzatok ábrázolása	59
Gyakorlati alkalmazások	60
Átvezetés	60
Esettanulmány	62
Összetett rajz elemzése	67
Összehasonlítás.....	73
További vizsgálati lehetőségek.....	74
Irodalomjegyzék	75

Bevezetés

Építészeti tanulmányaink során nagy hangsúlyt fektetünk az épületbelső megjelenítésére. Az ábrázoláskor alkalmazott rendszerek elméleti háttérével szabadkézi rajzból és ábrázoló geometriából is foglalkoztunk. A két tantárgy iránti elkötelezettségünk miatt próbáltuk meg a szabadkézi rajzban használt görbe felületekre történő leképezéseket geometriai úton leírni.

A szakirodalomban nem ismeretlen a hengerre és gömbre való vetítés. A komputergrafika többféle leképezést megkülönböztet, amelyeknél minden esetben a cél a tér valamilyen felületre való vetítése. Ezekről, a nem feltétlenül egyenestartó leképezésekről jó összefoglalást ad David Solomon Transformations and Projections in Computer Graphics [5] című munkájának 4.5, 4.6 és 4.8. fejezetei. A megközelítés azonban ebben a könyvben analitikus, így a leképezések tulajdonságai helyett inkább a komputergrafikában való alkalmazhatóságra koncentrálok. A vetülettanban klasszikus leképezések a cilindrikus és a gnomonikus vetítés. A festőművészek és grafikusok alkotásaiban is megjelenik a hengerre és gömbre vetítés, többek között Dick Termes [6] – akit főként M. C. Escher munkái ihlettek – foglalkozik behatóbban a gömbre vetítéssel.

Munkánkban kísérletet tettünk a művészi ábrázolásban megjelenő leképezések egy lehetséges geometriai leírására. A vetítéseink létrehozásakor kettős célt fogalmaztunk meg: egyrészt hasonlítsanak az emberi látáshoz, másrészt az eredmény egy síkon megjeleníthető legyen. Így két különböző leképezést definiáltunk: a cilindrikus és a gnomonikus perspektívát. Geometriai észrevételeinket – azok kiemelésé érdekében – állítások formájában írjuk le, és bizonyításnak neveztük azok indoklását.

A dolgozatunk első részében a tér egy hengerre való vetítésével foglalkozunk, amelyet cilindrikus perspektívának nevezünk. A leképezés során először a hengerre centrálisan vetítünk, majd a hengeren megjelenő képet merőlegesen a henger egy érintősíkjára vetítjük. Leírjuk, hogy a leképezés milyen tulajdonságokkal bír – ezt főként a rekonstruálhatósági kérdéseken, illetve egyenesek és körök képein keresztül vizsgáltuk meg. A fejezet végén példákön és esettanulmányon mutatjuk be a gyakorlati alkalmazás lehetőségeit.

A második részben a teret centrális vetítéssel egy félgömbön ábrázoljuk, azután a kapott eredményt egy síkra vetítjük. A leképezést gnomonikus perspektívaként említjük, és a cilindrikus perspektívánál olvasható vizsgálatokat végeztünk el.

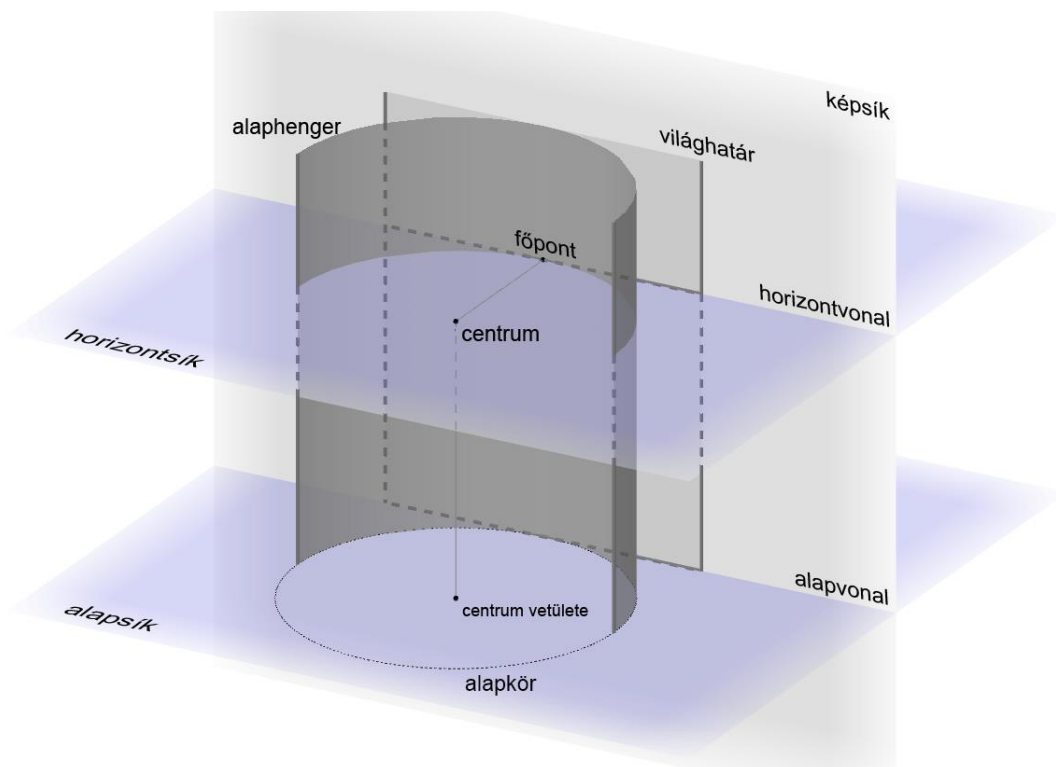
A diákköri dolgozatunkban a kétdimenziós szerkesztéseket és a szemléltető ábrákat is a GeoGebra nevű programmal készítettük el.

Távlati céljaink között szerepel a két leképezés további tanulmányozása, alkalmazási lehetőségeinek bővítése, továbbá a vetítések általánosítása vagy módosítása, hogy még jobban közelítse az emberi látást mint leképezést.

Cilindrikus perspektíva

A cilindrikus perspektíva és kapcsolódó alapfogalmak

Definíció: A tér elemeit egy középpontból, vetítőegyenesek segítségével egy függőlegesen álló félhenger palástjára vetítjük. Ezután – a síkbeli ábrázolhatóság érdekében – a felületen kirajzolódó képet merőlegesen rávetítjük a henger egyik érintősíkjára. Az érintősík párhuzamos a félhenger palástját határoló két szélső alkotóval. Ezt a leképezést *cilindrikus perspektívának* nevezzük. A vetítési középpont (a perspektívához hasonlóan) a *centrum*, a henger, amire vetítünk, az *alaphenger*, az említett érintősíkot pedig *képsík*nek nevezzük. A félhenger palástját határoló alkotók képe a *világhatár*. Az alaphenger tetszőlegesen felvehető vízszintes *alapsíkkal* vett metszete az *alapkör*, ennek középpontja a *centrum vetülete*. Az állóképsíkos perspektívához hasonlóan az alapsík és a képsík metszése az *alpvonalat* adja. A centrum a vízszintes *horizontsíkon* helyezkedik el, ami a képsíkből a *horizontvonalat* metszi ki. A centrum képsíkra eső merőleges vetülete a *főpont*, amely a horizontvonalon helyezkedik el.



1. ábra: A cilindrikus perspektíva rendszerének elemei

Megjegyzés: Amennyiben a szövegekörnyezetből nem derül ki egyértelműen, hogy milyen leképezést alkalmazunk, az alapfogalmak előtt a „cilindrikus” jelzőt is szerepeltetjük.

A cilindrikus perspektíva kifejezés ellentmondásos lehet, hiszen a perspektíva elnevezést kizárólag síkra történő, egyenestartó leképezések esetén használjuk. Az általunk létrehozott geometriai rendszer sok hasonlóságot mutat a klasszikus perspektívával. A cilindrikus jelző szerepeltetésével kívántuk érzékeltetni, hogy a leképezés egyenestartása az esetek nagy részében csorbul. A cilindrikus projekció elnevezés pedig azért nem lenne helytálló, mert a vetülettanban használt leképezéssel keverhetnénk össze.

A cilindrikus perspektíva kifejezést magyarrá fordítva a „hengerre való középpontos vetítés” elnevezést kapjuk, amely jól összefoglalja a rendszer sajátosságait, és az eljárás lépéseit is.

A cilindrikus perspektíva a belső terek építészeti ábrázolásainál jut fontos szerephez, ahol az egyszerű álló (esetenként dőlt képsíkos) perspektíva már nem alkalmas megoldás. Ennek oka a látás mechanizmusából eredő 60 fokos látókúp. A látókúp korlátozott mérete miatt a kiterjedt terek nem férnek bele látóterünkbe, csak nagy távolságból. Ahhoz, hogy ezt a problémát áthidaljuk, szükséges egyfajta tömörítés, amellyel elérhetjük, hogy a minket körülvevő tér érthető és átlátható módon a papírra kerülhessen. A tömörítés az egyenesek és a szögek torzulásával jár, viszont a velünk szemben lévő téri világot két függőleges egyenes által határolt síkrészen meg tudjuk jeleníteni. Mindezt úgy, hogy az ábrázolt belső térről igen szemléletes képet kapunk.

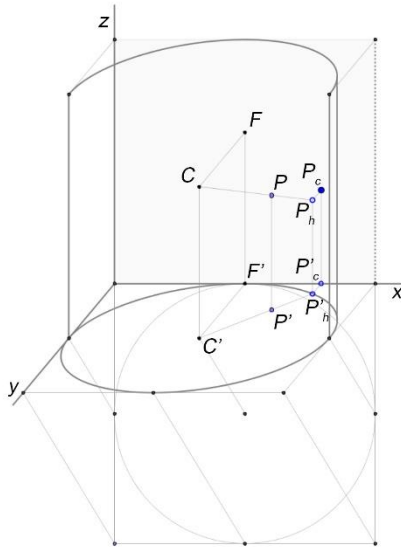
A cilindrikus perspektíva – a klasszikus perspektívához hasonlóan –, a szem képképzési eljárásából nyeri a centrális projekció ötletét. Azonban a képiességet tovább növeli azzal, hogy hengerfelülettel közelíti a szem ideghártyájának alakját. Ezek alapján is sejthető, hogy a leginkább valóság-hű leképezés a gnomonikus perspektíva során jön létre. Ott, a felhasznált gömb segítségével még pontosabban közelítjük a szem leképezési eljárását. A gnomonikus perspektíváról a dolgozat második felében írunk bővebben.

Alapvető geometriai elemek leképezése cilindrikus perspektívában

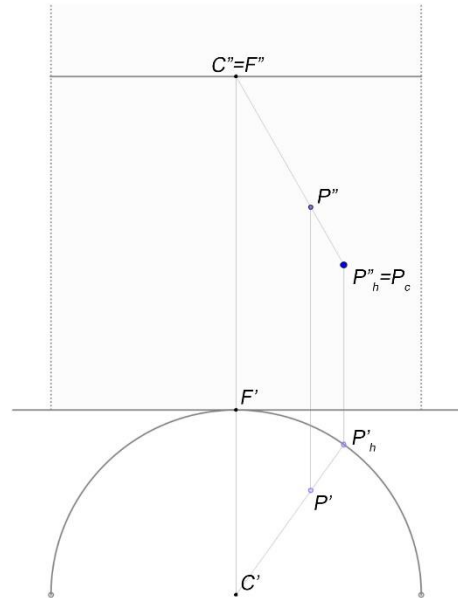
A leképezés ábrázolásához frontális axonometrikus, illetve Monge-rendszerű magyarázó ábrákat használunk, mivel ezekben a rendszerekben könnyen tudjuk végrehajtani a cilindrikus perspektív kép létrehozásához szükséges lépéseket. Monge-projekcióban az alapsík a K_1 képsík, a cilindrikus leképezés képsíkja pedig a K_2 képsík. Frontális axonometriában az alapsík az $[x,y]$, a képsík az $[x,z]$ koordinátasík. Ezen leképezések esetében valódi méretű kép keletkezik: Monge-féle ábrázolás esetében a második képsíkon, frontális axonometria esetén pedig az $[x,z]$ síkon.

1. A pont képe

A geometriai elemek közül a két vetületével megadott P pontot tudjuk a legegyszerűbben hengerre vetíteni. Először a centrumot a ponttal összekötő egyenessel (vetítőegyenessel) eldöfjük a félhenger palástját, utána ezt a P_h dőféspontot vetítjük merőlegesen a képsíkra (P_c pont).



2. ábra: Pont cilindrikus perspektív képe frontális axonometriában



3. ábra: Pont cilindrikus perspektív képe Monge-rendszerben

Monge-rendszerben szerkesztve ehhez a centrum (C') és a P pont alapsíkon vett vetületeit (P') kötjük össze, majd az alaphenger alapköréből kimetsszük azt az alkotót, amelyre a pont hengerre vetített képe esni fog. A centrumot és a P pontot összekötő egyenessel ezután kimetsszük ebből az alkotóból a hengerre vetített $P_h=P_c$ képet. Mivel a Monge-rendszer alapvetően merőleges vetítés működik, a leképezés ezen részét (a képsíkra való végleges vetítést) már nem kell külön elvégezni. *Ez azt jelenti, hogy a hengeren keletkező P_h kép Monge-féle P'' második képe egyúttal a „végeredmény” (P_c) is.*

Megjegyzés: A továbbiakban az áttekinthetőség érdekében a $P_h=P_c$ jelölés helyett csak a P_c jelölést használjuk.

Axonometriában a rendszerbeli eltérések miatt a merőleges vetítést külön el kell végeznünk. Itt kialakul egy „köztes kép” is, amely a hengerre vetített állapotot mutatja. Az axonometrikus rendszerekben fellépő több szerkesztési lépés miatt a Monge-projekcióban készített szerkesztések áttekinthetőbbek és tisztábbak.

Megjegyzés: A két rendszer felhasználásával az alapvető illeszkedési és metszési feladatokat végre tudjuk hajtani a cilindrikus perspektíva rendszerében is. *A Monge-projekcióba való beágyazottság azért is hatékony, mert így a cilindrikus perspektívában jelentkező összes szerkesztési probléma visszavezethető a már jól ismert leképezésre.*

Jelen dolgozat célja átfogóan és kompakt módon lefektetni a hengerre vetítés szerkesztési rendszerét.

Kitűzésünk továbbá ezek alapján megállapítani olyan jellegzetességeket, amelyek gyakorlatban hasznosíthatóak akár szabadkézi rajzolásnál is.

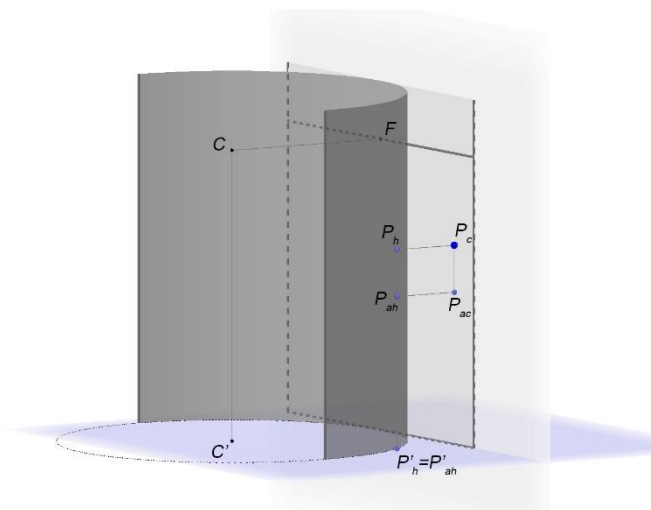
A további illeszkedési és metszési feladatok, valamint az ezekből levezethető összetett szerkesztések (például árnyékszerkesztés) további vizsgálatok tárgyát képezik, ebben a dolgozatban ezeket nem tárgyaljuk bővebben.

1.1. Rekonstruálhatóság

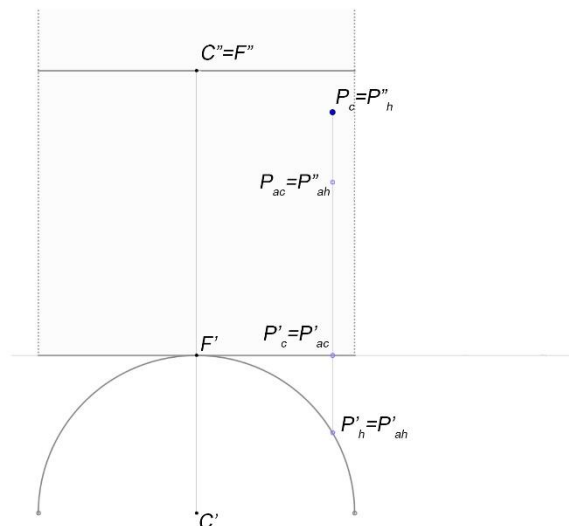
Már a pont ábrázolásának tárgyalásánál érdemes kitérni a rekonstruálhatóság kérdésére. Sok esetben fontos ugyanis, hogy a kezünkbe vett kép alapján meg tudjuk határozni az ábrázolt épület, épületrész vagy tárgyak pontos méreteit. Az állóképsíkos perspektívával a cilindrikus perspektíva itt is rokonságot mutat. Hasonló módon, ha adott a pont alaprajzi vetülete és magassága – akárcsak az állóképsíkos perspektívánál –, néhány lépéssel vissza tudjuk szerkeszteni a pont térbeli képét.

Állítás: A leképezés menete megfordítható, azaz a pont és annak alapsíkra eső vetületének képeiből rekonstruálható az eredeti objektum.

Bizonyítás: A rekonstruálhatóság alapfeltétele, hogy ismerjük a pont alapsíkra eső vetületének képét, illetve a térbeli pont képét is – melyek természetesen közös rendezőre esnek. Első lépésként a képsíkon kirajzolódó P_c pontnak és a P_{ac} vetületének megkeressük a hengerpalástra eső képét, azaz visszavetítjük azokat a hengerre. A hengerre vetülő képek: P_h és P_{ah} . (4-5. ábra)

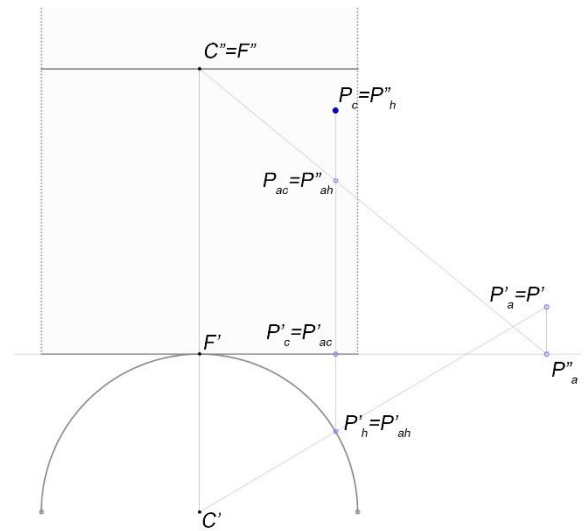
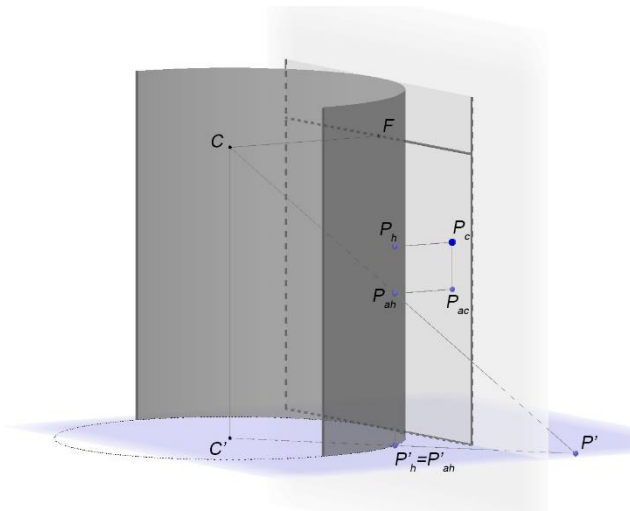


4. ábra: Pont rekonstruálása, magyarázó ábra



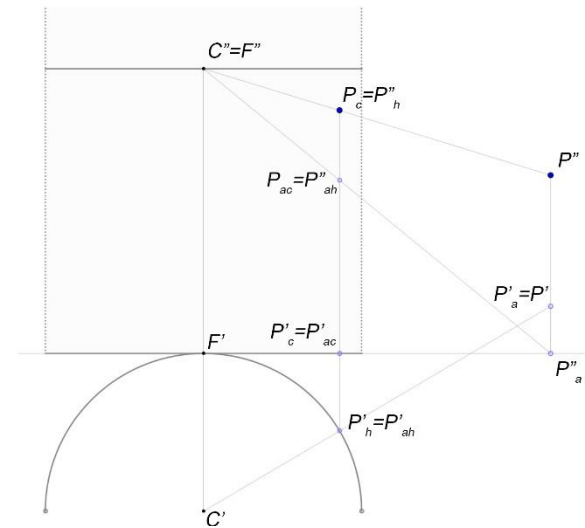
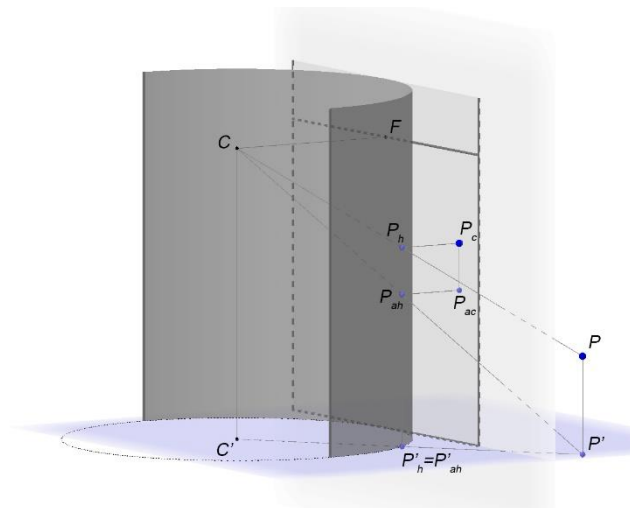
5. ábra: Pont rekonstruálása, Monge-rendszer

A következő lépésben meghatározzuk az alapsíkon lévő P' vetületet, amely a CP_{ah} egyenes alapsíkkal közös pontja – az egyenes első nyompontja. A kapott pont egyúttal a P pont első képe is. (6-7. ábra)



6. ábra: Pont rekonstruálása, magyarázó ábra 7. ábra: Pont rekonstruálása, Monge-rendszer

Végül a térbeli P pont hiányzó második képét is megszerkesztjük. Ez az pont a $P'=P'_a$ -ból az alapsíkra (K_1 -re) állított merőleges és a CP_h egyenes metszéspontja. (A metszéspont létezik, mivel a két egyenes közös függőleges síkban van.) (8-9. ábra)



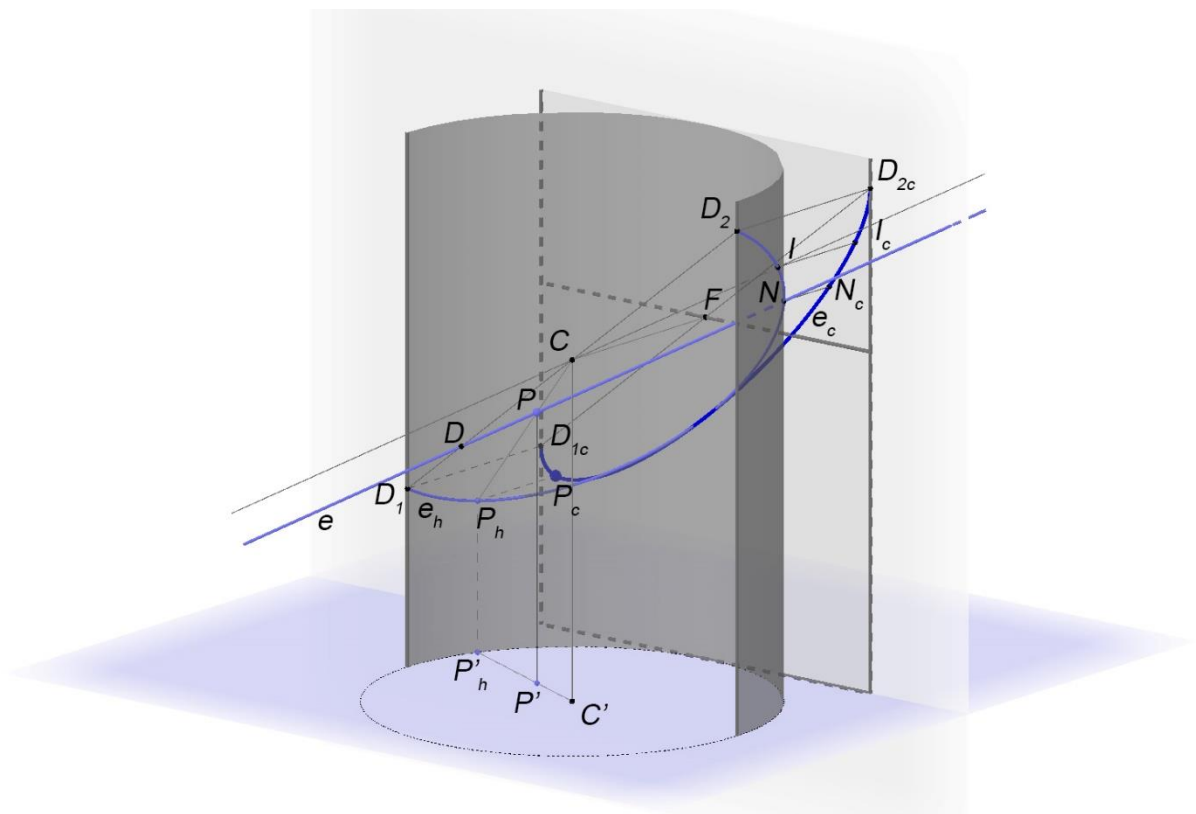
8. ábra: Pont rekonstruálása, magyarázó ábra 9. ábra: Pont rekonstruálása, Monge-rendszer

Megjegyzés: Dolgozatunkban az alapsíkra eső vetületet – az áttekinthetőség érdekében – csak akkor tüntettük fel, ha az kiemelt szerepet kap az adott szerkesztésben.

2. Egyenesek képe

A klasszikus perspektíva alapeleme az egyenes, amelyet nyompontjával és iránypontjával adunk meg. Erre lehetőség van a cilindrikus perspektíva esetén is. Az egyenes *nyompontja* a hengerrel alkotott dőléspontja (ha létezik), *iránypontja* a végtelen távoli pontjának hengerre eső képe.

A gyakorlatban kiemelt szerep jut az egyeneseknek, ugyanis a különböző építészeti terek leképezésénél egyenesekből felépített térrácsokat alkalmazunk. Ehhez szükséges végiggondolnunk a különböző speciális helyzetű egyenesek cilindrikus perspektív képének alakulását, hogy a lehető legpontosabb térrácsot képezhessük segítségükkel.



10. ábra: Egyenes vetítése hengerre

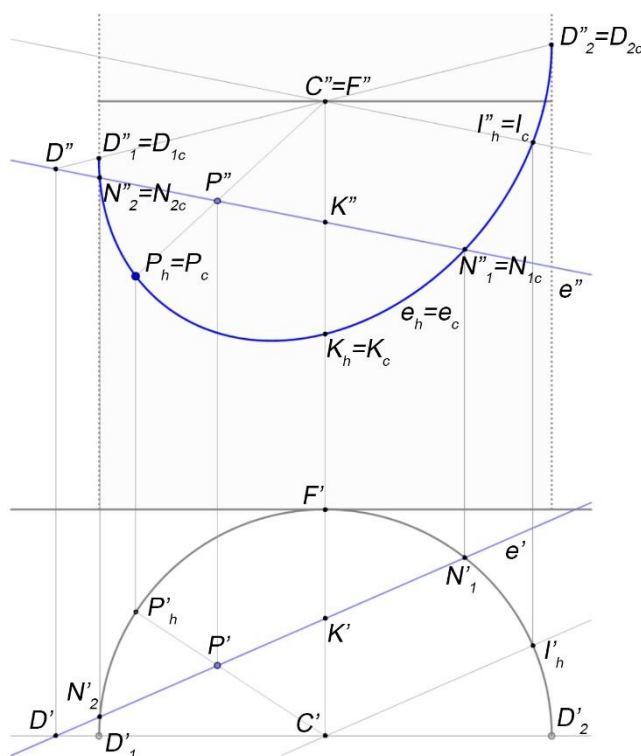
Egyenesek vetítésekor az adott egyenesre vetítősíkot illesztünk a centrumon keresztül. Ezzel a síkkal metsszük az alaphengert, és a síkmetszetet merőlegesen rávetítjük a képsíkra. A henger síkmetszete ellipszis (speciális helyzetben kör), illetve két alkotó lehet, ezért az egyenesek képe cilindrikus perspektívában ellipsziszív, illetve szakasz lehet. Ebből is láthatjuk, hogy a leképezés nem egyenestartó.

Ha megvizsgáljuk a konkrét eseteket, a következő csoportosításokkal élhetünk:

2.1. Általános helyzetű egyenes

Mind geometriai, mind rajzi területen sokszor kell megoldanunk általános helyzetű egyenesek ábrázolását. Rajzok esetében legtöbbször a rámpák, ékek, gúlák élei esnek kívül a merőleges térrács rendszerén.

Állítás: Általános helyzetű egyenesek cilindrikus perspektívában ábrázolt képe félellipszis.



11. ábra: Általános egyenes cilindrikus perspektív képe

Bizonyítás: Ha általános helyzetű egyenesre és a centrumra illesztett vetítősíkkal metsszük a hengert, a kimetszett síkgörbe ellipszis. Mivel a henger tengelyére illeszkedik a centrum, ezért az ellipszis középpontja is egyben. Az ellipszis egyik tengelye a D_1D_2 szakasz, a másik tengelyt a K_h pont és annak C -re vonatkozó tükörképe adja. A merőleges vetítés ezt ellipszisbe viszi. A képellipszis középpontja az F főpont, két érintője a „világhatár”. Ez a két egyenes egymással párhuzamos, ezért a D_1D_2 (a dupla képpel bíró D pont képei) egy ellipszisátmérő. Az ehhez konjugált átmérő az érintőkkel párhuzamos, és könnyen szerkeszthető: a CF egyenest tartalmazó, függőleges sík dőléspontja az egyenessel a K pont, ennek K_c cilindrikus képe a keresett konjugált átmérő egyik végpontja.

Az egyenes végtelen távoli pontjának képét a centrumba párhuzamosan eltoló egyenes segítségével határozhatjuk meg. Ez a vetítőegyenest eldöfi az alaphengert, majd ezt a pontot merőlegesen a képsíkra vetítve megkaphatjuk az egyenes I iránypontját.

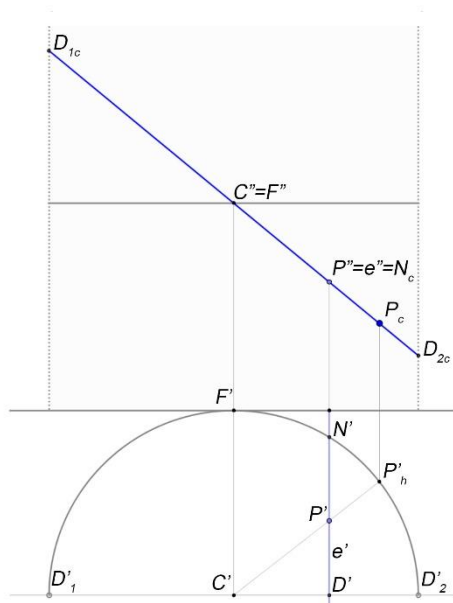
Megjegyzés: A bizonyításból kiderül, hogy a D pont dupla képű, mivel a C -ből húzott vetítőegyenest az alaphengert a két határalkotóban metszi. A D_1D_2 ellipszisátmérő minden esetben a függőleges irányhoz tartozó konjugált átmérő.

