Tudományos Diákköri Konferencia

Lajtos Levente Zoltán
II. éves építészmérnök hallgató

Transzlációs felületek szerkesztése és alkalmazási lehetősége

konzulens:

dr. Szoboszlai Mihály
egyetemi docens

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építészeti Ábrázolás Tanszék

2015

Tartalomjegyzék

1. és 2. kép: szalaghálók

3. és 4. kép

5. és 6. kép

Bevezetés

A transzláció fogalmával először az ábrázoló geometria tantárgy keretén belül találkoztam, és felkeltette az érdeklődésemet, hogy milyen sokféle felület írható le párhuzamos eltolás segítségével. A témában jobban elmerülve megtudtam, hogy a geometria témáin kívül is rengeteg helyen alkalmazzák a transzlációt.

Az egyik ilyen példa a transzlációs szimmetria, amely az alakzatot nem önmagába viszi vissza, azonban nem változtatja meg az alakzatot, így az elemek periodikusan ismétlődnek.[1] A szalag-, vagy láncszimmetria néven is ismert szimmetriafajtát az elektrosztatika is felhasználja.

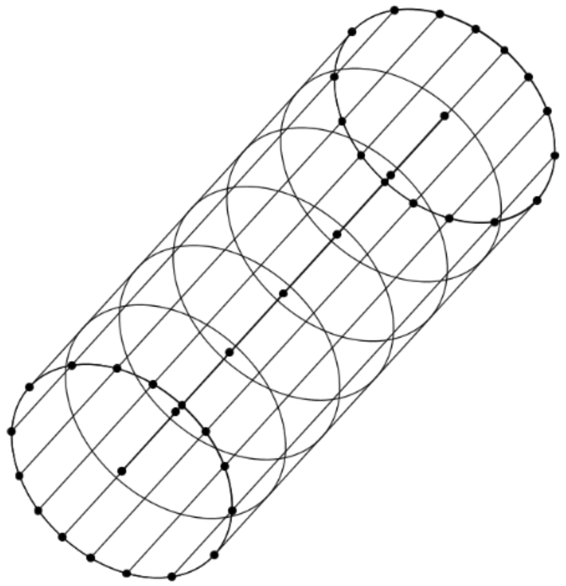
Egy másik kiemelt alkalmazási lehetőség a szalaghálók készítése, amely alatt a két fő alkotóirányú, az alkotók felületén nézve párhuzamos szalagokból álló rácsot értjük.[1] A transzláció során az eltolásban részt vevő két görbe eltolt képei látványosan kirajzolják az említett két fő irányt.
(1. és 2. kép)

Transzlációs testtel a természetben is találkozhatunk, ilyenek például a giliszták, vagy a hernyók, melyek esetében egy-egy szelvény ismétlődik.

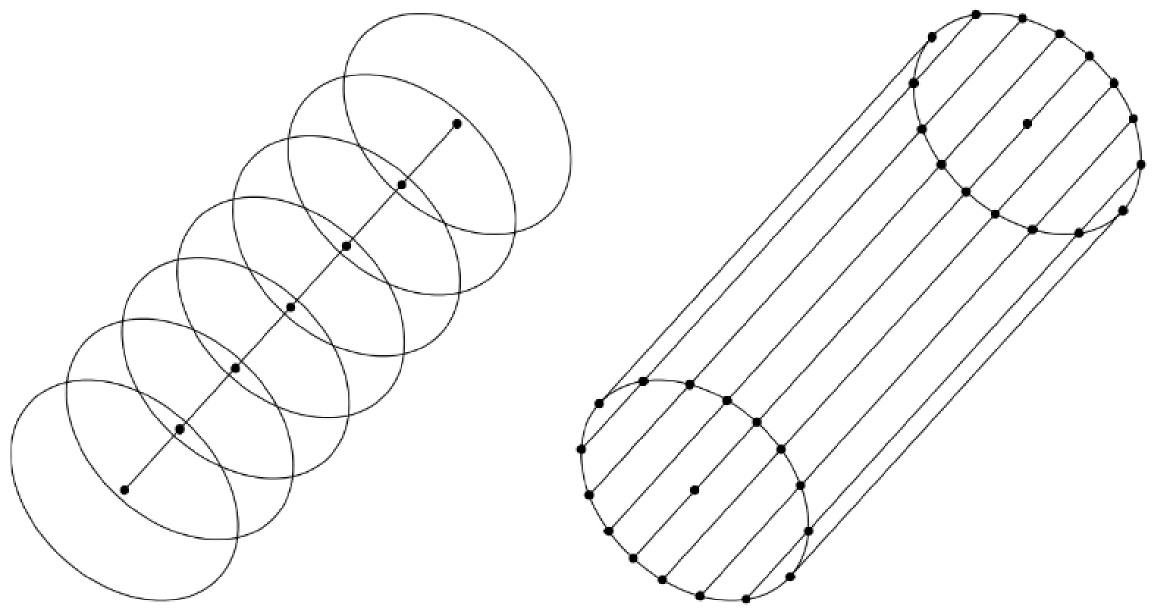
A hétköznapokban a legelterjedtebb hasonló felületek a buszok csuklói, illetve ezek nagyobb megfelelői, a reptéri hernyók.
(3. és 4. kép)

A transzlációs felületekkel azért is érdemes foglalkozni, mert számítógéppel olyan modellek készíthetők, melyeknél a funkció és a benne lévő emberek számától függően a forma változhat (lásd pl. Kas Oosterhuis építészete). **(5. és 6. kép)**

Az ehhez hasonló épületek formájának elemzéséhez a kúpszeleteket felhasználó transzlációs felületeket választottam részletesebb vizsgálatra. A felületek az eltoláshoz tartozó mátrix segítségével leírhatók matematikai úton, és vizsgálhatók koordináta-geometriai szempontból is, azonban én a felületek térbeliségét és szemléletességét szeretném kiemelni, így a transzlációt ábrázoló geometriai szemmel elemzem végig dolgozatomban.



1. ábra: A henger testhálóként,
egyenes mentén eltolt körként,
és kör mentén eltolt egyenesként ábrázolva



Transzláció

A transzláció, azaz az eltolás, a mozgásgeometria egyik alapvető mozgásfajtája a forgatás (rotáció) mellett. A transzlációs felületek előállítása görbék párhuzamos eltolásával történik. Ha egy síkgörbe adott pontját egy megadott pályagörbén úgy vezetjük végig, hogy mozgás közben mind a görbe síkja, mind a görbe érintői a kiindulási helyzetükkel párhuzamosak maradnak, akkor a síkgörbe transzlációs felületet súrol.[3] A transzlációs felületeket a profilgörbével (más néven leíró görbe, avagy vezérgörbe) és a pályagörbével adhatjuk meg. Az eltolás során a vezérgörbe és a pályagörbe szerepet cserélhet, ezáltal lehetőséget adva bizonyos szerkesztések többféle megoldására. **(1. ábra)**

Könnyen belátható, hogy a transzlációs felületek rendisége az eltolásban részt vevő két görbe rendiségének szorzata. Mivel dolgozatom a kúpszeleteket, mint pálya-, és vezérgörbét felhasználó eltolásokra korlátozódik, az itt taglalt felületek mindegyike negyedrendű, a kúpszeletek másodrendű jellegéből adódóan.

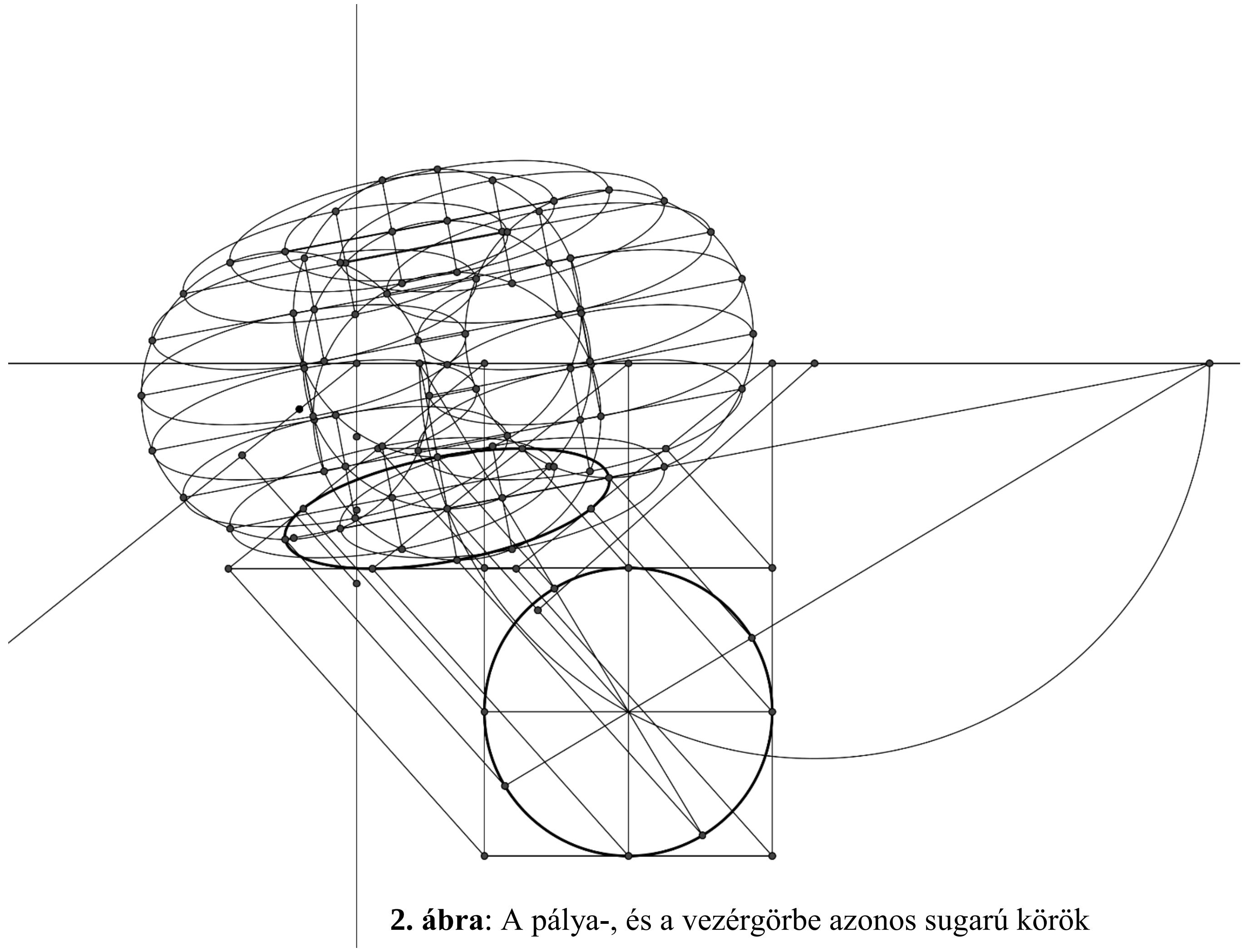
A transzlációs felületek egy igen kedvező tulajdonsága, hogy a pálya-, illetve vezérgörbe síkjával párhuzamos síkok a pálya-, vagy leírógörbét metszik ki a felületből, ezt a tulajdonságot pedig a különféle szerkesztéseknél tudjuk felhasználni.

