



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építészmérnöki Kar
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Hornok Brigitta

**ÚSZÓ TESTEK
STABILIZÁLHATÓSÁGA**

TDK dolgozat

KONZULENS

Dr. Várkonyi Péter László

BUDAPEST, 2022

Tartalomjegyzék

Összefoglaló	3
Abstract.....	4
1 Bevezetés	5
2 Fizikai háttér	7
2.1 Egyensúly és stabilitás a szárazföldön	7
2.2 Egyensúly és stabilitás a vízben.....	9
2.3 A síkbeli és térbeli probléma viszonya	12
2.4 Az úszó és szilárd felületen nyugvó testek viszonya	14
3 A monostabil úszás alapelvei	16
3.1 A súlypont eltolása.....	16
3.2 Víz sűrűségével majdnem megegyező test	17
4 Kísérletek a monostabilitás elérésére	19
4.1 Monostabilitás elérése a súlypont kitolásával.....	19
4.2 Monostabilitás elérése a sűrűség változtatásával	23
5 Összegzés, kitekintés	25
Irodalomjegyzék.....	26

Összefoglaló

A környezetünk nyugalomban lévő elemeinek stabilitása elengedhetetlen szerepet játszik az életünkben. Fizikai stabilitás alatt azt értjük, hogy a testre ható erők kiegyenlítik egymást, ezáltal a test nyugalmi állapotban van, valamint a test kis zavaró hatások ellenére is megmarad az eredeti állapot közelében. Stabil egyensúly szükséges az építészetben fellelhető tartószerkezeti elemek, valamint számos élőlény és robot működéséhez is. A stabilitás szempontjából kiemelt jelentőséggel bírnak a „monostabil” testek [1], amelyeknek egyetlen stabil egyensúlyi helyzetük van, és ezért akár nagy zavaró hatásokat követően is mindig ugyanabba a nyugalmi állapotba térnek vissza.

A stabilitást legtöbbször szárazföldi körülmények között vizsgáljuk, de vajon mi történik akkor, amikor egy szilárd test folyadékban úszik? Az új körülményektől függően megváltozik a testre ható erők nagysága és iránya, ezáltal befolyásolva a test egyensúlyi helyzeteinek számát és stabilitását is. Ebből következtethetünk arra, hogy az esetek többségében a vízben produkált egyensúlyi állapotok nem egyeznek meg egy vízszintes, szilárd felületen létrejövő egyensúlyokkal [2]. Erre példaként szolgálhatnak a tengeralattjárók, vitorlások, konténerszállító hajók különleges, stabilitást biztosító formái.

Dolgozatomban bemutatom az úszó testek mechanikájának alapelveit, majd két általános elvet fogalmazok meg, melyek szerint egy tetszőleges formájú úszó test monostabilitása megvalósítható

- a. megfelelő tömegű tökesúly test belsejében való elhelyezésével, mellyel nagy mértékben eltolódik a test súlypontja,
- b. súlypontjának kisebb mértékben való torzításával, majd a test átlagsűrűségének a víz sűrűségéhez való közelítésével.

A megfogalmazott elvek kísérleti igazolásához 3D nyomtatott PLA és acél anyag kombinálásával előállított hengereket használtam, melyek anyagi kitöltöttségét és súlypontjának helyét módszeresen változtattam. A kísérletek eredményei igazolták a megfogalmazott alapelvek gyakorlati alkalmazhatóságát.

Összességében kijelenthető, hogy az úszó testek monostabilitása egy ritkán vizsgált, ám egy annál nagyobb jelentőségű téma, amely még sok lehetőséget rejt magában. Elképzelhető, hogy az ezen területen tett kutatások a jövőben hozzájárulhatnak új robotikai fejlesztésekhez, az úszó növények mechanikájának jobb megértéséhez, valamint általa könnyebben megérthetjük a testek stabilitásának változásait más körülmények között is.

Abstract

The stability of the objects in our environment plays an essential role in our lives. By physical stability, we mean that the forces acting on the body balance each other, so that the body is at rest and furthermore it remains close to its original state despite small disturbances. A stable equilibrium is necessary for the functioning of structural elements in architecture, as well as for the functioning of many living organisms and robots. „Monostable” objects have a particular importance in the topic of stability [1]. These objects have a single stable equilibrium position and therefore always return to the same state of rest, even after large disturbing effects.

Stability is mostly tested under land conditions, but what happens when a solid body floats in a liquid? Depending on the new conditions, the magnitudes and directions of the forces acting on the body change, affecting the number of equilibrium positions and the stability of the body. This suggests that in most cases the equilibria produced in water are not the same as those produced on a horizontal solid surface [2]. Examples of this are the special shapes of submarines, sailing boats and container ships that provide stability.

In my thesis, I introduce the basic principles of floating body mechanics, and then I formulate two general principles according to which the monostability of a floating body of arbitrary shape can be achieved

- a. by placing a sufficient weight inside the body to shift the centre of gravity of the body to a large extent
- b. by slightly distorting the centre of gravity and then increasing the average density of the body towards the density of water.

To experimentally validate the principles formulated, I used cylinders made by combining 3D printed PLA and steel material, systematically varying the material filling and the position of the centre of gravity. The results of the experiments demonstrated the practical applicability of the formulated principles.

In conclusion, the monostability of floating bodies is a rarely studied topic, but one of great importance, which still holds many open questions. It is conceivable that research in this area could in the future contribute to new developments in robotics and to a better understanding of the mechanics of floating plants, and to better understand changes in the stability of bodies under other conditions.

1 Bevezetés

Az életünkben számos helyen előfordulnak stabilitást igénylő tárgyak, valamint sokféle rendszer esetén beszélhetünk stabilitásról. Stabilitás alatt értendő, hogy egy rendszer állandó állapota kis külső zavaró hatásokra úgy reagál, hogy az eredeti állapot közelében marad. Stabilitásról beszélhetünk az építészetben fellelhető deformálható tartószerkezeteknél is, melyek statikus stabilitásvesztési jelenségekkel rendelkeznek, mint például egy oszlop kihajlása. Mozdó rendszerek esetén is felhozható a stabilitás fogalma; mechanikai értelemben vegyük például egy elengedett kormányval egyenesen haladó bicikli stabilitását, elméleti mozgó rendszert tekintve pedig a tőzsdei árák változását.

A dolgozatban kizárólag vízszintes felületen nyugvó, merev testek egyensúlyi helyzeteivel fogok foglalkozni, ahol a testre az önsúly, valamint speciális esetben ezen kívül a víz felhajtóereje hat. A rendszer állapotváltozásait annak elfordulásának irányával és mértékével írom le.

Az egyensúlyi helyzetek stabilitása életünk egyik elengedhetetlen részét képezi. A legegyszerűbb formáit a természetben is fellelhetjük. Az egyik legérdekesebb természeti példája a stabilitásnak egyes teknősfajok talpra állási mechanizmusa. Például az indiai csillagteknős (*Geochelone elegans*) teknősfaj páncéljának alakja olyan, hogy a teknősnek csak egy stabil egyensúlyi helyzete van, azaz monostabil. Ha a teknős felborul, egy instabil egyensúlyi állapotba kerül, ahonnan a saját testmozgásának és a monostatikus páncéljának köszönhetően vissza tud fordulni a talpára [3].

Szintén a természetben fellelhető monostabilitást igénylő elemek az úszónövények, melyek geometriájuk, valamint sűrűségük által befolyásolják a vízben való lebegésüket. Úszó testek esetén a gravitációs erőn kívül fontos szerepet játszik még a víz felhajtóereje [4] is, mely nagyban befolyásolja az úszó testek egyensúlyát. Ezeken kívül egyes növényeknél feltételezhető, hogy a felületképzésük is közrejátszik a vízben létrejövő stabilitásukhoz. A vízinövények esetén megfigyelhetőek olyan stabilitást fokozó mechanizmusok, mint például a víz feletti részekben található légkamrák. A biológiai irodalomban jól ismert tény, hogy a légkamrák csökkentik a növény tömegét, így segítik annak felszínen való úszását [5].

Számos mérnöki alkotás esetén is nagy jelentőséget tulajdoníthatunk a szerkezetek fizikai stabilitásának, illetőleg monostabilitásának. A monostabil szerkezetek közül a leginkább a köztudatban élő a keljfeljancsi játék, mely nagy zavaró hatások ellenére is visszaáll a talpára.

Ezen kívül nagy jelentőséget tulajdoníthatunk a monostabilitásnak az alkatrészadagoló berendezéseknél, ugyanis a gyártósor elején az alkatrészeknek ugyanolyan módon kell a gyártósorra kerülniük [6].