Megjegyzés: Látható, hogy N_1 pont az e -nek és az e_h -nak is eleme, így az N_{1c} pont az e'' és az e_c egyik közös pontja. Ugyanezek teljesülnek N_2 esetében is.

2.2. Képsíkra merőleges egyenesek

Rajzolásnál nem ritka, hogy főpontos perspektívával találkozunk (leggyakrabban például folyosók lerajzolásánál), ennek természetesen létezik cilindrikus perspektív változata is. Hasonlóan az állóképsíkos perspektívához, itt is képsíkkal párhuzamos és arra merőleges egyenesekből építjük fel a térrácsot. A főpontos perspektíva gyakorisága miatt pedig fontosnak tartjuk, hogy megvizsgáljuk a képsíkra merőleges egyeneseket.

Állítás: A képsíkra merőleges egyenesek képe egyenes marad, iránypontjuk a főpont.



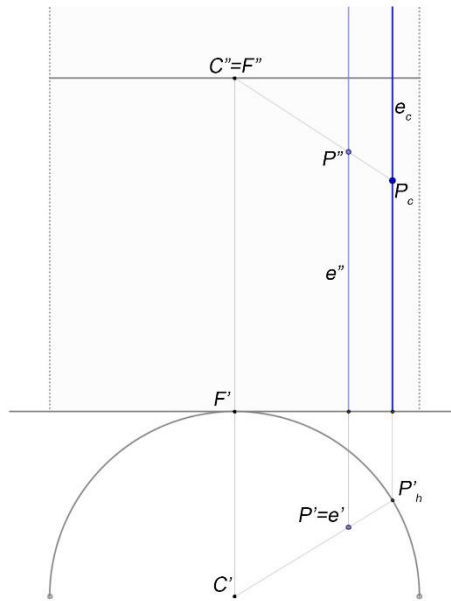
12. ábra: Képsíkra merőleges egyenes

Bizonyítás: Tekintsük a képsíkra merőleges egyenesre és a centrumra illeszkedő síkot. Ez a sík elmetszi az alaphengert. Így egy olyan ellipszist kapunk, amelynek síkja merőleges a képsíkra, vagyis a merőleges vetítéskor az ellipszis élben látszik. Az ellipszis nagytengelyének hossza a D_1D_2 szakasz hossza, a kistengely hossza az alapkör átmérőjével egyezik meg. A végtelen távoli pont képe a főpont.

2.3. Alapsíkra merőleges (függőleges) egyenesek

A rajzi gyakorlatban az egyenesek hengerre vetítésekor a függőleges egyeneseknél érezzük szemlélet alapján leginkább, hogy egyenesek maradnak. A térrácsok egyik seregbeli egyeneseit többnyire ezek a típusú egyenesek adják. Geometriai szerkesztéseknél is sok segítséget ad, ha ezeket az egyeneseket fel tudjuk használni.

Állítás: A függőleges (az alaphenger alkotóival párhuzamos) egyenesek cilindrikus perspektív képe is egyenes marad.



13. ábra: Alapsíkra merőleges (függőleges) egyenes

Bizonyítás: Ha a centrum és az alaphenger alkotóival párhuzamos egyenesre vetítősíkot illesztünk, a sík az alaphengerből alkotót metsz ki. A merőleges egyenestartó, így a merőleges vetítés során is egyenes marad a hengeren kirajzolódó kép. A képsíkon megjelenő egyenes iránya pedig továbbra is függőleges (az alaphenger alkotóival párhuzamos) marad.

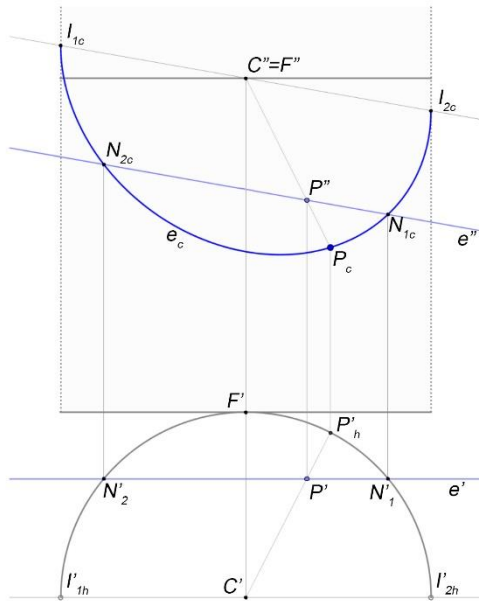
Megjegyzés: Mivel az egyenes ebben az esetben nem dőli az alaphengert, az alapsíkra merőleges tetszőleges egyenesnek nem létezik nyompontja cilindrikus perspektívában. Ha az ilyen típusú egyeneseket párhuzamosan eltoljuk a centrumba, szintén nem keletkezik dőléspont a hengerrel, így iránypont sincs.

2.4. Képsíkkal párhuzamos egyenesek

Főpontos perspektíva esetén a merőleges térrács másik seregbeli egyeneseit a képsíkkal párhuzamos egyenesek adják, így ez is gyakran előfordul, mint a képsíkra merőleges egyenesek ábrázolása.

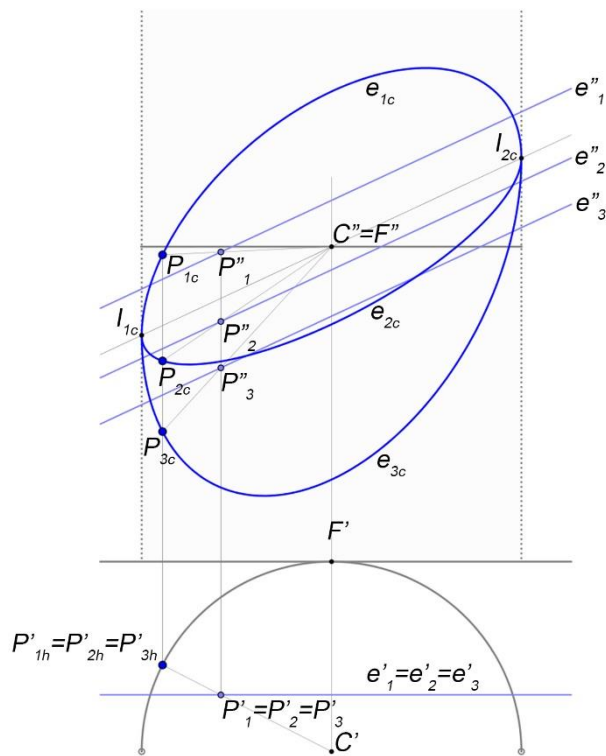
Állítás: A képsíkkal párhuzamos egyenesek cilindrikus perspektívában vett végtelen távoli pontjának kettős képe a két „világhatárra” esik.

Bizonyítás: A képsíkkal párhuzamos egyenesek végtelen távoli pontját a C centumból vetítve kettős kép jön létre: mindkét szélső alkotón megjelenik a pont vetülete.



14. ábra: Képsíkkal párhuzamos egyenes

Megjegyzés: A képsíkkal párhuzamos egyenessereg képe a kettős képű iránypont miatt azt az érzetet kelti, mintha egyenseink mindkét irányban „összetartanának”.

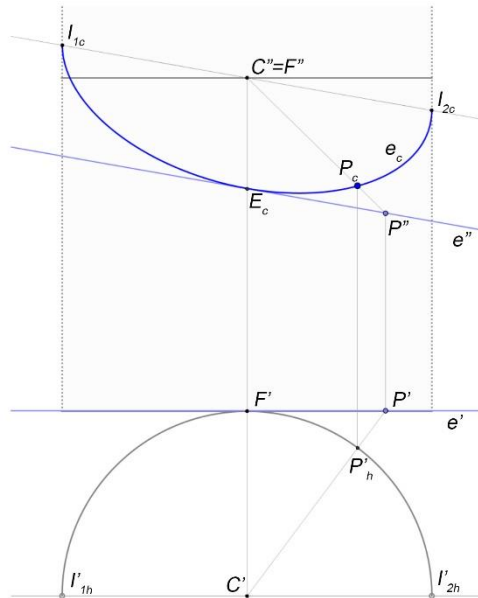


15. ábra: Képsíkkal párhuzamos egyenesek összetartása

2.5. Képsíkban lévő egyenesek

A 2.4. speciális esete.

Állítás: Egy képsíkban lévő egyenes képe olyan félellipszis, amelynek érintője az adott egyenes. Az érintési pont a főpontba állított függőleges egyenesre esik.



16. ábra: Képsíkban lévő egyenes

Bizonyítás: Vegyük a képsíkra eső egyenes és a centrum által meghatározott síkot. Ez a sík egy olyan ellipszist metsz ki a hengerből, amely tartalmazza az egyenesnek a főponton áthaladó alkotóval vett metszéspontját (a henger és az egyenes közös pontja). Tekintsük az ellipszist a vetítősík és az alaphenger áthatási görbéjeként. Az ellipszis ezen pontjába húzott érintőegyenest határozzuk meg az áthatásban részt vevő felületek pontbeli érintősíkjának segítségével. A henger pontbeli érintősíkja a képsík, a másik érintősík pedig maga a vetítősík. Ennek a két síknak a metszéspontja az eredetileg vetítendő egyenes. A vetítendő egyenes tehát érintője a hengeren kirajzolódó ellipszisnek, ez a tulajdonsága pedig a merőleges vetítés után is megmarad.

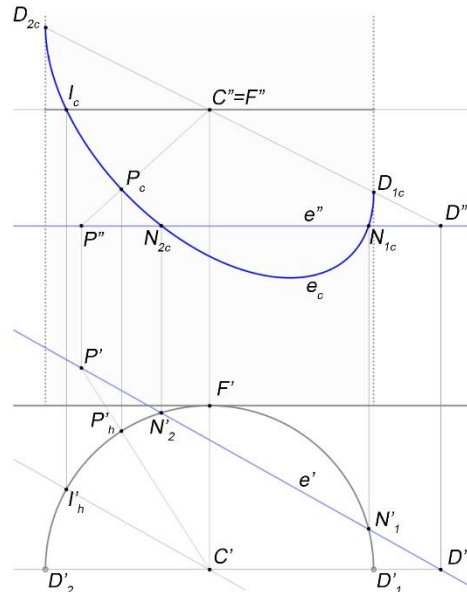
Másképp igazolva: Az l_1/l_2 az általános egyeseknél tárgyalt módon az alkotóirányú ellipszismérő (jelen esetben az E és annak C -re vonatkozó tükörképe által meghatározott szakasz) konjugált párja. Az e párhuzamos az l_1/l_2 -vel, ami a vetítés során párhuzamos marad önmagával, így az e valóban E pontbeli érintő.

Megjegyzés: Az E pont egyúttal az egyenes nyompontja is.

2.6. Alapsíkkal párhuzamos és alapsíkbeli egyenesek

A rajzok túlnyomó részében ezek az egyenesek a legfontosabbak, hiszen legyen szó főpontos vagy általános perspektíváról, mindig az ilyen típusú egyenesekből építjük fel a perspektív térrácsot. Cilindrikus perspektívában pedig, a szemléletet alátámasztó módon nem csak a szögtorzulás lép fel, mint az álló képsíkos perspektívánál, hanem az egyenestartás is csorbul.

Állítás: Az alapsíkkal párhuzamos egyenesek iránypontja a horizontvonalra esik.



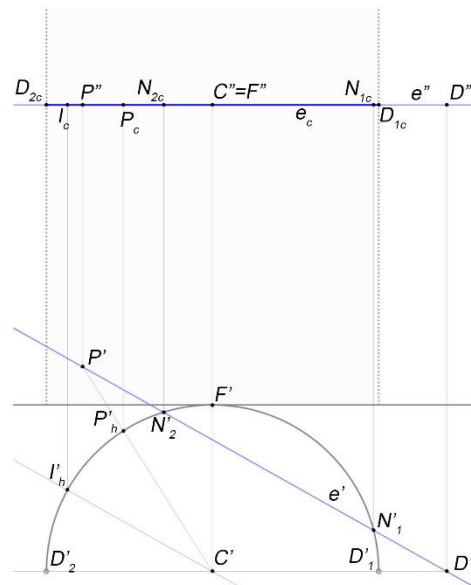
17. ábra: Alapsíkkal párhuzamos egyenes

Bizonyítás: Az alapsíkkal párhuzamos egyenesek esetében a végtelen távoli pont képe azonos magasságba kerül a centrummal, vagyis a horizontsíkba esik. A merőleges vetítés során a horizontsík élben látva a horizontvonal képében jelenik meg, a síkba eső végtelen távoli pont pedig illeszkedni fog a horizontvonalra.

2.7. Horizontsíkbeli egyenesek

A 2.6. speciális esete.

Állítás: A horizontsíkban lévő egyenesek képei cilindrikus perspektívában a horizontvonalra eső szakasz.

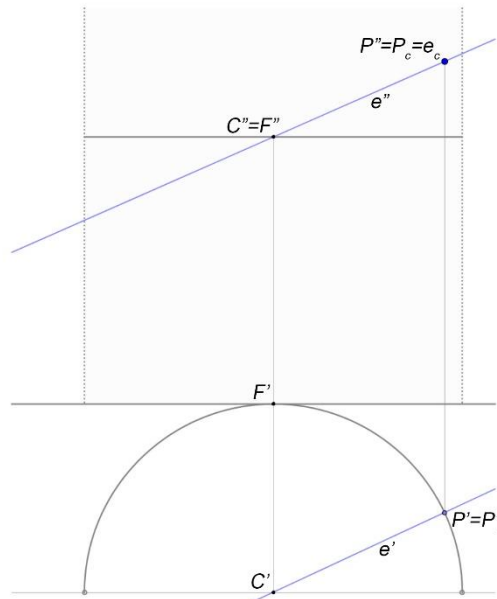


18. ábra: Horizontsíkbeli egyenes

Bizonyítás: A centrális vetítés során a horizontsík minden pontja a centrum magasságában lévő paralel körre esik, amelyek a merőleges vetítéssel a horizontvonalra esnek. Így egy horizontsíkbeli egyenes cilindrikus képe a horizontvonalra kerül.

2.8. Centrumon áthaladó egyenesek (vetítőegyenesek)

Állítás: A C-n áthaladó egyenesek, vagyis vetítőegyenesek képe egy vagy két darab pont.



19. ábra: Vetítőegyenesek

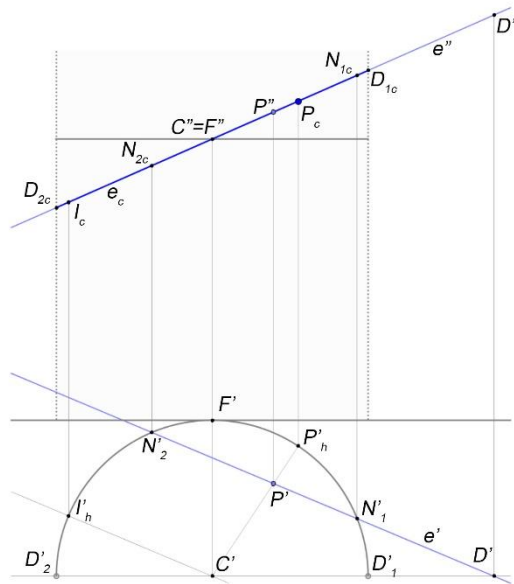
Bizonyítás: A vetítőegyenesek esetében nem síkot illesztünk, hanem egyszerűen eldöfjük az alaphenger palástját. Az így kapott egy (vagy képsíkkal párhuzamos vetítőegyenesek esetében két) dőféspontot merőlegesen rávetítjük a képsíkra. Ugyanez a pont az egyenes nyompontja és iránypontja is egyben.

2.9. Centrumot és főpontot összekötő egyenest metsző egyenesek

Bár rajzi gyakorlatban nem olyan gyakran találkozunk ilyen egyenesekkel, mégis fontosnak tartunk megemlíteni egy újabb speciális esetet, amikor az egyenesek képei cilindrikus perspektívában is egyenesek maradnak.

Állítás: A centrumot és a főpontot összekötő egyenest metsző bármely egyenes képe egyenes marad a cilindrikus perspektív leképezés során, és az egyenesek képe tartalmazza a főpontot.

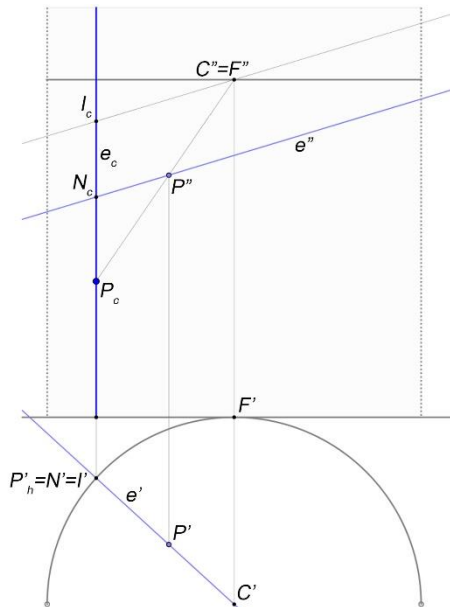
Bizonyítás: A fentebb említett követelményeknek eleget tévő egyenes, és a centrum által meghatározott síknak vesszük az alaphengerrel való metszetét. Ekkor egy olyan ellipszist kapunk, amelynek síkja merőleges a képsíkra, így a merőleges vetítés során az ellipszis élben látszik. Mivel a főpont az ellipszisre esik, vetítés után is illeszkedni fog az egyenes képére.



20. ábra: A CF egyenest metsző egyenes

2.10. A CC' egyenest metsző egyenesek

Állítás: A CC' egyenest metsző egyenesek képe cilindrikus perspektívában egyenes marad.



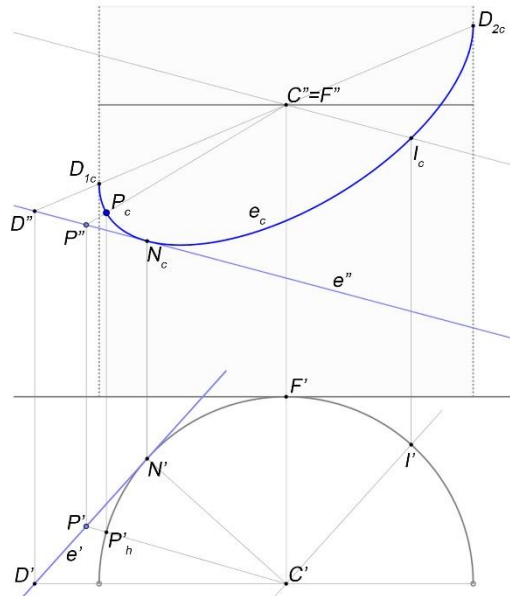
21. ábra: A CC' egyenest metsző egyenes

Bizonyítás: Mivel a CC' egyenes függőleges, az ezt metsző egyenesekre illesztett vetítősík függőleges helyzetű. Ha ezzel a síkkal metsszük az alaphengert, akkor egy alkotót metsszünk ki a felületből, amely vetítés után is egyenes marad.

Megjegyzés: A függőleges egyenesekkel mutat hasonlóságot (ugyanolyan helyzetű a vetítősík), azzal az eltéréssel, hogy ebben az esetben létezik nyompont és iránypont.

2.11. Az alaphenger palástját érintő egyenesek

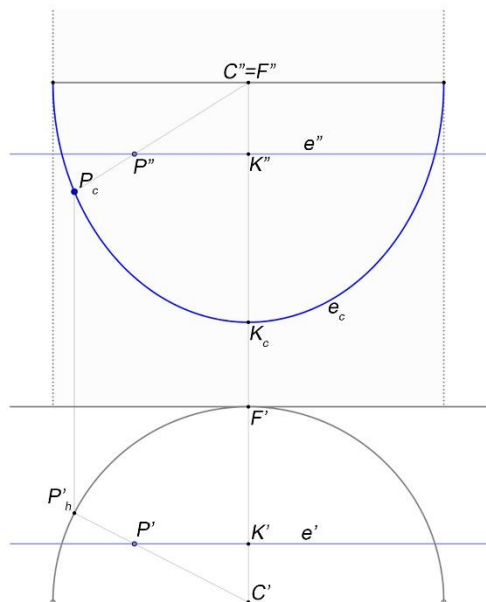
Állítás: Az alaphenger palástját érintő egyenesek képe olyan félellipszis, amelyet érint az egyenes képe.



22. ábra: Az alaphengert érintő egyenes

Bizonyítás: A henger palástját érintő egyenesre és a centrumra illesztett vetítősík ellipszist metsz ki az alaphengerből. Ezt az ellipszist a vetítendő egyenes érinti az N pontban (az alaphengerral vett érintőpontjában). A merőleges vetítés után ez a tulajdonság megmarad.

2.12. Alapvonallal párhuzamos egyenesek



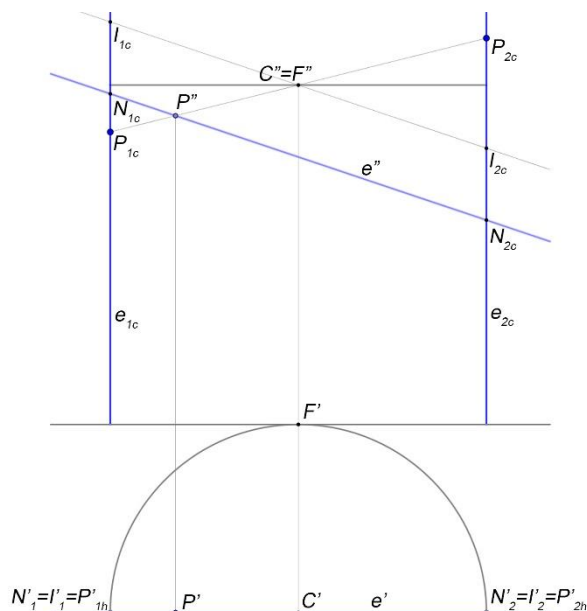
23. ábra: Alapvonallal párhuzamos egyenes

Az alapvonallal párhuzamos egyenesek a 2.4. és 2.6. esetek közös alosa. Az alapvonallal párhuzamos egyenes képe olyan félellipszis, amelynek nagytengelye

vízszintes, hossza az alaphenger átmérője. Függőleges kistengelyének végpontja a K pont cilindrikus perspektív képe.

2.13. Határalkotók síkjában lévő egyenesek

A határalkotók síkjában lévő egyenesek összes pontja kettős képpel rendelkezik cilindrikus perspektívában. Így az egyenes is kettős vetülettel bír: a két határalkotó képével esik egybe.



24. ábra: A határalkotók síkjában lévő egyenes

Összegzés

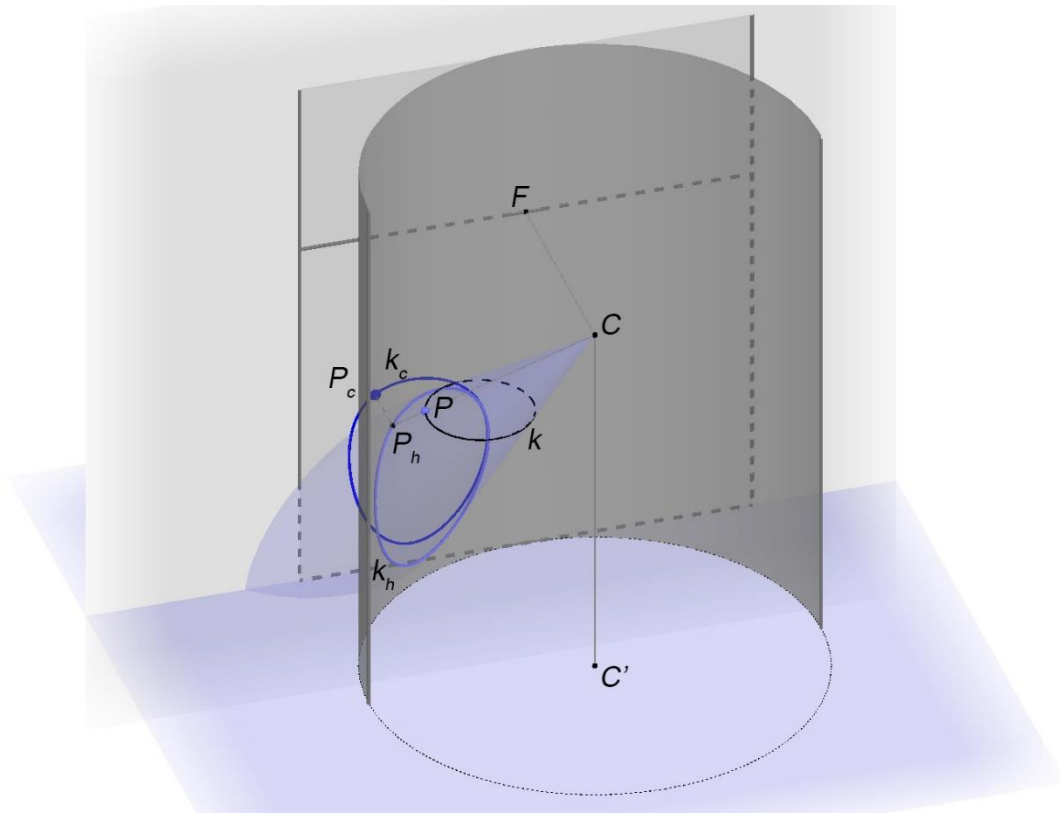
Azok az esetek, amikor egy egyenes képe egyenes (vagy szakasz) marad, két nagy csoportra oszthatók:

- A vetítősík képsíkra merőleges (a kép világhatártól világhatárig tartó szakasz),
- A vetítősík függőleges (hengeralkotót metsz ki a vetítősík, így egyenes a kép).

3. Kör képe és alkalmazásai

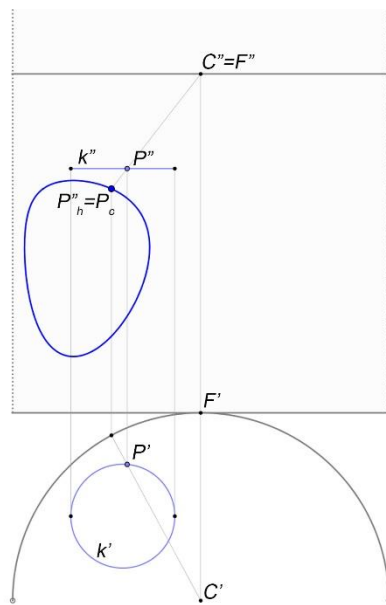
Geometriai megközelítésből fontos tisztázni, hogy egy adott leképezés körtartó-e, illetve másodrendű görbét másodrendűbe visz-e át. A görbék és görbült felületek közül leggyakrabban a körrel, illetve a hengerrel találkozunk rajzoláskor, főképp oszlopok formájában.

Kör ábrázolásakor vetítőkúpot alkalmazunk, melynek alapköre az ábrázolni kívánt kör, csúcsa pedig a centrum. Az így kapott kúpnak és az alaphengernek szerkesztjük az áthatását, majd az áthatási görbét vetítjük merőlegesen a képsíkra.



25. ábra: A kör cilindrikus perspektív képe

Állítás: A cilindrikus perspektíva a kört negyedrendű görbeívbe viszi át.



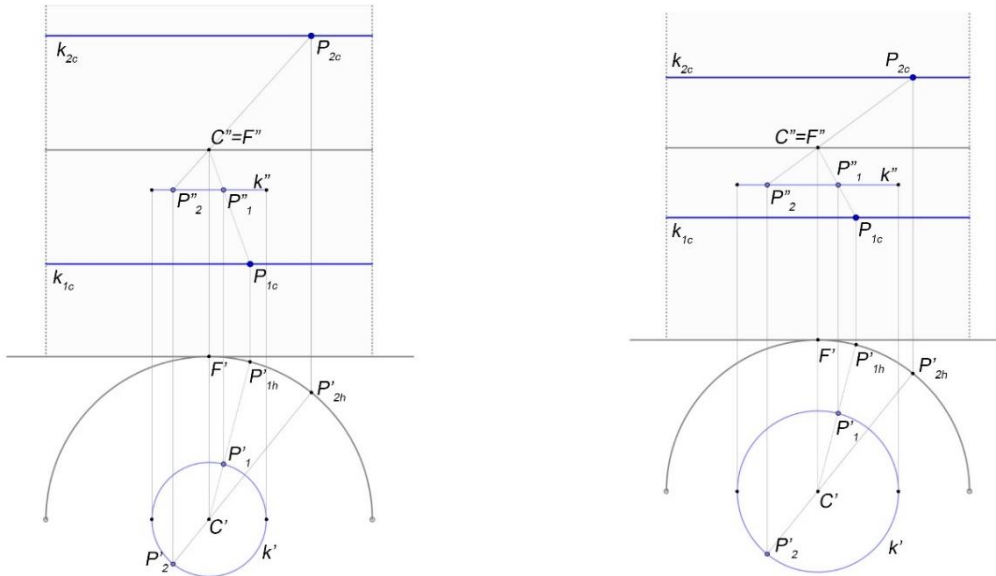
26. ábra: A kör cilindrikus perspektív képe Monge-rendszerben

Bizonyítás: Egy tetszőlegesen felvett kör, és a centrum által meghatározott vetítőkúpot képezzük. Ennek a kúpnak az alaphengerrel vett áthatási görbéje negyedrendű térgörbe, amely merőlegesen a képsíkra vetítve negyedrendű síkgörbébe megy át.

3.1. Speciális helyzetű körök

a)

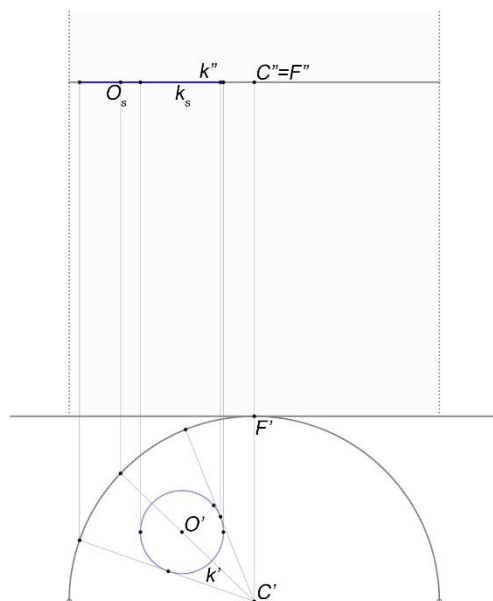
A körök közül speciálisnak tekinthető az a felvétel, amikor a kör középpontja a henger tengelyére esik, és síkja párhuzamos az alapsíkkal. Ebben az esetben a vetítőkúp a hengerből két kört metsz ki, melyek síkjai merőlegesek a henger tengelyére, így a képsíkra is. A merőleges vetítés során ezért a körök élben látszanak, szakaszokként, melyek hossza az alaphenger átmérője ("világhatártól világhatárig tart"). Érdekesség, hogy az ilyen körök méretének változtatása nem méretbeli, hanem magasságbeli eltérést okoz a képek között.



27. ábra: Speciális helyzetű körök képe változó sugár mellett

b)

A horizontalsíkban lévő kör képe a horizontvonalra eső szakasz. A szakasz végpontjait a C centrumból a körhöz húzott érintők érintési pontjainak képei határozzák meg.