A szerkesztések során a Monge-féle ábrázolást és az axonometriát használom a felületek szemléltetésére. Monge-féle rendszerekben könnyen szerkeszthetők az itt tárgyalt felületek, míg axonometriában minden szerkesztés sokkal szemléletesebb, hiszen képiesebb képet kapunk eredményül.

Rendszerezés

A kúpszeletekből származtatható transzlációs felületek összes lehetséges formáját végigvizsgálva, tízféle párosítás hozható létre (ahol a pályagörbék és leírógörbék is a kúpszeletek csoportjából kerülnek ki). A tíz főbb csoporton belül további alesetekről beszélhetünk, amennyiben változtatjuk az eltolásban részt vevő két görbe egymáshoz viszonyított méretét (pl. két kör esetében különböző sugárméretekkel más-más formát kaphatunk), vagy a két görbe síkja által bezárt szöget.

A legtöbb szerkesztés az összes esetben hasonló, és mind visszavezethető a legegyszerűbben szerkeszthető ilyen felületre: a kör mentén eltolt kör által alkotott testre.



2. ábra: A pálya-, és a vezérgörbe azonos sugarú körök

Kör mentén eltolt kör

A kör mentén eltolt kör esetében a vezérgörbe körének középpontját illesztjük a pályagörbe körére, majd a vezérgörbét a középpontjának mozgatásával, párhuzamos eltolással szerkesztjük meg a mozgás különböző fázisaiban.

Fontosnak tartom megjegyezni, hogy a két kör transzlációjával keletkező felület nem azonos az ábrázoló geometriából oktatott tórusszal, hiszen ott egy forgatás történik, ahol a megforgatott kör síkja állandóan változik, így alapvetően ellent mond az eltolás definíciójának.

A kör mentén eltolt kör által alkotott felület lehetséges aleseteit a két kör sugarának, illetve a két kör síkja által bezárt szög változtatásával kaphatjuk.

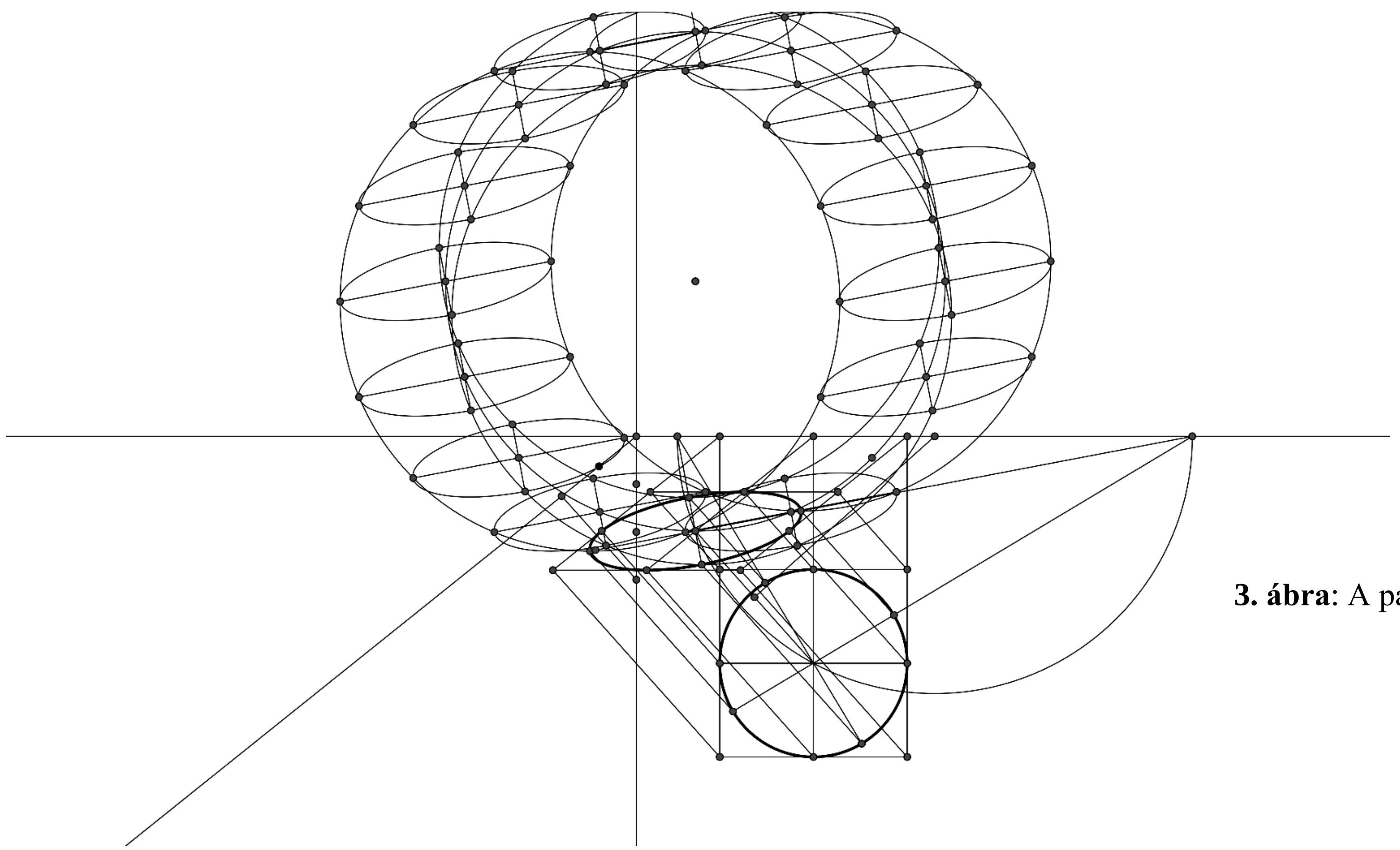
Sugárméretek változtatása

Mivel a pálya- és vezérgörbe felcserélhető, összesen két típus adódik síkmetszetekkel, mint hálóval ábrázolom):

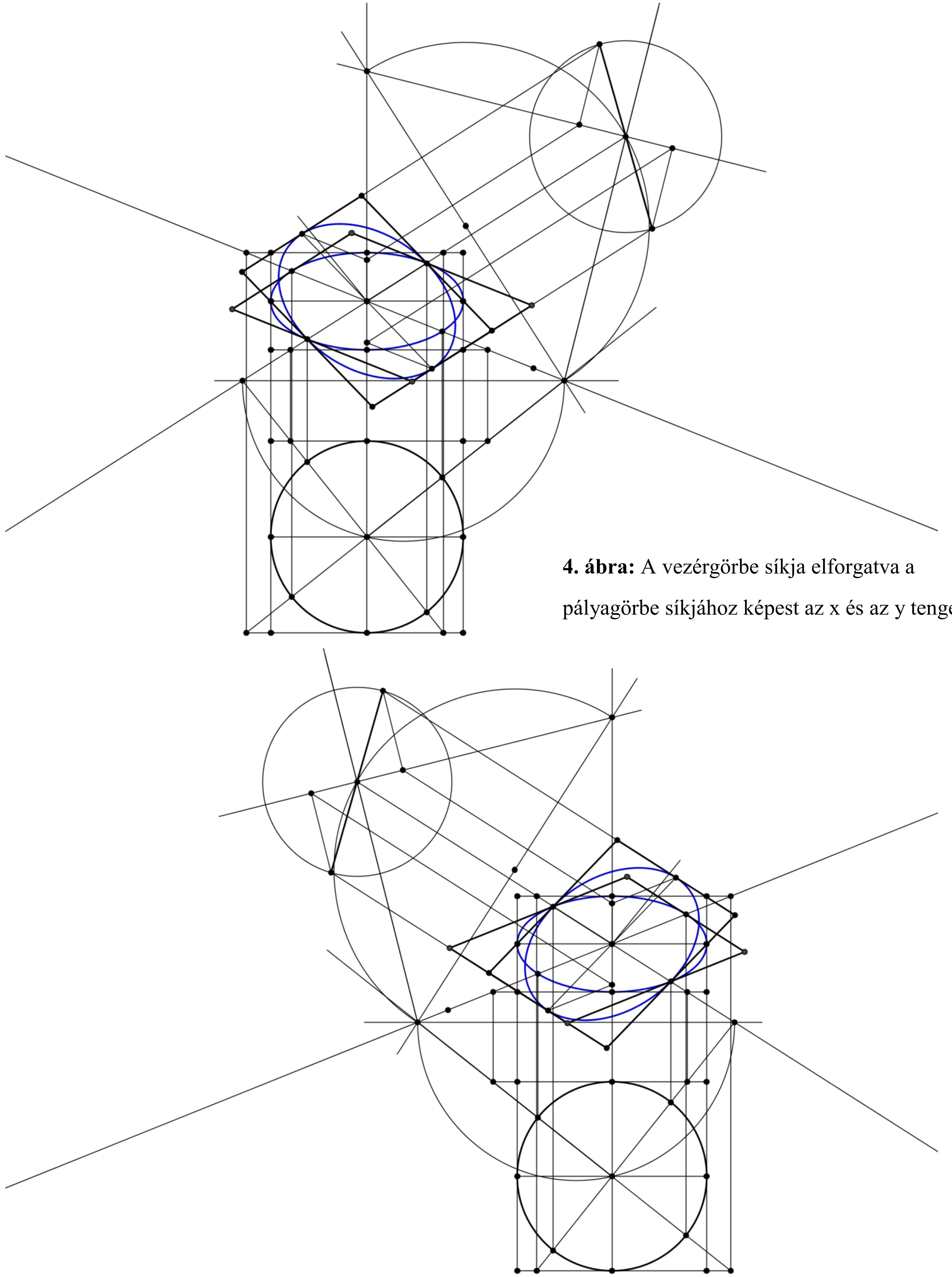
a) mikor a két kör sugara egyezik **(2. ábra)**

b) mikor a két kör sugara eltérő **(3. ábra)**

(Az egyszerűbb átláthatóság kedvéért a továbbiakban a nagyobb sugarú kört tekintjük pályagörbének, míg a kisebbet leíró görbének).