Úszó mérnöki alkotások stabilitására kitűnő példaként szolgálnak a hajók, tengeralattjárók egyedi formái, melyek megakadályozzák azok felborulását. Évezredek óta ismert, hogy a hajók esetén a stabilitást az úszó hajótest megfelelő formai kialakítása [7] (jellemzően széles vízvonal), valamint a tömegközéppont megfelelően alacsonyra helyezése segíti. Utóbbi inspirálja az ókor óta használt tökesúlyos hajók készítését, illetve az elv figyelmen kívül hagyásának híres példája a Vasa 17. századi hadihajó története [8].

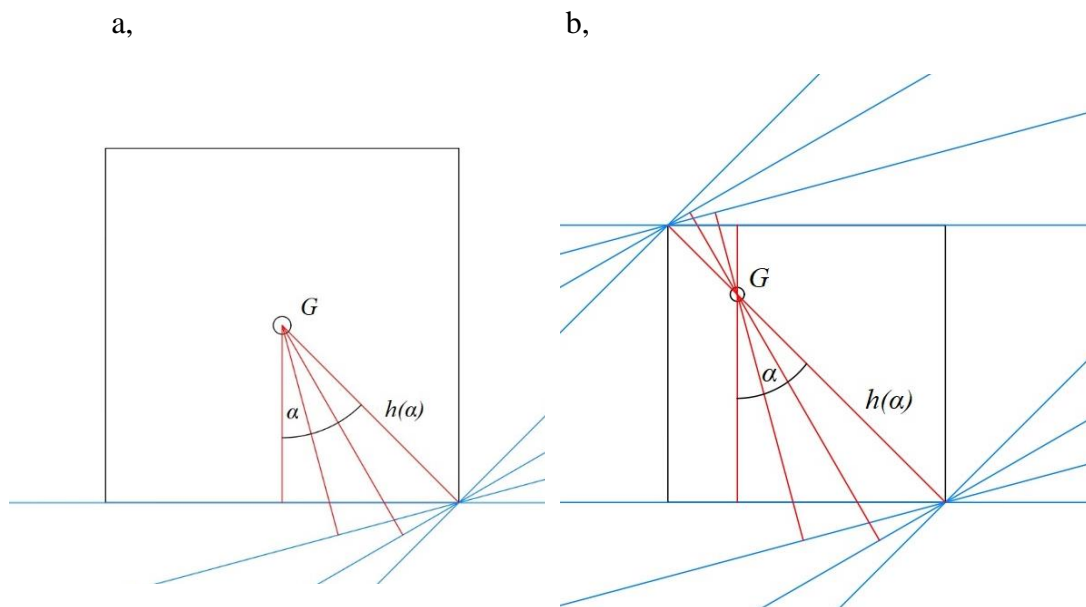
A dolgozat célja olyan alapelvek megfogalmazása, illetve kísérleti igazolása, melyekkel az úszó tárgyak monostabillá tehetőek. Elsősorban azzal a fontos esettel foglalkozom, mely során egy tárgy formája adott, például funkcionális követelmények határozzák meg, de a súlypont helyét, illetve a tárgy tömegét változtatni tudjuk. A dolgozatban nem foglalkozom azzal a kérdéssel, hogy mely formák kedvezőek a monostabil úszás szempontjából.

2 Fizikai háttér

2.1 Egyensúly és stabilitás a szárazföldön

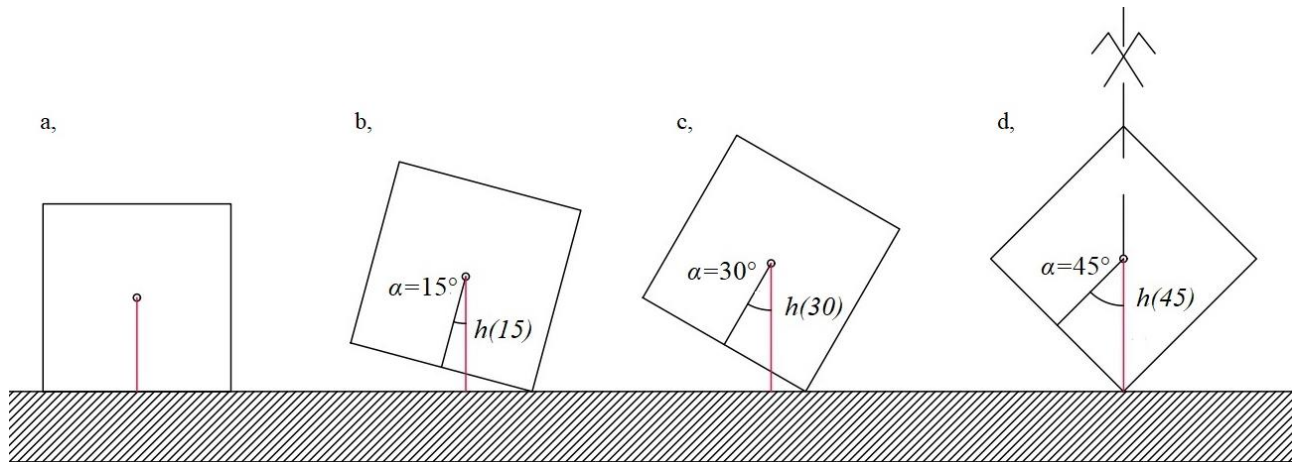
Mivel a vízben fellépő egyensúlyi állapotok összefüggései elsősorban bonyolultak, megértésükhöz érdemes elsőként szilárd, vízszintes felületen nyugvó, merev testek egyensúlyának feltételeit megvizsgálni. Emellett későbbiekben a könnyebb megértés mellett észrevehetünk több párhuzamot is a testek vízben való viselkedésével.

Bár a valódi testek háromdimenziósak, az egyszerűbb ábrázolás végett a térbeli problémát elsőként annak síkbeli megfelelőjével fogom helyettesíteni. Tegyük fel, hogy a térbeli objektum formája tetszőleges konvex keresztmetszetű, elnyújtott hasáb, és mozgása korlátozott, mely szerint csak a hosszanti tengelye körül fordulhat el a kezdeti állapothoz képest. Ezen kívül a test vízszintes, szilárd felületen helyezkedik el, és a nehézségi-, illetőleg a támasz-, és a test között fellépő nyomóerőn kívül más erő nem hat rá, nyugalmi állapotban van. Ilyen esetben a test alakját és helyzetét jellemezhetjük a test hossztengetyre merőleges (kétdimenziós) metszetének megadásával. A leírtak szemléltetésére egy homogén négyzetes hasáb egyensúlyi állapotait fogom bemutatni.



1. ábra: a, Egy négyzetes hasáb támaszfüggvényei, ha súlypontja megegyezik a geometriai középponttal b, Kitolt súlypontú négyzetes hasáb támaszfüggvényei.

Ha a testhez egy poláris koordináta-rendszert rögzítünk, melynek origója a test súlypontja, akkor a test formája leírható $h(\alpha)$ támaszfüggvénnyel, melynek értéke egyenlő a test érintőinek origótól mért távolságával. A $h(\alpha)$ támaszfüggvény megadja, hogy a test adott szöggel való elforgatása esetén milyen magasan helyezkedik el a test súlypontja, melyből következik a test helyzeti energiája. A támaszfüggvény alakja függ attól is, mely pontot választjuk origónak (1.b ábra), azaz hol található a test tömegközéppontja.



2. ábra: Négyzetes hasáb egyensúlyi helyzetei. A hasáb stabil egyensúlyban van, ha a lapján fekszik (a) nincs egyensúlyban, ha 15, valamint 30 fokkal elfordul (b, c), instabil egyensúlyi állapotban van, ha a csúcsán áll (d).