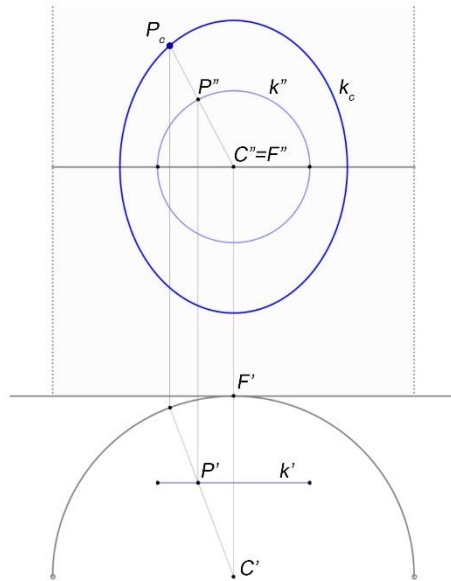


28. ábra: Horizontalsíkban lévő kör képe

Megjegyzés: A kör középpontjának képe *nem* a szakasz felezőpontjával esik egybe.

c)

Abban az esetben is speciális helyzetű képet kapunk, ha a kör középpontja a CF egyenesre illeszkedik, továbbá síkja párhuzamos a képsíkkal. Ekkor a vetítőkúp tengelye éppen a CF egyenes. A keletkező negyedrendű görbét merőleges iránnyal vetítve ellipszis képet kapunk. (A merőleges irány az áthatási görbe kettős vetületét adja.)

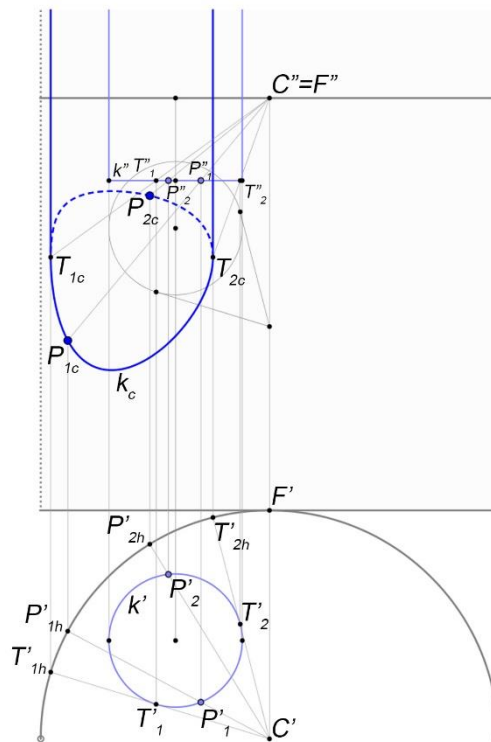


29. ábra: A CF egyenesre merőleges síkú, CF egyenesre illeszkedő középpontú kör

3.2. Hengerek kontúralkotói

A körök tárgyalásához szorosan köthető, gyakran felmerülő probléma: a hengerek kontúrja. Mint korábban említettük, a körök gyakorlati haszna az oszlopoknál jelenik meg, ahol a kontúralkotók kérdése is fontos. Az oszlopok esetében mindenképp megjegyzendő, hogy általában függőleges tengelyű hengerekről van szó, így jelentős egyszerűsítésekkel élhetünk ezen speciális helyzet miatt. A legjelentősebb könnyítés, hogy mivel az alkotók függőlegesek, ezért ezek esetében az egyenestartás a cilindrikus perspektívában fennáll. Geometriai értelemben a kontúralkotók a görbéhez húzott, adott irányú érintők.

Ezeket az érintőket úgy szerkeszthetjük, hogy a centrumon át függőleges érintősíkokat veszünk a hengerhez, és ezeket a hengeralkotókat vetítjük az alaphengerre. Ezzel az eljárással megjelenik a centruból nézve látott két legszélső pontja a görbének, amelyek a félhenger merőleges vetítése során is a legszélsők maradnak. Ezekbe a pontokba állított függőleges egyenesek adják ki a függőleges tengelyű hengerek kontúralkotóit.



30. ábra: Henger kontúralkotójának ábrázolása

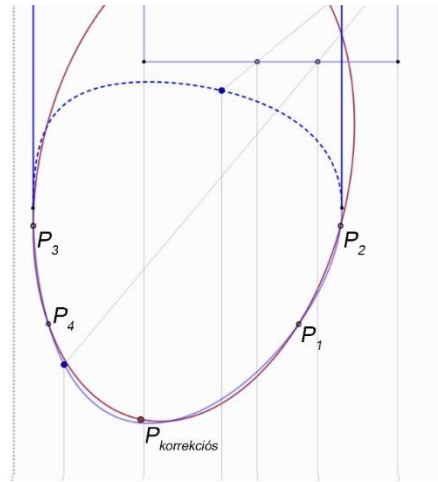
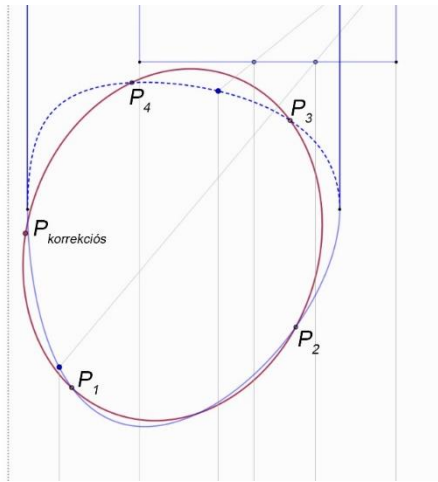
A vízszintes, vagy ferde tengelyű hengereket ezen dolgozat keretein belül nem tárgyaljuk, hiszen a gyakorlatban ezek igen ritkán fordulnak elő.

3.3. Közelítő ellipszisek

A kör cilindrikus perspektívában vett torzulása szélső helyzetben a legérzékenyebb. Itt már olyan negyedrendű görbék is kialakulhatnak, amelyekről egyértelműen kijelenthetjük szemlélet alapján, hogy nem ellipszisekről van szó. Köztes helyzetekben kevésbé látszik a negyedrendű síkgörbe és az ellipszis közötti eltérés. E probléma egy lehetséges feloldása, ha ellipszissel közelítjük a görbét.

A közelítés során a GeoGebra öt pontra illesztett kúpszelet funkcióját használjuk. A négy darab, negyedrendű görbére illeszkedő ponton kívül egy korrekciós pontot veszünk fel, majd ezeket igazgatva próbáljuk a lehető legjobban lefedni a negyedrendű görbét. (31. ábra)

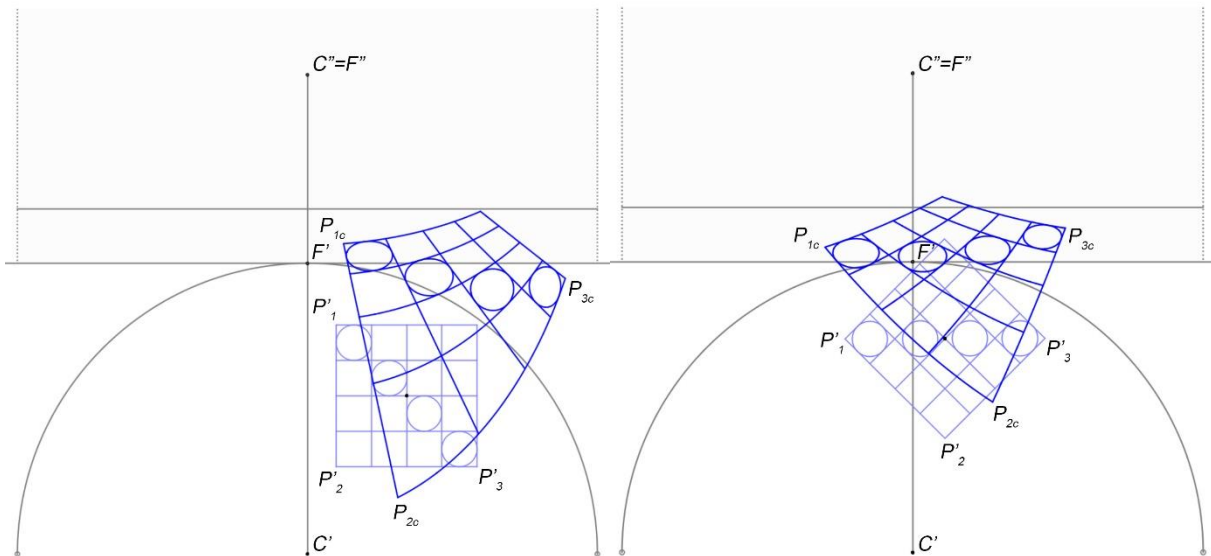
Azonban láthatóság szerinti ábrázolásnál sok esetben a görbének csak egy részére van szükségünk. Ilyenkor létezik olyan ellipsziszív, ami jobban közelíti ezt a görbeszakaszt, mint az az ellipszis, ami az egész görbét közelítette. A korrekciós pont jó felvételével szebben tudjuk közelíteni a görbét, ha csak a kiemelt szakaszra koncentrálunk. (32. ábra)



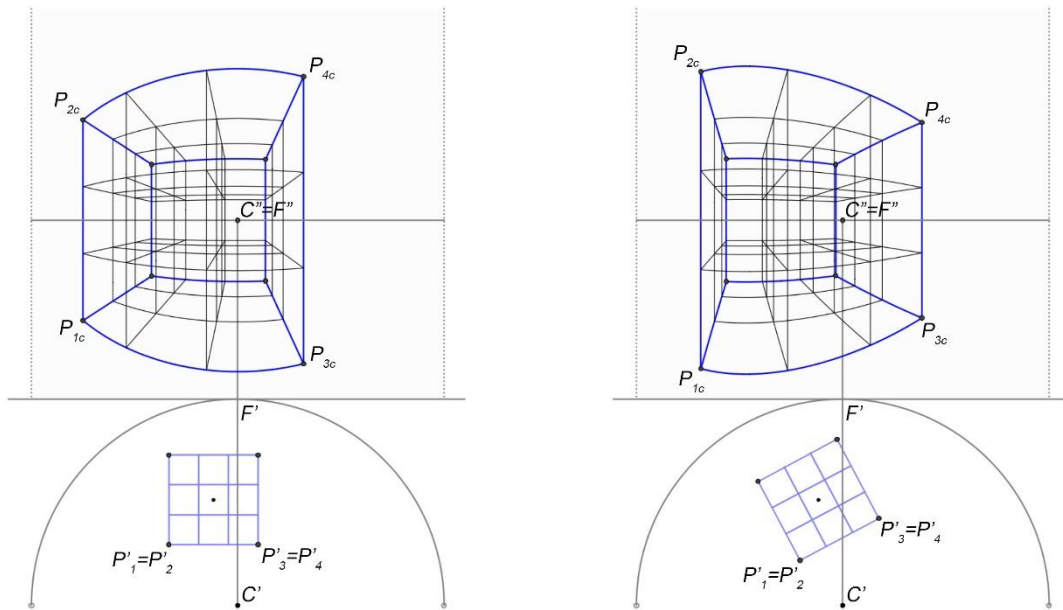
31. ábra: Közelítő ellipszis a teljes görbére 32. ábra: Közelítő ellipszis a görbe egy részére

4. További alakzatok ábrázolása

A következőkben az eddig ismertetett elemek összeépítésével kapott alapvető rendszereket (síkrácsokat és térrácsokat) mutatunk be. Ezek a rajzi gyakorlatban a tér felosztását segítik elő, felhasználásukkal a térbeli elemeket arányhelyesen tudjuk elhelyezni.



33. ábra: Síkrácsok ábrázolása cilindrikus perspektívában

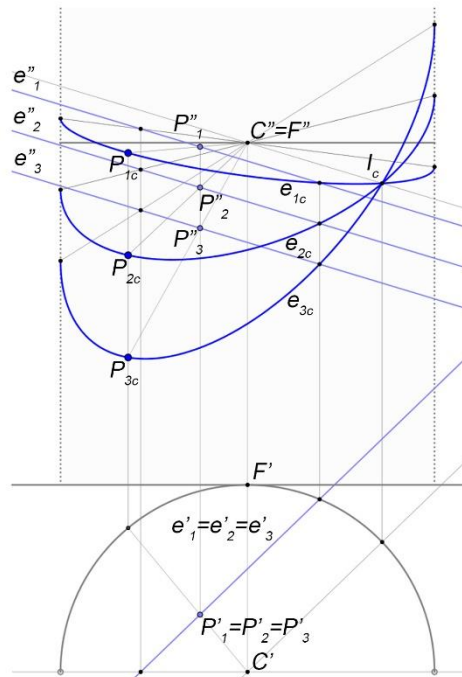


34. ábra: Térrácsok ábrázolása cilindrikus perspektívában

Gyakorlati alkalmazások

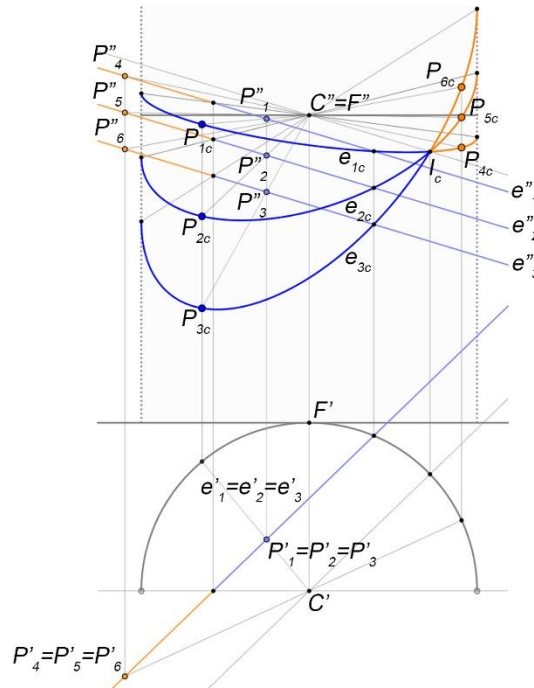
Átvezetés

A gyakorlati felhasználáshoz először is tisztában kell lennünk azzal, hogy az általános helyzetű egyenesek iránypontja nem a világhatárra és nem is a horizontvonalra esik. Az alábbi ábrán általános helyzetű, egymással párhuzamos egyeneseket mutatunk be.



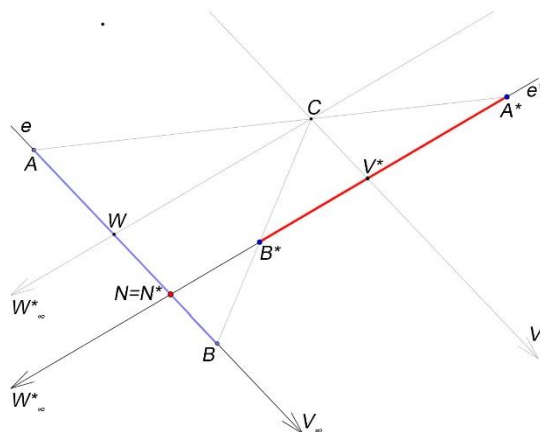
35. ábra: Általános helyzetű egyenesek képe

Szerkesztéseknél a vetítéshez egyenest használunk, így a határalkotók síkja mögé eső térelemeknek is meg tudjuk szerkeszteni a képét. Ezeket azonban a gyakorlatban nem értelmezzük, hiszen a látás mechanizmusából kiindulva ezeket az elemeket nem látjuk. A geometriai értelemben helyes ábrákon ezért módosítást hajtunk végre, amikor áttérünk a gyakorlatra. Az egyenesek képe így nem egy félellipszis, hanem annak csak egy része, ami a kettős vetületű pont képétől az egyenes iránypontjáig tart. (36. ábra)



36. ábra: Áttérés a gyakorlatban használt leképezésre

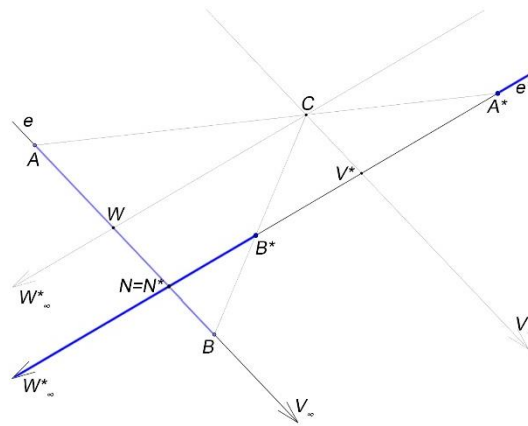
Érdekesség: Amennyiben egy olyan szakasznak a képét akarjuk megszerkeszteni, amelyik eldöfi a határalkotók síkját, a gyakorlatban megszokottal ellentmondó eredményt kapunk. A problémát visszavezethetjük a centrális vetítés egy másik, egyszerű példájára, hogy megértsük a szakasz képének alakulását.



37. ábra: Az AB szakasz centrális vetítésének helytelen módja

Vegyük az e és az e^* egyeneseket, továbbá a C vetítési középpontot. A vetítés az e egyenes pontjaihoz az e^* egyenes pontjait rendeli hozzá. A két egyenes N metszéspontja helyben maradó pont, ezen kívül megszerkeszthetjük mindkét

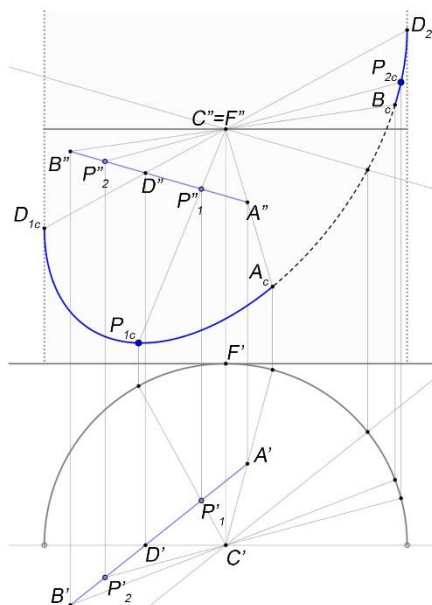
egyenes végtelen távoli pontjának párját a másik egyenesen. Tekintsük az AB szakaszt az e egyenesen, és keressük meg az e^* egyenesre eső képét! Miután átvetítjük az A és B pontokat, láthatjuk, hogy az A^*B^* szakasz nem tartalmazza az $N=N^*$ pontot, amely pontot az eredeti AB szakasz tartalmazta. Figyeljük meg, hogy a W , az e^* végtelen távoli pontjának képe az AB szakaszra esik. Ez azt jelenti, hogy a szakasznak a W pontját a projekció a végtelenbe vetíti.



38. ábra: Az AB szakasz centrális vetítésének helyes megoldása

Ez azt jelenti, hogy a centrális vetítés az AB szakaszt „szétveti”, és az e egyenes összes többi pontját „besúríti” az A^* és a B^* közé.

Hasonló jelenség történik a cilindrikus perspektíva esetében is, amikor elérjük a határalkotók síkját. A vetítendő szakasz ezen síkra eső pontjának kettős vetülete van, majd a határalkotók síkja mögött tovább haladva a szakasz másik részének képe az alaphenger átellenes oldalára vetül. A gyakorlatban ezt a jelenséget kiküszöböljük azzal, hogy a határalkotók síkja mögé eső térelemeket nem ábrázoljuk, így elkerülve azt, hogy a határsík előtti és mögötti térrészek elemei egymást fedő, zavaró képet hozzanak létre.

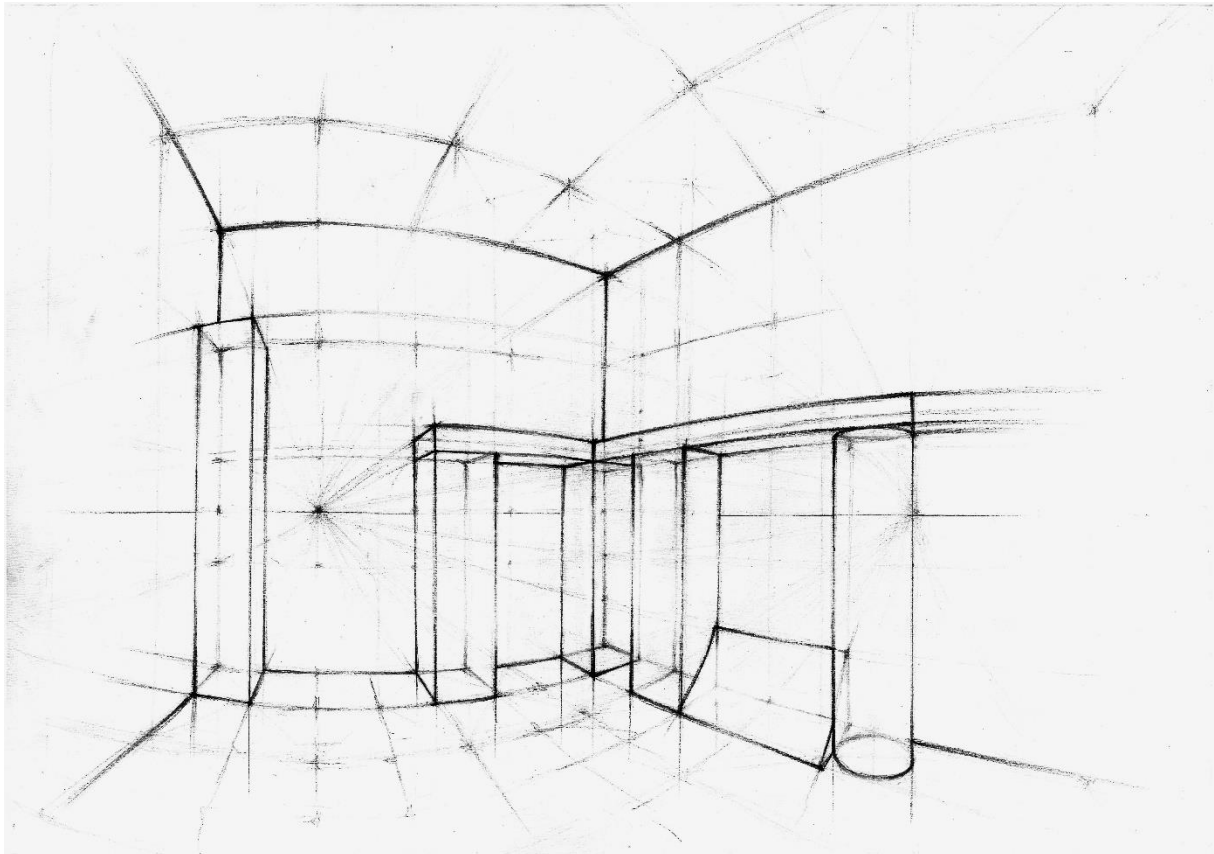


39. ábra: A henger határalkotóinak síkját dőő szakasz képe

Esettanulmány

A következőkben az eddig tárgyalt elméleti háttér felhasználásával gyakorlati példákat elemzünk. A koncepciónk egy adott beállítás szabadkézzel történő intuitív, majd a felhasznált elvek szerinti megrajzolása, emellett GeoGebrával történő kiserkesztése.

A geometriai tárgyalásban a vetítősugarak teljes egyenesek, itt azonban – az emberi látás utánzása miatt – csak centrumból induló félegyenesekkel vetítünk.



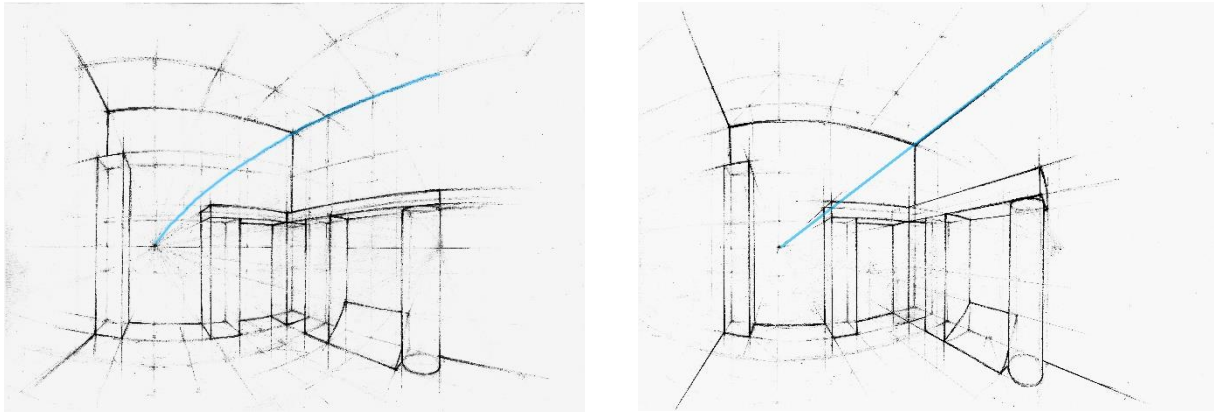
40. ábra: A beállítás intuitív rajza cilindrikus perspektívában

A beállítás befoglaló tere egy négy egységoldalból álló kocka, amelyben különböző geometria objektumokat helyeztünk el, törekedve arra, hogy minél több problémát szemléltetni tudjunk. Mint a rajzi gyakorlatban is, itt is ügyeltünk a térraszter használhatóságára, ezért derékszögű rendszerben rendeztük el elemeinket. Elsősorban horizontálisan elnyújtott térelemeket használtunk fel a térgörbületek ideális szemléltetésére. Henger (oszlop) elhelyezésével a körök ábrázolási problémáit, az ék elhelyezésével pedig a merőleges rendszerünktől valamelyest független egyenesek képi megjelenítését vizsgáltuk.

A folyamat és az elkészült rajzok, szerkesztések összehasonlítása során szembesültünk néhány olyan jelenséggel, amelyeknél az érzés alapján történő rajzolás és az általunk használt leképezési eljárás eltérő eredményeket produkált. A továbbiakban ezeket részletezzük.

Képsíkra merőleges egyenesek

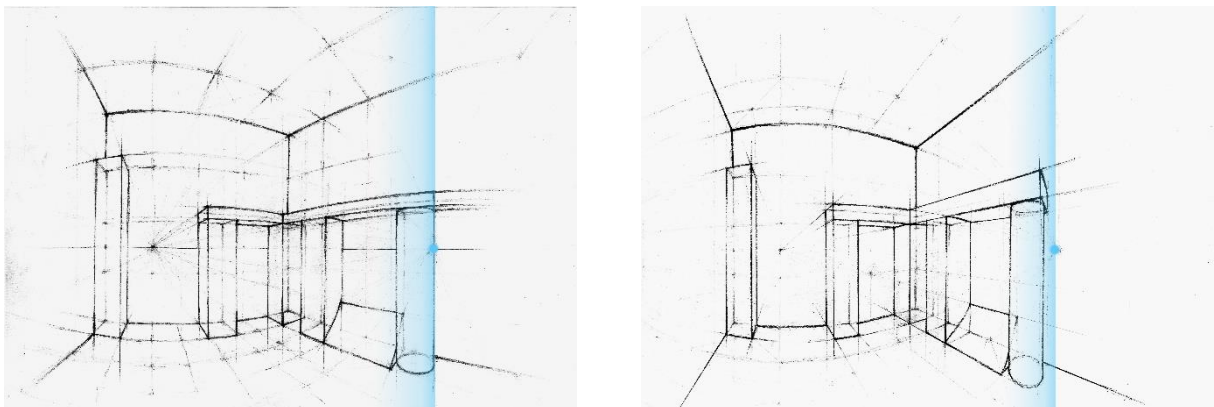
Az első probléma a képsíkra merőleges egyenesek ábrázolásával kapcsolatban lépett fel. Intuitív módon, az ábrázolás során ezeket az egyeneseket is görbítettük, de mint azt a speciális egyenesek tárgyalásánál bővebben kifejtettük, ezek az egyenesek a cilindrikus perspektíva rendszerében egyenesek maradnak.



41. ábra: Képsíkra merőleges egyenes ábrázolása

A világhatár

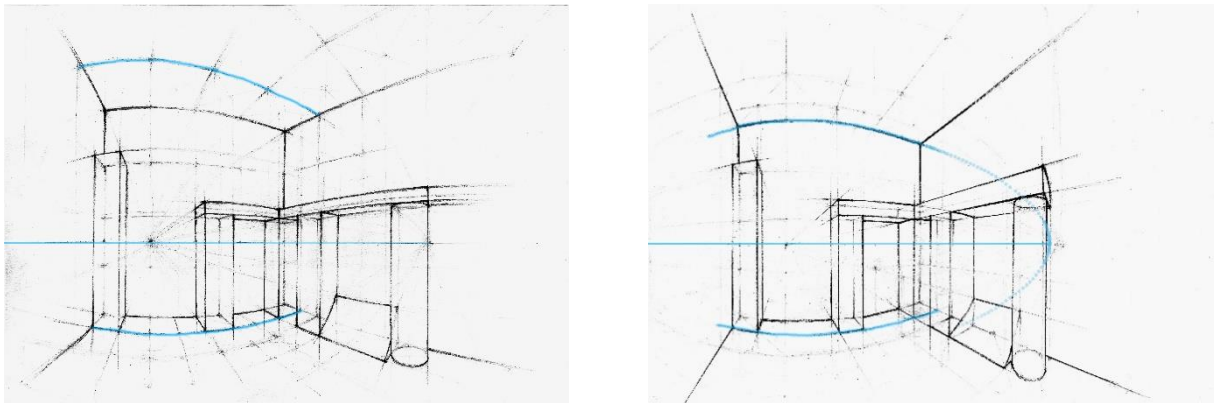
Második felvetésünk a rajzon látható jobb oldali irányponton "túli" tér ábrázolása kapcsán merült fel. Mivel most a rendszer alapja, hogy egy félhengerre centrumból kiinduló félegyenesekkel vetítünk, ezért a félhengert határoló alkotókon kívül eső tér elemeit nem tudjuk ábrázolni. Ennek oka, hogy ezen elemek pontjainak a centrumból félegyenessel történő vetítése során nem keletkeznek dőféspontok a félhengerrel. Megjegyzendő, hogy esetünkben azért esik az iránypont a világhatárra, mert a képsíkkal párhuzamos egyenesek iránypontjai a félhenger végalkotóinak vetületére esnek.



42. ábra: A cilindrikus perspektíva világhatára és iránypontja

Alapvonallal párhuzamos egyenesek

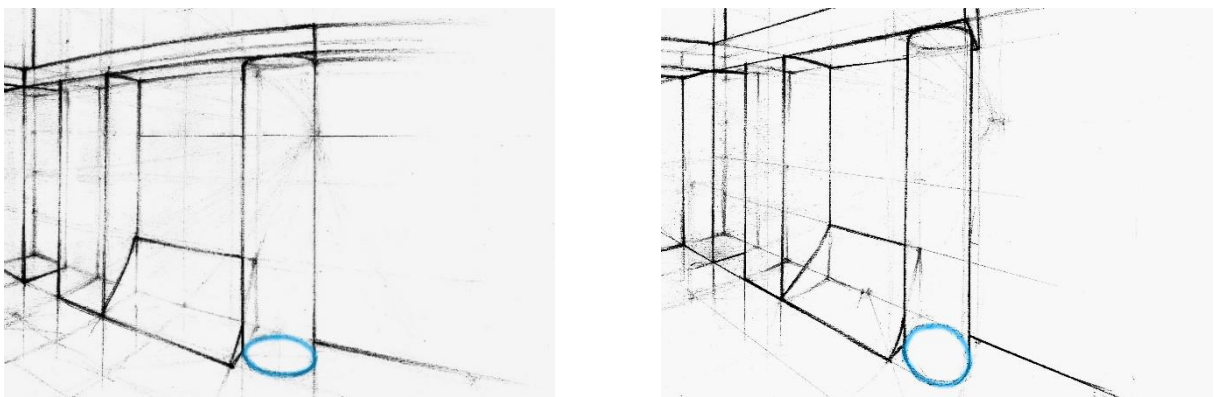
A következő kérdés az alapvonallal párhuzamos egyenesek ábrázolásával kapcsolatban merült fel annak függvényében, hogy a horizontsíkunk alatt vagy fölött helyezkednek el. Ebből kiindulva kétféle kimenetel lehetséges – a függvénytan terminológiájával élve -, miszerint egy görbe lehet konvex vagy konkáv. Mivel a horizontvonal az egyenesek képeként megjelenő félellipszisek egyik tengelye minden esetben, így a fölé eső ellipszisívek konkávok, a horizontmagasság alá eső egyenesek pedig konvexek.