3. ábra: A pálya-, és a vezérgörbe eltérő sugarú körök



4. ábra: A vezérgörbe síkja elforgatva a pályagörbe síkjához képest az x és az y tengely mentén

Pálya-, és vezérgörbe síkja által bezárt szög változtatása

A síkok által bezárt szög módosításánál tekintsünk egy olyan esetet, ahol az egyik kör az xy síkban fekszik, a másik kör síkját pedig az x, az y, illetve a z tengely körül forgatjuk. A z tengely körül forgatva a két kör azonos síkban marad, ezeket az eseteket a továbbiakban nem tárgyalom. A kör végtelen sok szimmetriatengelyének köszönhetően az x és y tengelyek menti elforgatás ugyanazt az egyféle forgatást fogja eredményezni.

Figyeljük meg azt az esetet, mikor a második síkot 30 fokkal elforgatjuk tengely körüli forgatás segítségével egymásba forgatható (a később tárgyalt kúpszeletek esetében azonban ez már nem mondható el, így további esetek is adódnak). **(4. ábra)**

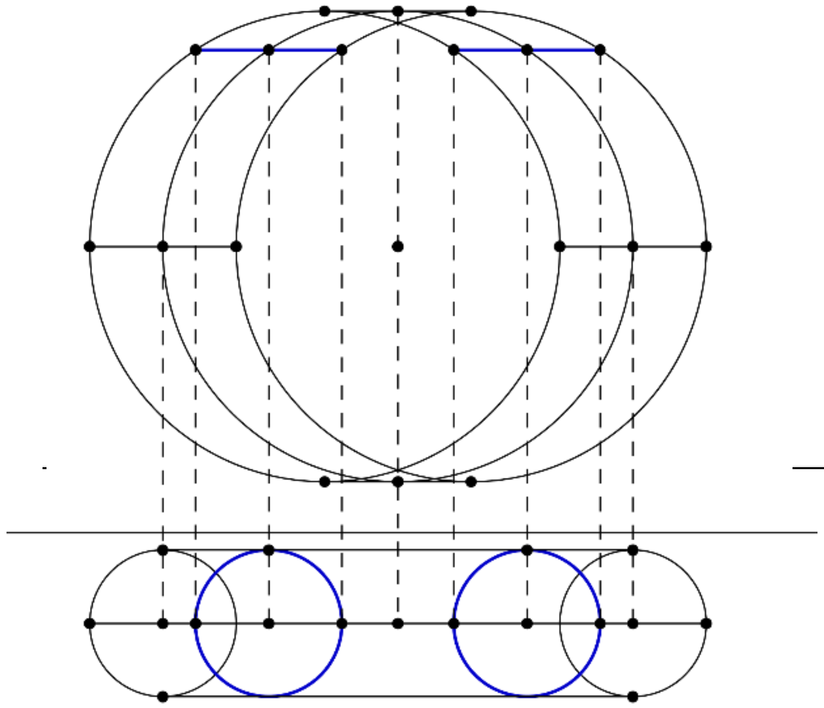
A két síkot egymáshoz képest elforgatva, az általános eset mellett (mikor tetszőleges az elforgatás szöge), két speciális eset adódik:

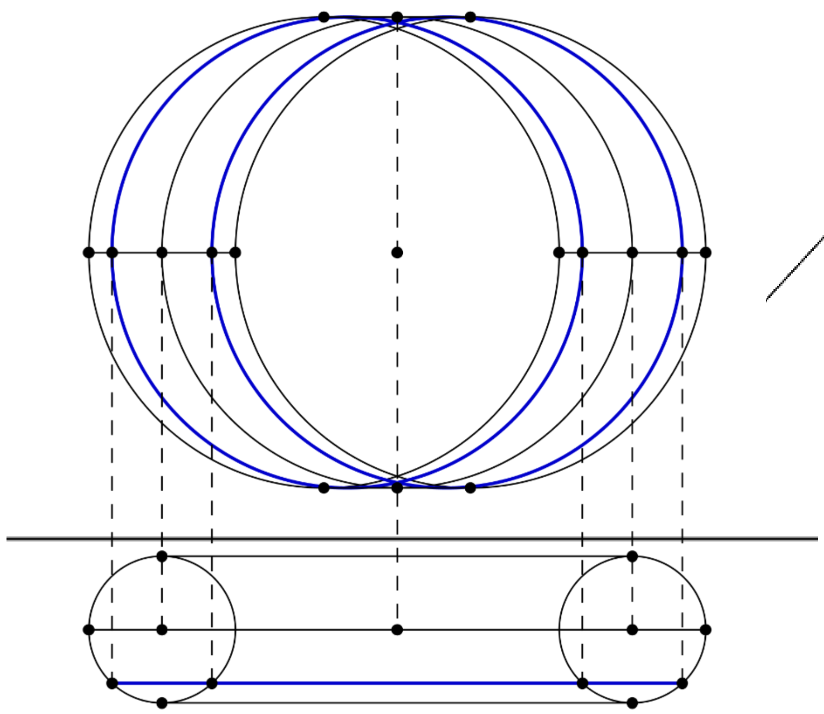
a) a két sík merőleges (Monge-féle ábrázolásban könnyen szerkeszthető, erről a változatról tudjuk levezetni az általános eseteket is)

b) a két kör síkja megegyezik, ekkor az eredmény egy sík körgyűrű lesz, ezt az esetet a továbbiakban nem vizsgálom.

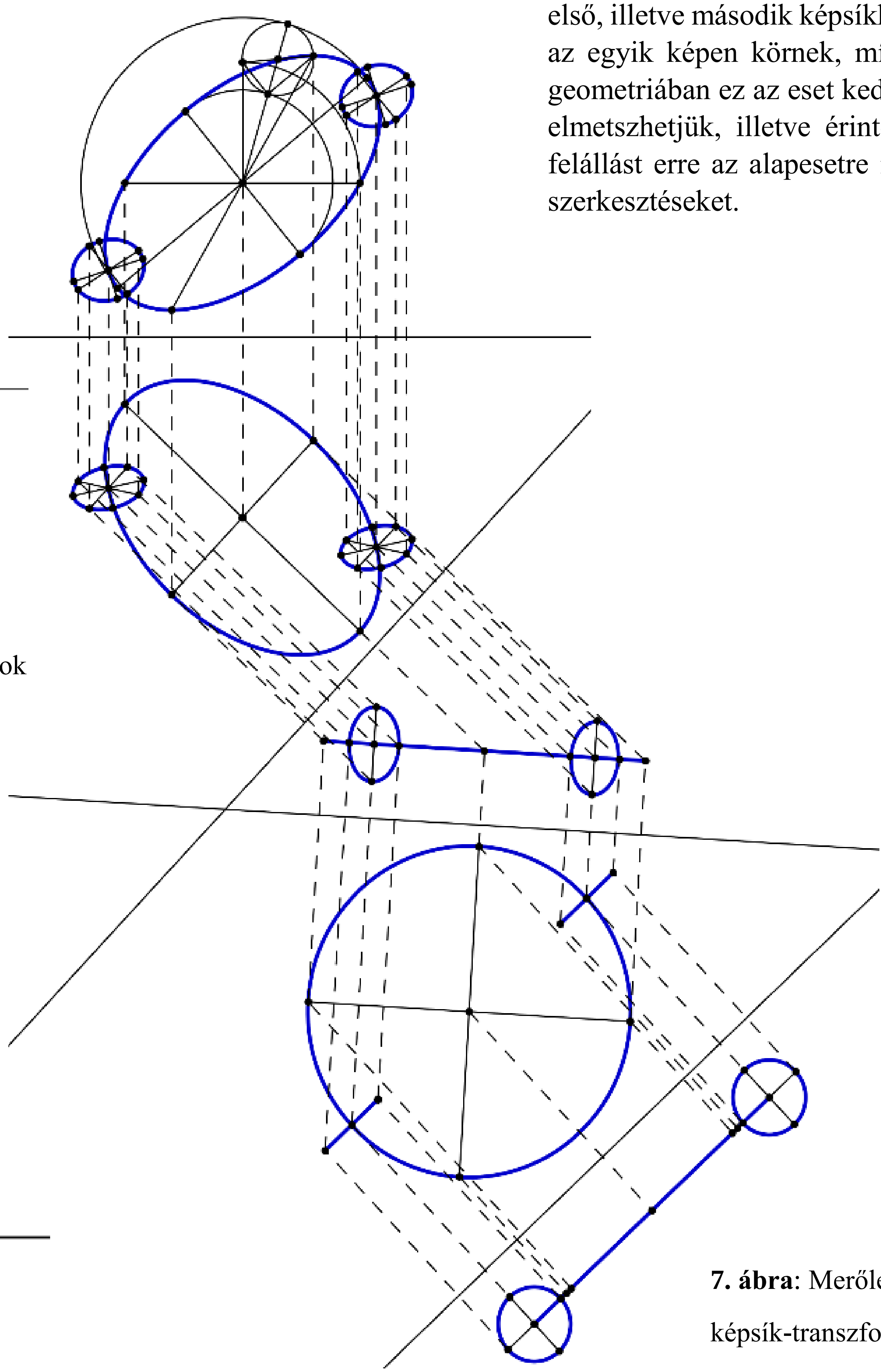
Szerkesztések egymásra merőleges síkú körök esetén

Monge-féle ábrázolásban, ha a két kör síkja egymásra merőleges, és ezek a síkok az első, illetve második képsíkkal párhuzamosak, akkor a képsíkokkal párhuzamos metszeteiket az egyik képen körnek, míg a másikon szakasznak látjuk **(5. és 6. ábra)**. Az Euklideszi geometriában ez az eset kedvező, hiszen az egyeneseket és a köröket minden további nélkül elmetszhetjük, illetve érintőt szerkeszthetünk. A továbbiakban lehetőség szerint minden felállást erre az alapesetre igyekszem visszavezetni, hogy könnyen végre tudjuk hajtani a szerkesztéseket.