A test helyzeti energiája

$$E = mgh(\alpha)$$

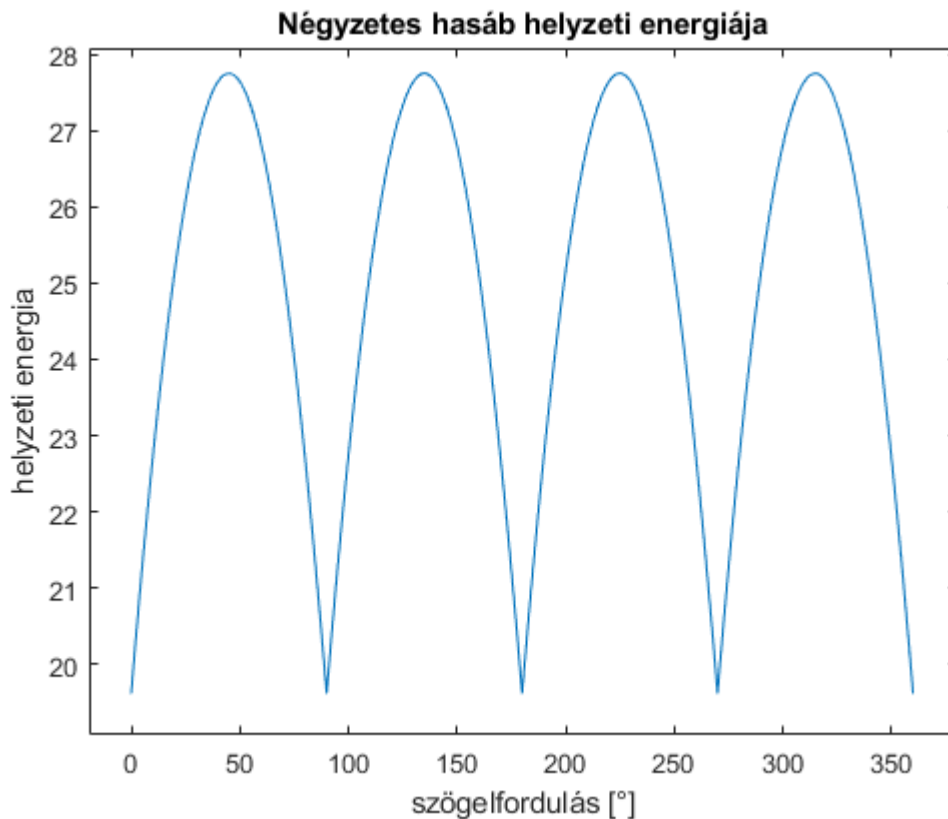
egyenlettel írható fel, ahol m a test tömege, g a gravitációs gyorsulás.

A test stabil és instabil egyensúlyi helyzetei megfelelnek a potenciális energiafüggvény (vagyis a támaszfüggvény) lokális minimum és maximumhelyeinek. Például a hasáb esetén az energiafüggvény képlete zárt alakban megadható:

$$E(\alpha) = \begin{cases} mg\sqrt{2} \cos(\alpha - 45^\circ) & \text{ha } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \\ mg\sqrt{2} \cos(\alpha - 135^\circ) & \text{ha } 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \\ mg\sqrt{2} \cos(\alpha - 225^\circ) & \text{ha } 180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ \\ mg\sqrt{2} \cos(\alpha - 315^\circ) & \text{ha } 270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \end{cases}$$

A 3. ábrán ábrázolt függvénynek a 45° páratlan többszöröseinél lokális maximuma, valamint a 90° többszöröseinél lokális minimuma van. Ezekből a szélsőértékekből

következtethetünk a vizsgált test egyensúlyi állapotaira, melyet a 2. ábrán már bemutattunk.



3. ábra: Négyzetes hasáb helyzeti energiája, ha a négyzet oldalhosszúsága 2 egység, tömege 2 egység, valamint $\alpha = [0; 360]$

Ha a támaszfüggvény kellően sima, akkor az egyensúlyi helyzetek elhelyezkedése meghatározható abból, hogy ott a támaszfüggvény első deriváltja 0. Az egyensúlyok stabilitása pedig meghatározható a függvény második deriváltjának előjeléből. Kivételt képeznek ez alól a „határhelyzetben levő”, vagyis degenerált egyensúlyok, melyeknél a támaszfüggvény második deriváltja éppen 0. A dolgozat további részében ilyenekkel nem foglalkozom.

2.2 Egyensúly és stabilitás a vízben

A vízbe helyezett test viselkedése több ponton is kapcsolódik a szilárd, vízszintes felületen létrejövő egyensúlyokkal. Különbséggként említhető, hogy a vízben a test súlyát a megtámasztó erő helyett víz felhajtóereje egyensúlyozza. Egy test úszását befolyásolja még a test tömegközéppontjának helye, a test átlagsűrűsége, valamint a folyadék sűrűsége [2]. Minél nagyobb egy test átlagsűrűsége a víz sűrűségéhez viszonyítva, annál nagyobb mértékben merül el benne. A víz sűrűségét tekinthetjük egységnyinek, ez esetben az egy úszó test átlagsűrűsége:

$$0 < \rho_{test} < 1$$

Arkhimédész törvénye szerint a felhajtóerő a test elmerült részének tömegközéppontjában hat, valamint megegyezik a test által kiszorított folyadék súlyával [4]. Ebből megállapítható, hogy egy testre ható függőleges erők összege 0, ha a test térfogatának ρ_{test} hányada merül el. Ebből a korábban már vizsgált hasábok esetén meghatározhatjuk, hogy adott α elfordulási szög esetén a test pontosan milyen mélységig merül a vízbe. A testre ható erők nyomatéki egyensúlyának vizsgálata helyett ismét a test helyzeti energiáját fogjuk használni.

A helyzeti energia értéke egy tetszőlegesen kijelölt zérusvonalhoz viszonyítva

$$E(\alpha) = mgh(\alpha) - mgh_g(\alpha) = mg\Delta h(\alpha),$$

ahol mg a test nehézségi ereje, $h(\alpha)$ súlyponti magassága a zérusvonalától mérve, valamint $h_g(\alpha)$ az elmerült rész geometriai középpontjának távolsága (4. ábra). Ebben a helyzetben is igaz, hogy a helyzeti energia lokális minimum- és maximumhelyei felelnek meg a stabil és instabil egyensúlyoknak.

Vegyük ennek szemléltetésére a már korábban vizsgált homogén, négyzetes hasábot, melynek sűrűsége most legyen $\rho_{test} = 0.5$. Arkhimédész törvénye szerint a test pontosan félig merül el a vízben, vagyis a víz alatti rész trapéz, illetve speciális esetben háromszög alakú.

A $\Delta h(\alpha)$ függvényt az elmerült rész B súlypontjainak kiszámolásával kaphatjuk meg a következőképpen; tegyük fel, hogy a vizsgált hasáb oldalainak hossza egységesen 2 egység. A víz alá merült részt osszuk fel egy téglalapra, valamint egy háromszögre, ahol A_1 a téglalap területe, B_1 a súlypontja és $y_1; x_1$ annak origótól mért súlyponti távolságai (a háromszögnél analógan), melyekből a víz alá merült rész súlypontjának koordinátái ($y_B; x_B$):

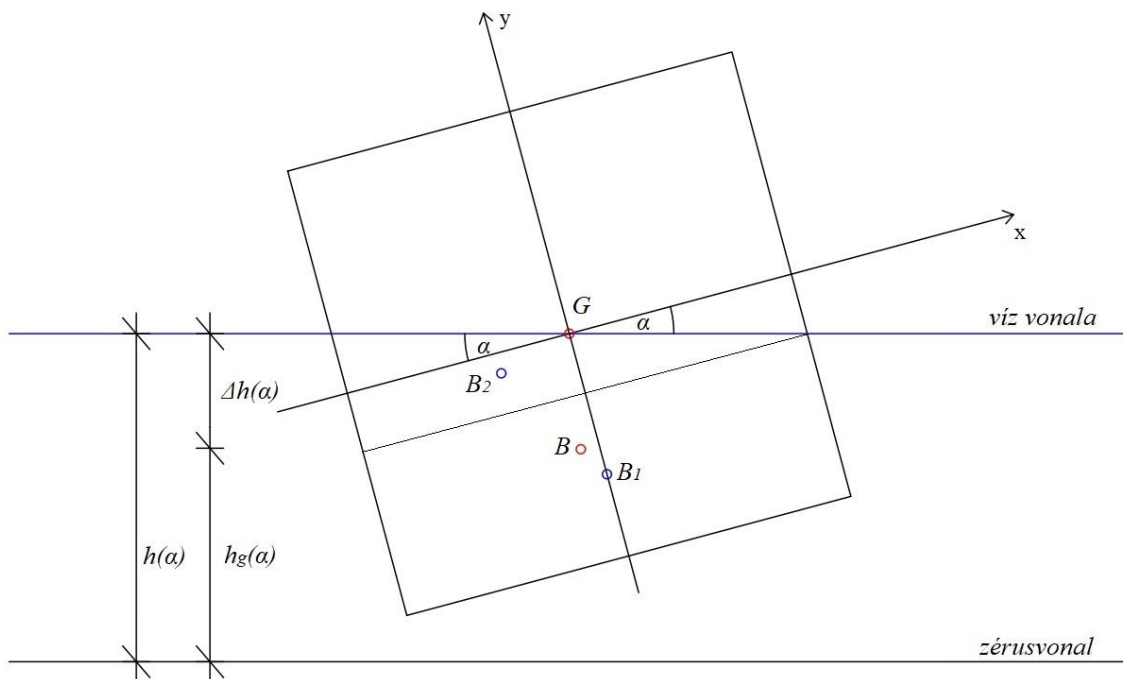
$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \cdot (1 - \tan(\alpha)) & A_2 &= 2 \cdot \tan(\alpha) \\ x_1 &= 0 & x_2 &= -\frac{1}{3} \\ y_1 &= -1 \left(1 - \frac{1 - \tan(\alpha)}{2} \right) & y_2 &= -1 \left(\frac{1}{3} \cdot \tan(\alpha) \right) \end{aligned}$$

$$y_B = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} \quad x_B = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2}$$