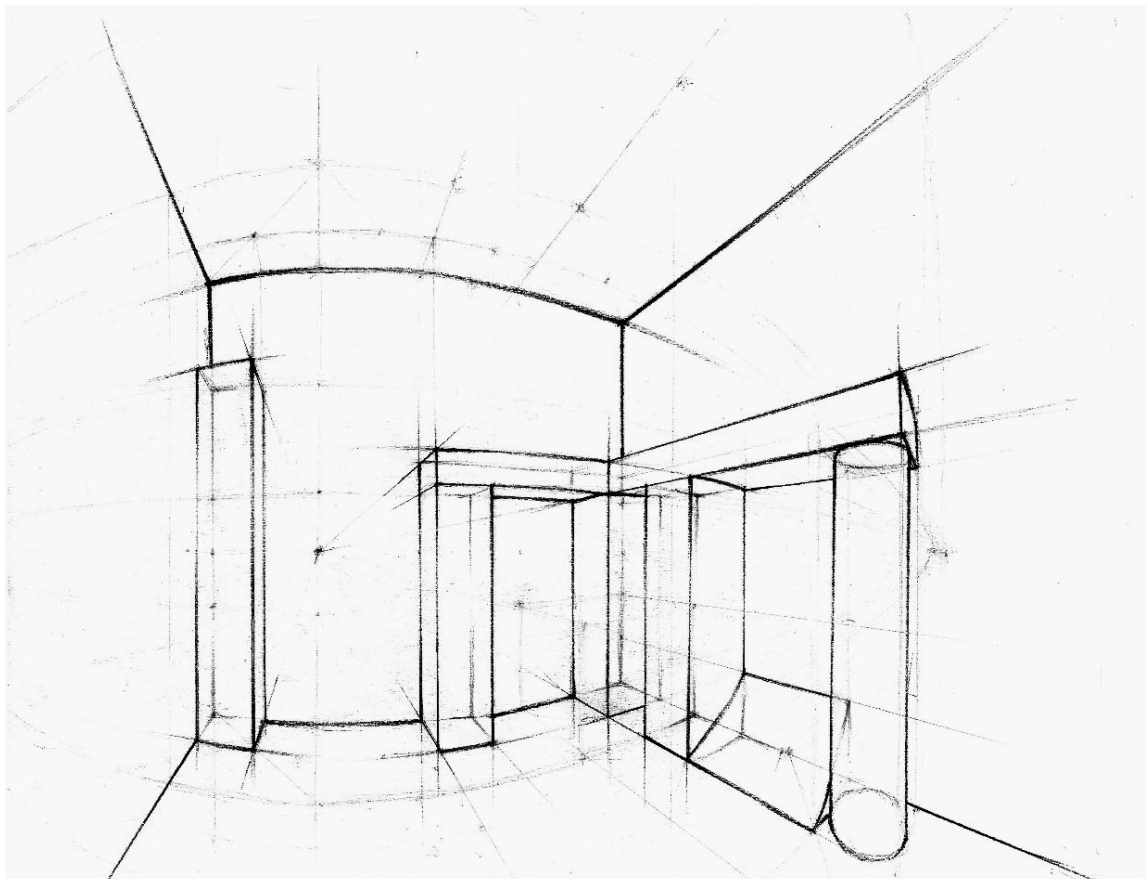
43. ábra: Alapvonallal párhuzamos egyenesek ábrázolása

Henger ábrázolása

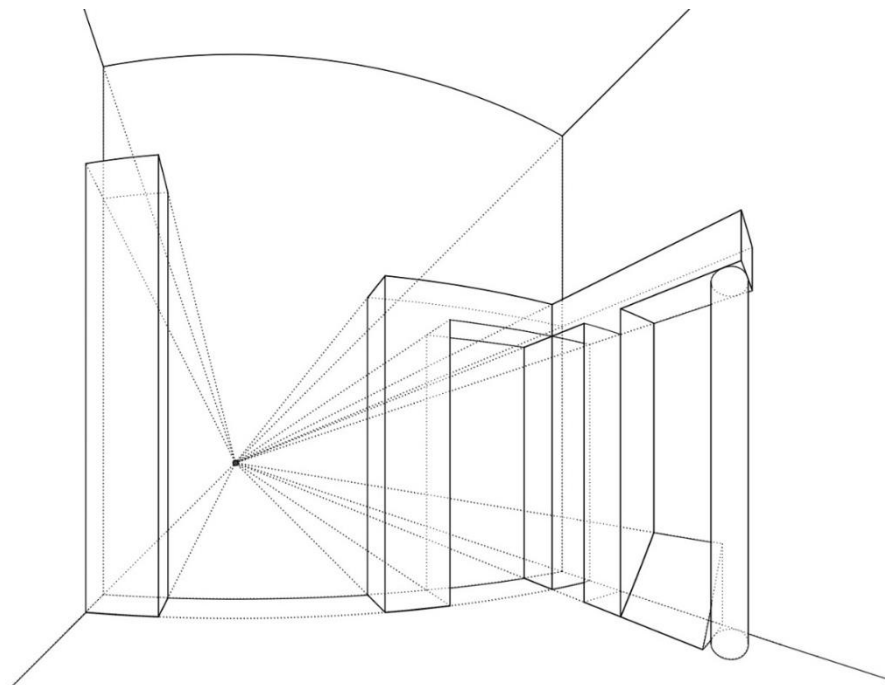
Végül az oszlopnál megjelenő körábrázolási problémával foglalkozunk. Bevert algoritmus szerint az oszlopok alap- és fedőkörét szabadkézi rajzoláskor ellipszisként ábrázoljuk. Ez azonban az általunk használt vetítésnél más eredményt ad, mivel a centrumból az adott körre illesztett vetítőkúp hengerrel történő áthatása során az áthatási görbe negyedrendű térgörbe. Ezt párhuzamosan a képsíkra vetítve negyedrendű síkgörbét kapunk, ami a körünk cilindrikus képe. Megjegyzendő azonban, hogy sok esetben ezen görbék jól közelíthetők ellipszisekkel, ezért alkalmazásuk nem alaptalan. Nagy eltérés olyan esetben figyelhető meg, amikor a kör távolabb helyezkedik el a horizontsíktól, illetve amikor közelebb esik a világhatárhoz.



44. ábra: Henger (oszlop) ábrázolása



45. ábra: A beállítás geometriailag átgondolt rajza

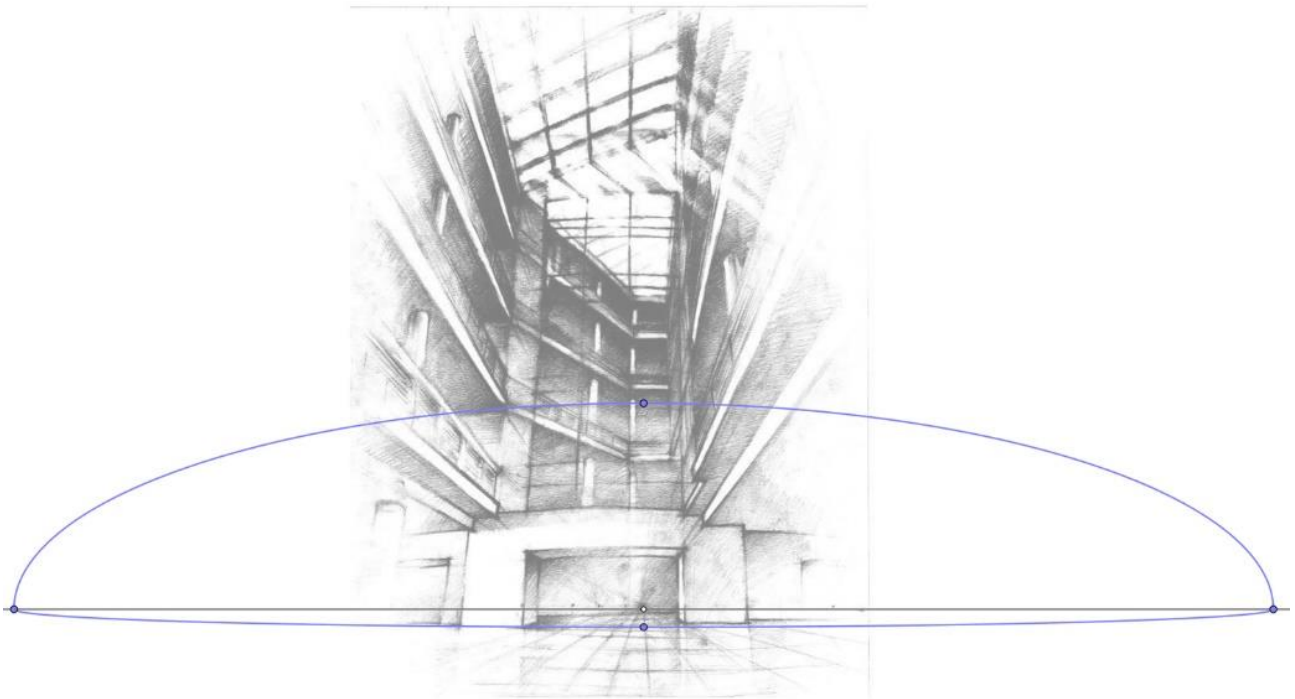


46. ábra: A beállítás geometriailag kiszervezett képe

Összetett rajz elemzése

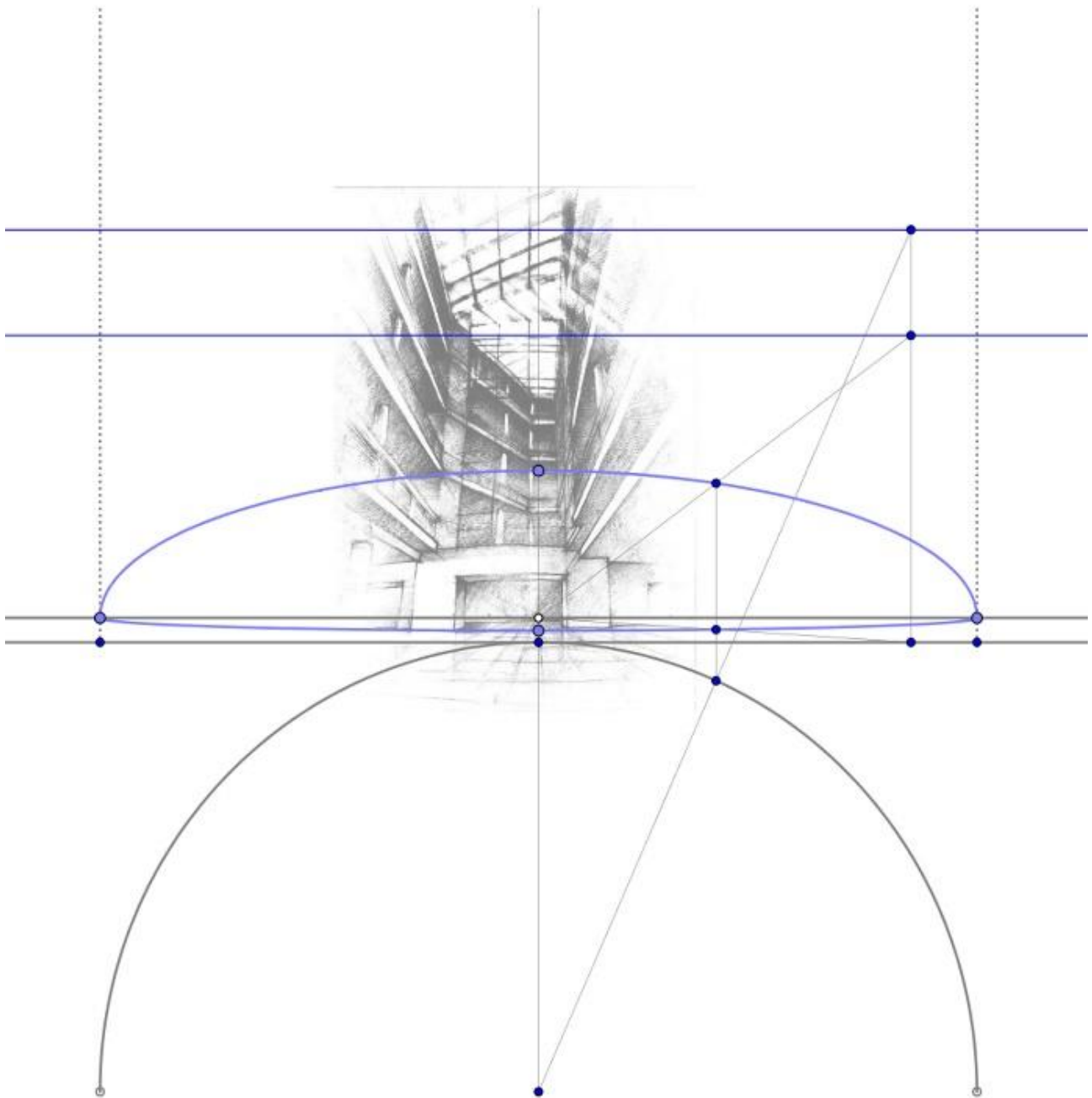
Az alábbiakban szabadkézzel készített rajzot elemzünk az eddig ismertetett eljárás tanulságai alapján. A GeoGebra felhasználásával állítjuk párhuzamba a gyakorlat és az elmélet eredményezte képet.

Jelen rajz esetében felhasználjuk, hogy „főpontos” helyzetben készült. Első lépésként kijelöljük a főpontot, amely meghatározza a vízszintes horizontvonalat. Keresünk a rajzon egy olyan ellipszisívet, amelyik egy alapvonallal párhuzamos egyenes képe. Erre az ellipszisívre ráillesztünk egy félellipszist (az átláthatóság érdekében nem teljes ellipszist használunk). A rajz rendszere alapján megállapítjuk az ívhez tartozó alaprajzi vetületet, és erre az ívre is egy félellipszist illesztünk.



47. ábra: Összetett rajz elemzésének első lépése

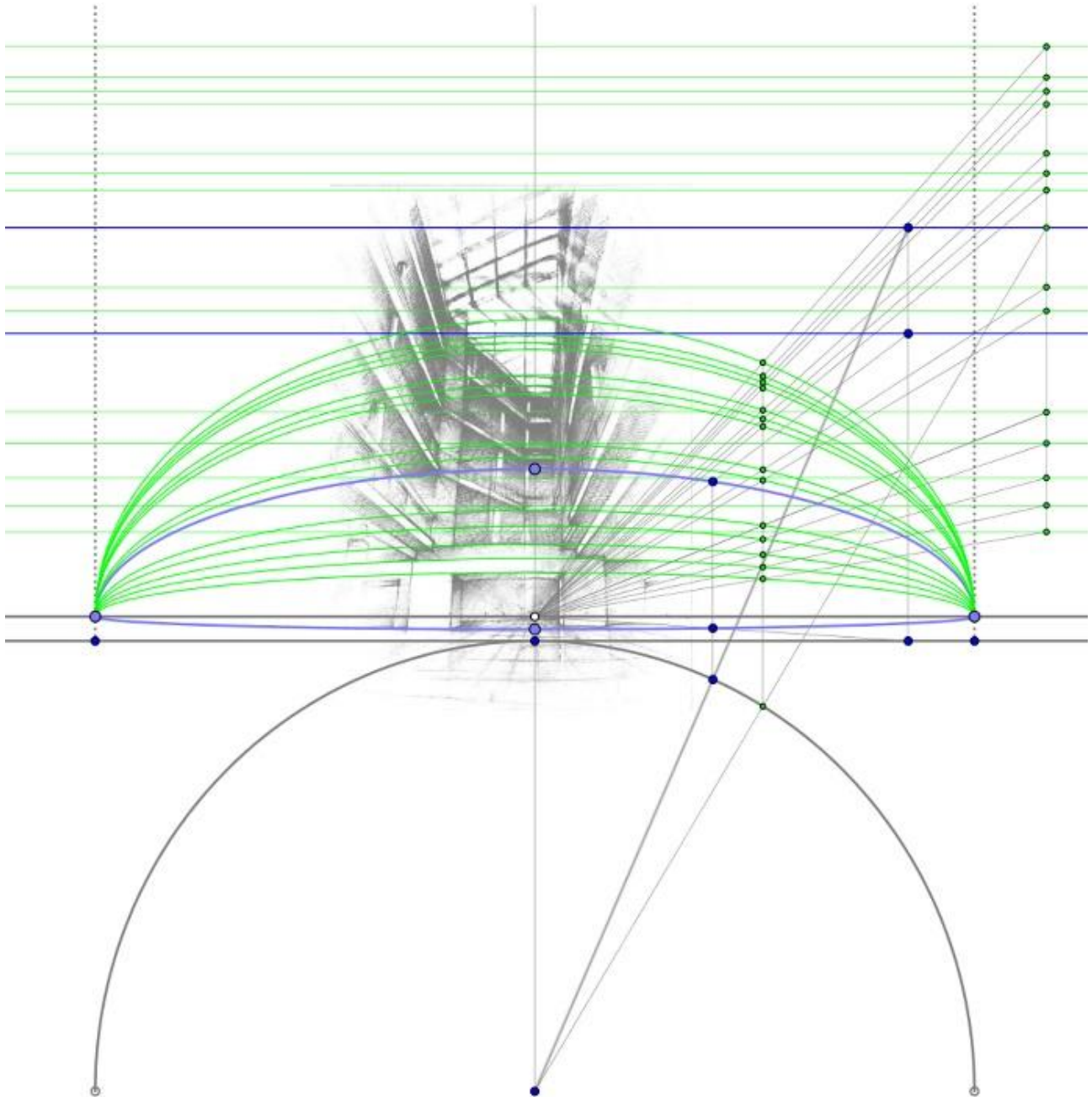
Ezután az ellipszisív nagytengelyének végpontjaiba állítjuk a függőleges irányú világhatárt, majd meghatározzuk az alapsík magasságát. Kiválasztjuk a félellipszisek egy-egy egymáshoz rendelt pontját, majd a geometriai leírásban olvasható rekonstruálási eljárással megkeressük a kiválasztott pont térbeli helyét. A kiszerkesztett pontba a horizontvonallal párhuzamos egyenest állítunk (mivel tudjuk, hogy a rekonstruált egyenes alapvonallal párhuzamos helyzetű).



48. ábra: A cilindrikus perspektíva rendszerének ráillesztése szabadkézi rajzra

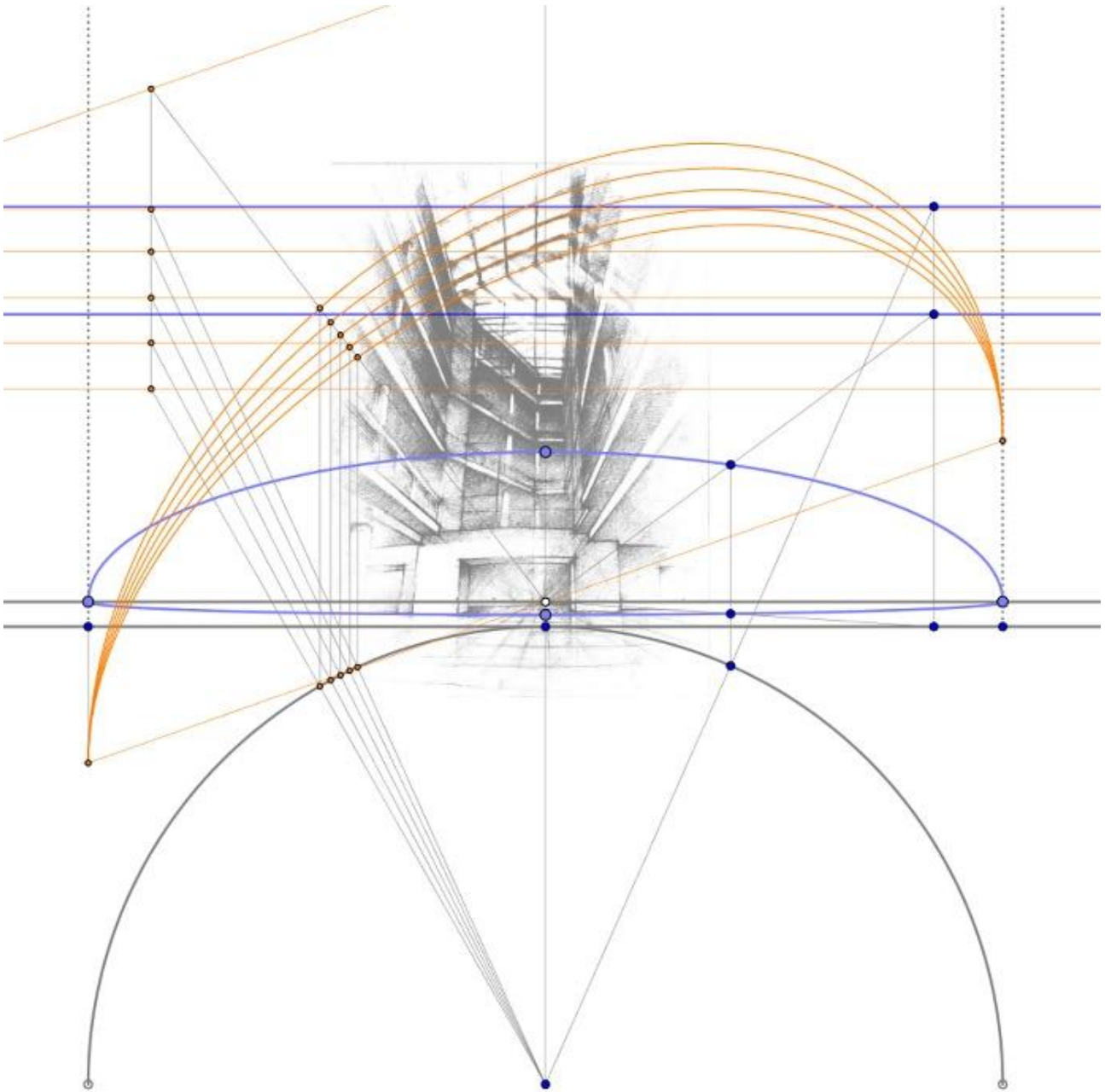
Ezzel már felállítottuk a cilindrikus perspektíva alrendszerét, a továbbiakban újabb egyenesek felvételével és leképezésével ellenőrizzük a rajzot.

Először további, az alapvonallal párhuzamos egyeneseket szerkesztünk a rajzra. Ezek az egyenesek a függőleges síkú üvegfal tokosztóit adják, amelyeknek alaprajzi vetülete egyezik a rajzról rekonstruált egyenes vetületével, így ezt használjuk fel a leképezésnél.



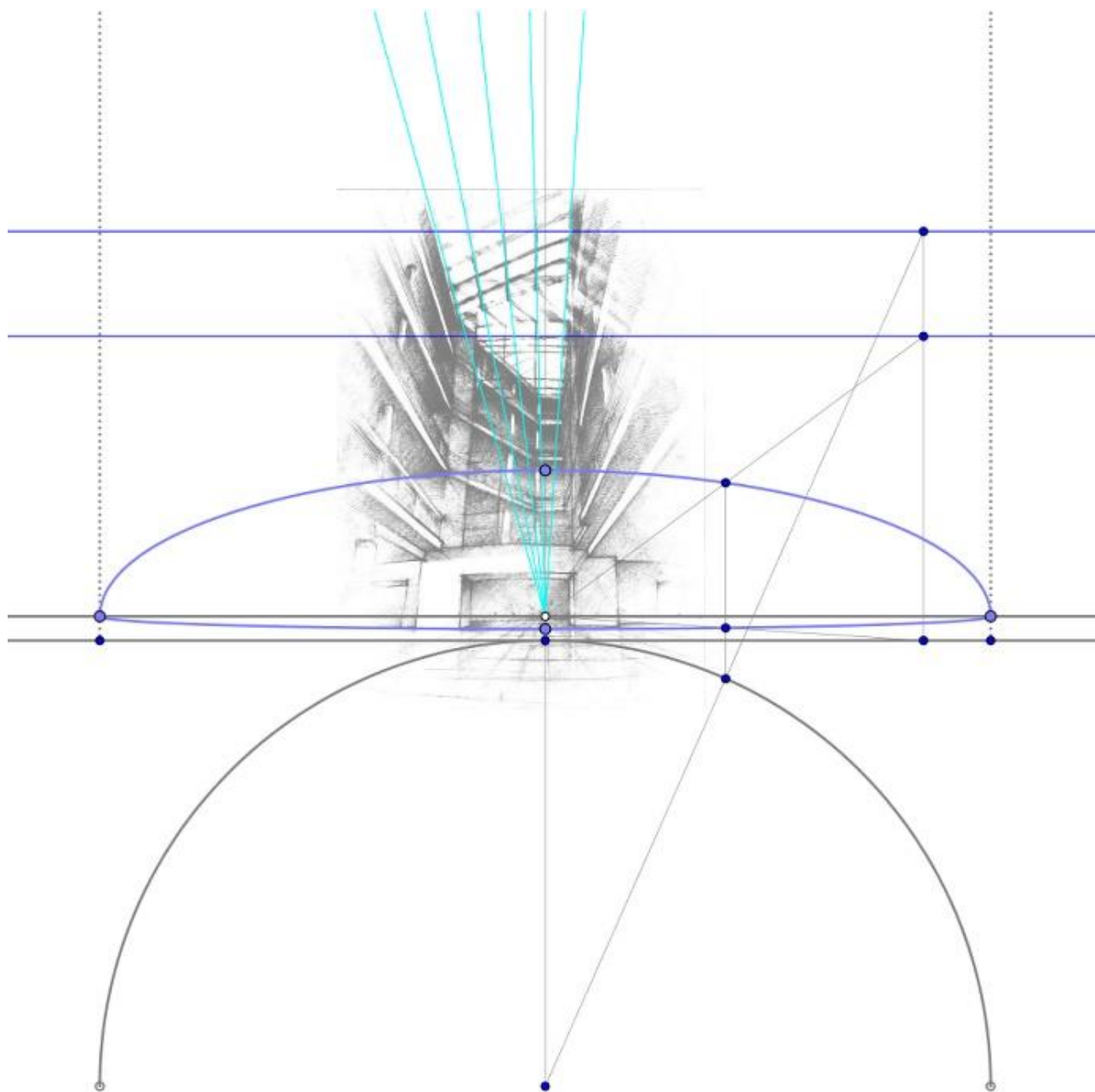
49. ábra: Alapvonallal párhuzamos egyenesek szerkesztése szabadkézi rajzra

Ezután a tetőszerkezet képsíkkal párhuzamos egyeneseit szerkesztjük ki. Az iránypont kettős képe a két világhatárra esik. Ezeknél az egyeneseknél a második kép egyezik meg, így itt is egyszerűsödik a leképezés menete.



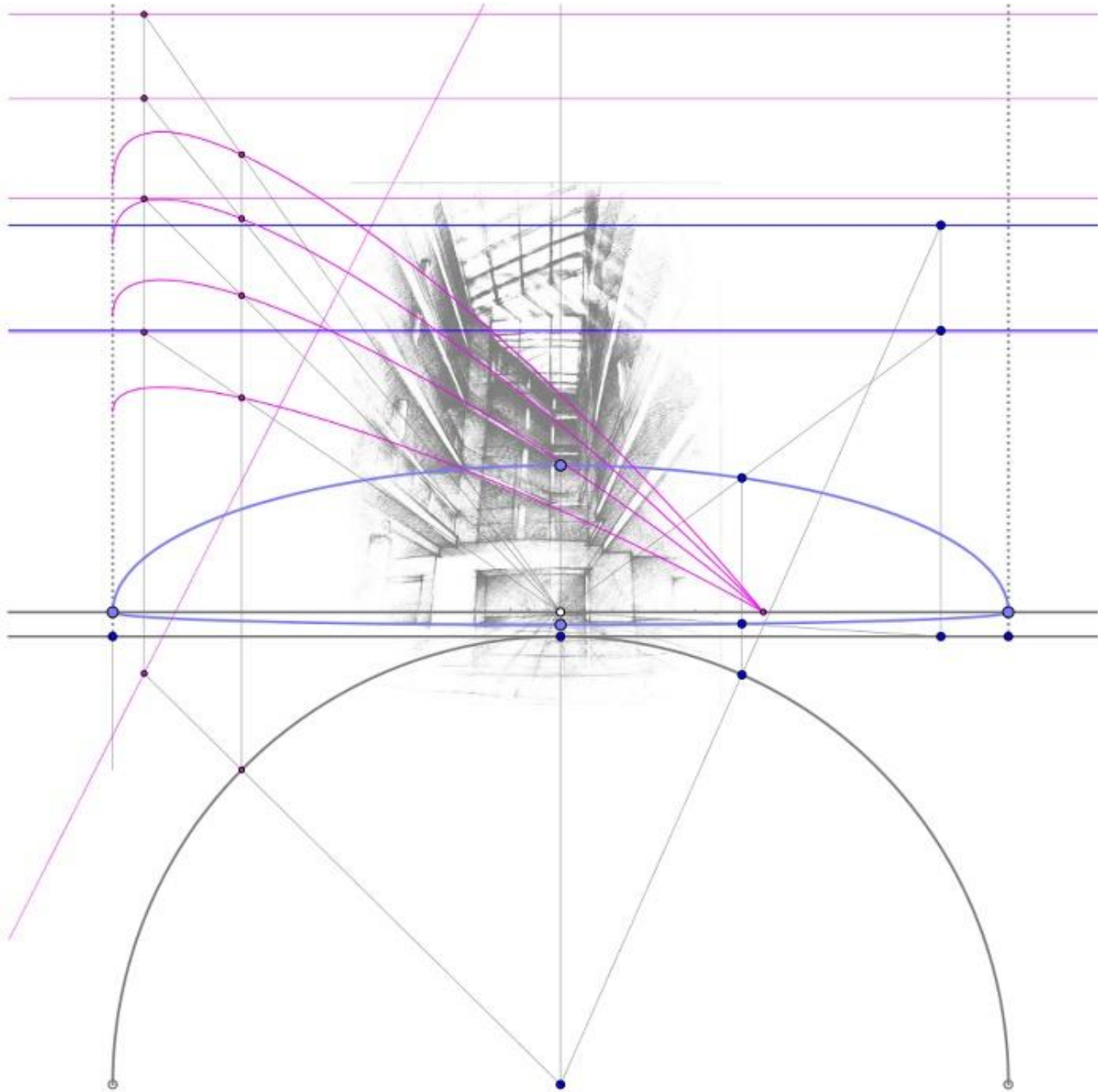
50. ábra: Képsíkkal párhuzamos egyenesek szerkesztése szabadkézi rajzra

A tetőszerkezetet alkotó másik seregbeli egyenesek a képsíkra merőlegesek, így ezeknek a képe cilindrikus perspektívában egyenes (szakasz) marad. A szakaszok iránypontja a főpont.



51. ábra: Képsíkra merőleges egyenesek szerkesztése szabadkézi rajzra

Az üvegfelületen tükröződő részt is ellenőrizzük. Az itt látható ellipszisívek födémek peremei, így alapsíkkal párhuzamos egyenesek képeiről beszélünk. Az egyenesek iránypontja a horizontvonalra esik. Az átvezetésben tárgyaltak alapján az irányponton túloldalára eső pontok képét nem értelmezzük.