5. és 6. ábra: Képsíkkal párhuzamos szeletelő síkok

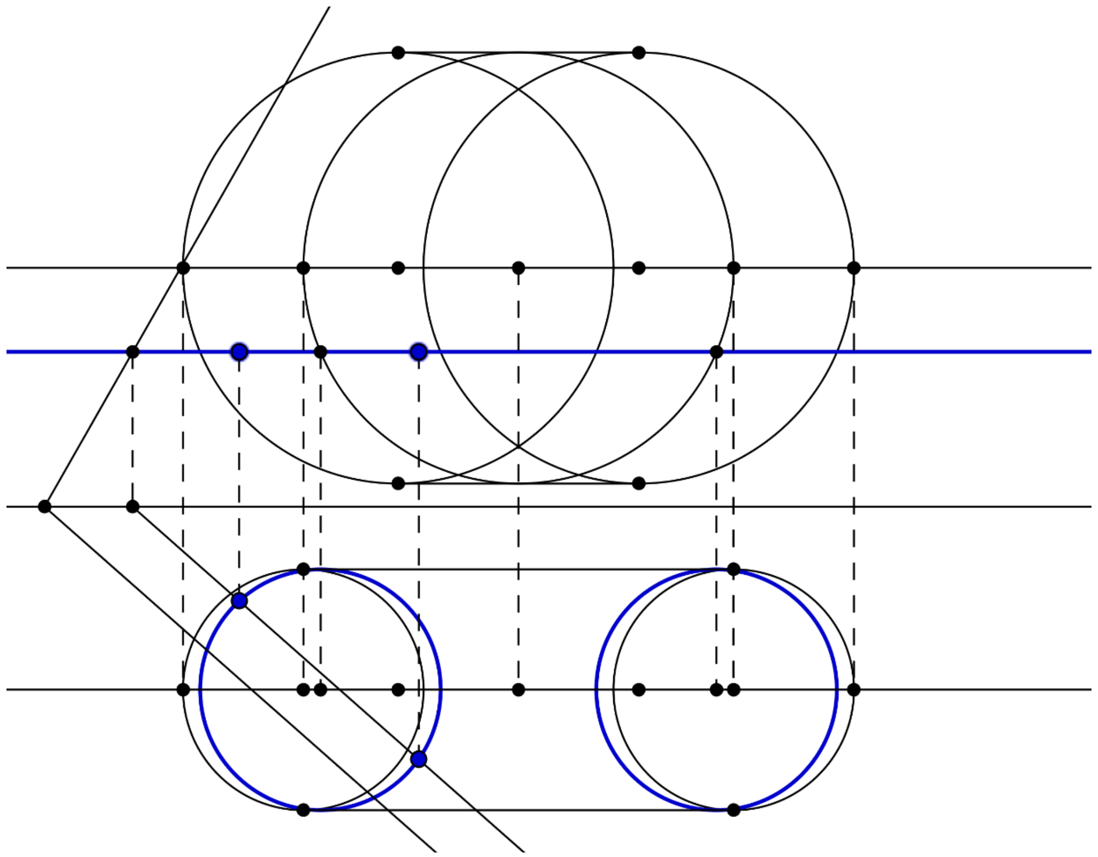


Például amennyiben a körök síkja merőleges, de a síkok nem párhuzamosak a képsíkokkal, új képsíkok felvételével olyan helyzetbe transzformálhatjuk a felületet, hogy az előbb említett kedvező eset álljon fenn. Ehhez először élbe transzformáljuk az egyik kör síkját (a felcserélhetőség miatt akármelyiket választhatjuk), majd felveszünk egy újabb síkot, az előbbi lépésben élbe transzformált síkkal párhuzamosan, a következő képsíkot pedig az ötödik képsíkra transzformált képen, a másik kör élben látszódó síkjával párhuzamosan vesszük fel, így megkapjuk a speciális helyzetbe transzformált felület képét az ötödik illetve hatodik képsíkon **(7. ábra)**

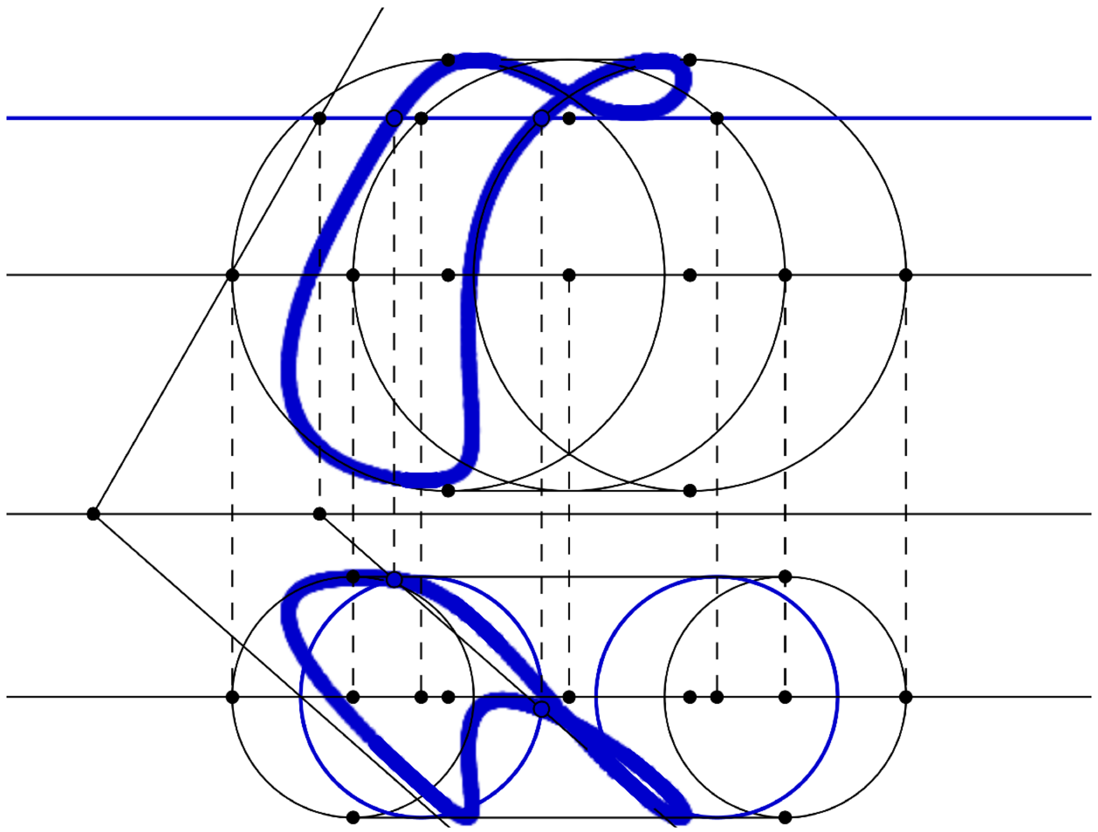
A későbbiekben olyan eseteket is vizsgálok, ahol a két kör síkja nem merőleges egymásra, hanem tetszőleges szöget zárnak be. Ezt az esetet a 16. oldalon fejtem ki bővebben.

7. ábra: Merőleges síkú, de képsíkkal nem párhuzamos körök

képsík-transzformációja



8. ábra: Adott szeletelő síkhoz tartozó síkmetszet pontok



9. ábra: Síkmetszet görbe összekötve

Síkmetszetek - síkmetszet görbék rendisége

Az áthatási görbék rendiségét általánosságban úgy kaphatjuk, hogy az áthatásban részt vevő két felület rendszámát összeszorozzuk. Ez az eljárás a transzlációs felületek esetében is alkalmazható. A sík elsőrendű felület, míg az itt tárgyalt felületek mindegyike negyedrendű, így síkmetszeteik legfeljebb negyedrendű görbék lesznek.