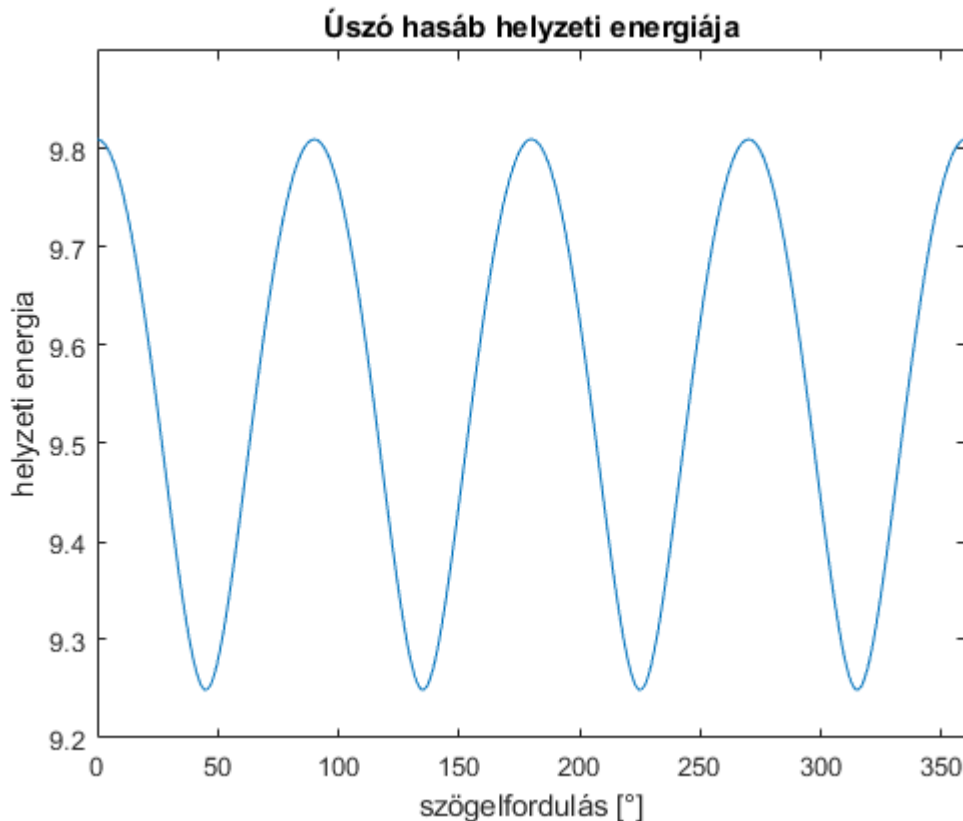
Ebből pedig az úszó hasábhöz tartozó $h(\alpha)$ függvény meghatározhatjuk az alábbi módon (5. ábra):

$$\Delta h(\alpha) = -y_B \cos(\alpha) - x_B \sin(\alpha).$$

A függvénynek lokális maximuma van 0° -nál és lokális minimumhelye 45° -nál. A függvény periodikus, azaz 90° -onként ismétlődik. Ez alapján $\rho_{test} = 0.5$ sűrűségű hasáb egyensúlyi helyzetei megegyeznek a szilárd felületen nyugvó hasábéival, de stabilitásuk éppen ellentétes.



4. ábra: vízen úszó négyzetes hasáb elhelyezkedése α elfordulás esetén Arkhimédész törvénye alapján. Egy ilyen helyzet akkor egyensúlyi helyzet, ha a $\Delta h(\alpha)$ lokális szélsőértékét adja



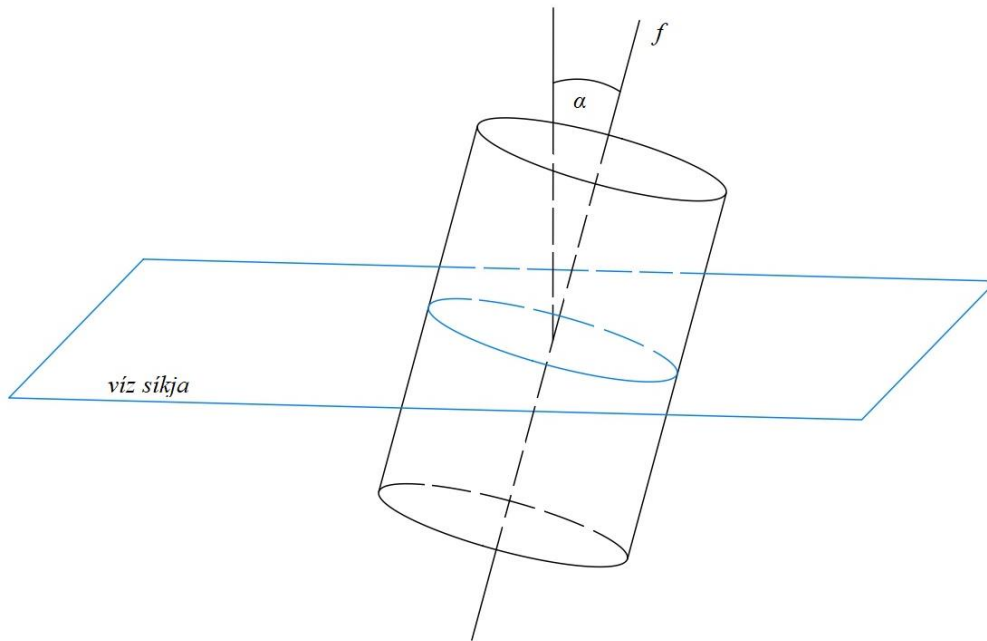
5. ábra: A 2 egység oldalhosszúságú négyzetes hasáb helyzeti energiája $m = 2$ egység esetén.

2.3 A síkbeli és térbeli probléma viszonya

Eddig a pontig a térbeli probléma síkbeli megfelelőjét mutattam be az egyszerűség végett. A teljes térbeli probléma nagyon hasonló ehhez. Az alábbi részben a kettő közötti különbségeket fogom felsorolni.

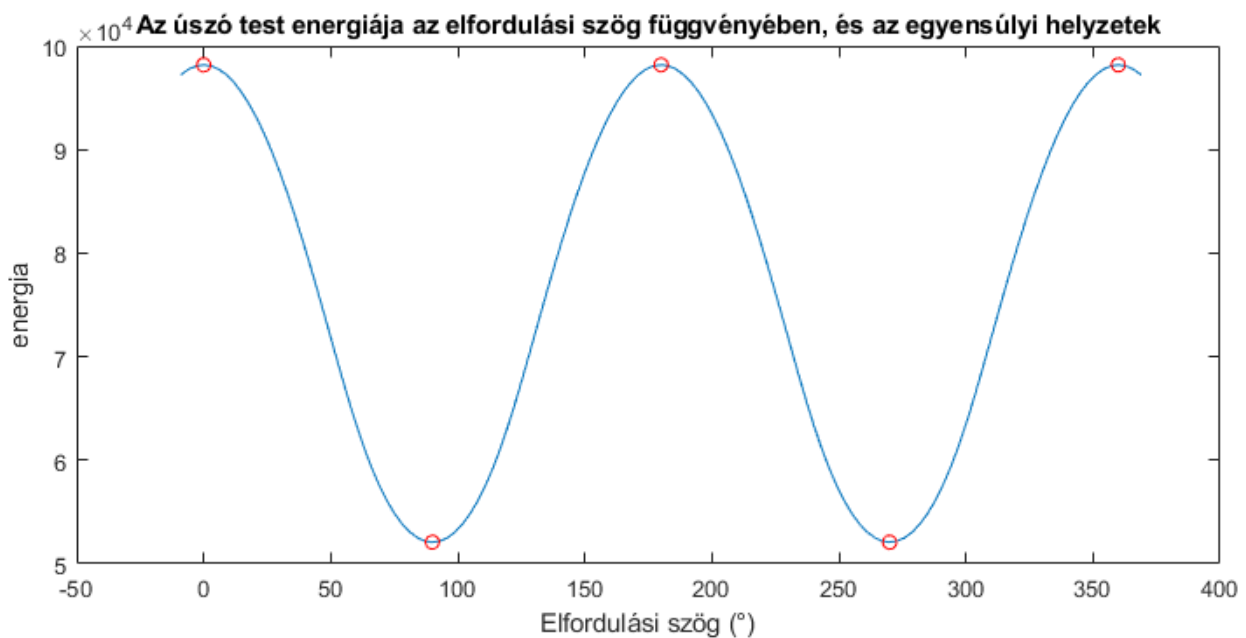
Egy térbeli testet a tér minden irányában elforgathatunk, ezért a helyzeteket egy helyett két szöggel tudjuk leírni (Ezek hasonlóak lehetnek a Föld pontjait leíró szélességi körökhöz és hosszúsági fokokhoz). Így a támaszfüggvény, a távolságfüggvények és az energiafüggvény is kétváltozós. Az egyensúlyi helyzetek azok, ahol az energiafüggvénynek stacionárius pontja van, de kétváltozós függvény esetén ez három féle lehet: lokális minimumhely, nyeregpon, vagy lokális maximum. Fizikailag az első stabil egyensúlyt jelent, a második és a harmadik pedig instabil egyensúlyt.