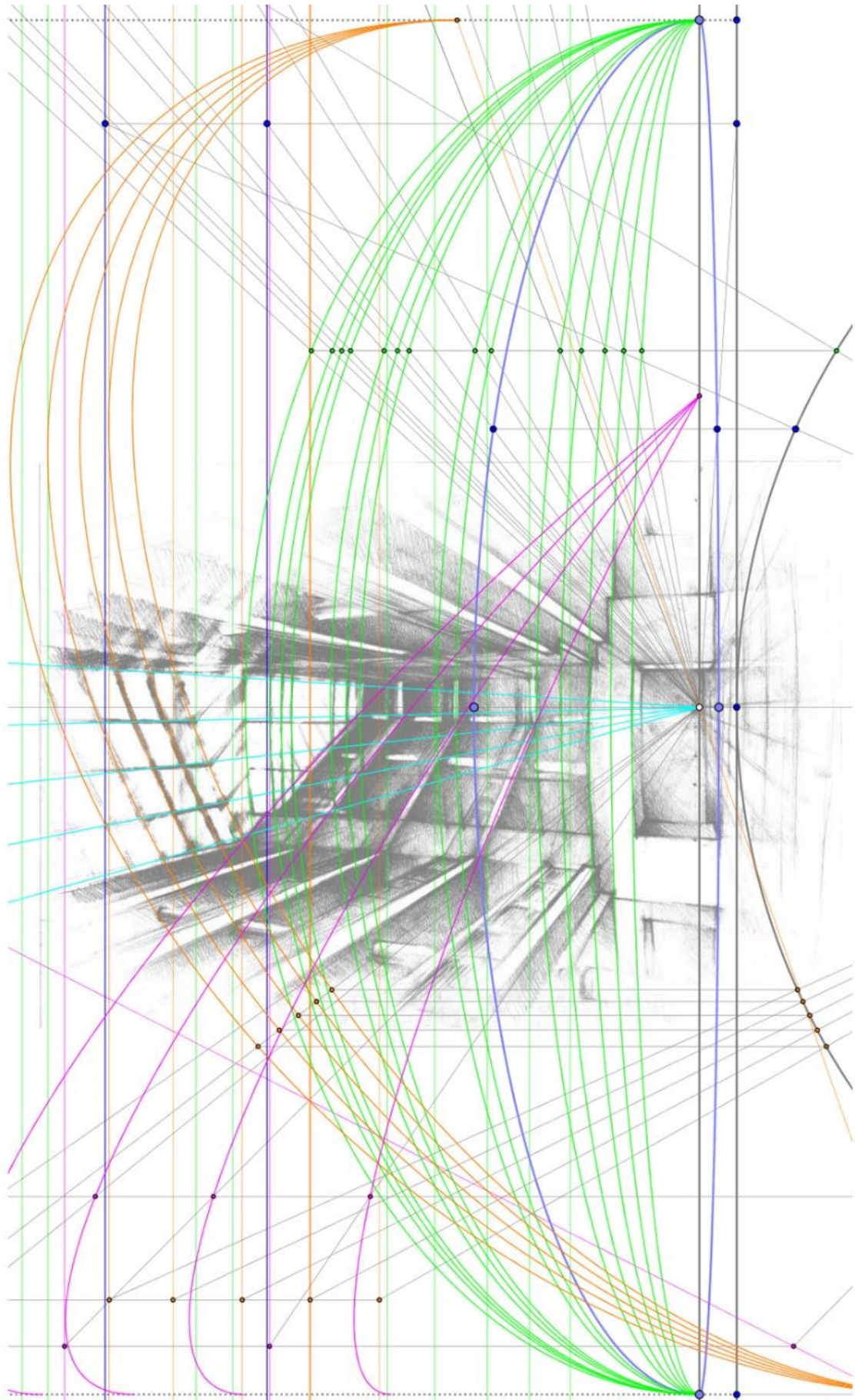


52. ábra: Alapsíkkal párhuzamos egyenesek szerkesztése szabadkézi rajzra

A Monge-rendszerben szerkesztett ábrák esetében a második képsík adja a képiesebb képet – a cilindrikus perspektíva esetében pedig az ábrák ezen része a „lényeg”. Az első képhez tartozó elemek a szerkesztéshez szükségesek, azonban a kapott kép ezen részek nélkül is értelmezhető, így elhagyhatjuk. Ezt azért is célszerű megtenni, mivel az ábrák jelentős részét az alaphenger első képe foglalja el.

A lényegi részt kiemelve mutatjuk be az utolsó ábrán az összes kiserkesztett egyenes képét.

Konklúzió: Az összetett rajzelemzés arra is rávilágít, hogy az általunk létrehozott leképezés jól közelíti a szabadkézi rajzban alkalmazott eljárást.

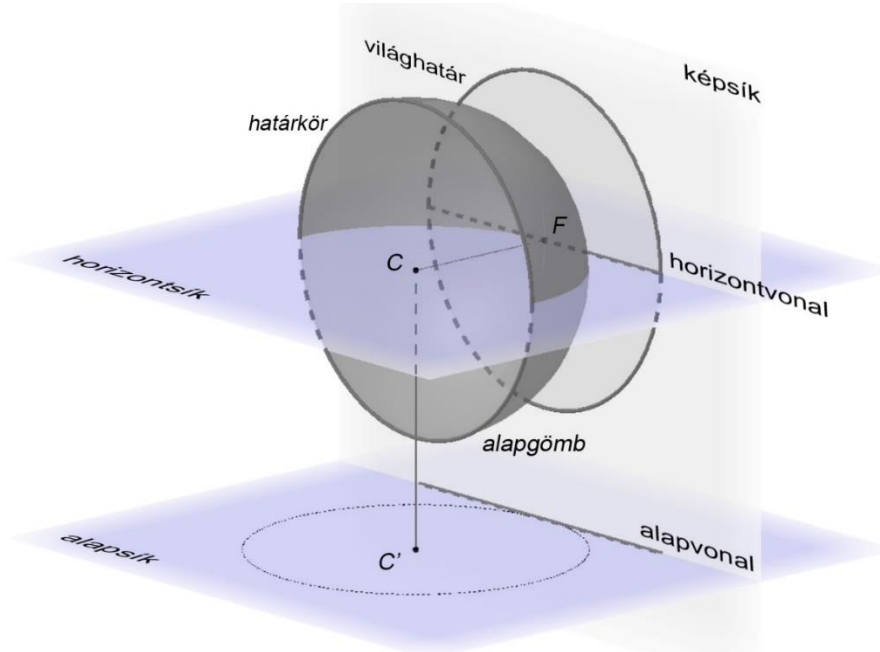


53. ábra: Szabadkézi rajzra illesztett szerkesztések

Gnomonikus perspektíva

A gnomonikus perspektíva és kapcsolódó alapfogalmak

Definíció: Vegyünk egy C középpontú, tetszőleges sugarú félgömböt (amelynek határoló köre függőleges síkú), és a félgömb felületét határoló gömbi főkörrel párhuzamos érintősíkot. A tér elemeit a középpontba állított vetítőegyenesek segítségével a félgömb felületére vetítjük. Ezután – a síkbeli ábrázolhatóság miatt – a felületen keletkező képet az előbb említett érintősíkra vetítjük. Ezt a leképezést *gnomonikus perspektívának* nevezzük.



54. ábra: A gnomonikus perspektíva alapfogalmai

A C középpont a *centrum*, a félgömb, amire centrálisan vetítünk, az *alapgömb*. Az érintősík, amelyre a leképezés végső lépéseként merőlegesen vetítünk, a *képsík*. A centrumra illeszkedő, vízszintes sík a *horizontsík*, ennek képsíkkal vett metszévonal a *horizontvonal*. A centrum képsíkon vett merőleges vetülete a *főpont*, amely a horizontvonalra illeszkedik. A horizontsíkkal párhuzamos, tetszőlegesen felvett síkot *alapsíknak* nevezzük, ami a képsíkból az *alapvonalat* metszi ki. (Monge-rendszerű ábrák esetében a helytakarékosság érdekében az alapsíkot úgy vesszük fel, hogy az alapsík alulról érintse a gömböt) Az alapgömböt határoló gömbi főkör a *határoló kör*, ennek képsíkon keletkező merőleges körvetülete a *világhatár*. A gömb vízszintes főkörének alapsíkon lévő vetülete az *alapkör*.

Megjegyzés: A továbbiakban a gnomonikus perspektív leképezést alkalmazzuk, vagy amennyiben ez nem derül ki egyértelműen a szövegkörnyezetből, úgy a „gnomonikus” jelzőt külön szerepeltetjük.

A gnomonikus perspektíva – akárcsak a dolgozat első felében tárgyalt cilindrikus változat – sok hasonlóságot mutat a klasszikus perspektívával. A gnomonikus jelző

szerepeltetésével érzékeltetjük, hogy egyenestartásról ebben az esetben sem beszélhetünk.

A gnomonikus projekció elnevezés egy, már létező leképezési módra utal, ahol a vetítési középpont a gömb felületén található, így a félreértések elkerülése érdekében ezt a nevet nem használjuk ennél a leképezésnél.

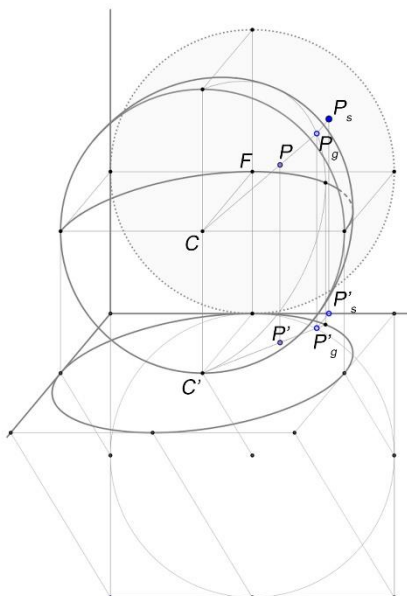
A gnomonikus perspektívát magyarra fordítva a „gömbre való centrális vetítés” kifejezést kapjuk, amely tükrözi rendszerünk elvének működését.

A gnomonikus perspektíva – a cilindrikus perspektívához hasonlóan – elsősorban belső terek ábrázolásánál hasznos. A hengerre vetítés eljárásához képest itt függőleges irányú tömörítésről is beszélhetünk, így az alattunk és fölöttünk lévő téri elemek ábrázolása is lehetséges a kör alakú világhatáron belül – természetesen jelentős torzulásokkal megjelenve.

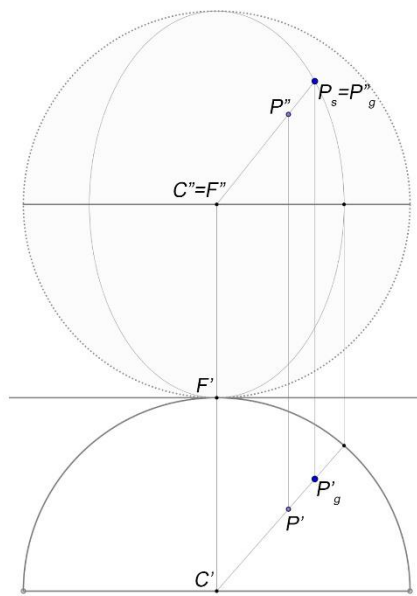
Alapvető geometriai elemek leképezése gnomonikus perspektívában

A leképezés ábrázolásánál itt is elsődleges szempont, hogy a keletkező képet valódi méretében lássuk. A cilindrikus perspektívához hasonlóan tehát frontális axonometriában és Monge-rendszerben készített ábrákat használunk a magyarázó ábrák mellett. Frontális axonometriában a képsík az $[x,z]$ koordinátasík. Monge-féle ábrázolásnál a K_1 képsík az alapsík, a K_2 képsík pedig megegyezik a gnomonikus perspektíva képsíkjával. Az első képsíkon a horizontsík által kimetszett gömbi főkör első vetületét jelöljük, második képen pedig a világhatárt.

1. A pont képe



55. ábra: Pont gnomonikus perspektív képe frontális axonometriában



56. ábra: Pont gnomonikus perspektív képe Monge-rendszerben

A geometriai alapelemek közül egy P pont vetíthető legegyszerűbben a félgömbre. A C centrumra és P -re illeszkedő vetítőegyenesre egy függőleges síkot állítunk. Ez a sík tartalmazza a gömb középpontját, így egy gömbi főkört metsz ki a felületből. A P pont gömbön vett P_g képe a vetítőegyenes és a kimetszett gömbi főkör metszéspontja, melyet merőlegesen a képsíkra vetítünk. A képsíkon kapott vetület a P_s .

Megjegyzés: A függőleges sík és a gömb metszetgörbájének (gömbi főkör) képe merőleges vetítés után ellipszis. Nagytengelyének hossza a gömb átmérője (iránya függőleges), kistengelye pedig a függőleges metszősík alapkörrel vett metszéspontjából határozható meg.

Axonometriában a merőleges vetítés lépése – az axonometrikus rendszer sajátosságai miatt – külön elvégzendő. Monge-féle ábrázolás esetén a gömbre vetített kép a második képsíkon megegyezik a végeredménnyel is. Ezért a Monge-rendszerben készített ábrák átláthatóbbak és gyorsabban állíthatók elő.

A gnomonikus perspektíva szerkesztési lépései visszavezethetők ennek, a már jól ismert két rendszernek a leképezéseire, így segítségükkel további, összetettebb geometriai problémákat oldhatunk meg (például árnyékszerkesztés).

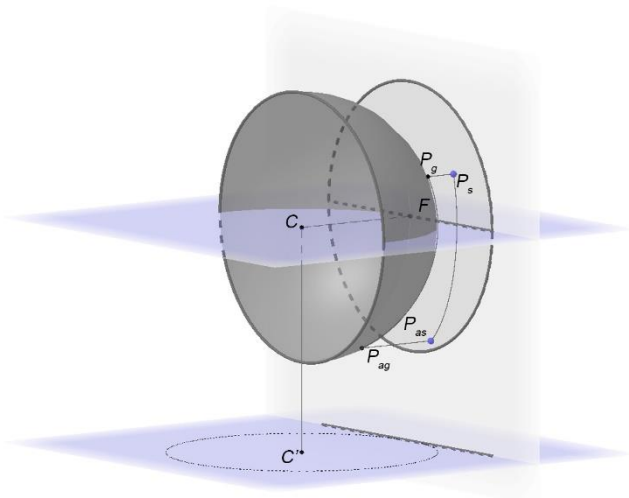
Jelen dolgozat célkitűzése a gnomonikus perspektíva rendszerének elméleti kidolgozása, illetve a leképezés sajátosságainak átfogó ismertetése. Az itt tárgyalt észrevételekkel próbáljuk elősegíteni például a szabadkézi rajzolást mint a leképezés gyakorlati alkalmazását. Az alapokon túlmutató illeszkedési és metszési feladatok, valamint az összetettebb szerkesztések további vizsgálatok tárgyát képezik, ezeket ebben a dolgozatban nem mutatjuk be bővebben.

1.1. Rekonstruálhatóság

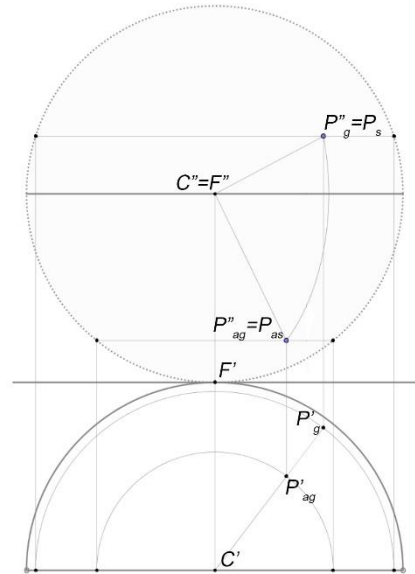
A rekonstruálhatóság kérdésére a gnomonikus perspektíva esetében is már a pont képének tárgyalása után érdemes kitérni. A klasszikus és a cilindrikus perspektívához hasonlóan a gömbre vetítésnél is a pont és alapsíkra eső vetületének képét felhasználva igyekszünk meghatározni a különböző objektumok pontos térbeli helyzetét.

Állítás: A gnomonikus perspektíva leképezése megfordítható, azaz a pont és annak alapsíkra eső vetületének képéből rekonstruálható az eredeti térelem.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy ismerjük a pont és az alapsíkra eső vetületének gnomonikus perspektív képét. A két kép a klasszikus perspektívákkal és a hengerre vetítéssel ellentétben itt nem közös rendezőre, hanem közös ellipsziszívre esnek (amely ellipsziszív egy *függőleges* gömbi főkör második képe). Első lépésként visszavetítjük a képsíkon lévő P_s és P_{as} képet a félgömb felületére, a keletkező dőféspontok P_g és P_{ag} . (57-58. ábra)

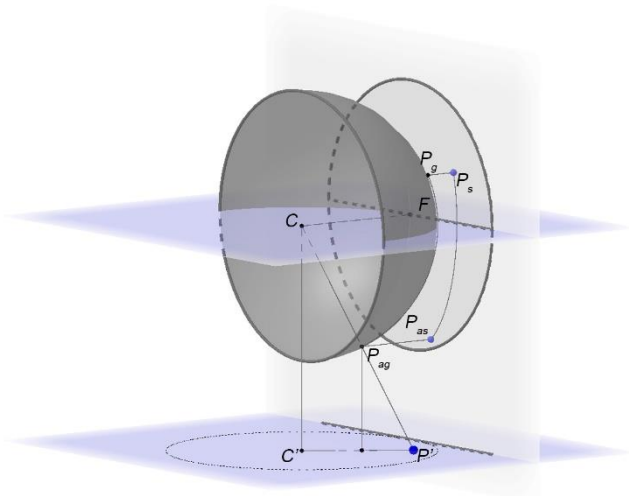


57. ábra: Pont rekonstruálása, magyarázó ábra

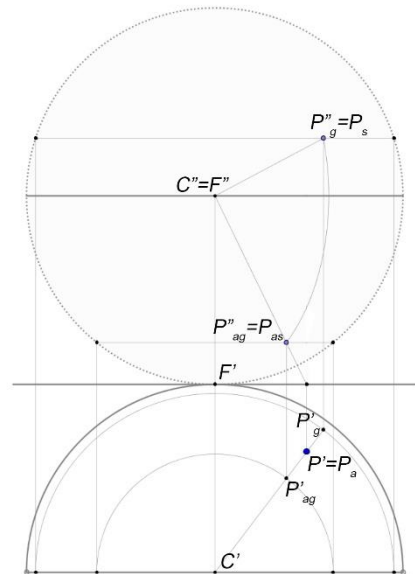


58. ábra: Pont rekonstruálása, Monge-rendszer

Ezután meghatározzuk a pont alapsíkra eső vetületét. Ehhez a C centrumon és P_{ag} -n átmenő egyenessel dőjük az alapsíkot. A kapott dőféspont a P' . (59-60. ábra)

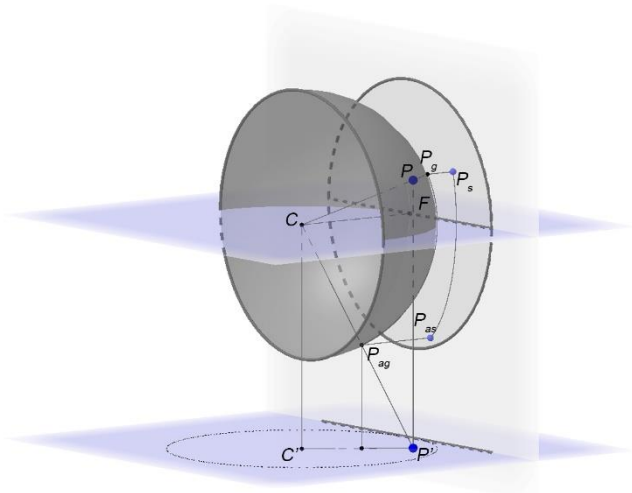


59. ábra: Pont rekonstruálása, magyarázó ábra

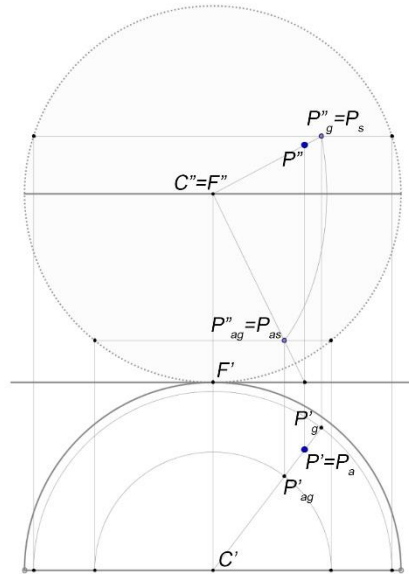


60. ábra: Pont rekonstruálása, Monge-rendszer

Utolsó lépésként megszerkesztjük a P pont második képét is. A P pont a CP_g egyenes és a P' -be állított, alapsíkra merőleges rendező metszéspontja. (A metszéspont létezik, mert a két egyenes közös függőleges síkban van.) (61-62. ábra)



61. ábra: Pont rekonstruálása, magyarázó ábra



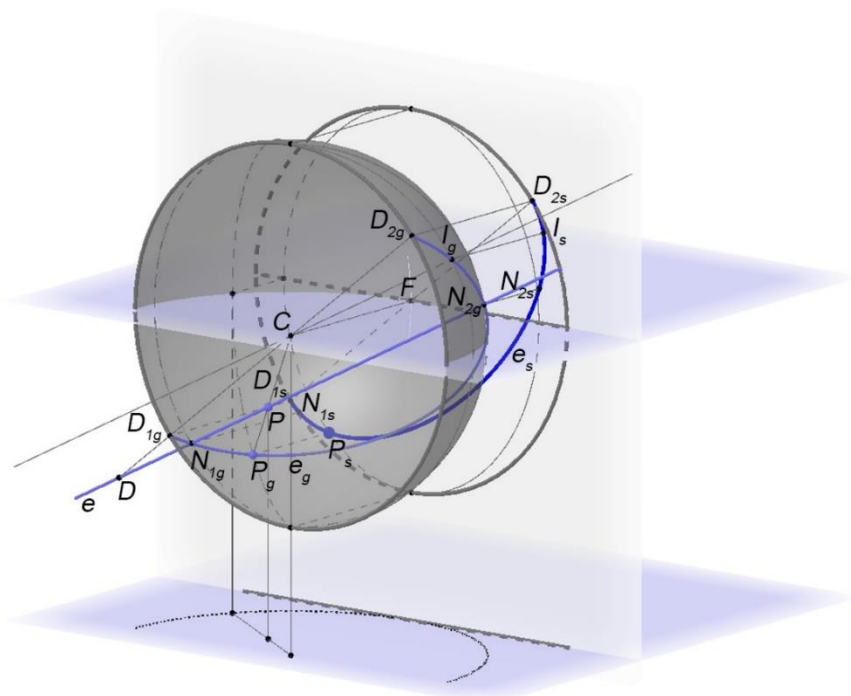
62. ábra: Pont rekonstruálása, Monge-rendszer

Megjegyzés: A dolgozat ábráin az alapsíkra eső vetületet – az áttekinthetőség érdekében – csak akkor szerepeltettük, ha az kiemelt szereppel bír az adott szerkesztés során.

Megjegyzés: A továbbiakban az átláthatóság kedvéért a $P''_g=P''_s$ elnevezés helyett csak a P''_s nevet használjuk.

2. Egyenesek képe

Gnomonikus perspektívában egy egyenest – mint minden más perspektív rendszerben – a nyomponttal és az irányponttal tudjuk jellemezni. Az egyenes



63. ábra: Egyenes ábrázolása gnomonikus perspektívában

nyompontja a félgömbbel alkotott dőféspontja (amennyiben létezik), *iránypontja* pedig a végtelen távoli pontjának gömbre eső képe.

Egyenesek vetítésein az adott egyenesre és a centrumra vetítősíkot illesztünk. Ezzel a síkkal metsszük az alapgömböt, és a síkmetszetet merőlegesen a képsíkra vetítjük. A gömb síkmetszete minden esetben kör, és mivel a gömböt a centrumot tartalmazó vetítősíkkal metsszük, ezek a körök gömbi főkörök. A síkmetszetet ezután merőlegesen a képsíkra vetítjük.

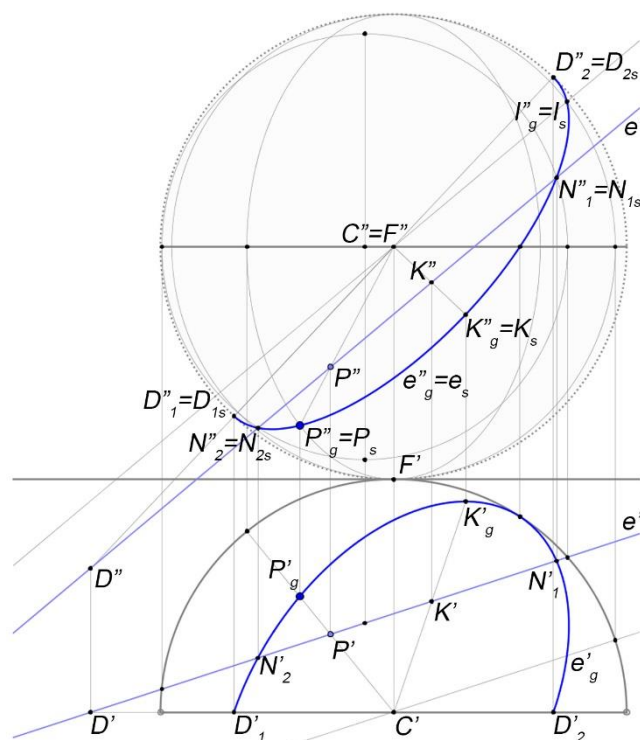
A keletkező kép csak akkor egyenes (szakasz), ha a vetítősík merőleges a képsíkra. Ebből megállapíthatjuk, hogy a cilindrikus perspektívához hasonlóan a gnomonikus perspektíva sem egyenestartó.

A következő alfejezetekben általános és speciális helyzetű egyenesek képeit vizsgáljuk.

2.1. Általános helyzetű egyenes

Az általános helyzetű egyenesek ábrázolásának ismerete geometriai és rajzi szempontból is nagy jelentőséggel bír. A felépített merőleges térrács rendszerén kívül legtöbbször rámpák, ékek és gúla éleinek rajzolásakor alkalmazhatjuk.

Állítás: Általános helyzetű egyenes gnomonikus perspektív képe félellipszis.



64. ábra: Általános helyzetű egyenes képe

Bizonyítás: Ha általános helyzetű egyenesre a centrumon keresztül vetítősíkot illesztünk, a gömbből egy gömbi főkört metsszünk ki a síkkal. A leképezési rendszer struktúrája miatt (félgömb alkalmazása) csak a kör felét értelmezzük. A képsíkra merőleges vetítés ezt félellipszisbe viszi át. A kör főkör volta miatt a középpontja a C centrum, vetítés után a félellipszis középpontja az F főpont.

Az ellipsziskép egyik tengelye a D_1D_2 szakasz, a másik tengelyt pedig a K_s pont és annak C -re vonatkozó tükörképe határozza meg. (A D_1D_2 , valamint a K_g és annak a centrumra vett tükörképe által meghatározott szakaszok a gömbi főkör két, egymásra merőleges átmérője).

Az egyenes nyompontját a félgömbbel vett dőléspontok képe adja. A dolgozat ábráinál a dőléspontokat az egyenesre illesztett függőleges metszősík segítségével határozzuk meg.

Az egyenes végtelen távoli pontjának képét a C centrumba párhuzamosan eltoló egyenest felhasználva kapjuk meg. Ez a vetítőegyenest eldöfi a félgömb felületét, majd ezt a dőléspontot merőlegesen a képsíkra vetítve meghatározzuk az egyenes l_g iránypontját.

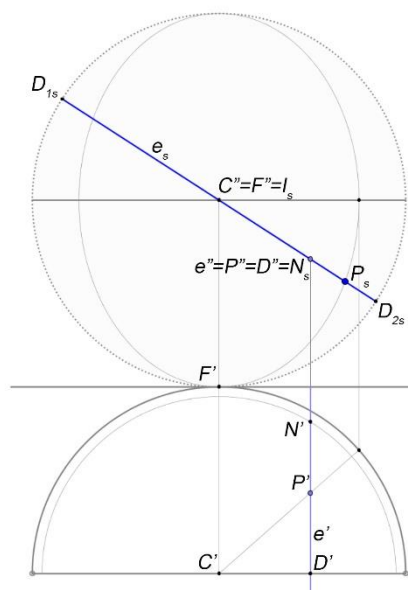
Megjegyzés: A bizonyításból kiderül, hogy az egyenes D pontja kettős képpel rendelkezik, mivel a centrumból húzott vetítőegyenest a félgömb felületét két pontban is döfi (a határcsón).

Megjegyzés: Láthatjuk, hogy az N_1 pont az e egyenes és annak gömbre vetített e_g képének is eleme. Ebből következik, hogy második képen az N_{1s} pont az e'' és az e_s egyik közös pontja. Ugyanez igaz az N_2 nyompont esetében is.

2.2. Képsíkra merőleges egyenesek

A gyakorlatban sokszor előfordul a képsíkra merőleges egyenesek ábrázolása, hiszen a főpontos perspektívák esetében (így gnomonikus esetben is) a tér elemeinek elhelyezését segítő térrács egyik sereglébeli egyeneseit ezek a helyzetű egyenesek adják.

Állítás: A képsíkra merőleges egyenesek képe gnomonikus perspektívában egyenes marad, iránypontjuk a főpont.



65. ábra: Képsíkra merőleges egyenes

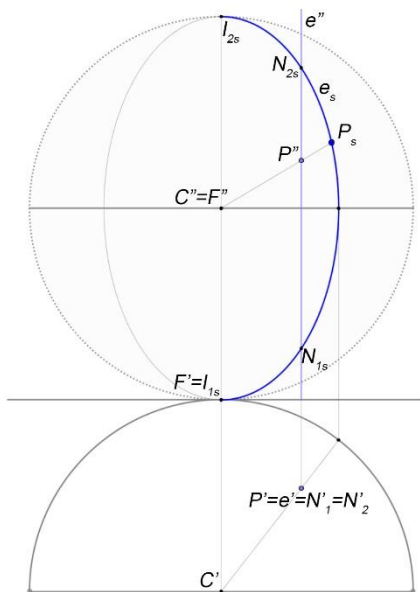
Bizonyítás: A képsíkra merőleges e egyenesre és a C centrumra illesztett vetítősík merőleges a képsíkra. A vetítősík a félgömbből félkört metsz ki (gömbi főkör felét). A képsíkra merőleges vetítés a félkört szakaszba viszi át, amely szakasz a határkörre eső D_1 és D_2 végpontokkal (D dupla képű pont két képe) rendelkezik. A végtelen távoli pont képe a főpont.

Megjegyzés: Mivel második képen az e_s a főponton (a határkör képének középpontján) áthalad, az e_s szakasz a világhatár átmérője.

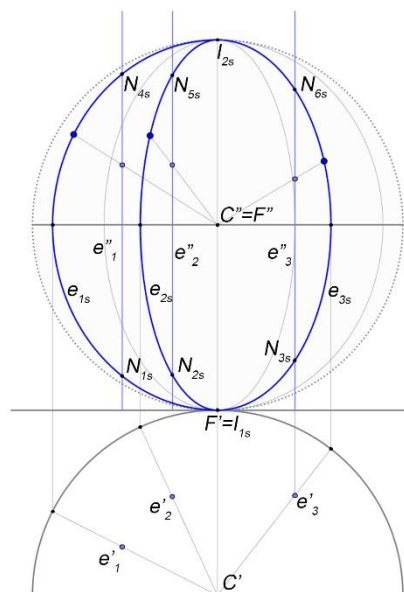
2.3. Alapsíkra merőleges (függőleges) egyenesek

Az alapsíkra merőleges egyenesek rajzolásánál a tér kiosztását szolgáló térrács egyik seregbeli egyeneseit adja, így nagy jelentőséggel bír. Geometriai alkalmazásaik közül a pontok és azok alaprajzi vetületeinek egymáshoz rendelése a leggyakoribb alkalmazásuk, ennek megfelelően pedig a rekonstrukcióban is fontos szerepet töltenek be.

Állítás: Az alapsíkra merőleges egyenesek gnomonikus perspektív képe félellipszis, melynek nagytengelye függőleges, végpontjai pedig az egyenes iránypontjának két képe.