Szeletelő síkok

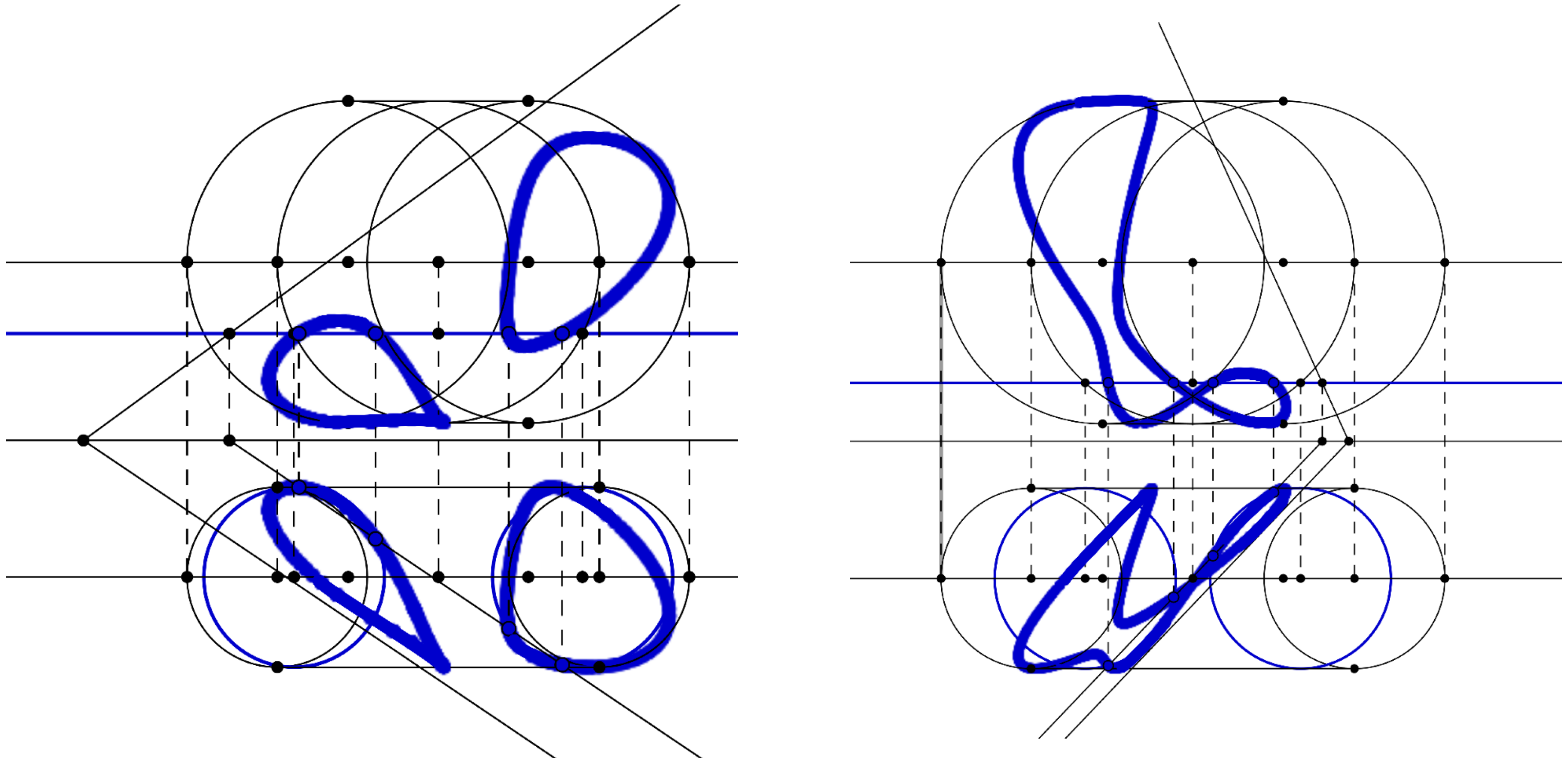
A metszetgörbék a metszősík állásától függően nagyon különbözőek lehetnek. Ha az a speciális helyzet áll fenn, hogy a metszősík valamelyik kör síkjával párhuzamos, akkor a metszet két kör lesz, amelyek egybevágóak az adott körrel (vagy szélső esetekben csak egy ilyen kör adódik). Ezt az esetet használjuk fel szeletelő síkok készítéséhez, melynek segítségével az általános helyzetű síkokkal vett metszetek szerkeszthetők.

A szeletelő síkokhoz vegyük azt az esetet, mikor a két kör síkja merőleges, illetve a síkok párhuzamosak az első és a második képsíkkal. Ekkor a vízszintes szeletek úgy kaphatók, ha tetszőleges magasságban elmetsszük a pályagörbe körét, majd a két metszésponthoz, mint középponthoz megszerkesztünk egy-egy vezérkört az első képsíkon. Az adott magasságban a felület síkmetszete ez a két vezérkör lesz. Ugyanez az eljárás elvégezhető a második képsíkkal párhuzamos szeletelő síkok esetében is.

Általános helyzetű metszősíkok

Általános helyzetű metszősík esetében a metszetgörbe a következőképp szerkeszthető **(8. ábra)**:

- Amennyiben szükséges, a metszősíkot és a felületet a korábban említett speciális helyzetbe transzformáljuk.
- Szeletelő síkkal átmetsszük a felületet, két kört kapva.
- A metszősíknak és a szeletelő síknak megszerkesztjük a metszésvonalát.
- A metszésvonallal a szeletelő síkkal kapott két kört elmetsszük, a kapott pontok a síkmetszet görbe pontjai lesznek.
- További síkokkal szeleteljük a felületet, amíg elegendő mennyiségű pontot kapunk ahhoz, hogy összeköthessük a síkmetszet görbét **(9. ábra)**.



10. és 11. ábra: További síkmetszet-görbék

Általános helyzetű metszősíkok metszetgörbeként kiadhatnak homokórára, könnycseppre emlékeztető alakzatokat is **(10. és 11. ábra)**

Érintősík szerkesztése adott ponthoz

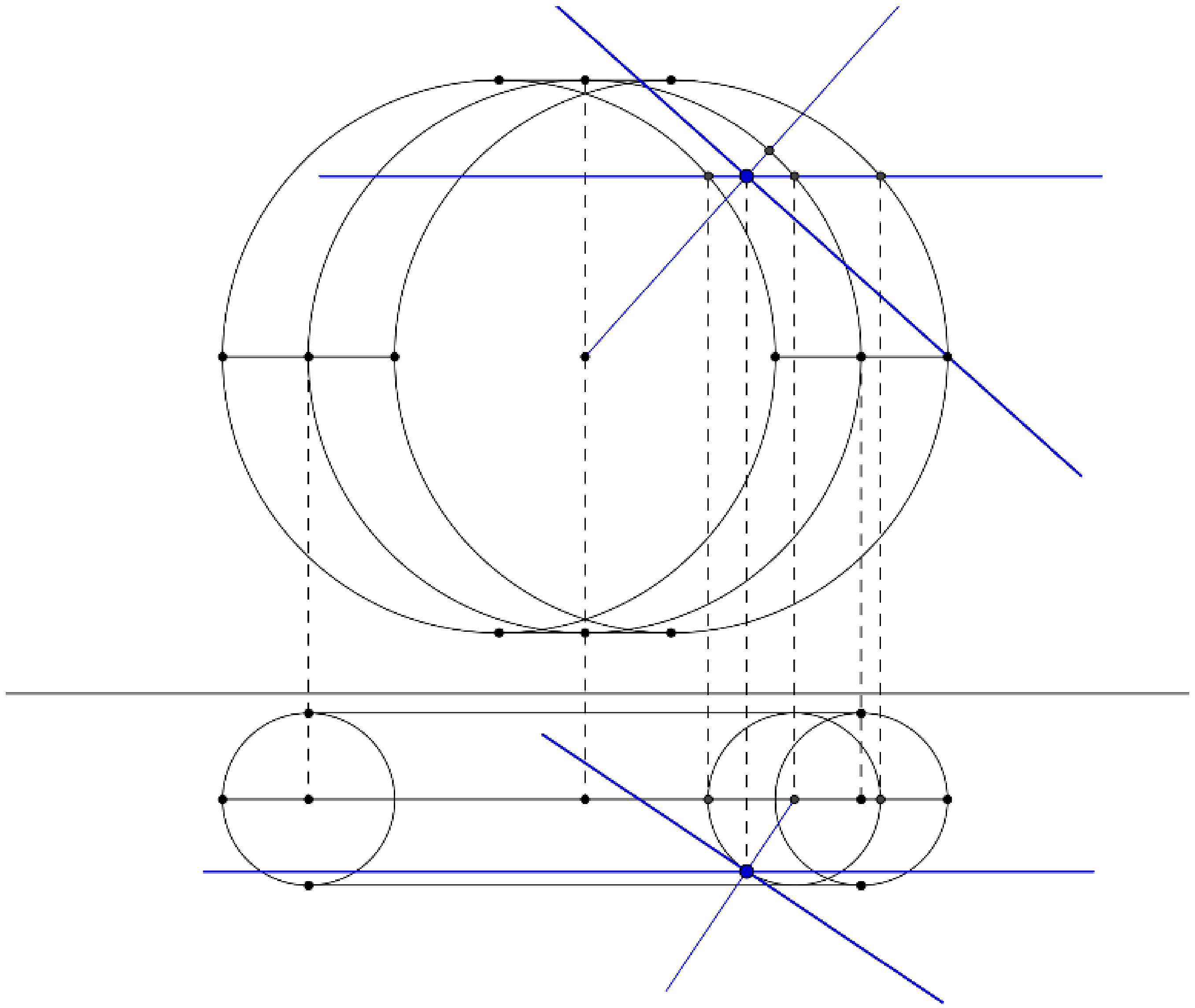
A felületi pontokhoz tartozó érintősík meghatározásánál általában keresünk a ponton átmenő, a felületre simuló két görbét, és ezeknek szerkesztjük meg az érintőit, majd a két kapott egyenes határozza meg a pontbeli érintősíkot.

A transzlációs felületeknél a két görbe megválasztása kifejezetten egyszerű: az adott ponthoz tartozó pálya-, illetve vezérgörbével párhuzamos görbéket keressük meg (amely a kör mentén eltolt kör esetében két kör lesz), majd a körökhöz húzott érintő egyenesek határozzák meg az érintősíkot. **(12. ábra)**

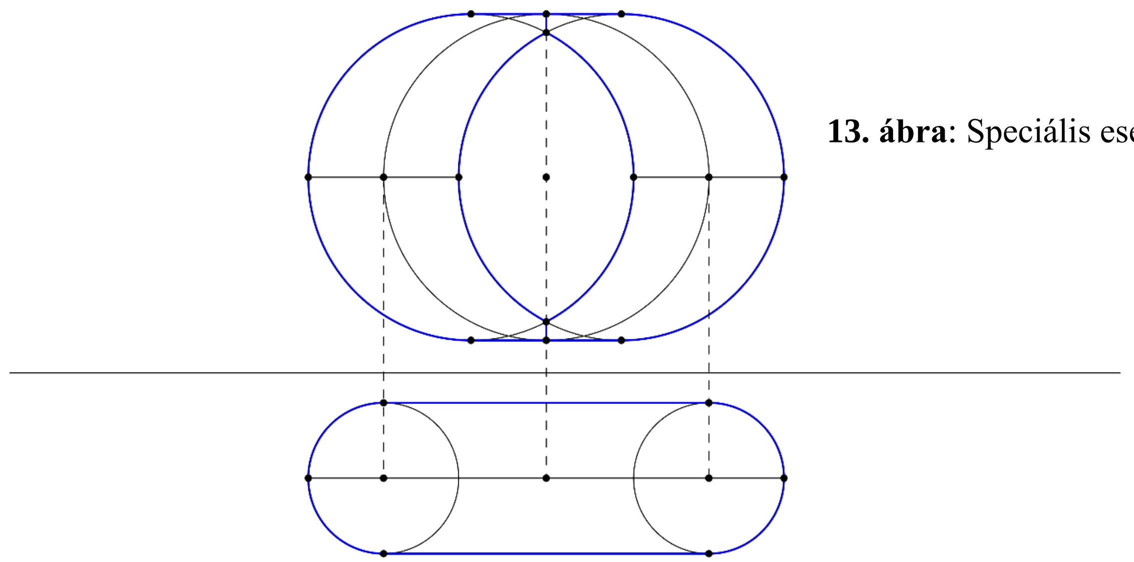
Kontúrpont szerkesztésének általános elve

Kontúrpont ott van, ahol a felület pontbeli érintősíkja vetítősík. Felhasználva az érintősík szerkesztési lépéseit visszafelé, könnyedén megtalálhatjuk az egyes szeletelő síkokhoz tartozó kontúrpontokat.