A síkbeli problémához hasonló egyszerűsítést jelent, ha egy forgástest egyensúlyait vizsgáljuk. Ilyen esetben a test lényegesen különböző helyzetei ismét egyetlen α szöggel leírhatóak, amely a test f forgástengelyének függőlegessel bezárt szögét jelenti.



6. ábra: az úszó henger úszási szöge

Az úszás szemléltetéséhez vegyünk példaként egy hengert, melynek sugara $r = 10 \text{ mm}$, magassága $h = 40 \text{ mm}$ hosszúságú, valamint $\rho_{test} = 0.5$ (7. ábra).



7. ábra: Henger helyzeti energiája $\rho_{test} = 0.5$ esetén. Karikák jelölik a henger egyensúlyi helyzetét.

A 7. ábra az úszó test energiáját ábrázolja, $\alpha = [0; 360]$ tartományban, melyet egy MATLAB-ban elérhető kód segítségével numerikusan határoztam meg. A függvény lokális szélsőértékeinél találhatóak a vizsgált test stabil, valamint instabil egyensúlyi állapotai. A vizsgált hengernek az ábra alapján $\alpha = 90^\circ$, valamint $\alpha = 270^\circ$ értékeknél stabil egyensúlyi állapotai vannak. Ezen értékekből következtethetünk arra, hogy a henger a palástján úszva lebeghet a vízben.

2.4 Az úszó és szilárd felületen nyugvó testek viszonya

Az úszás egy speciális esete akkor lép fel, ha a test átlagsűrűsége közel 0 értéket vesz fel. Ilyenkor a test a víz felszínén lebeg, miközben nagyon kis százaléka süllyed a vízbe. Ebben az esetben az energiafüggvény azonossá válik a szilárd, vízszintes felület által megtámasztott test energiafüggvényével; a vízfelület megfeleltethető egy vízszintes támasznak.

Ezen kívül felfedezhető egy általános érvényű reláció a szárazföldi és a vízben úszó testek viselkedése között, ha a test átlagsűrűsége lényegesen nagyobb, mint 0. Vegyük ismét a 2 egység oldalhosszúságú konvex hasábot adott α helyzetben. Arkhimédész törvénye segítségével meghatározhatjuk a vízbe merülő rész B súlypontját. A testre ható erők megegyeznek egy másik képzeletbeli hasáb erőivel, amely szilárd talajon fekszik, feltámaszkodási pontja éppen B , továbbá az eredeti hasábbal azonos súlyú, valamint súlypontja ugyanott van. Ezt innentől az eredeti hasáb által generált testnek fogjuk hívni. A generált test alakját úgy kaphatjuk meg, hogy a kiinduló hasábot körbeforgatjuk, és minden α helyzetében megvizsgáljuk. A különböző szögelfordulásokhoz tartozó B felhajtóerő-támadáspontok együttesen fogják kirajzolni a generált test pontjait, mely szilárd talajon az eredeti úszó hasábbal azonos viselkedést mutat. A generált test támaszfüggvénye ekkor éppen $\Delta h(\alpha)$.

A súlypontot meghatározva az összes α -ra megkapjuk a generált test alakját (8. ábra).



8. ábra: A korábban kiszámolt y_B ; x_B koordinátáiból generált test $\rho_{test} = 0.5$ esetén.

3 A monostabil úszás alapelvei

A dolgozatomban két alapelvet vizsgálok, melyek segítségével monostabilan úszó, vagyis egyetlen stabil egyensúllyal rendelkező testek hozhatóak létre. Mindkét esetben feltételezem, hogy a test formája adott, de a tömege és a súlypont helye változtatható. Az alábbiakban ezeket fogom bemutatni.

3.1 A súlypont eltolása

Korábban már bemutattuk, hogy az úszó test vizsgálatakor az energiafüggvény:

$$E(\alpha) = mg \cdot \Delta h(\alpha)$$

Észrevehetjük, hogy ha a súlypontot β irányban t távolságra kimozdítjuk, az egyszerű módon befolyásolja $\Delta h(\alpha)$ mértékét (1. ábra). Az új és az eredeti támaszfüggvény között a kapcsolat kifejezhető az alábbi módon:

$$\Delta h_{uj}(\alpha) = \Delta h_{régi}(\alpha) + t \cos(\alpha - \beta)$$

Amennyiben a kitolt súlypont a víz felhajtóerejének támadáspontja alá esik, akkor akár negatív $\Delta h(\alpha)$ értéket is kaphatunk.

Érdemes megfigyelni, hogy a fenti egyenlet második tagja egy koszinuszfüggvény, melynek egyetlen lokális minimumhelye van. Ebből azonnal következik, hogy ha $\Delta h_{régi}(\alpha)$ konstans, azaz a testünk egy körhenger, akkor a viselkedése minden pozitív t esetén monostabillá válik. Más típusú testeknél pedig azt tudjuk elmondani, hogy ha a súlypontot kellően nagy távolságra eltoljuk, azaz t kellően nagy, akkor a fenti egyenlet második tagja sokkal nagyobb lesz az elsőnél, ami szintén monostabilitást okoz.

A fenti állítást beláthatjuk az alábbi módon: tegyük fel, hogy $\Delta h_{régi}(\alpha)$ függvény kellően sima, azaz beszélhetünk első és második deriváltjáról, és azok folytonos függvények. Ha t nagyon nagy, akkor a $\Delta h_{uj}(\alpha)$ függvényről az alábbiakat tudjuk elmondani:

- Az α szög azon tartományaiban, amik legalább 45° -nyi távolságra vannak β -től, illetve $\beta + 180^\circ$ -től is, a $\cos(\alpha - \beta)$ függvény deriváltjának (melynek képlete: $-\sin(\alpha - \beta)$) az abszolútértéke nagyobb $\sqrt{2}/2$ -nél, tehát nem lesz 0-hoz nagyon közel. Ez esetben a t szorzó miatt olyan nagy lesz a második tag deriváltja, hogy a

teljes függvény deriváltja nem lehet 0, és így nem alakulhat ki semmilyen egyensúlyi helyzet.

- Az α szög ($\beta - 45^\circ, \beta + 45^\circ$) tartományában a fentiek miatt az energiafüggvény deriváltja előjelet vált, ezért kell legyen egyensúlyi helyzet. Ugyanakkor ebben a tartományban $\cos(\alpha - \beta)$ függvény második deriváltja mindenütt kisebb $-\sqrt{2}/2$ -nél. Ha kellően nagy t szorzót alkalmazunk az energiafüggvényben, akkor ez a teljes függvény második deriváltját is negatívvá teszi, ami miatt ebben a tartományban csak egyetlen instabil egyensúlyi helyzet jöhet létre
- Az előző ponthoz hasonlóan az α szög ($\beta + 180^\circ - 45^\circ, \beta + 180^\circ + 45^\circ$) tartományában csak egyetlen stabil egyensúlyi helyzet jöhet létre.

A fenti gondolatmenet mindig alkalmazható úszó testekre, mivel az ezek által generált egyenértékű szilárd felületen nyugvó test formája mindig sima. Ugyanakkor a fenti gondolatmenet nem alkalmazható egy szilárd felületen nyugvó poligonális hasáb esetén, ahol a támaszfüggvénynek töréspontja van, azaz a második derivált egyes pontokban nem értelmezhető (3. ábra). Ezért van az, hogy egy ilyen hasáb esetén a súlypontot valamelyik oldalélre merőleges irányban tolva a hasáb nem feltétlenül stabilizálható.

Fontos figyelembe venni a súlypont eltolással létrehozható monostabilitás még egy korlátját is. Léteznek olyan testek, amelyek abban az esetben válnának monostabillá, ha a súlypontjuk a test határain kívül esne. Ezt a jelenséget a kísérletek során is bemutatom, de azt, hogy mely testek esetén válik lehetetlenné a stabilizálás emiatt a korlát miatt, azt a dolgozatban részletesen nem taglalom.