66. ábra: Képsíkra merőleges (függőleges) egyenes



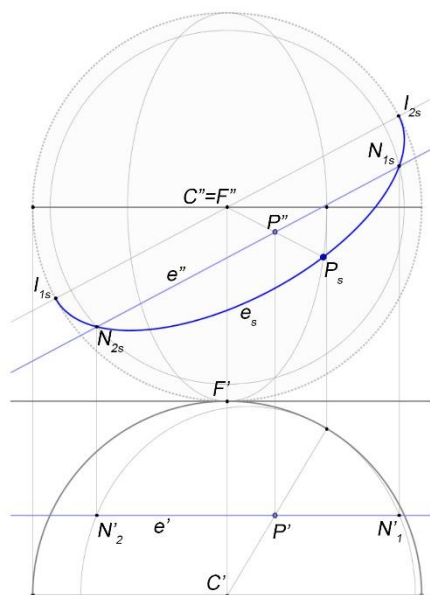
67. ábra: Függőleges egyenessereg képe

Bizonyítás: A függőleges helyzetű egyenesre és centrumra illesztett vetítősík függőleges. A kimetszett gömbi főkör függőleges átmérője párhuzamos a képsíkkal, így vetítés után valódi méretében látszik, vagyis a képellipszis nagytengelye. Az iránypont meghatározásához a függőleges egyenest eltoljuk párhuzamosan a centrumba. Az így kapott vetítőegyenes a gömböt a határkörben dőfi két pontban. Ez a két pont a félellipszis nagytengelyének végpontjaira esik.

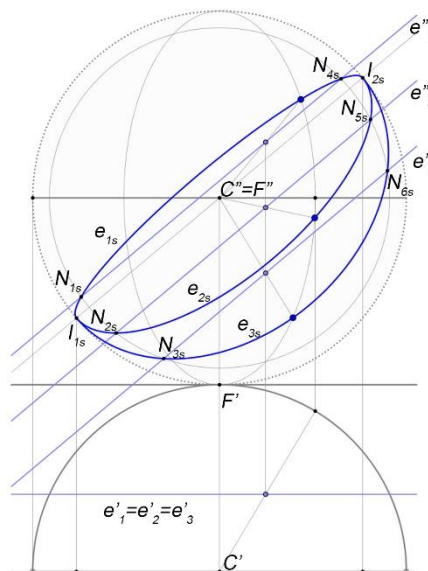
2.4. Képsíkkal párhuzamos egyenesek

Gnomonikus perspektíva esetén a képsíkra merőleges és a függőleges egyenesek mellett a képsíkkal párhuzamos egyenesek alkotják a térrácsot. Ennek megfelelően ezt az egyenestípust is gyakran alkalmazzuk.

Állítás: Gnomonikus perspektívában a képsíkkal párhuzamos egyenesek képe félellipszis, amelynek nagytengelye párhuzamos az egyenessel, végpontjai pedig az egyenes iránypontjának kettős képei.



68. ábra: Képsíkkal párhuzamos egyenes



69. ábra: Képsíkkal párhuzamos egyenessereg

Bizonyítás: A képsíkkal párhuzamos egyenesre és centrumra illesztett vetítősík által kimetszett gömbi főkörnek az alapgömb határcörével két metszéspontja van. Ez a két metszéspont az egyenes végtelen távoli pontjának kettős vetületével esik egybe. A főkör ellipszis képének nagytengelye éppen a világhatárnak az e egyenessel párhuzamos átmérője (valódi méretben látszik a szakasz).

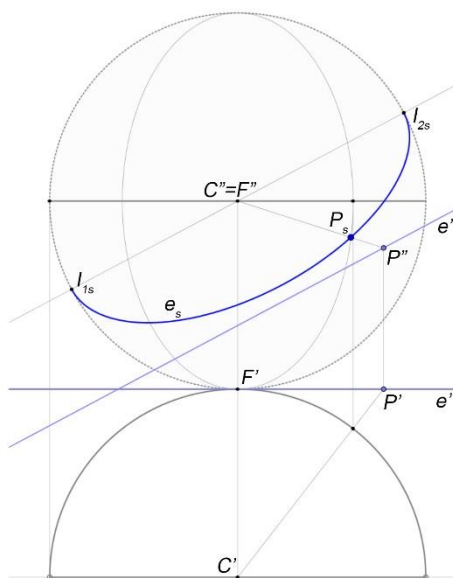
Megjegyzés: A cilindrikus perspektívához hasonlóan a gömbre vetítés esetében is a világhatárra esik a képsíkkal párhuzamos egyenesek iránypontja. Ráadásul, a végtelen távoli pont kettős képe miatt egy képsíkkal párhuzamos egyenessereg elemeinek képei olyan érzetet keltenek, hogy azok két pontba is összetartanak.

Mivel az egyenesseregnek közös síkja van, a 69. ábrán szereplő párhuzamos egyenessereg nyompontjai egy körre (a metszetkörre) illeszkednek.

Általánosságban elmondható, hogy két párhuzamos egyenesnek a két-két nyompontja egyazon képellipszisre esik. Ez az ellipszisz a két egyenes síkjának és a félgömb metszetének képe (ha létezik).

2.5. Képsíkban lévő egyenesek

A 2.4. speciális esete, mikor a vetítendő egyenes a képsíkban található. A hengerre vetítéssel ellentétben itt nem tudunk erről a típusú egyenesről többet elmondani, mint a képsíkkal párhuzamos egyenesek esetében. Cilindrikus perspektívánál ugyanis a képsík egy alkotó mentén érinti a félhenger palástját, így a képsíkban lévő egyeneseknek létezik közös pontja az alaphengerrel. Ez azt eredményezi, hogy az egyenes képeként létrejövő ellipszisnek az alaphengerrel vett közös pontban az eredeti egyenes érintője.



70. ábra: Képsíkban lévő egyenes képe

Gnomonikus esetben az alapgömb azonban a képsíkot csak egy pontban érinti, így a képsíkban lévő egyenes a gnomonikus képének csak akkor érintője, amikor a főponton át vesszük fel. Ezt az esetet a 2.9.-es pontban fejtjük ki bővebben.

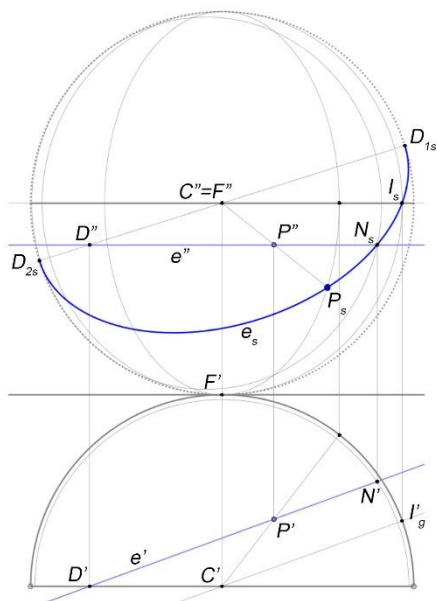
Egy keletkező félellipszisnek az egyenes akkor érintője, mikor az egyenes érinti az alapgömb felületét. Ezt a 2.11.-ben tárgyaljuk részletesen.

2.6. Alapsíkkal párhuzamos és alapsíkbeli egyenesek

Amikor nem főpontos perspektívában ábrázoljuk a teret, akkor a térrács egyeneseit (az alapsíkra merőleges egyenesek mellett) az alapsíkkal párhuzamos, egymásra merőleges egyenesek alkotják.

Állítás: Az alapsíkkal párhuzamos és alapsíkbeli egyenesek iránypontja gnomonikus perspektívában a horizontvonalra esik.

Bizonyítás: Az alapsíkkal párhuzamos egyenesre és centrumra illesztett vetítősík által kimetszett gömbi főkör képe ellipszis a merőleges vetítés után. Az egyenest párhuzamosan a centrumba eltolva a vetítőegyenes a horizontsíkban dőli az alapgömböt. Így az egyenes végtelen távoli pontjának gnomonikus perspektív képe a merőleges vetítés után a horizontvonalra kerül.

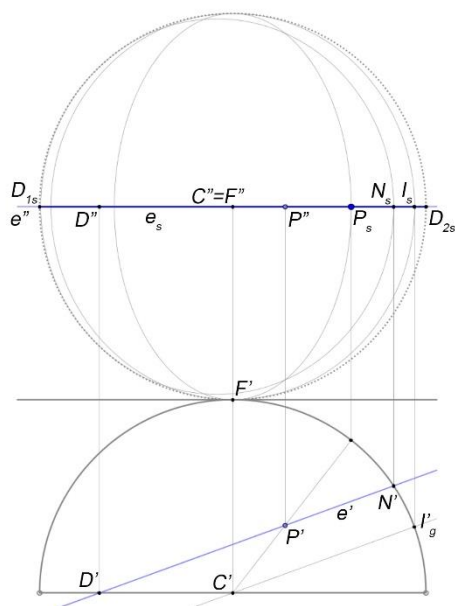


71. ábra: Alapsíkkal párhuzamos egyenes

2.7. Horizontsíkbeli egyenesek

A 2.6. speciális esete.

Állítás: A horizontsíkban lévő egyenesek gnomonikus perspektív képei a horizontvonalra eső, átmérő hosszúságú szakaszok.

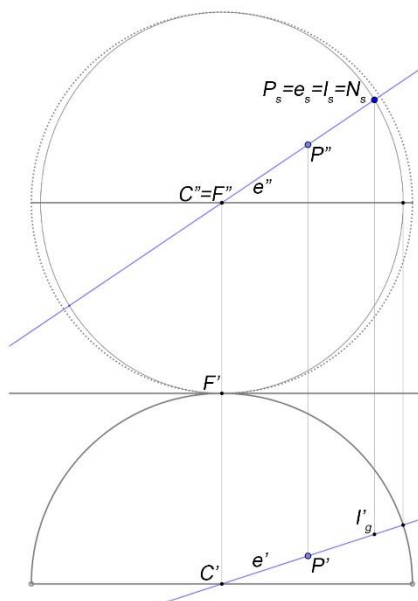


72. ábra: Horizontsíkban lévő egyenes

Bizonyítás: A középpontból történő vetítés során a horizontsík minden pontja a centrum magasságában lévő, vízszintes síkú gömbi főkörre esik. A merőleges vetítés során ennek a főkörnek a képe a horizontvonalra eső szakasz, amely a határcső képének átmérője. Így a horizontsíkban lévő egyenesek képei ugyanerre a szakaszra kerülnek.

2.8. Centrumon áthaladó egyenesek (vetítőegyenesek)

Állítás: A C centrumon áthaladó egyenesek, vagyis vetítőegyenesek képe egy vagy két pont lehet.



73. ábra: Vetítőegyenés képe

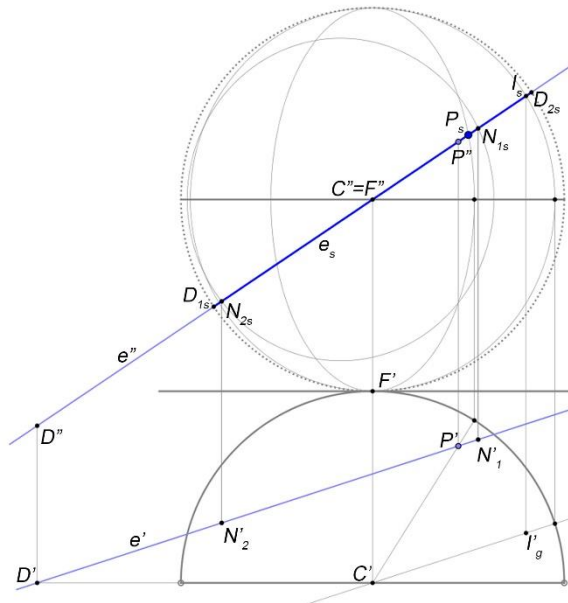
Bizonyítás: Vetítőegyenesek esetében nem lehet egyértelműen vetítősíkot illeszteni arra, hanem a vetítőegyenessel döfjük az alapgömb felületét. A keletkező dőfpontot (vagy speciális esetben két dőfpontot) merőlegesen a képsíkra vetítjük, és a kapott pont az egyenes gnomonikus perspektív képe. Ugyanez a pont egyben az egyenes iránypontja és nyompontja is.

2.9. Centrumot és főpontot összekötő egyenest metsző egyenesek

Gyakorlati alkalmazása nem kifejezetten elterjedt, speciális esetként mégis érdemes tárgyalni ezen egyenesek képeinek alakulását.

Állítás: A centrumot és a főpontot összekötő CF egyenest elmetsző egyenesek képe egyenes (szakasz) marad. Az egyenes képe tartalmazza a főpontot.

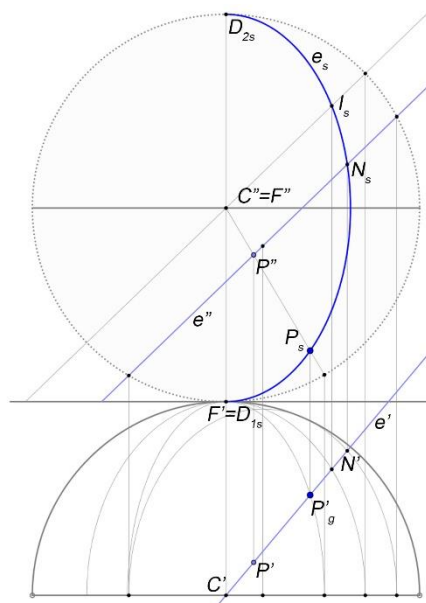
Bizonyítás: Tekintsük a centrum és a CF egyenest metsző egyenes által meghatározott vetítősíkot. Ez a sík merőleges a képsíkra, így a merőleges vetítés után a kimetszett gömbi főkör élben látszik, szakaszként. A kimetszett főkör síkja tartalmazza a főpontot, így ez e_s kép is áthalad azon.



74. ábra: A CF egyenest metsző egyenes képe

2.10. A CC' egyenest metsző egyenesek

A CC' egyenest metsző egyenesekre és a centrumra illesztett vetítősík függőleges helyzetű. A cilindrikus perspektívánál ebben az esetben „egyenestartásról” beszélhetünk, viszont gnomonikus perspektívában a függőleges vetítősík is gömbi főkört metsz ki, amelynek képe ellipszis a merőleges vetítés után.

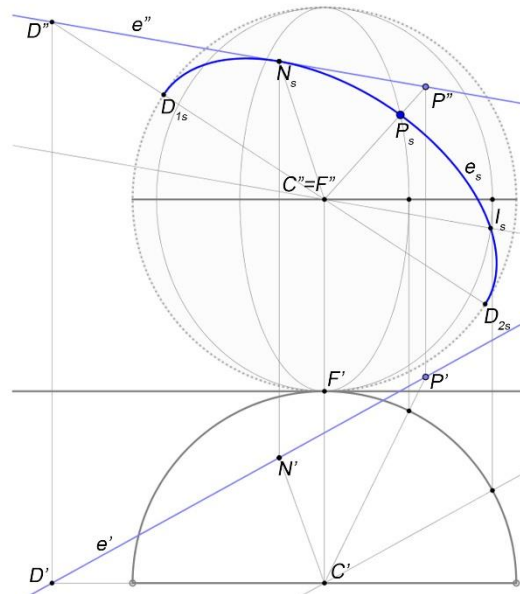


75. ábra: A CC' egyenest metsző egyenes

Megjegyzés: A függőleges helyzetű egyenesekre is függőleges vetítősík illeszthető, azonban a keletkező képek között néhány eltérés van. Függőleges egyeneseknél az iránypont mindig kettős vetületű, míg a CC' egyenest metsző egyeneseknél az iránypont képe nem ennyire speciális.

2.11. Az alapgömb felületét érintő egyenesek

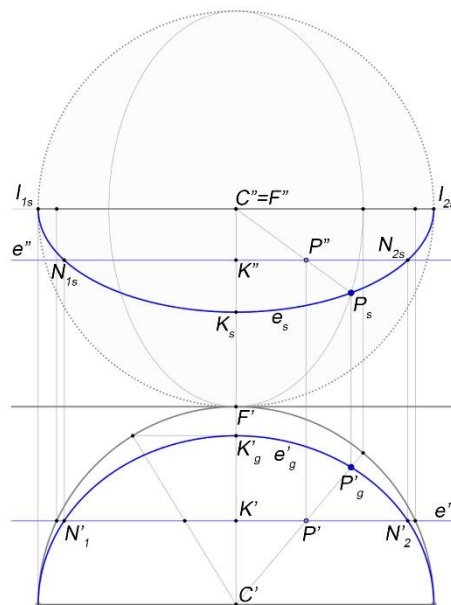
Állítás: Az alapgömb felületét érintő egyenesek második képe érinti a vetítés után kapott félellipszist.



76. ábra: Az alapgömböt érintő egyenes képe

Bizonyítás: Vegyük az alapgömböt érintő egyenesre és a centrumra illesztett vetítősíkot. Ez a sík egy olyan gömbi főkört metsz ki az alapgömbből, amelynek a vetítendő egyenes érintője, az érintési pont az alapgömb és az egyenes közös N pontja. Az érintést pedig a merőleges vetítés megőrzi.

2.12. Alapvonallal párhuzamos egyenesek

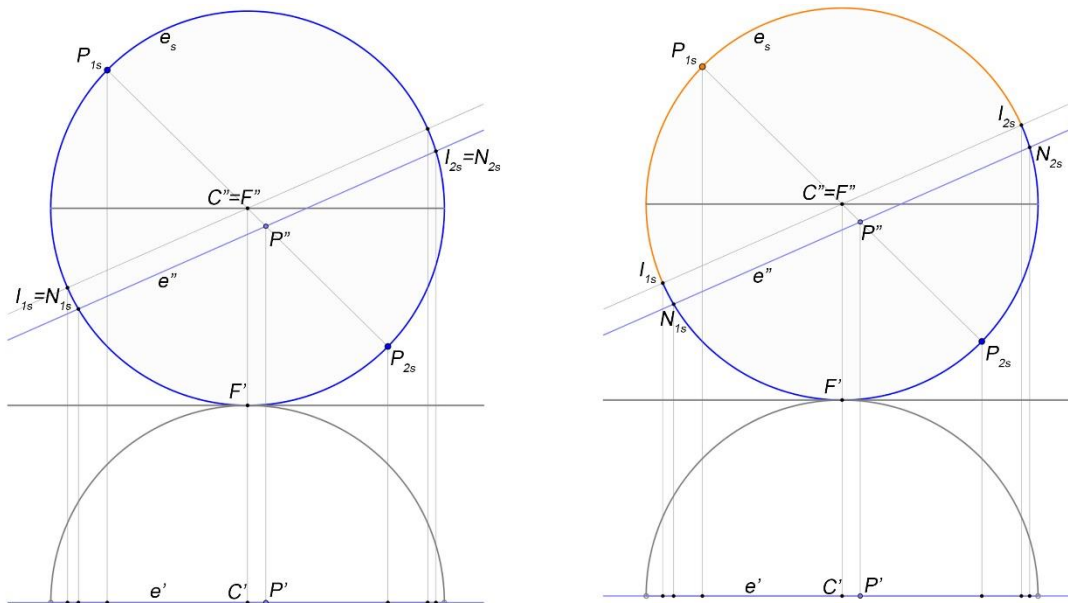


77. ábra: Alapvonallal párhuzamos egyenes képe

Egy alapvonallal párhuzamos egyenes végtelen távoli pontjának kettős vetülete van, amelyek a horizontsík és a határcör közös pontjai. Az iránypont két képe által meghatározott szakasz (határcör vízszintes átmérője) a keletkező ellipszisképhez tartozó vízszintes nagytengely. A függőleges kistengely végpontja az F , C és C' pontokra illesztett függőleges sík és az e egyenes K dőfésponájának képe.

2.13. Határcör síkjában lévő egyenesek

Állítás: A határcör síkjában lévő egyenes képe kör.



78. ábra: A határcör síkjában lévő egyenes képe

79. ábra: A határcör síkjában lévő egyenes képe a kettős vetület figyelmen kívül hagyásával

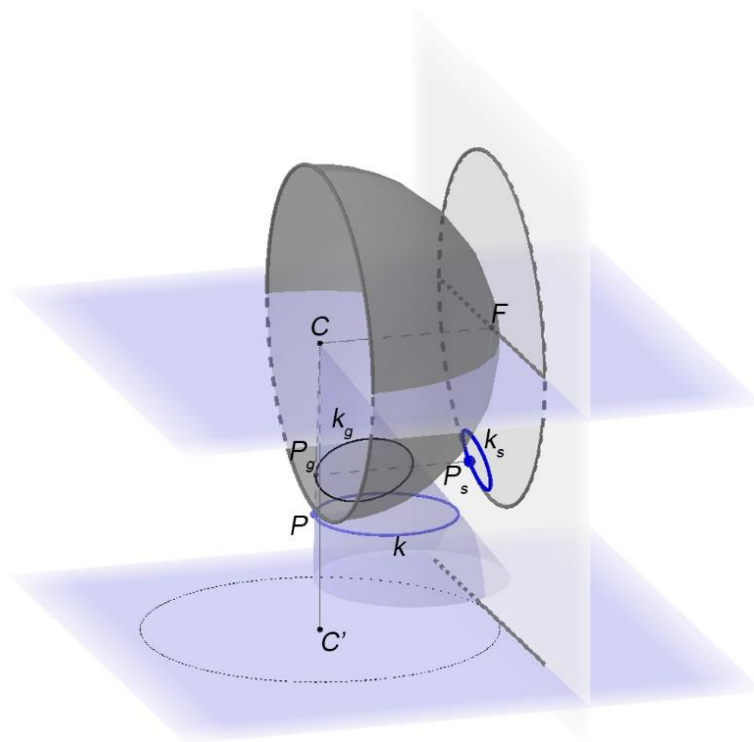
Bizonyítás: A határcör síkjában lévő egyenesre illesztett vetítősík a határcört metszi ki a félgömbből. Ez a kör párhuzamos a képsíkkal, így vetítés után a képe kör marad.

Megjegyzés: A vetítés során a kör valójában egy kettős vetületű pontokból álló görbe. A gyakorlatban félegyenessel vetítünk, így a körnek az egyik felét nem értelmezzük. Az így kapott félkör az egyenes iránypontjának egyik vetületétől a másikig tart. (79. ábra)

3. Kör képe és alkalmazásai

Geometriai szempontból kulcsfontosságú, hogy az adott leképezés körtartó-e, illetve, hogy az adott másodrendű görbét másodrendű görbébe viszi-e át. A görbék és görbe felületek közül leggyakrabban a körrel és a hengerrel találkozunk a gyakorlati példákban, főként oszlopok formájában.

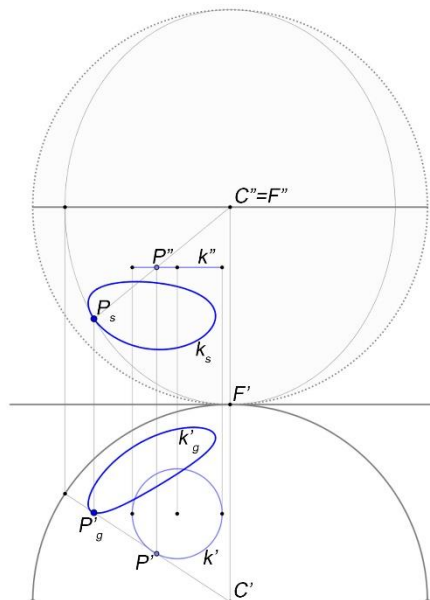
Kör ábrázolásánál vetítőkúpot alkalmazunk, melynek alapköre a vetíteni kívánt kör, csúcsa pedig a C centrum. A vetítőkúp és az alapgömb áthatási görbét szerkesztjük, majd ezt vetítjük merőlegesen a képsíkra.



80. ábra: Kör vetítése gnomonikus perspektívában

Megjegyzés: A kör ábrázolásánál a szemléltetéshez vízszintes síkú kört használunk.

Állítás: A gnomonikus perspektíva az általános helyzetű kört negyedrendű görbeívbe viszi át.



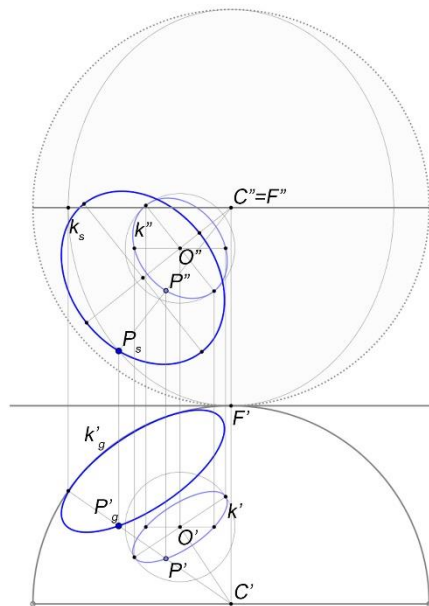
81. ábra: Kör vetítése gnomonikus perspektívában

Bizonyítás: A tetszőlegesen felvett körrel mint alapkörrel és a centrummal mint csúccsal képzett vetítőkúpnak az alapgömbbel vett áthatási görbéje negyedrendű térgörbe. Ezt merőlegesen a képsíkra vetítve negyedrendű síkgörbét kapunk.

3.1. Speciális helyzetű körök

a)

Ha a vetítendő kör síkja merőleges egy, a centrumon áthaladó vetítőegyenesre, középpontja pedig illeszkedik a vetítőegyenesre, akkor a vetítőkúp egy egyenes körkúp. Ez az alapgömbből paralelkört metsz ki. Az áthatási görbét merőlegesen vetítve ellipszist kapunk.

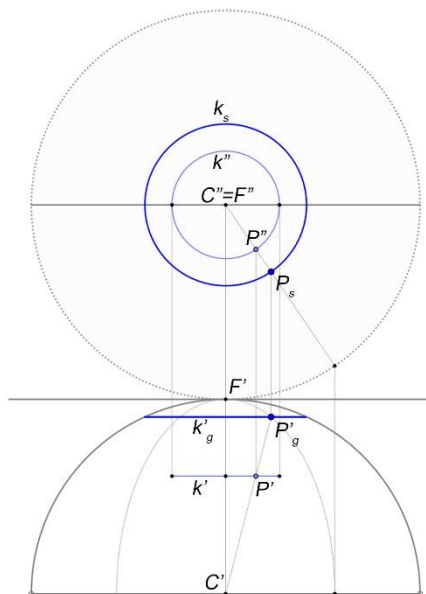


82. ábra: Kör képe ellipszis

Megjegyzés: Az alapgömb és a vetítőkúp áthatásakor kimetszett kör síkja párhuzamos a vetítendő kör síkjával. Emiatt, ha merőlegesen rávetítjük a képsíkra mindkét kört, két olyan ellipszist kapunk, amelyek kis- és nagytengelye egymással páronként párhuzamos.

a1)

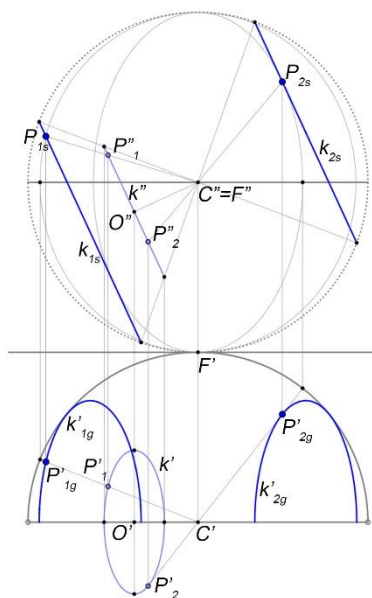
Abban az esetben, ha a vetítendő kör síkja párhuzamos a képsíkkal, a középpontja pedig a CF egyenesre illeszkedik, a vetítőkúp egy CF tengelyű egyenes körkúp. Ez a körkúp az alapgömbből paralelkört metsz ki, melyek síkja párhuzamos a képsíkkal. A merőleges vetítés során a paralelkör képe kör marad.



83. ábra: Kör képe kör

a2)

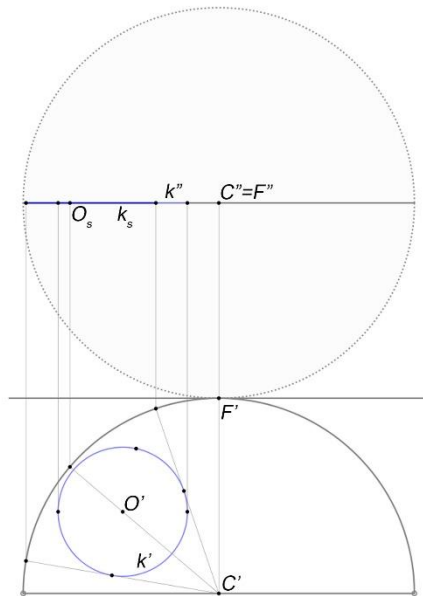
Tekintsük az O tetszőleges pontot az alapgömb határcörének síkjában. Erre illesszünk egy O középpontú kört, melynek síkja merőleges az OC egyenesre. Ekkor a vetítőkúp egyenes körkúp, ami a gömbből paralelköröket metsz ki. A kimetszett körök síkja merőleges a képsíkra, így a merőleges vetítés után a kapott kép két szakasz.



84. ábra: Kör képe két szakasz

b)

A horizontalsíkban lévő kör gnomonikus perspektív képe szakasz. A szakasz két végpontját a C centrumból a körhöz húzott érintők érintési pontjainak képe határozza meg.



85. ábra: Horizontalsíkban lévő kör képe

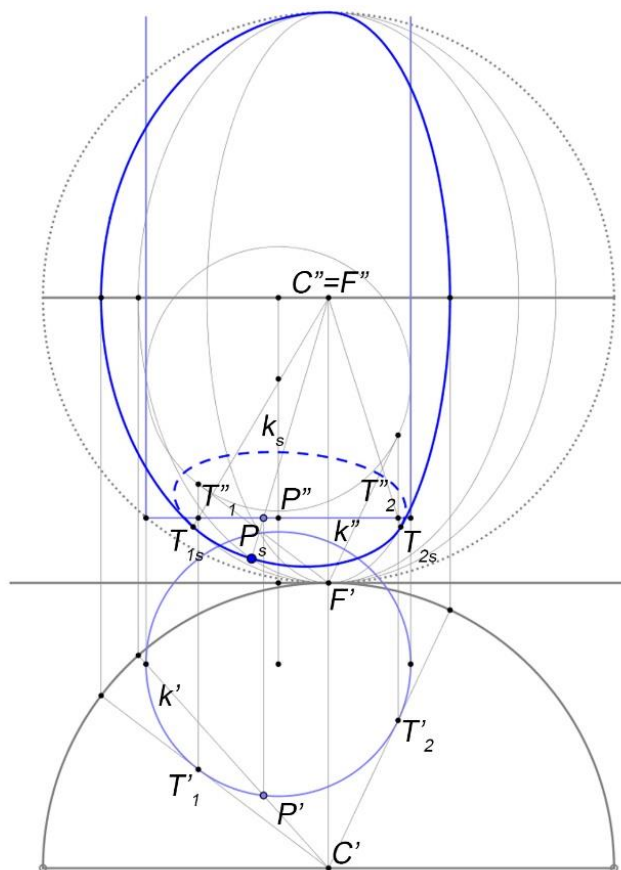
Megjegyzés: A kör középpontjának képe *nem* a szakasz felezőpontjával esik egybe.

3.2. Hengerek kontúralkotói

Mivel a körök gyakorlati felhasználása leginkább az oszlopok ábrázolásánál jelenik meg, elsősorban a függőleges tengelyű hengerek tárgyalását tartjuk fontosnak. A henger ábrázolásához a kontúralkotót kell megszerkesztenünk, amelyek azonban függőleges irány esetén nem egyenesek, mint cilindrikus perspektívában.

Geometriai értelemben véve a feladat tehát egy negyedrendű görbéhez érintő ellipszisek szerkesztése. Ez igen nehéz, ezért a feladatot Monge-rendszerbeli problémára vezetjük vissza.

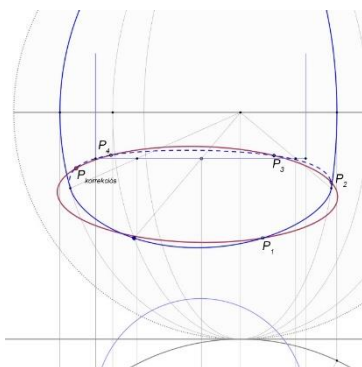
Első lépésben megkeressük azt a két alkotót, amelyek képei a kontúralkotókat adják. Ehhez a centrumból érintősíkokat húzunk a hengerhez. A merőleges vetítés során a szélső helyzet ebben az esetben nem változik, így a két egyenes megtalálása után az alapsíkra merőleges (függőleges) egyenesek szerkesztési lépéseit felhasználva (lásd 2.3.) megszerkesztjük a kontúralkotókat.