- Először a felületet a vezérgörbével párhuzamos síkkal metsszük el.
- A pályagörbéből kimetszett ponthoz érintőt húzunk.
- Képezzük az érintő egyenes és a nézési irány egyenese által meghatározott síkot, majd ennek vesszük a metszésvonalát a kimetszett vezérgörbe síkjával.
- A metszésvonallal párhuzamos érintőket húzunk a kimetszett vezérkörhöz, és a két érintési pont lesz az adott metszethez tartozó kontúrpont.

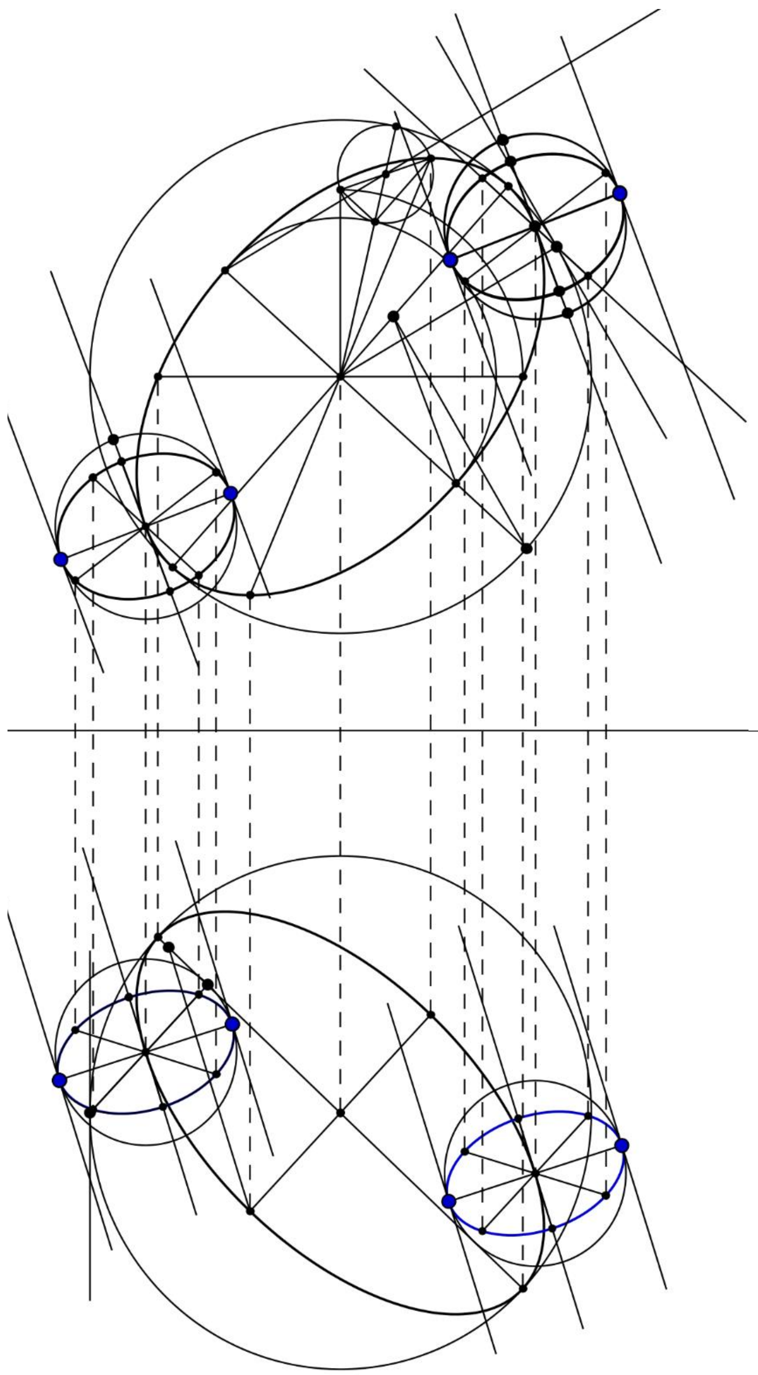


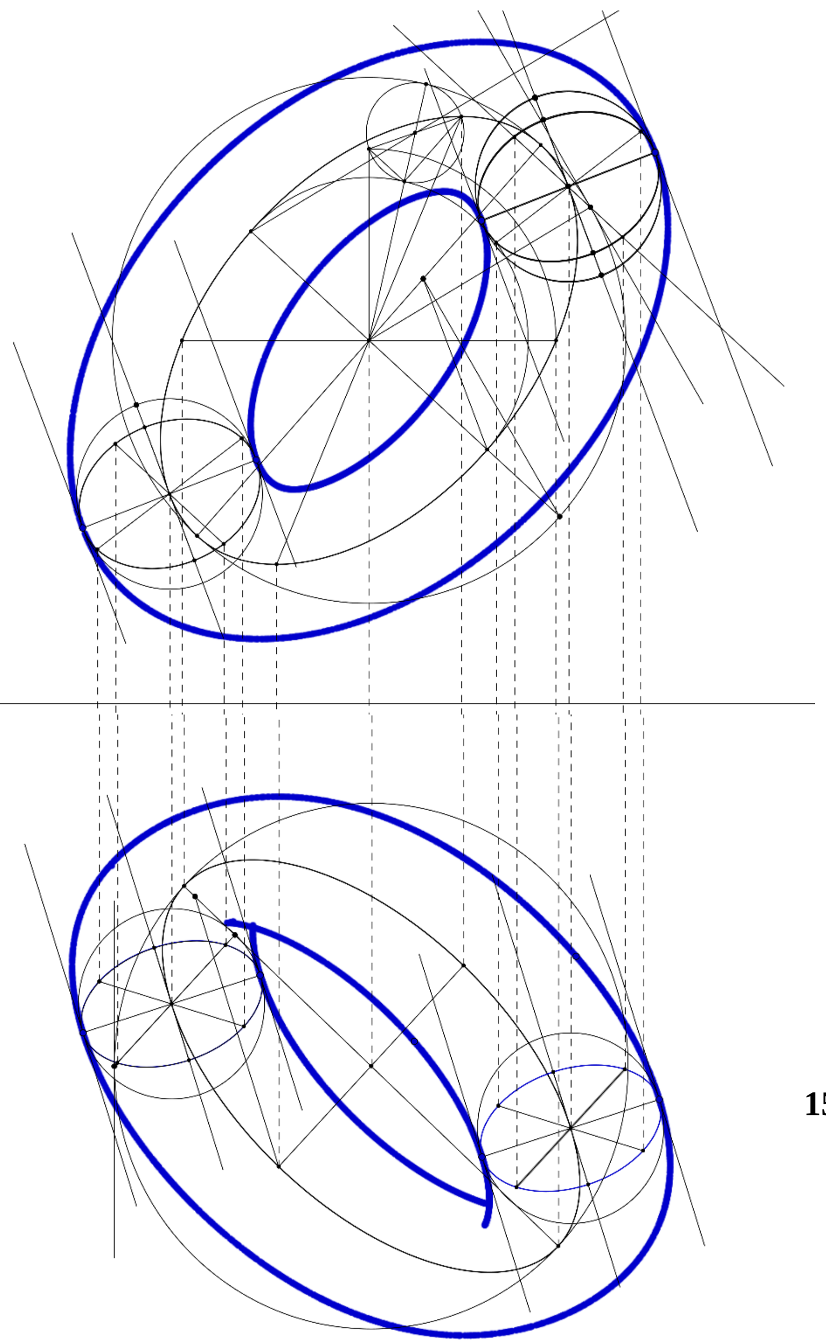
12. ábra: Adott felületi ponthoz tartozó érintősík