3.2 Víz sűrűségével majdnem megegyező test

A sűrűség szempontjából a testek úszásánál érdemes megkülönböztetnünk azt a speciális esetet, amikor a test átlagsűrűségének értéke majdnem megegyezik a víz sűrűségével, ezáltal a test majdnem teljes mértékben elmerül, így a felszínen lévő térfogat elhanyagolhatóan kicsi. Ezáltal a víz felhajtóereje lényegében a teljes testre hat, és az elmerült rész B súlypontja lényegében minden α esetén azonossá válik a teljes keresztmetszet geometriai középpontjával. Ha a test tömegközéppontja megegyezik a test geometriai középpontjával (pl. homogén anyagból épül fel), akkor $\Delta h(\alpha) \approx 0$. Ha pedig ehhez képest eltoljuk a test tömegközéppontját, akkor az előző fejezet gondolatmenete értelmében az energiafüggvény értéke:

$$\Delta h_{uj}(\alpha) \approx t \cos(\alpha - \beta),$$

ami monostabil viselkedést jelent. Tehát amennyiben egy adott formájú test súlypontját kis mértékben t irányba mozdítjuk a geometriai középpontból, majd sűrűségét kellően közel visszük 1-hez, de úgy, hogy nem haladja meg a víz sűrűségét, akkor a test monostabillá válik.

Ez az összefüggés nem érvényes abban az esetben, ha a geometriai középpont megegyezik a test súlypontjával, ugyanis ekkor a súlypont helye megegyezik a felhajtóerő támadáspontjával. Itt is felmerülhet a kérdés, hogy nem kellően sima formájú testek esetén is érvényes-e a fenti gondolatmenet, de ezzel a dolgozatban nem foglalkozom.

4 Kísérletek a monostabilitás elérésére

Az előző fejezetben két általános elvet fogalmaztam meg, melyek szerint a monostabilitás létrejöhet:

- a. megfelelő tömegű tökesúly test belsejében való elhelyezésével, mellyel nagy mértékben eltolódik a test súlypontja
- b. súlypontjának kisebb mértékben való torzításával, majd a test átlagsűrűségének a víz sűrűségéhez való közelítésével.

A két elv működőképességének gyakorlati bizonyítására kísérleteket végeztem, melyek eredményeit a 7. ábrához is használt MATLAB-program számítási eredményeivel is összehasonlítottam, illetve ellenőriztem.

A kísérleti modelleket 3D nyomtatott PLA anyag ($\rho_{PLA} = 1.24 \text{ g/cm}^3$), valamint hatlapú acél anyák ($\rho_{steel} = 7.85 \text{ g/cm}^3$) kombinálásával hozom létre. Valamennyi henger sugara és magassága $r = 12.5 \text{ mm}$, $h = 45 \text{ mm}$. A hengerek átlagsűrűségét a nyomtatott anyag kitöltöttségének változtatásával, a súlypont helyét az acél anyák helyének változtatásával szabályoztam. Az anyákat a nyomtatási folyamat során a nyomtató ideiglenes leállításával, majd újraindításával helyeztem a henger belsejébe.

A kísérletek során különböző sűrűségű, valamint súlypontú hengereket ejtettem 10 cm – es vízoszlopba 30 cm magasságból, és minden esetben egy függőleges vékony rúdhoz való viszonyítással és szemrevételezéssel határoztam meg, hogy az úszó henger szöge lényegesen eltér-e 0-tól. Mivel az úszó hengerek pontos ferdeségi szöge a vizsgálatom szempontjából nem lényeges, ezért ezeket az értékeket nem határoztam meg. Az egyes kísérleteket többször megismételve minden alkalommal azonos eredményt kaptam

A kísérletekben azt a célt tűzöm ki, hogy $\alpha = 0$ helyzet legyen a test egyetlen stabil egyensúlya. Ha ugyanis a test $\alpha \neq 0$ helyzetben úszik stabilan, az valójában sok különböző helyzetnek felel meg. Ezt tehát nem tekintem monostabilitásnak.

4.1 Monostabilitás elérése a súlypont kitolásával

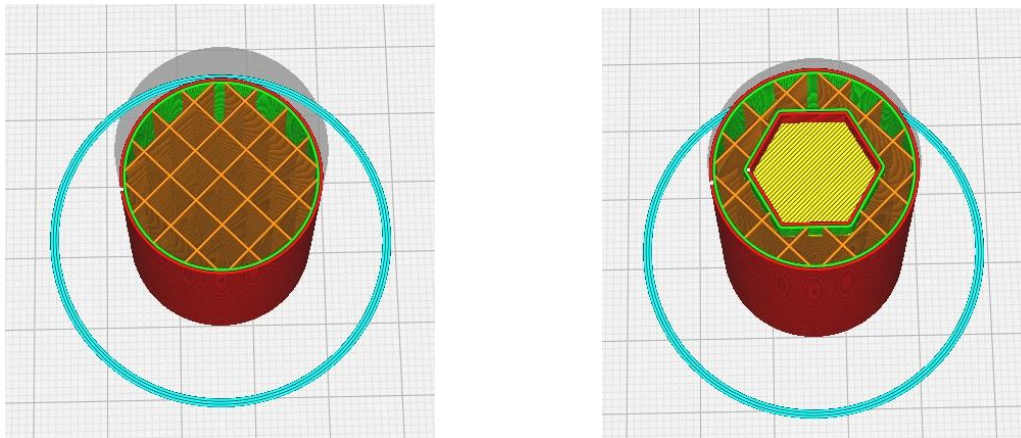
A következő kísérlet során a kísérleti modellek súlypontját a hatlapú anyá helyzetének változtatásával állítottam be. A modellekbe a könnyebb súlypontszámítás végett

szimmetrikusan két egyforma üreget terveztem, melyek közül az egyikbe egy M8-as hatlapú anya került, a másik üresen maradt. Ebből adódóan a test súlypontjának egyenlete:

$$y = \frac{y_{ny} \cdot m_{ny} - y_{cs} \cdot m_{cs}}{m_{cs} + m_{ny}},$$

Ahol y_{ny} a nyomat, y_{cs} a hatlapú anya súlypontjának távolsága a henger alapjától mérve, valamint $m_{cs} + m_{ny}$ a modell össztömege. A tömeg meghatározását előzőleg 3D nyomtatáshoz használt szeletelőprogramban a kitöltés hangolásával állítottam be, de a tényleges tömeget a kész nyomat mérésével pontosítottam.

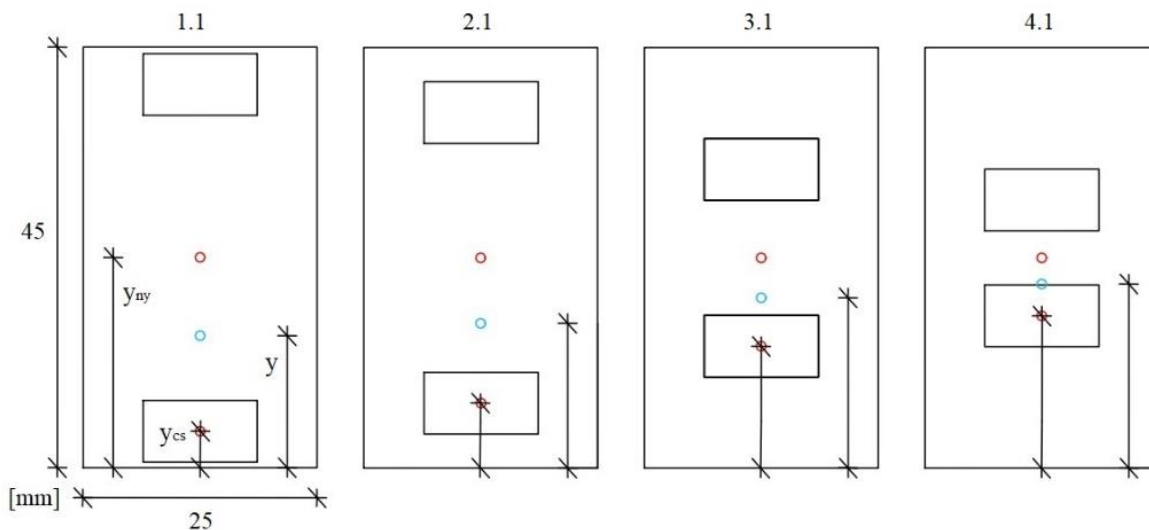
A 3D nyomtatott test kitöltése egy középpontosan szimmetrikus háló, melynek súlypontja a henger közepétől elhanyagolható mértékben tér el.



9. ábra: 3D nyomtatott modell kitöltési mintázata

Az acél anyag helykialakítása gátolja annak elmozdulását, így oldalirányba nem téríti ki a testet, nem generál hamis egyensúlyi állapotot.