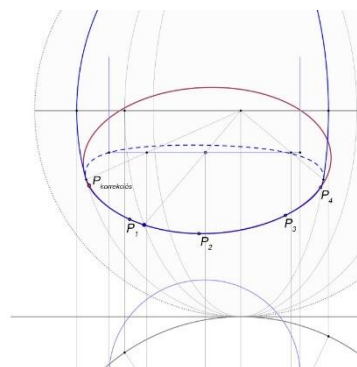
86. ábra: Henger kontúralkotóinak szerkesztése cilindrikus perspektívában

3.3. Közelítő ellipszisek

A gyakorlatban a körök negyedrendű képét ellipszisekkel tudjuk közelíteni, mint a cilindrikus perspektíva esetében is. A teljes negyedrendű görbére ellipszist illeszteni nehezebb, nagyobbak az eltérések, azonban sok esetben csak egy ívszakaszt kell ábrázolnunk. Ebben az esetben már pontosabban közelíthetjük a görbét egy *ellipszisívvel*.



87. ábra: Negyedrendű görbe egészének közelítése ellipszissel

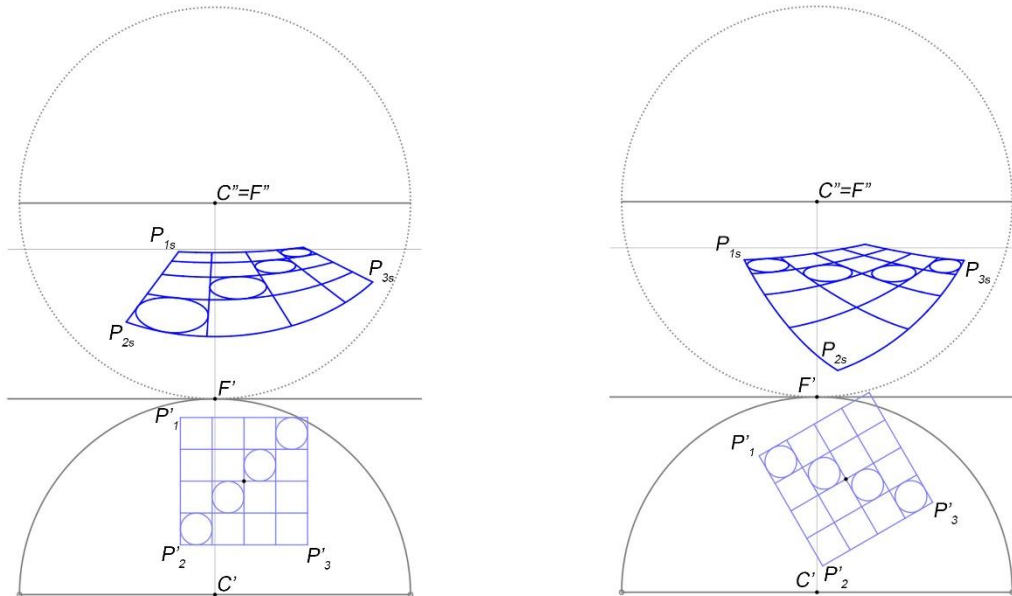


88. ábra: Negyedrendű görbe egy részének közelítése ellipszissel

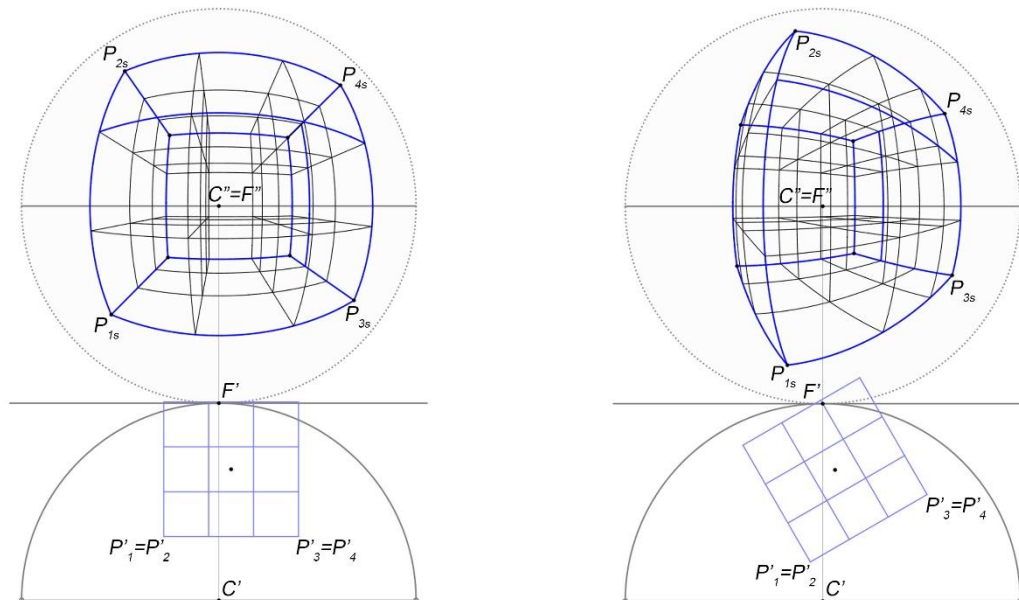
Ahogy a 88. ábrán is láthatjuk: a negyedrendű görbe és az ellipszisz szinte teljes fedésbe kerül egymással. Így mondhatjuk, hogy az ellipszissel való közelítés nem eredményez nagy pontatlanságot.

4. További alakzatok ábrázolása

Az alábbi ábrákon összetettebb alakzatokat mutatunk be. Az itt látható síkrácsok és térrácsok ábrázolásának ismerete segít elhelyezni a térelemeket a rajzokon.



89. ábra: Síkrácsok ábrázolása gnomonikus perspektívában

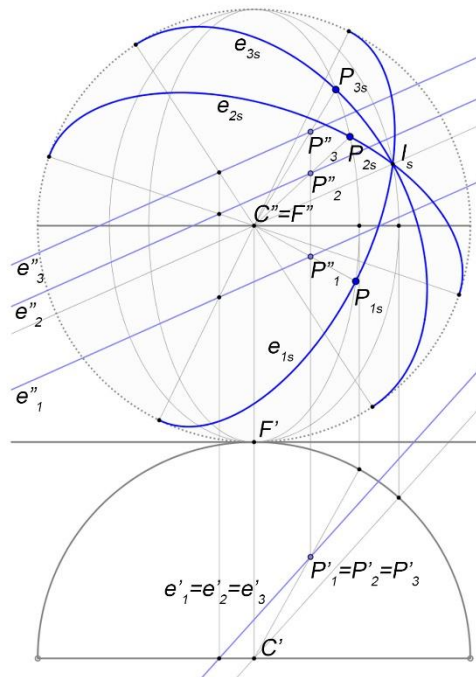


90. ábra: Térrácsok ábrázolása gnomonikus perspektívában

Gyakorlati alkalmazások

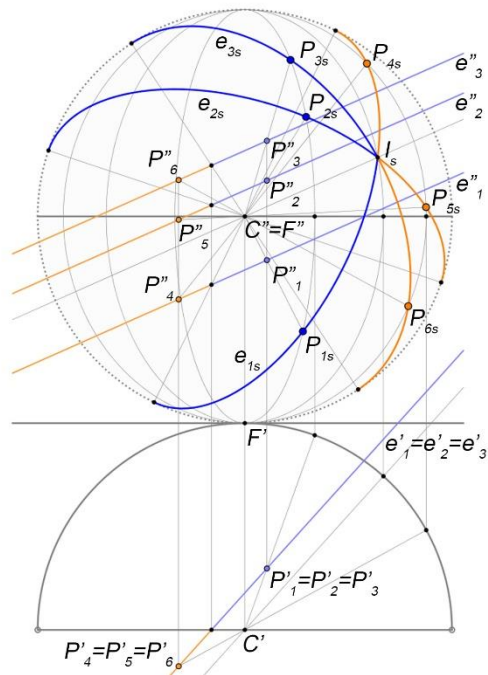
Átvezetés

Mikor a gyakorlatban használjuk fel a geometriai észrevételeinket, néhány módosítással kell élünk. Az egyenesek képe vetítőegyenest alkalmazva általánosságban félellipszist eredményez. Megállapítottuk, hogy az iránypont nem feltétlen a határcörre, vagy a horizontvonalra esik.



91. ábra: Általános helyzetű egyenessereg képe

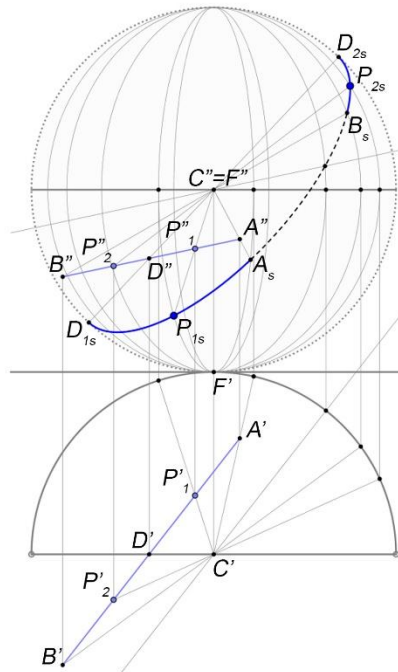
A gyakorlatban azonban nem egyenest, hanem félegyenest alkalmazunk a vetítésnél, hiszen ez adódik a látás mechanizmusából (nem látjuk azokat a térelemeket, amelyek mögöttünk helyezkednek el). Ennek alapján – bár geometriailag létezik – a gyakorlatban a határcör síkja mögé eső elemek képét nem vesszük figyelembe (mivel a centrumból indított félegyenes nem dőfi az alapgömböt ezen pontok esetében). Így az előbb bemutatott egyenessereg képe a következőképp alakul (a narancssárgával jelölt részt nem értelmezzük):



92. ábra: Általános helyzetű egyenessereg képe a gyakorlatnak megfelelően korrigálva

Ez a változtatás azért fontos, mert olyan képeket kapnánk, amelyek a gyakorlatban megszokottal ellentmondanak. Erre a legegyszerűbb példa az alábbi AB szakasz képének ábrázolása. A szakasz dőfi a határcső síkját, így a hengernél tárgyalathoz hasonlóan a geometriai vetítés két ívszakaszra „robbantja szét”.

Ha a tér összes elemét hasonlóan vetítenénk, akkor két kép fedné egymást a világhatáron belül. Hogy ezt a zavaró tulajdonságot feloldjuk, a gyakorlatban a centrumból induló félegyenessel vetítünk.

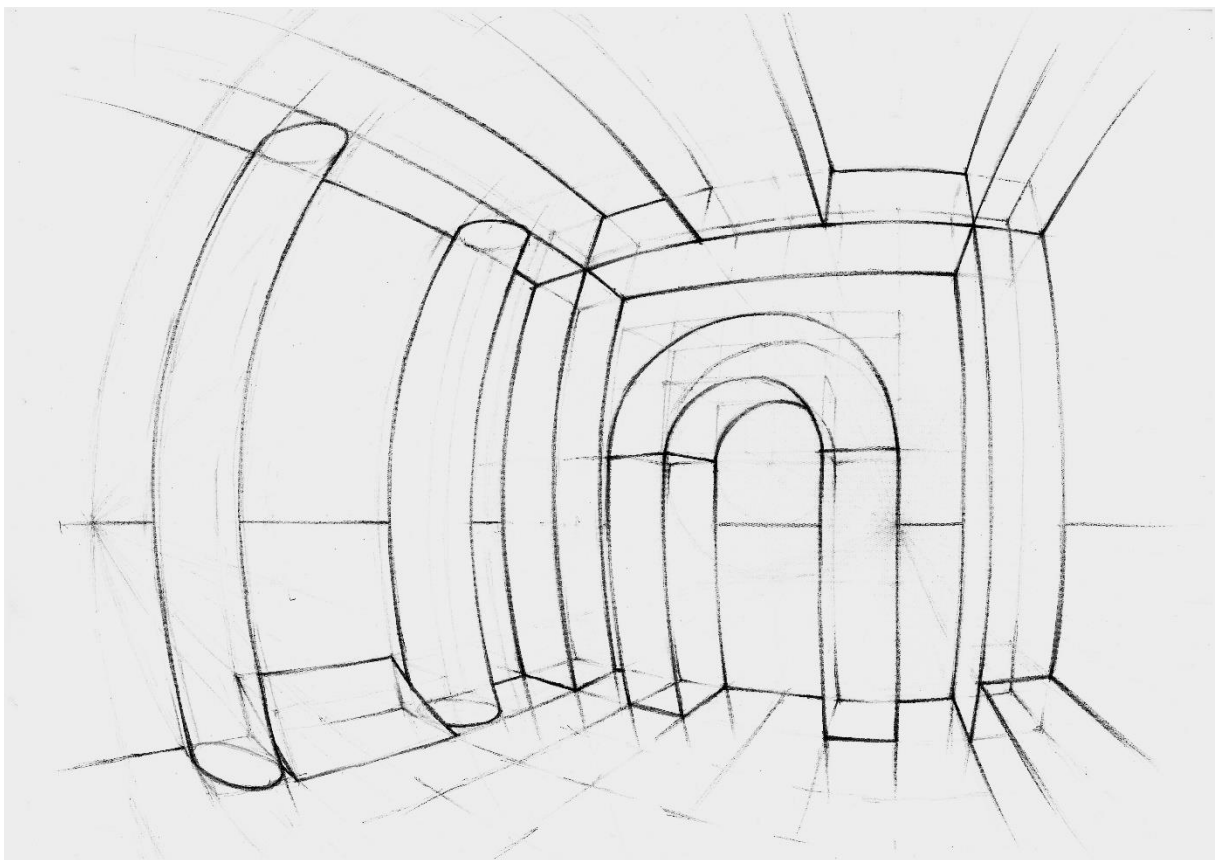


93. ábra: Határcső síkját dőfő szakasz ábrázolása

Esettanulmány

A szabadkézi rajzzal történő összehasonlítás érdekében gnomonikus perspektíva esetén is esettanulmányt végeztünk, úgy, mint a már leírt cilindrikus perspektívánál. Az alapkoncepciónk nem változott: négy egység oldalú kocka által határolt térben helyeztünk el olyan beállítást, amely jól reprezentálja vetítési rendszerünket. A beállítást párhuzamosan rajzoljuk szabadkézzel és szerkesztjük GeoGebrával, végül a szabadkézi rajz során felmerült kérdéseket elemezzük, majd összehasonlítjuk a kiserkesztett ábrával.

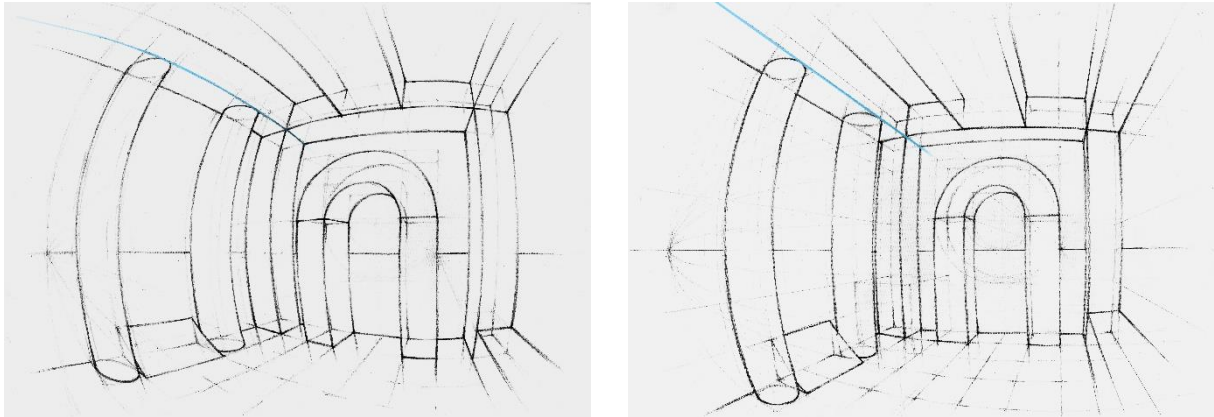
Az első esettanulmány elején kikötött módosítás itt is érvényes, miszerint: *A geometriai tárgyalásban a vetítősugarak teljes egyenesek, itt azonban – az emberi látás utánczása miatt – csak centrumból induló félegyenesekkel vetítünk.*



94. ábra: A beállítás intuitív rajza gnomonikus perspektívában

Képsíkra merőleges egyenesek

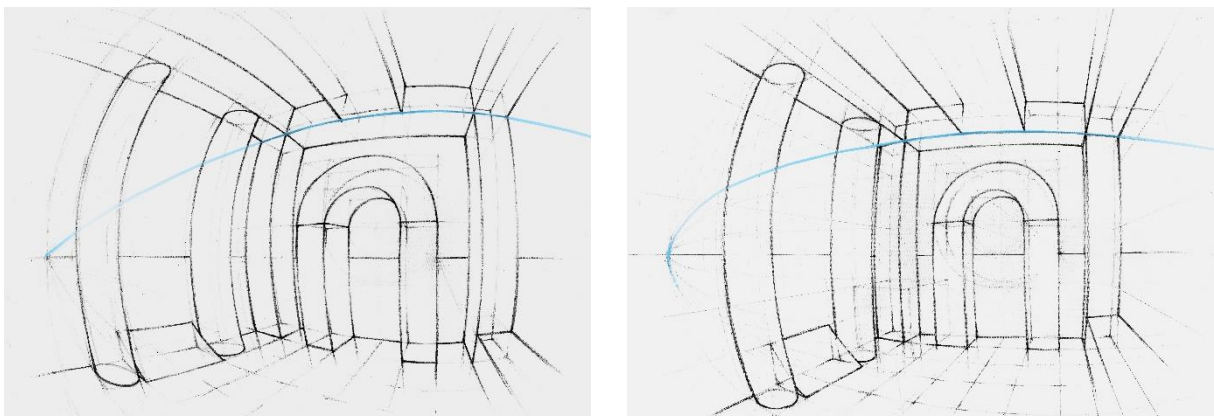
Az első kérdés ebben az esettanulmányban is a képsíkra merőleges egyenesek kapcsán merült fel. Az ilyen egyenesek képe – akár csak cilindrikus perspektívánál – egyenes marad, mivel a centrum és az egyenes által meghatározott vetítősík merőleges a képsíkra. Így a félgömbből kimetszett félkör képe élben vetül a képsíkra.



95. ábra: Képsíkra merőleges egyenes képe

Alapvonallal párhuzamos egyenesek

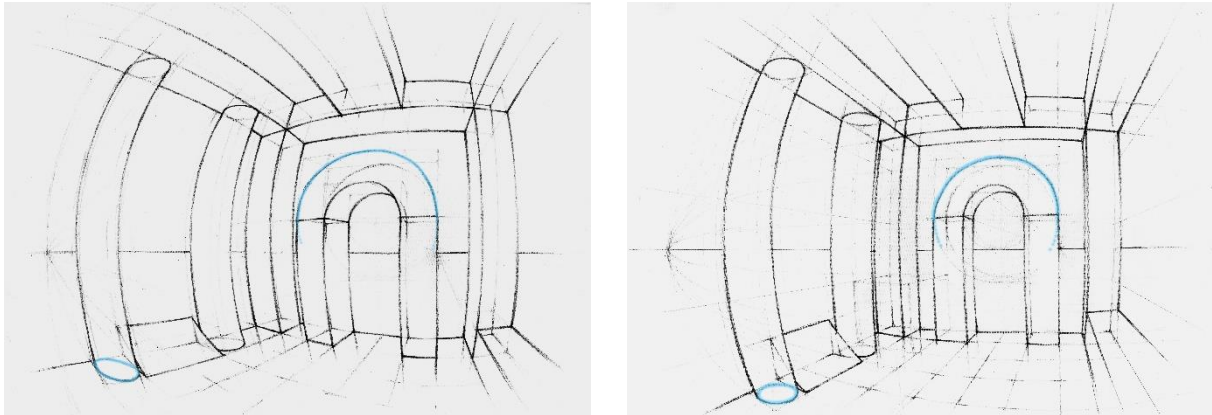
Következő lépésként a képsíkkal párhuzamos, vízszintes helyzetű (alapvonallal párhuzamos) egyeneseket elemezzük. Itt elsősorban a világhatár közelében történő ábrázolás tisztázandó. Az ilyen egyenesek képei félellipszisek és két irányponttal rendelkeznek (az egyenes végtelen távoli pontjának kettős képe miatt). Az iránypontokat a világhatárkör és a horizontvonal metszéspontjai határozzák meg a képsíkon. Ábrázolás szempontjából fontos, hogy az iránypontokba befutó félellipszisek képei érintik a világhatárkört. Másrészt megemlítendő, és már a hengerre vetítésnél szintén felmerült, horizontsík felett és alatt elhelyezkedő egyenesek képe. Az ott leírtak ebben az esetben is érvényesek, miszerint a horizontsík felett konkáv görbékről beszélhetünk, alatta konvexekről.



96. ábra: Alapvonallal párhuzamos egyenes képe

Körök ábrázolása

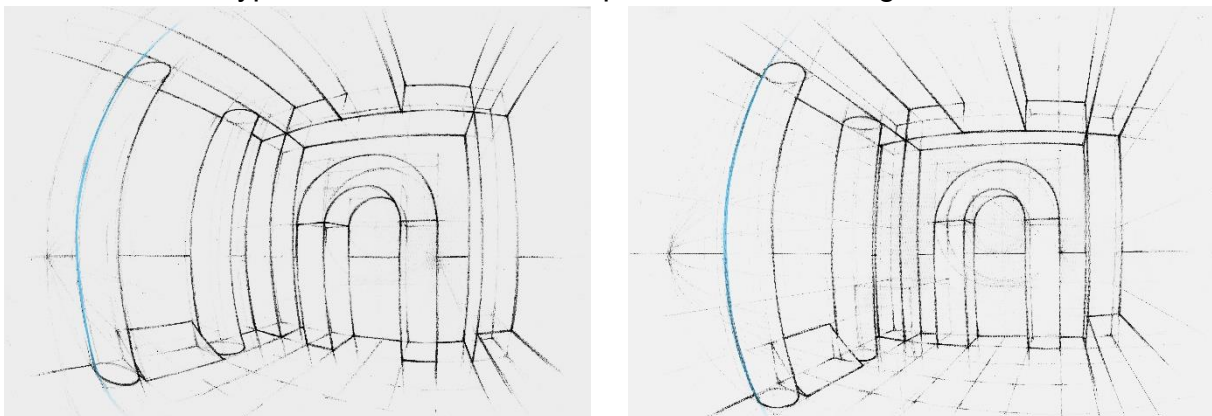
Kiemelten foglalkozunk ebben az esettanulmányban is a körök ábrázolásával. Mivel több speciális eset van a cilindrikus perspektívához képest, ezért a beállításban is több kör alapú test került elhelyezésre. A kör gnomonikus képe negyedrendű síkgörbe, bizonyítása a fentiekben tárgyalásra került. Azt is bemutattuk, hogy ezek a görbék jó közelítéssel ellipszisként is ábrázolhatók (főleg oszlopok esetén ahol csak a görbe egy része látható). A hengerre vetítésnél tapasztaltak itt is igazak, miszerint minél távolabb esik a kör a főponttól, annál torzabb a keletkezett görbe. Azonban a főponthoz közeli köröknél jól látható az ellipszissel történő közelítés hasznossága.



97. ábra: Körök ábrázolása

Függőleges egyenesek

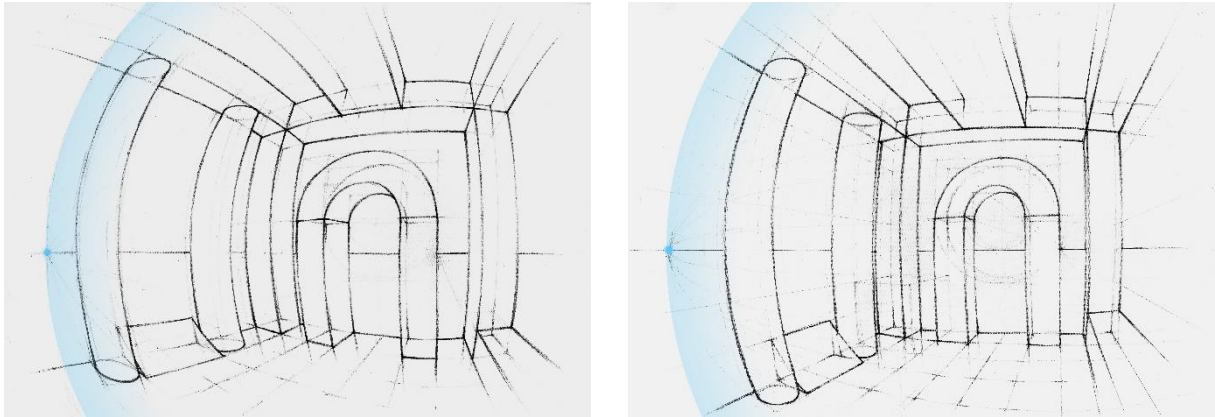
Az első látványos különbség a hengerre vetített ábrázoláshoz képest a függőleges egyenesek képei között jelentkezik. Gnomonikus perspektívánál már nem érvényes a függőleges egyenesek „egyenestartása”. A függőlegesek is a képsíkkal párhuzamos egyenesek csoportjába tartoznak, így itt is igaz, hogy gnomonikus képük félellipszis, végpontjaik – az egyenes végtelen távoli pontjának kettős képe miatt – két iránypontba futnak és ezen a ponton érintik a világhatárkört.



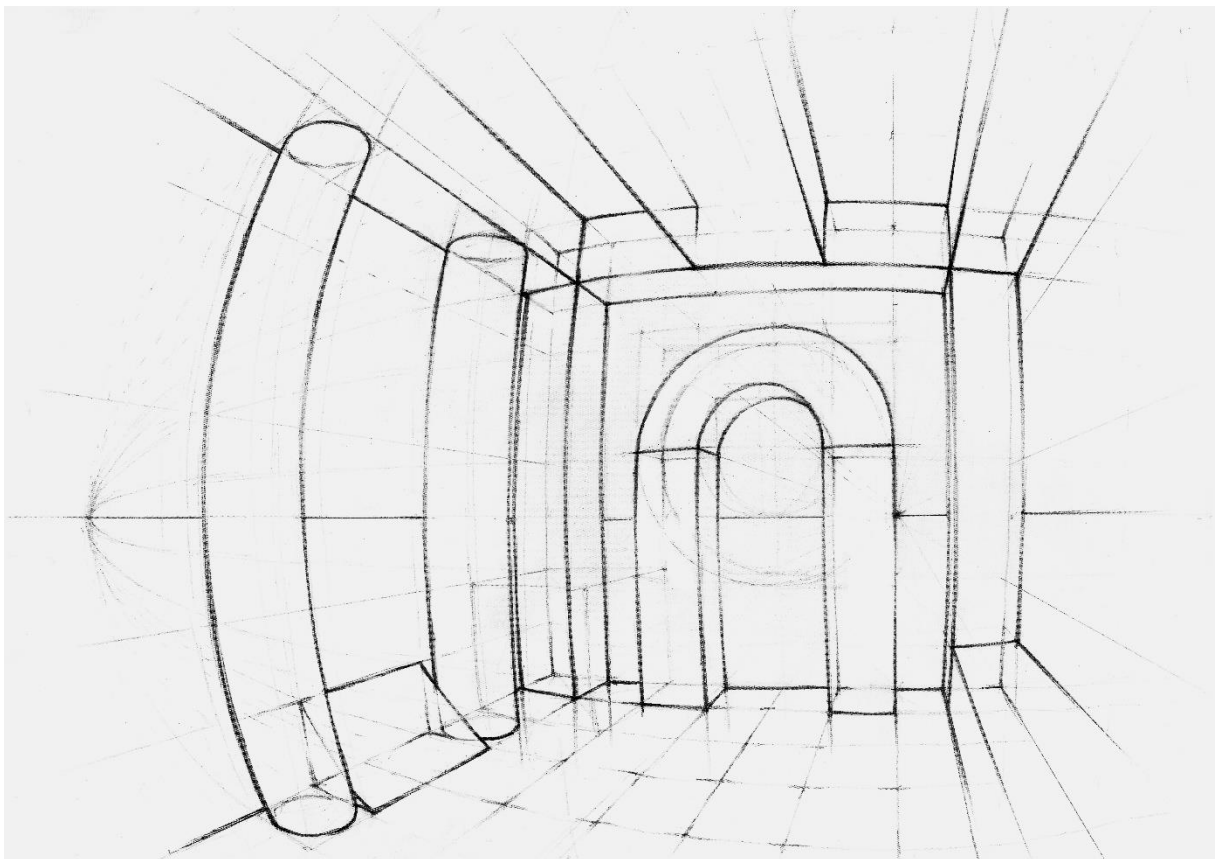
98. ábra: Függőleges egyenes képe

Világhatár

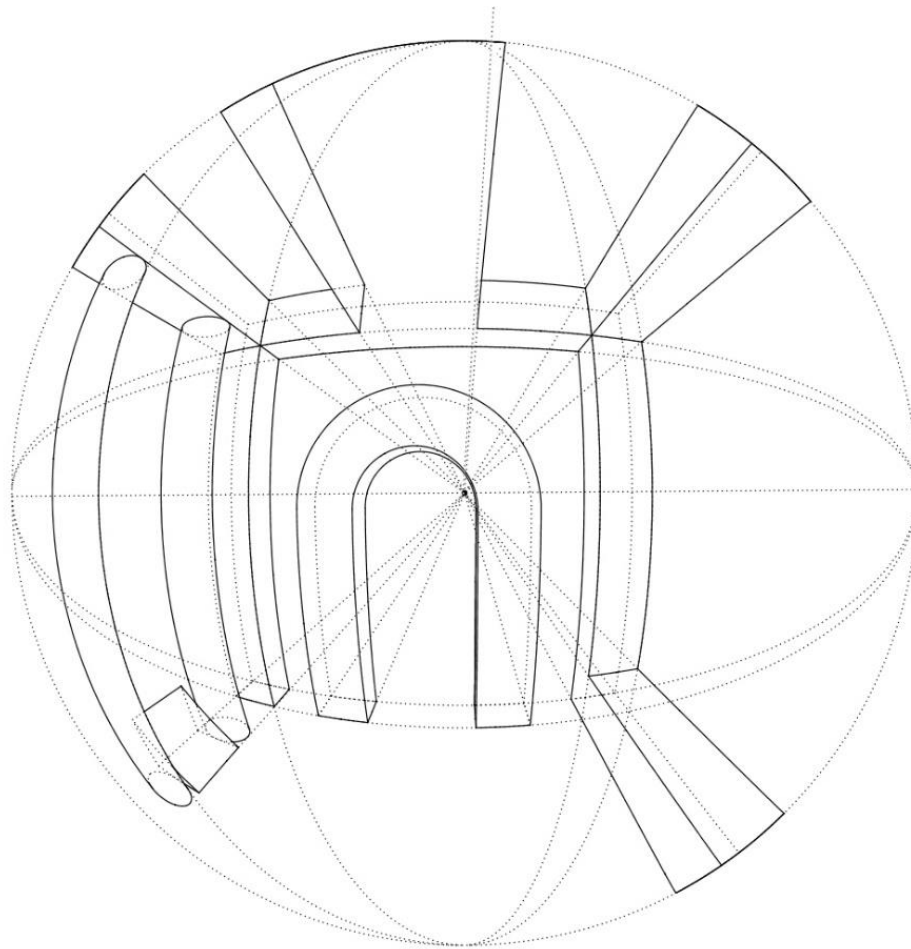
A másik szembeűnő különbség a két esettanulmány között – túl a függőleges egyenestartás csorbulásán –, hogy az eddig két függőleges közt ábrázolható képünk helyett most kör alkotja a megrajzolható világunk határát.