13. ábra: Speciális esetben a kontúrgörbék

14. ábra: Adott szeletelő síkhoz tartozó kontúrpontok





15. ábra: Összekötött kontúrgörbe

Kontúrpont szerkesztése Monge-féle ábrázolásban

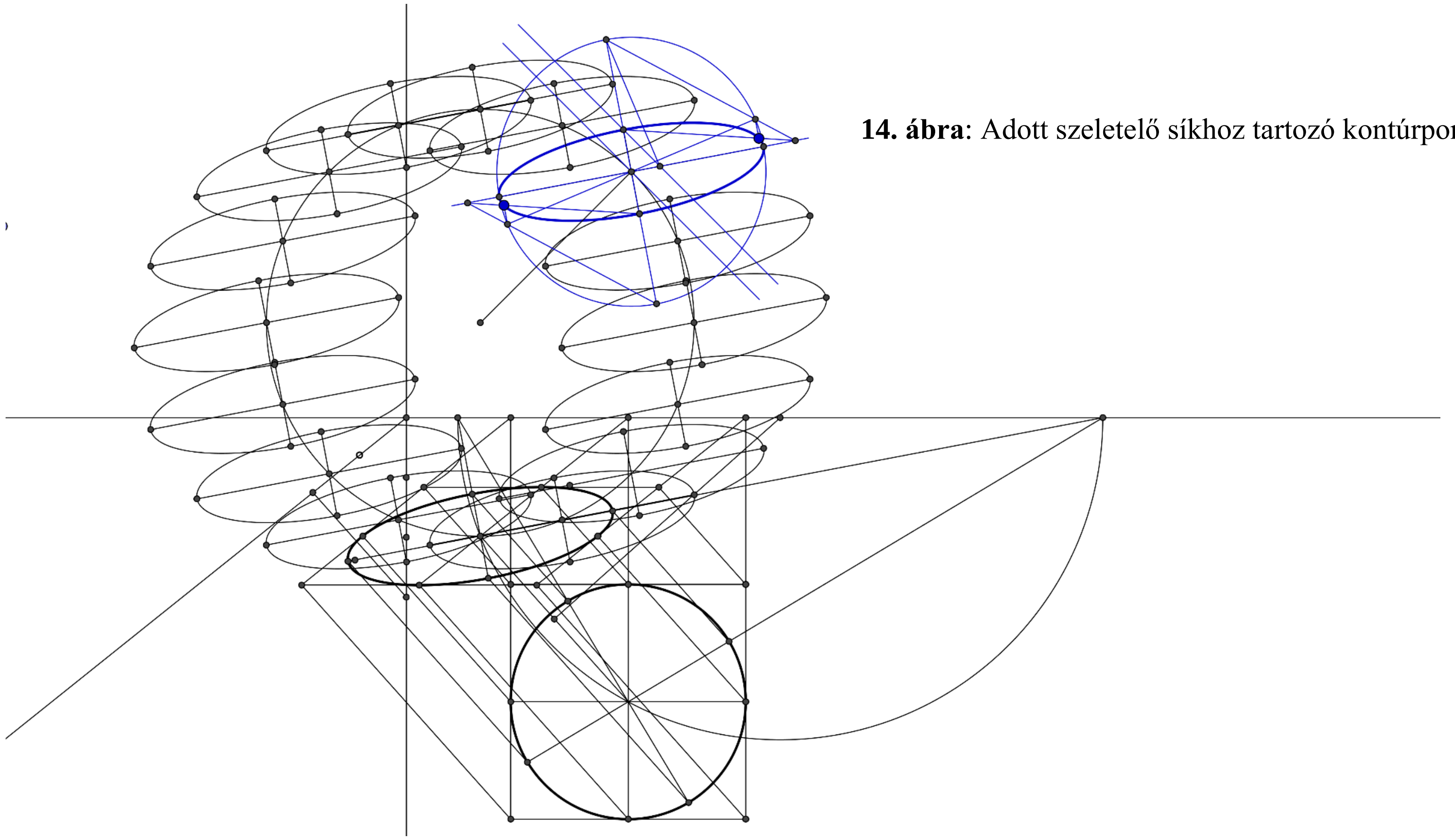
A kontúrpont szerkesztése Monge-féle ábrázolásban a képsíkokkal párhuzamos görbék esetén evidens, első és második képen is két-két vezér, illetve pályagörbe határozza meg, illetve az őket összekötő közös érintők. **(13. ábra)**

Ha ez a speciális helyzet nem áll fenn, akkor két lehetőségünk van a szerkesztésre. A két lehetőség az ábrázoló geometriai alapoktatásban szereplő képsík-transzformáció, illetve a leforgatás, melyekről tudjuk, hogy ugyanazt a célt szolgálják más és más módszerrel.

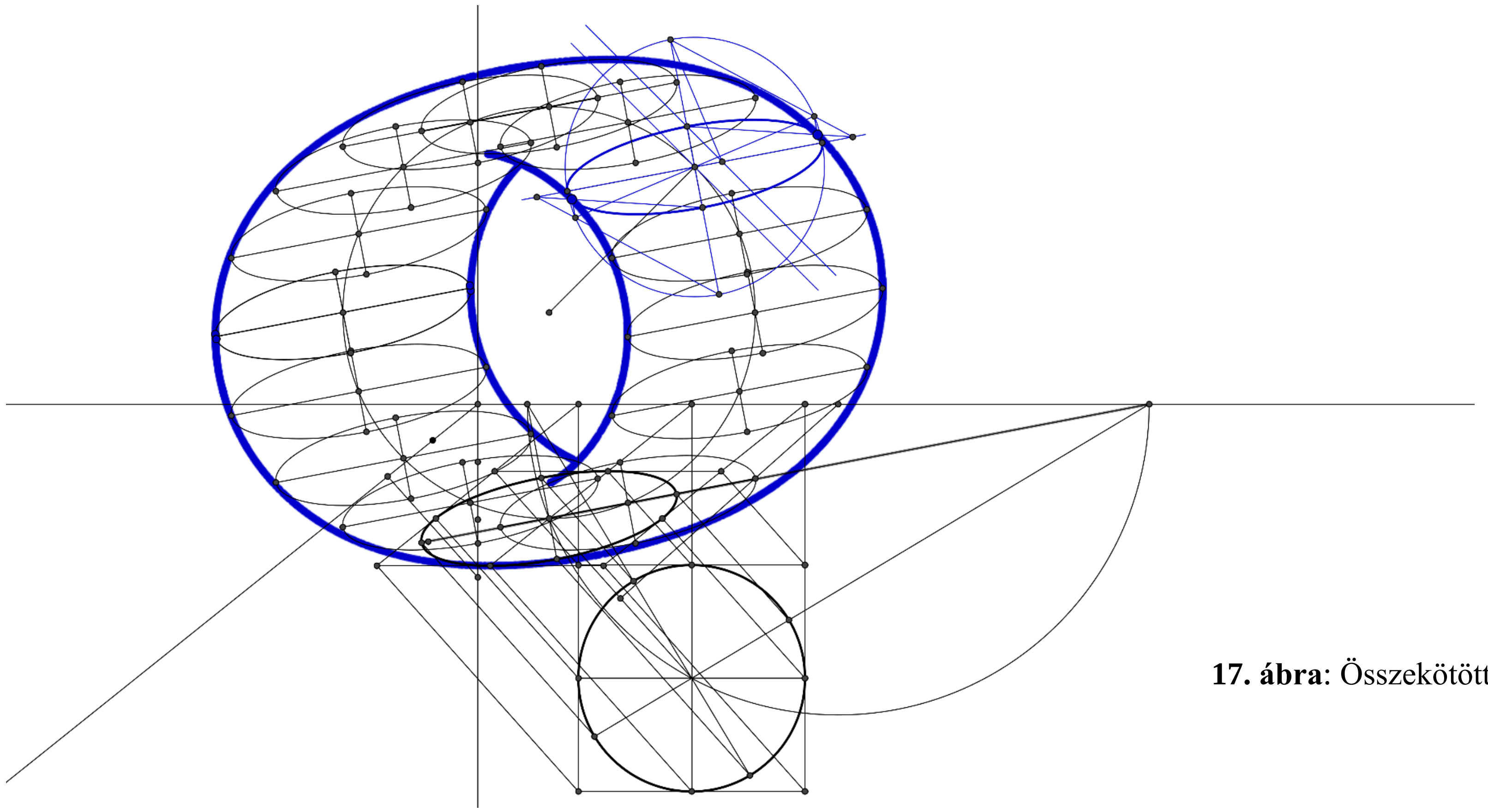
A leforgatás, mint általánosságban, itt is helytakarékosabb és elegánsabb megoldás. Ha mégis képsík-transzformációt alkalmaznánk, akkor a nézési irány egyenesét a felülettel együtt végig kell transzformálnunk a további képsíkokra, majd a speciális helyzetet elérve kell megkeresnünk azokat az érintő síkokat, amelyekre a nézési irányok egyenesei illeszkednek, és a kapott kontúrpontokat kell visszatranszformálnunk a kiinduló síkokra.

A leforgatásos módszernél az ellipszis és a kör közötti affin kapcsolatot kihasználva tudjuk elmetszeni a vezérgörbével párhuzamos síkokkal a pályagörbét, majd meghatározni az adott metszésponthoz tartozó ellipszis-érintőt. Mivel Monge-ban a nézési irány egy pontban látszódó egyenes, a kontúrsík egy élben látszódó sík lesz, amely a pályagörbe ellipszisét érintő egyenesben látszik. Ezt az élben látszódó síkot, mint irányt felhasználva, megszerkesztjük a kimetszett vezérgörbe ellipszisnek az iránnyal párhuzamos érintőit, és a két érintési pont lesz az adott vezérgörbéhez tartozó két kontúrpont. **(14. ábra)**

A vezérgörbével párhuzamos síkokkal való szeletelést addig folytatjuk, amíg elegendő mennyiségű kontúrpontot kapunk a kontúrgörbe összekötéséhez. **(15. ábra)**