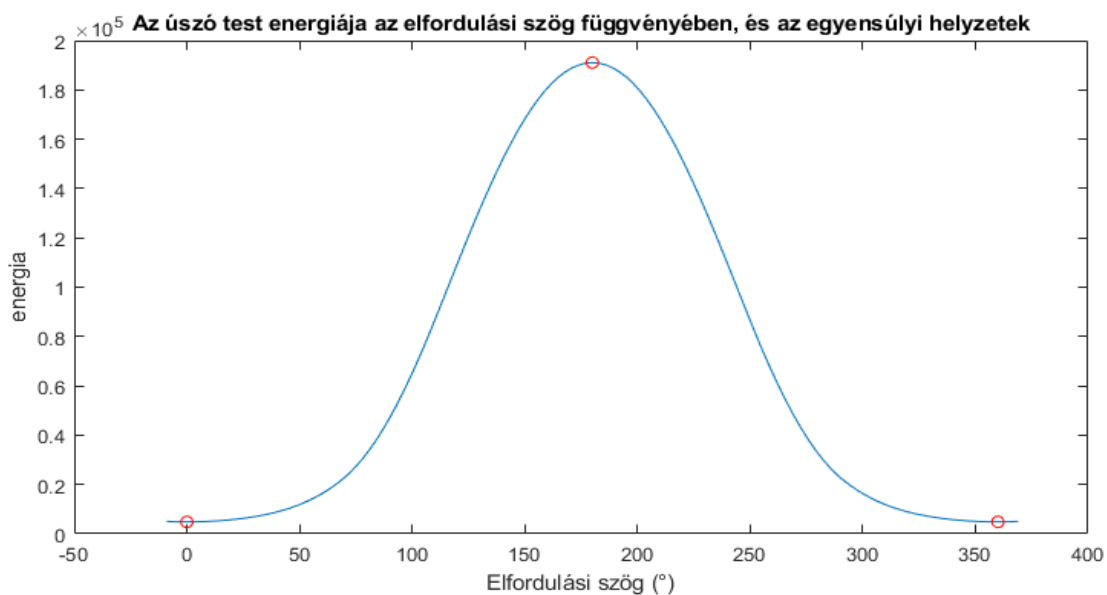
A vizsgálat során létrehoztam egy kísérletsorozatot, melynél a test tervezett átlagsűrűsége $\rho_{test} = 0.7$ volt. A hatlapú anya magassági koordinátáit változtattam, ezáltal eltolva a test tömegközéppontjának helyét (10. ábra). Az első elv szerint, ha elég messzire helyezük a tökesúlyt a test geometriai középpontjától, akkor elérhetjük a kívánt monostabil állapotot.



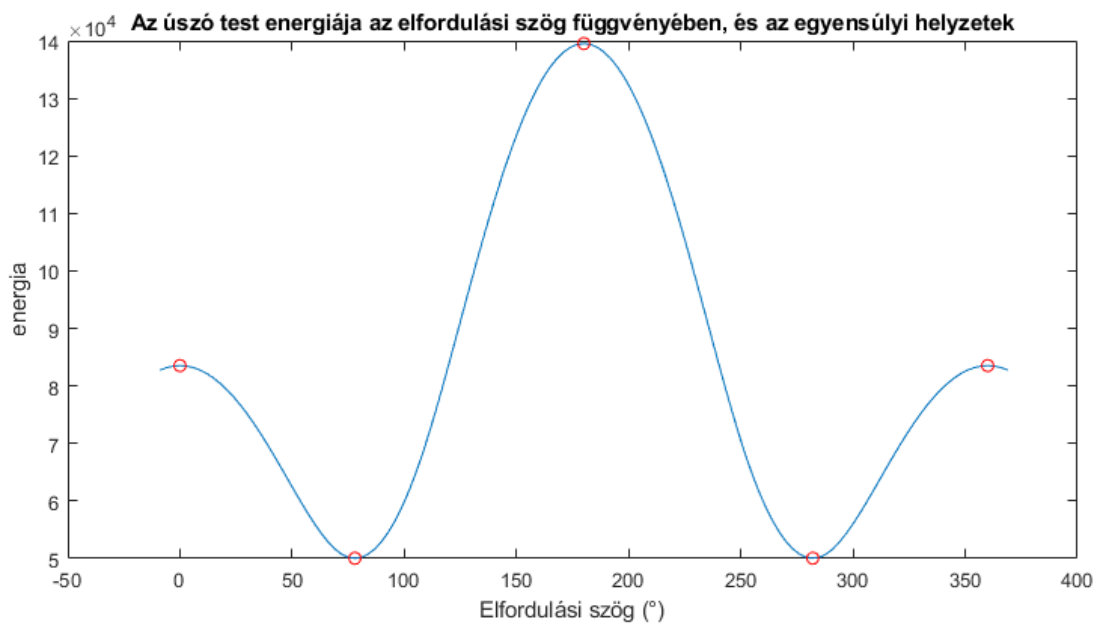
10. ábra: A súlypont kitolósos módszernél használt modellek. Karikák mutatják a csavaranya, a nyomat és a teljes test súlypontját.

A modellek közül az 1.1-es monostabilnak bizonyult a kísérlet során. A többi hengerről összességében elmondható, hogy nem monostabilak, a vízben a vízszintes felületen álló hengerhez viszonyítva bizonyos mértékű szögelfordulással úszva generálnak stabil egyensúlyi állapotot. A kísérleti testek adatait és a kísérleti eredményeket alább foglalom össze (1. táblázat, 14. ábra)

A kapott eredmények összhangban vannak a numerikus számítás eredményeivel is. (11. és 12. ábra)

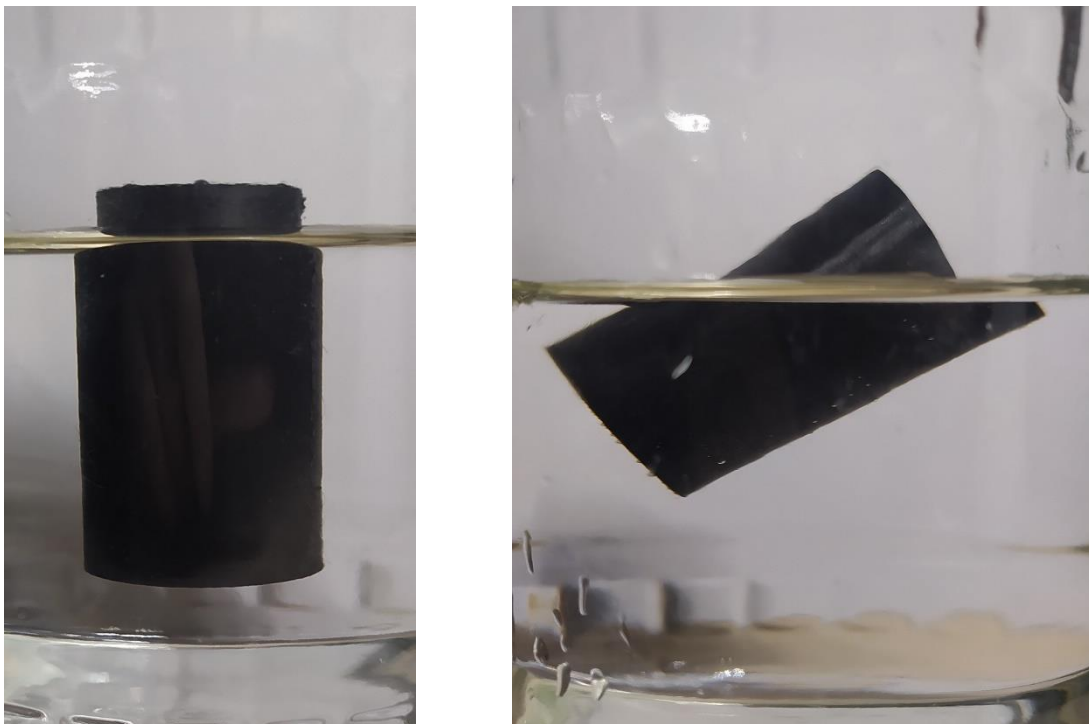


11. . ábra: Az 1.1 test egyensúlyi helyzetei $\rho_{test} = 0.74 \text{ g/cm}^3$ esetén:



12. ábra: A 4.1. test egyensúlyi helyzetei $\rho_{test} = 0.66 \text{ g/cm}^3$ esetén:

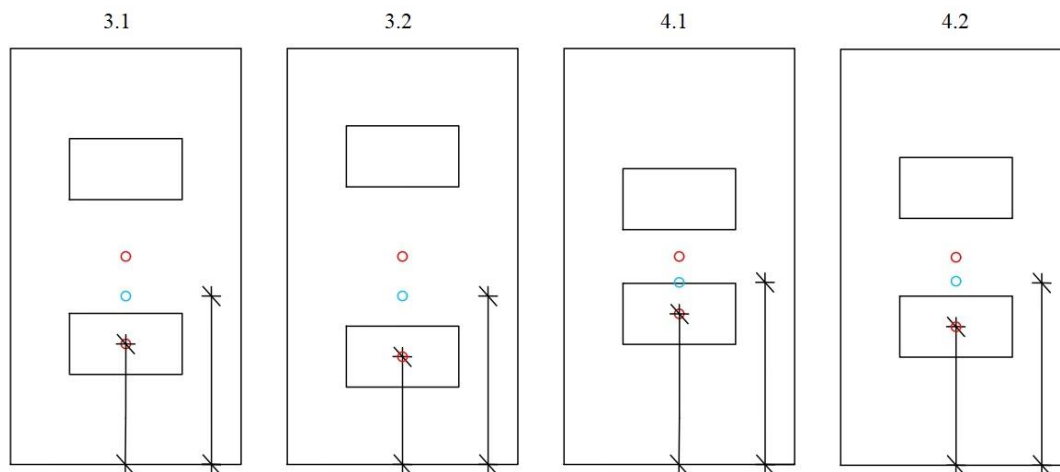
A kísérletsorozat visszaigazolta számunkra azt az állítást, hogy egy úszó test súlypontjának megfelelő mértékű eltolásával monostabil úszó testek hozhatóak létre.



13. ábra: Egy monostabilan (bal) és egy ferdén úszó (jobb) henger

4.2 Monostabilitás elérése a sűrűség változtatásával

A második elv alapján nézzük meg mi történik, ha a korábban nem monostabil testek sűrűségét megnöveljük a súlypont helybenhagyása mellett. Vajon monostabillá tehetőek ezáltal?



14. ábra: A 3. modellben (3.1; 3.2) és 4. modellben (4.1; 4.2) lévő anyák helyének változása a sűrűsnövelés után

Vegyünk valamelyik hengert és kezdjük el a sűrűségét a vízsűrűséghez közelíteni. Mivel minden hengerben azonos anyát alkalmazunk, így a kívánt átlagsűrűséget a nyomat kitöltöttségének változtatásával tudjuk elérni. Annak érdekében, hogy a test súlypontja helyben maradjon, szükséges az anyák helyének változtatása is (14. ábra).

A MATLAB kód által elvégzett numerikus számítás azt jósolja, hogy a 2. számú henger már $\rho_{test} = 0.74$ határsűrűségnél eléri a monostabil állapotot (1. táblázat). Ez a határérték a 3. modellnél $\rho_{test} = 0.84$, valamint a 4. hengernél $\rho_{test} = 0.88$. A határsűrűséget figyelembe véve készítettem mindhárom nem monostabil hengernek egy-egy nagyobb sűrűségű párt, azok súlypontjának megváltoztatása nélkül.

Henger sorszáma	Határsűrűsége	Becsült sűrűsége	Mért sűrűsége	Becsült tömege [g]	Kísérleti eredmény
1.1	0.69	0.7	0.74	15.46	Monostabil
2.1	0.74	0.7	0.66	15.46	Nem monostabil
3.1	0.84	0.7	0.77	15.46	Nem monostabil
4.1	0.88	0.7	0.66	15.46	Nem monostabil
2.2	0.74	0.86	0.80	18.99	Monostabil
3.2	0.84	0.88	0.81	19.43	Nem monostabil
4.2	0.88	0.95	0.88	20.98	Monostabil

Henger sorszáma	Mért tömege [g]	yny [mm]	ycs [mm]	y [mm]	Kitöltés sűrűsége	Becsült eredmény
1.1	16.3	22.5	3.9	16.73	27%	Monostabil
2.1	14.5	22.5	7	17.69	27%	Nem monostabil
3.1	16.9	22.5	13.5	19.85	27%	Nem monostabil
4.1	14.5	22.5	16.3	20.58	27%	Nem monostabil
2.2	17.6	22.5	5.67	17.69	44%	Monostabil
3.2	17.9	22.5	11.65	19.85	47%	Monostabil
4.2	19.5	22.5	14.09	20.58	54%	Monostabil

1. táblázat: A modellek becsült és kísérleti adatai

Az új hengerek tényleges átlagsűrűsége alacsonyabb lett a tervezettnél, és a 3.2 test esetén kis mértékben a numerikus kód által jószolt kritikus sűrűségérték alá került. Ezzel összhangban a kísérletek során 2.2 és 4.2 henger monostabilnak bizonyult, a 3.2 viszont nem. Ez alapján (1. táblázat) kijelenthető, hogy a MATLAB program által kapott számítási eredmények minden esetben jó közelítéssel visszaigazolták a kísérleti eredményeket, valamint, hogy a test átlagsűrűségének a víz sűrűségéhez való közelítésével a korábban nem monostabil testek monostabillá tehetőek.

5 Összegzés, kitekintés

Az úszó testek stabilitása egy olyan téma, amely nagyon sok érdekességet foglal magába; már az úszás fizikai háttere is bonyolultnak tűnik, ám részben visszavezethető a szilárd felületen nyugvó testek fizikájára.

A dolgozatban megfogalmaztam és kísérletileg igazoltam két elvet, melyek alapján egy rögzített formájú test monostabillá tehető. A gyakorlatban ezek az elvek segíthetnek megérteni az úszónövények morfológiáját, melynek vizsgálata jövőbeni kutatásaink tárgya lehet. Emellett valószínűnek tartom, hogy a monostabilitás alapelvei jól alkalmazhatóak robotokkal kapcsolatos új fejlesztések kapcsán. Lehetségesnek tartom a fenti elvek segítségével az alkatrés zadagoló fejlesztését is. Ennek egy módja lehetne, ha az alkatrészeket vízbe helyezzük, majd a víz sűrűségét lecsökkentjük úgy, hogy abba az akváriumokban található légpumpák működéséhez hasonlóan buborékokat juttatunk a vízbe. A vízsűrűség csökkenésével a testek mindegyike monostabillá válik és azonos irányba fordul.

Az úszó testek stabilitása vizsgálható lenne még a kapilláris hatások figyelembevételével is. Minél kisebb egy test felülete, annál fontosabbak a felület által kifejtett kapilláris erők a gravitációs erőhöz képest. Ebből következően, ha egy eléggé kis méretű testet valamilyen mértékben befedünk hidrofób vagy hidrofil anyaggal, akkor szintén módosulnak a test egyensúlyi helyzetei és azok stabilitása. Feltételezhető, hogy ezzel a módszerrel is létrehozhatók vízben „talpraálló” testek. Ennek a korábban nem vizsgált elvnek a segítségével monostabil úszó mikrorobotok fejlesztését lehetne segíteni, melyeket már ma is gyakran használ az orvostudomány nem-invazív gyógyászati beavatkozások esetén.

Ehhez a témához kapcsolható a kis méretű *Salvinia* [9] nevű úszónövény is, amely levelének felületén extrém mértékben víztaszító felületet képez. A növény kis mérete miatt a kapilláris erők hatása nagyon jelentős lehet a növény talpraállási képességét tekintve, ám ennek tudományos vizsgálata eddig még nem történt meg. Ugyanakkor a levélzet felületképzésének mintájára már készültek 3D nyomtatott hidrofób felületek is, noha ezek magas előállítási költségük miatt nem váltak széles körben népszerűvé.

Irodalomjegyzék

- [1] Várkonyi, Péter L., and Gábor Domokos. "Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré-Hopf theorem." *Journal of Nonlinear Science* 16.3 (2006): 255-281.
- [2] Gilbert, E. N. "How things float." *The American mathematical monthly* 98.3 (1991): 201-216.
- [3] Várkonyi, Péter L., and Gábor Domokos. „Geometry and self-righting of turtles.” *Published online* (2007): 13-15.
- [4] Pirooz Mohazzabi. „Archimedes Principle Revisited.” *Journal of Applied Mathematics and Physics* (2017): 836-837.
- [5] Hogg, Edward H., and Ross W. Wein. "Seasonal change in gas content and buoyancy of floating Typha mats." *The Journal of Ecology* (1988): 1055-1068
- [6] Gudmundsson, Dadi, and Ken Goldberg. "Optimizing robotic part feeder throughput with queueing theory." *Assembly Automation* (2007).
- [7] Tim Poston, Ian Stewart. „Catastrophe Theory and Its Applications.” *Dover Publications* (2014): 194-211.
- [8] Richard E. Fairley, M. J. Willshire. „Why the Vasa Sank: 10 Problems and Some Antidotes for Software Projects” *Journal article published by the IEEE Computer Society* (2003): 21-22.
- [9] W.Bing, L. Tian, H. Jin. „Small Structure, Large Effect: Functional Surfaces Inspired by Salvinia Leaves.” *Small Structures* (2021): 1-9.