99. ábra: A világhatár



100. ábra: Geometriailag átgondolt gnomonikus perspektív rajz

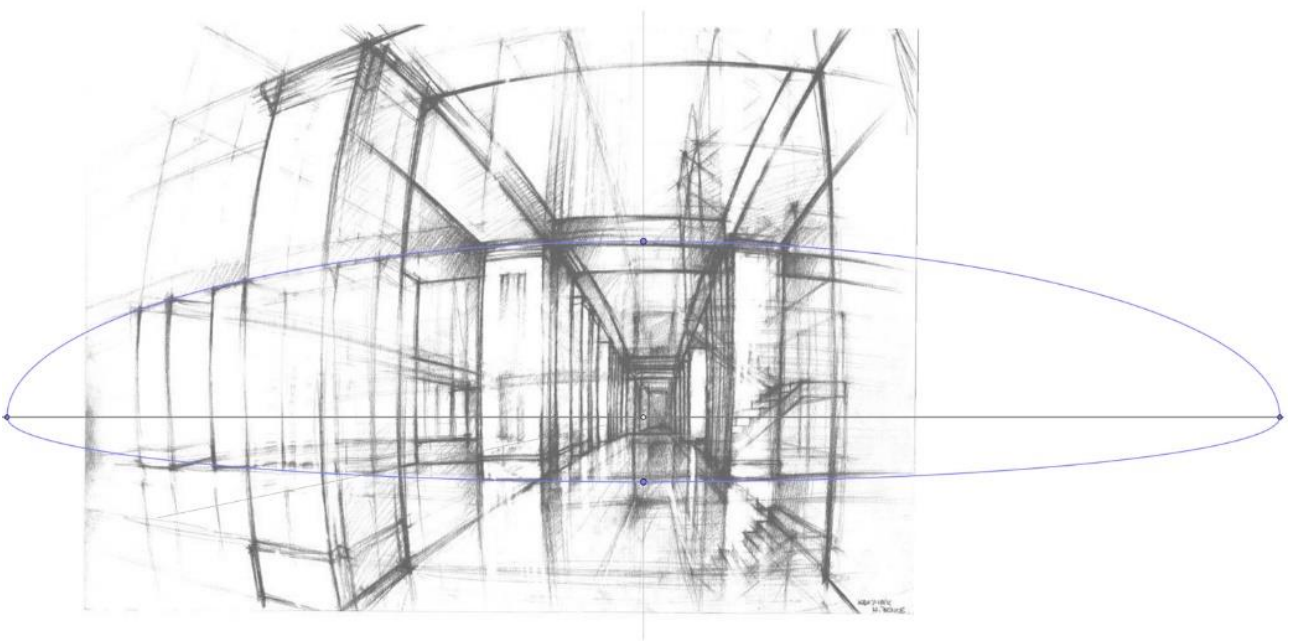


101. ábra: A beállítás kiszervezett gnomonikus perspektív képe

Összetett rajz elemzése

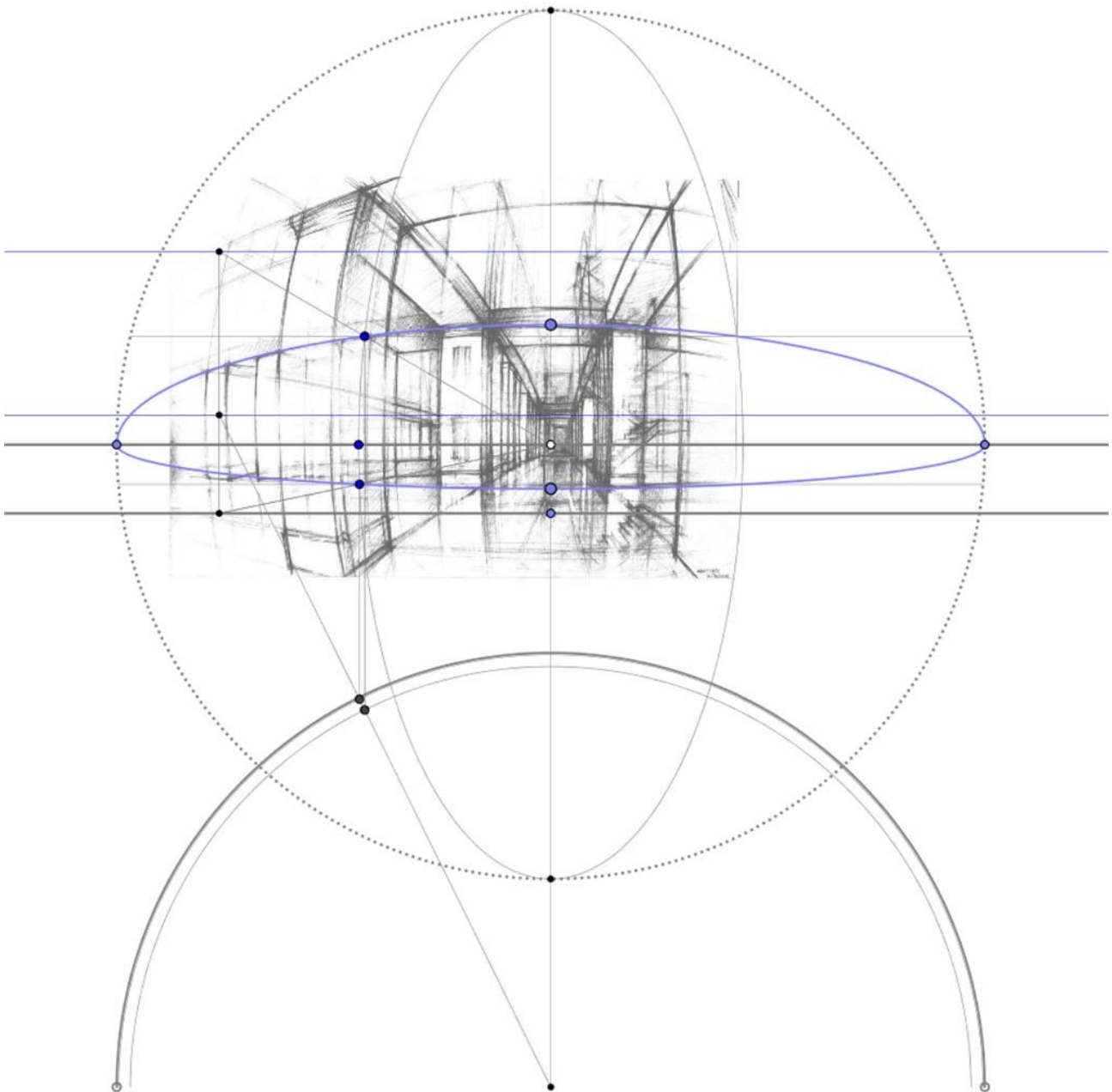
Az alábbiakban egy összetettebb rajzon mutatjuk be a szemlélet alapján készült rajz geometriai háttérrel való párhuzamát. A szabadkézzel készített ábrára GeoGebra segítségével illesztjük rá a megszerkesztett térhálót, majd az így kapott eredményt hasonlítjuk össze az eredeti rajzzal.

Első lépésként itt is, akár a cilindrikus perspektívánál, először a leképezési rendszer alapelemeit szerkesztjük meg a rajz alapján. Itt is kihasználhatjuk, hogy főpontos rendszerről van szó. Először a főpontot vesszük fel, majd ráillesztjük a horizontvonalat. Ezután egy alapvonallal párhuzamos egyenesnek megfelelő ellipszisívet választunk ki. A „térbeli” ívre és annak a rajz rendszere alapján megállapított alapsíkon vett vetületére félellipsziseket illesztünk.



102. ábra: Összetett rajz elemzésének első lépése

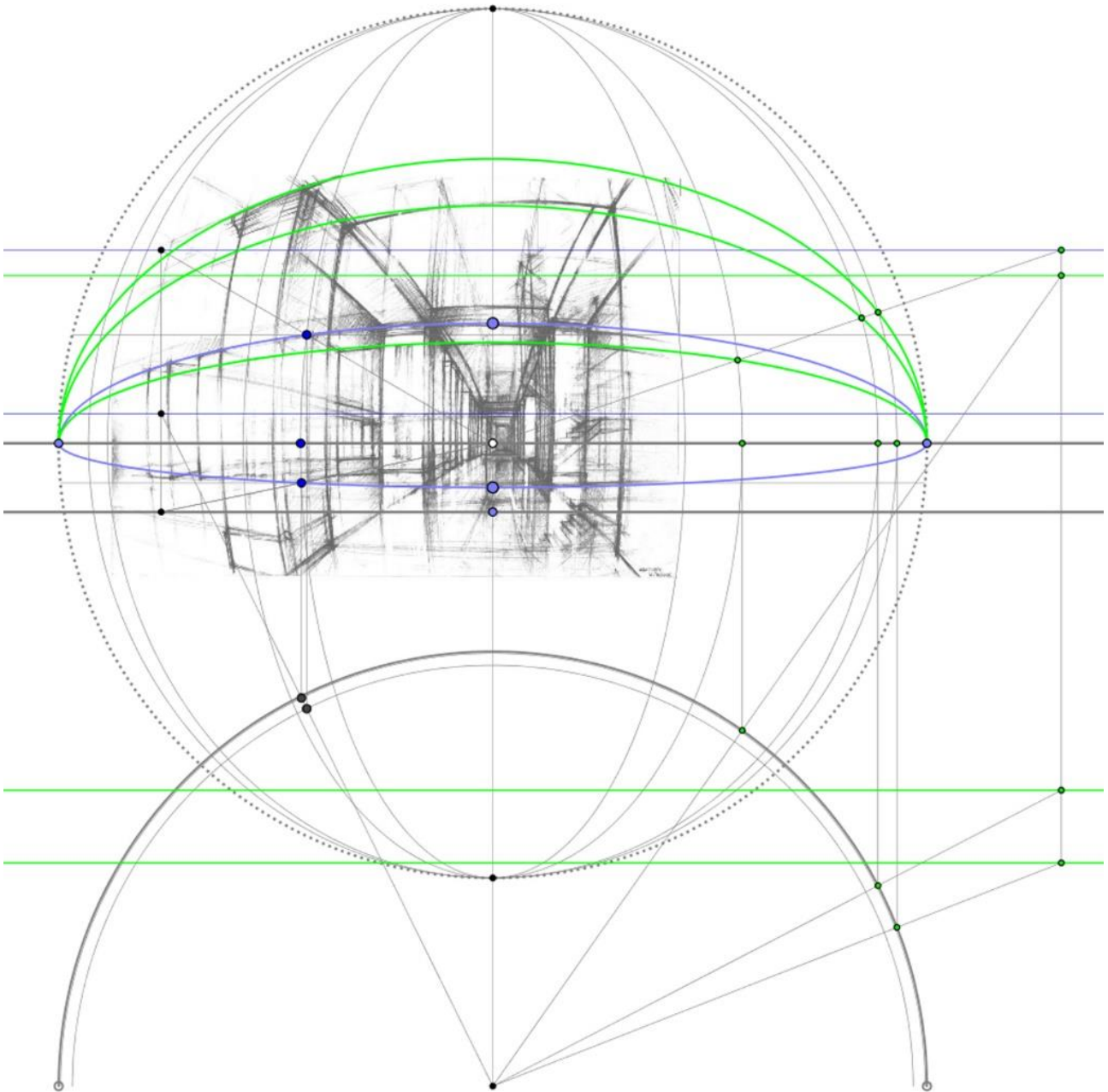
A kapott félellipszisek nagy tengelye a horizontvonalra esik, végpontjuk alapján meghatározhatjuk a világhatárt, melynek középpontja a főpont, sugara pedig a nagy tengely hosszával egyenlő. Következő lépésként felvesszük az alapsík magasságát. Ahhoz, hogy megtaláljuk a két félellipszis egymáshoz rendelhető pontjait, egy függőleges nagy tengelyű ellipszist veszünk fel (a nagy tengely végpontjai a világhatárra esnek). A függőleges nagy tengelyű ellipszis által kimetszett pontok meghatároznak egy pontpárt: a pont képét, és annak alaprajzi vetületének képét. A geometriát leíró részben olvashatók alapján rekonstruáljuk a pontot, majd azon keresztül felvesszük az alapvonallal párhuzamos egyenest.



103. ábra: A gnomonikus perspektíva rendszerének ráillesztése szabadkézi rajzra

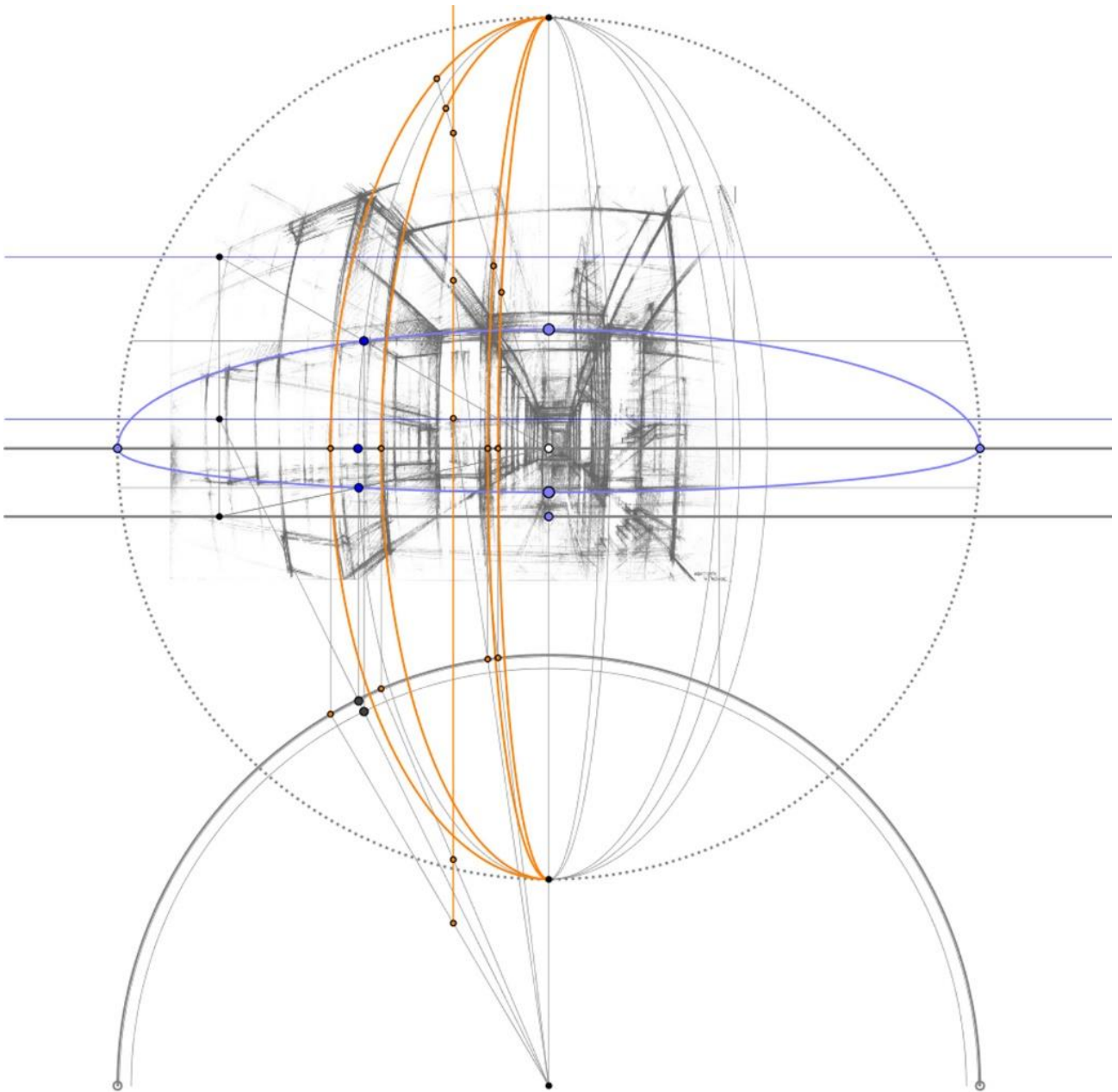
Ezzel fel is vettük a gnomonikus perspektíva alrendszerének elemeit. A következőkben további egyeneseket veszünk fel, majd ezeket leképezve vetjük össze a szabadkézi rajzzal.

Először további, az alapvonallal párhuzamos egyeneseket ellenőrzünk. A földémet alátámasztó gerendák éleit szerkesztjük meg, ezeknél a második kép egyező. A félellipszisek nagytengelyei illeszkednek a horizontvonalra, a tengelyvégpontok a világhatárra esnek.



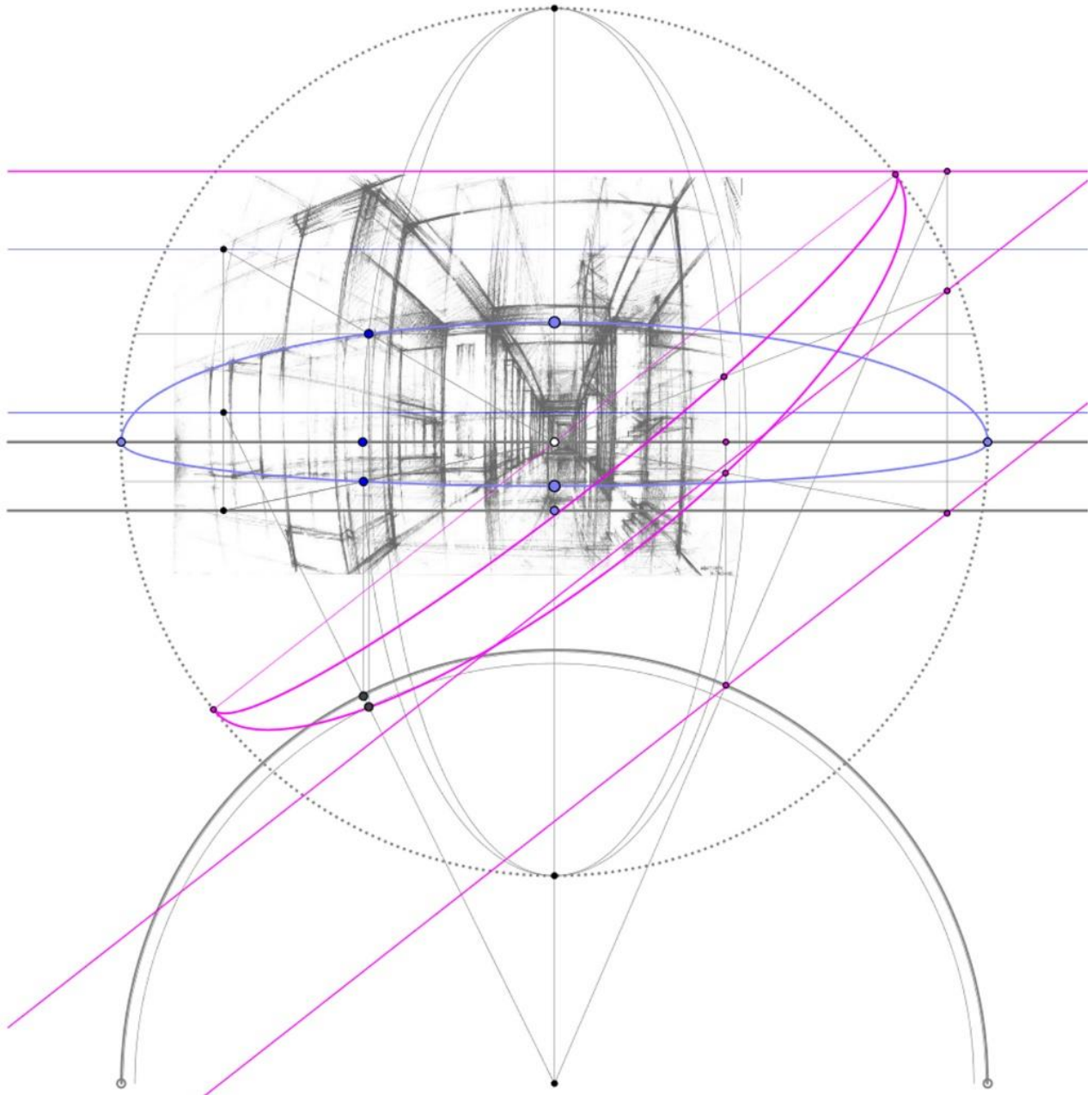
104. ábra: Alapvonallal párhuzamos egyenesek szerkesztése szabadkézi rajzra

Ezután a függőleges egyenesek képeit vizsgáljuk meg. A félellipszisek nagytengelye függőleges helyzetű, a tengelyvégpontok a világhatárra illeszkednek. A pillérek éleit szerkesztjük – ebben az esetben a második képek egyeznek meg, így egyszerűsödik a szerkesztés.



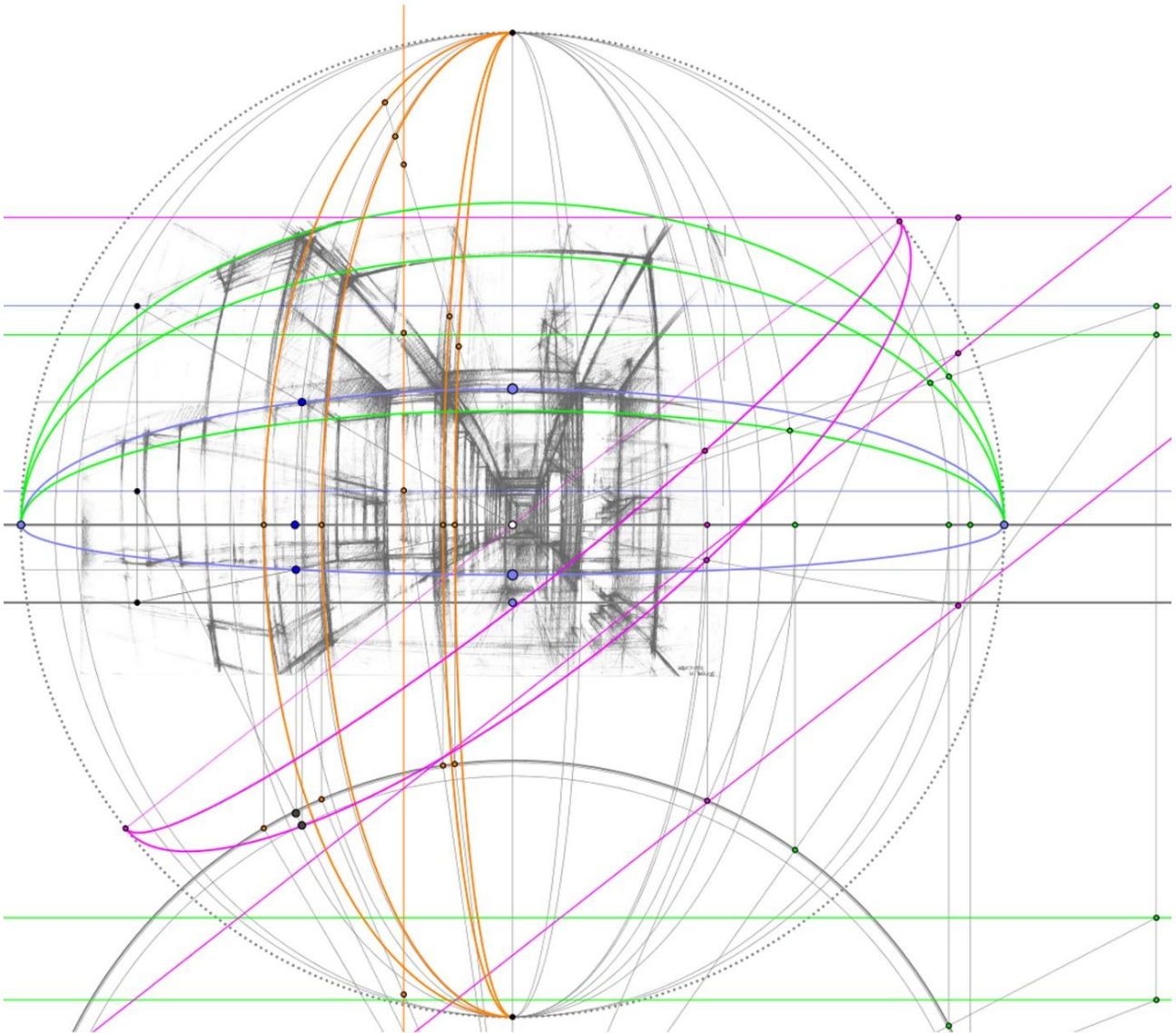
105. ábra: Függőleges egyenesek szerkesztése szabadkézi rajzra

A lépcsők járóvonalai párhuzamosak a képsíkkal, az ezekkel párhuzamos egyenesek közül az egyik sereget ellenőrizzük geometriai szempontból. Ebben az esetben az egyenesek közös függőleges síkra illeszkednek, így az első képük egyezik meg, emiatt némi egyszerűsítéssel élhetünk.



106. ábra: Képsíkkal párhuzamos egyenesek szerkesztése szabadkézi rajzra

A szerkesztett ábrák végeredménye a cilindrikus perspektívához hasonlóan a második képen, a világhatáron belül rajzolódik ki, ezért a többi, szerkesztéshez szükséges rész nélkül is értelmezhető a kapott kép. Utolsó ábránkon ezért a világhatáron belül megjelenő képre közelítve mutatjuk be a geometriai ráillesztéseket egyszerre.



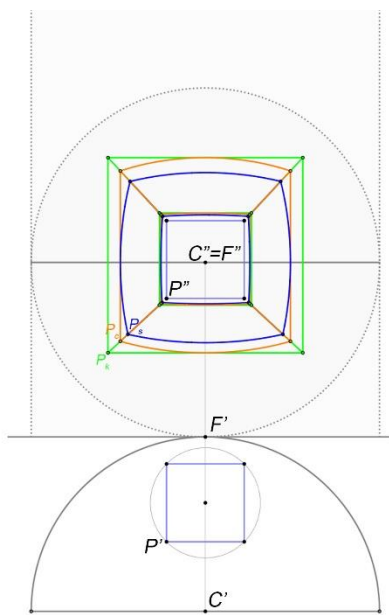
107. ábra: Szabadkézi rajzra illesztett szerkesztések

Konklúzió: A fenti, komplexebb rajz elemzése megmutatja, hogy – ahogyan azt a cilindrikus perspektívánál is láthattuk – ez a leképezés szintén jó közelítést ad a szabadkézi rajzban használt vetítési eljárásához.

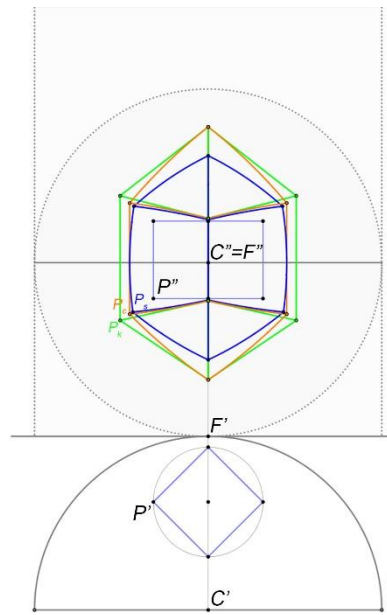
Összehasonlítás

Az alábbi ábrákon a klasszikus (zöld szín), cilindrikus (narancssárga) és gnomonikus (kék) perspektíva összehasonlítása érdekében mindhárom rendszerben leképeztük ugyanannak a kockának a képét. A képsík az összes rendszer esetében ugyanaz a sík, cilindrikus és gnomonikus perspektívában pedig ehhez a síkhoz egy centrum középpontú, a síkot érintő hengert, illetve gömböt párosítottunk.

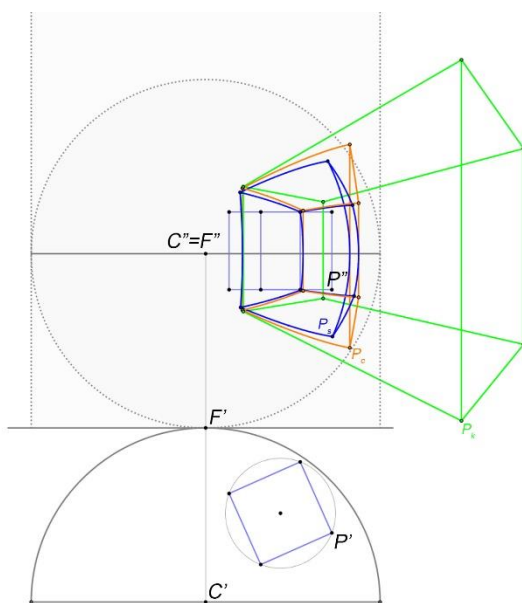
Szélső helyzetben láthatjuk leginkább, hogyan válik el egymástól a három rendszerben leképezett kocka. Ha jobb vagy bal oldalra helyezzük a kockát, a cilindrikus és gnomonikus perspektíva hasonló marad (110. ábra), viszont ha ezután még felfelé, vagy lefelé is mozgatjuk a térben a kockát, akkor ez a két kép is élesen elkülönül egymástól. (111. ábra)



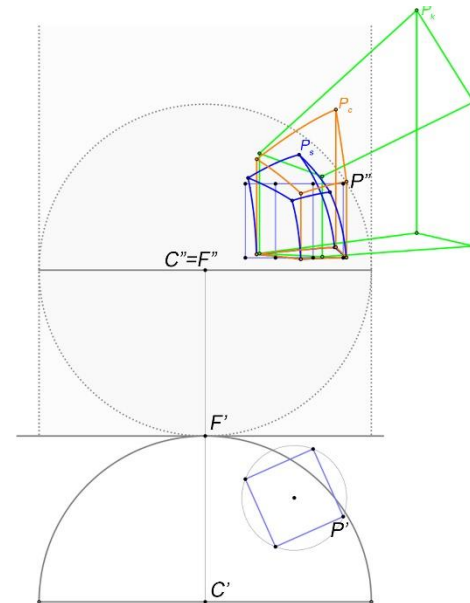
108. ábra: Főpontos helyzet



109. ábra Általános középső helyzet



110. ábra: Szélső helyzet



111. ábra: Szélső-felső helyzet

További vizsgálati lehetőségek

A bemutatott leképezések számos további kérdést – és így tanulmányozási lehetőségeket vetnek fel.

- Szeretnénk komplexebb szerkesztéseket végrehajtani mindkét általunk bevezetett perspektívában, például összetett épületbelső ábrázolását és árnyékszerkesztést.
- Érdekes kérdésnek tartjuk, hogy mi történik, ha henger helyett kúpra vetítünk – milyen analógiákat találhatunk, és mely esetekben kapunk eltérő eredményt.
- Szintén hasznosnak gondoljuk a két leképezés analitikus leírását, amellyel a számítógéppel történő szerkesztést erősíthetnénk.
- A szerkesztett ábrák elkészítésénél néhány esetben a szem számára torz eredményt kaptunk, így a valóságot jobban közelítő módosításokkal szeretnénk kiegészíteni a szerkesztéseket.

Köszönet

dr. Pék Johanna tanárnőnek

kitartó, alapos munkájáért és segítőkészségéért

a Rajzi és Formaismereti Tanszéknek

a rajzterem biztosításáért.

Irodalomjegyzék

- [1] David Hilbert, Stefan Cohn-Vossen: Szemléletes geometria, Gondolat, 1982
- [2] Kárteszi Ferenc: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 1966
- [3] Lőrincz Pál, Petrich Géza: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 2003
- [4] Romsauer Lajos: Ábrázoló geometria, Franklin-Társulat, 1929
- [5] David Salomon: Transformations and Projections in Computer Graphics, Springer, 2006
- [6] Dick Termes munkái: <http://termespheres.com>
- [7] Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 1957

A szabadkézi rajzok saját munkákból származnak.