14. ábra: Adott szeletelő síkhoz tartozó kontúrpontok



17. ábra: Összekötött kontúrgörbe

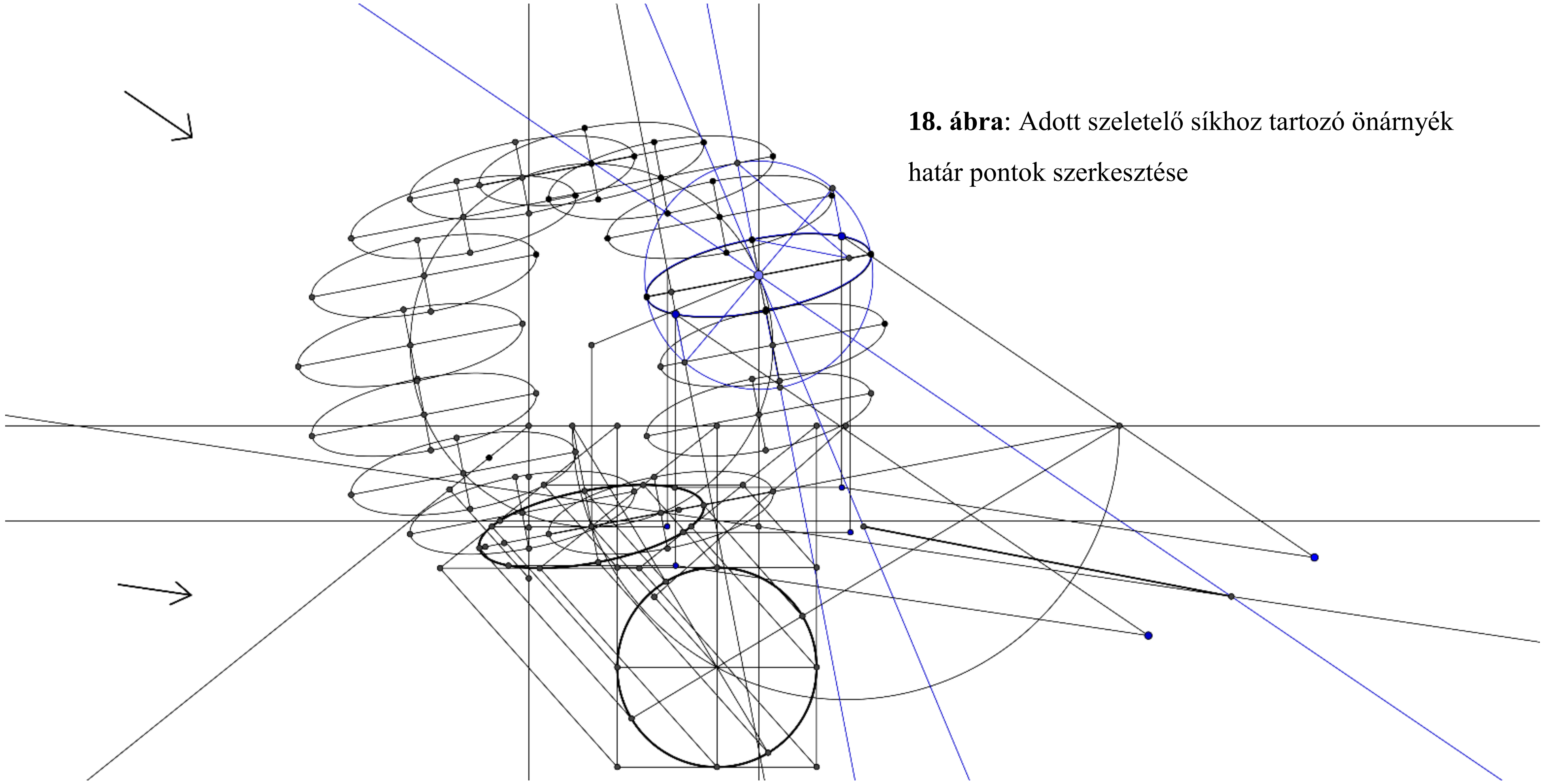
Kontúrpont szerkesztése axonometriában

A vezérgörbe síkjával párhuzamosan elmetsszük a pályagörbét, kimetszve a felületből két ellipszisnek látszó kört, melyek a vezérkör képének párhuzamosan eltolt képei. Az pályagörbéből kimetszett két ponthoz megszerkesztjük a pályakör ellipszisnek látszó képéhez tartozó érintőket. A nézési irány itt is egy pontban látszó egyenes, így a nézési irány síkja a kiszerkesztett érintő egyenesében, élben látszódó sík. Az élben látszódó sík egyenes képével párhuzamos érintőket húzunk a kimetszett vezérkörök ellipsziseihez. A kapott érintési pontok lesznek az adott metszethez tartozó kontúrpontok **(16. ábra)**.

Az eljárást addig ismételjük, amíg elegendő mennyiségű pontot kapunk a kontúrgörbe összekötéséhez **(17. ábra)**.

Az ellipszissel kapcsolatos szerkesztésekhez a képsíkok leforgatását használjuk, hogy az ellipszisekkel affin kapcsolatban álló körökön hajthassuk végre az Euklideszi geometriában megengedett lépéseket.

Árnyék szerkesztésének elve

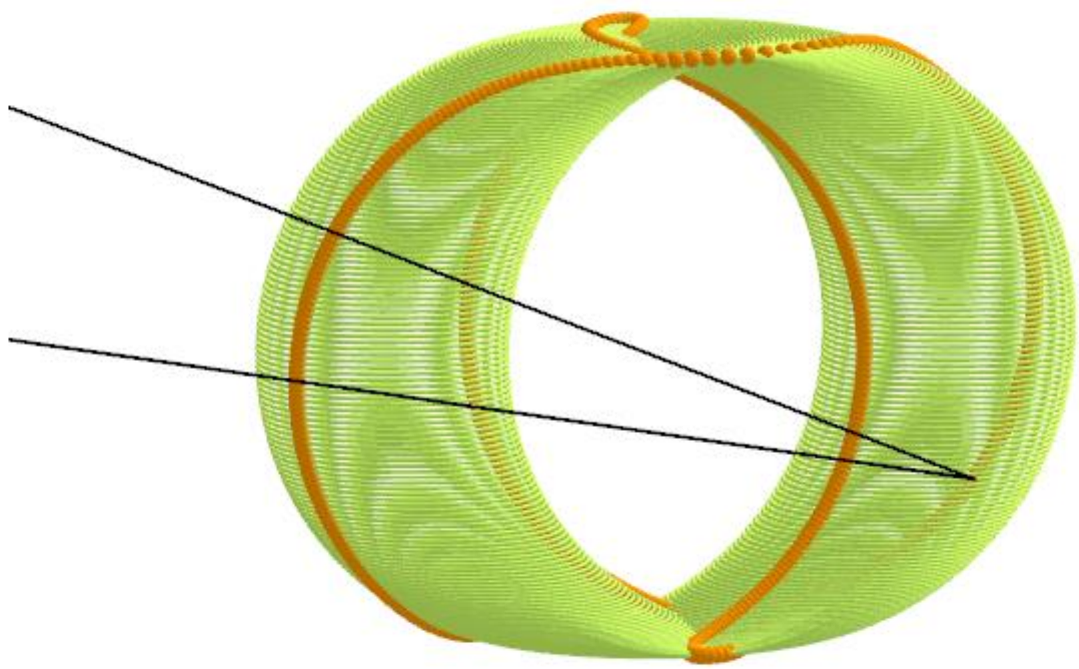


18. ábra: Adott szeletelő síkhoz tartozó önárnyék határ pontok szerkesztése

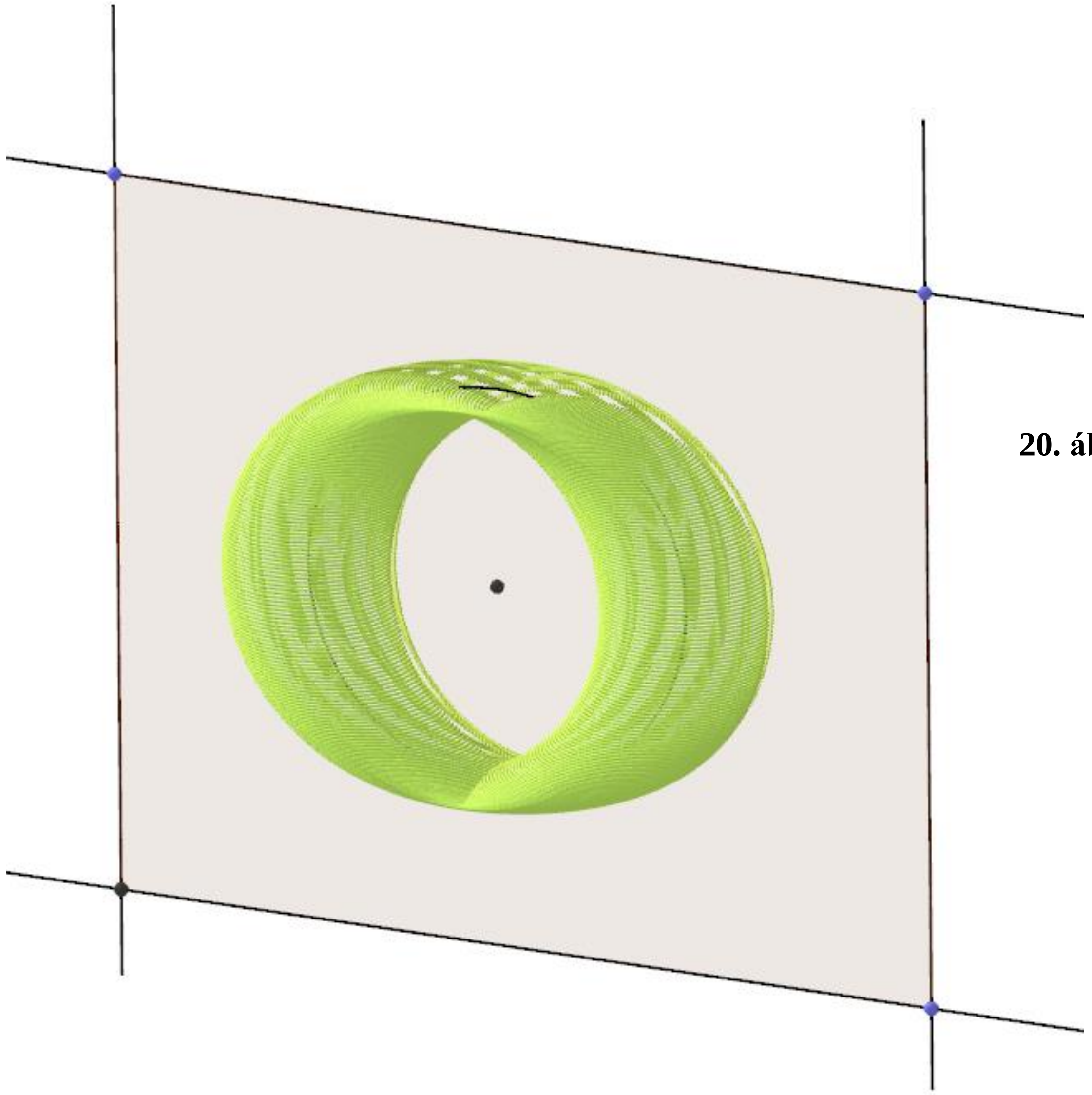
Önárnyék-kontúrpont ott van, ahol a felület pontbeli érintősíkja fénysík. Az önárnyék-kontúrpontokat a kontúrpontokhoz hasonlóan szerkeszthetjük. Itt is a vezérgörbe síkjával párhuzamos síkokkal szeleteljük a pályagörbét, majd a kimetszett pontokban érintőt szerkesztünk a pályagörbéhez. Ezután azokat a pontokat keressük a kimetszett vezérgörbéken, amelyekben a felületi érintősík az érintő egyenes és a fényirány egyenese által meghatározott sík lesz.

A földre vetett árnyék az önárnyék-határ görbe földre vetett árnyéka alapján szerkeszthető: a kiszerkesztett önárnyék-kontúrpontokra ráillesztjük a fényirány egyenesét, és ezzel az egyenessel döfjük a képsíkot.

(18. és 19. ábra)



19. ábra: Összekötött önárnyék határ görbe



20. ábra

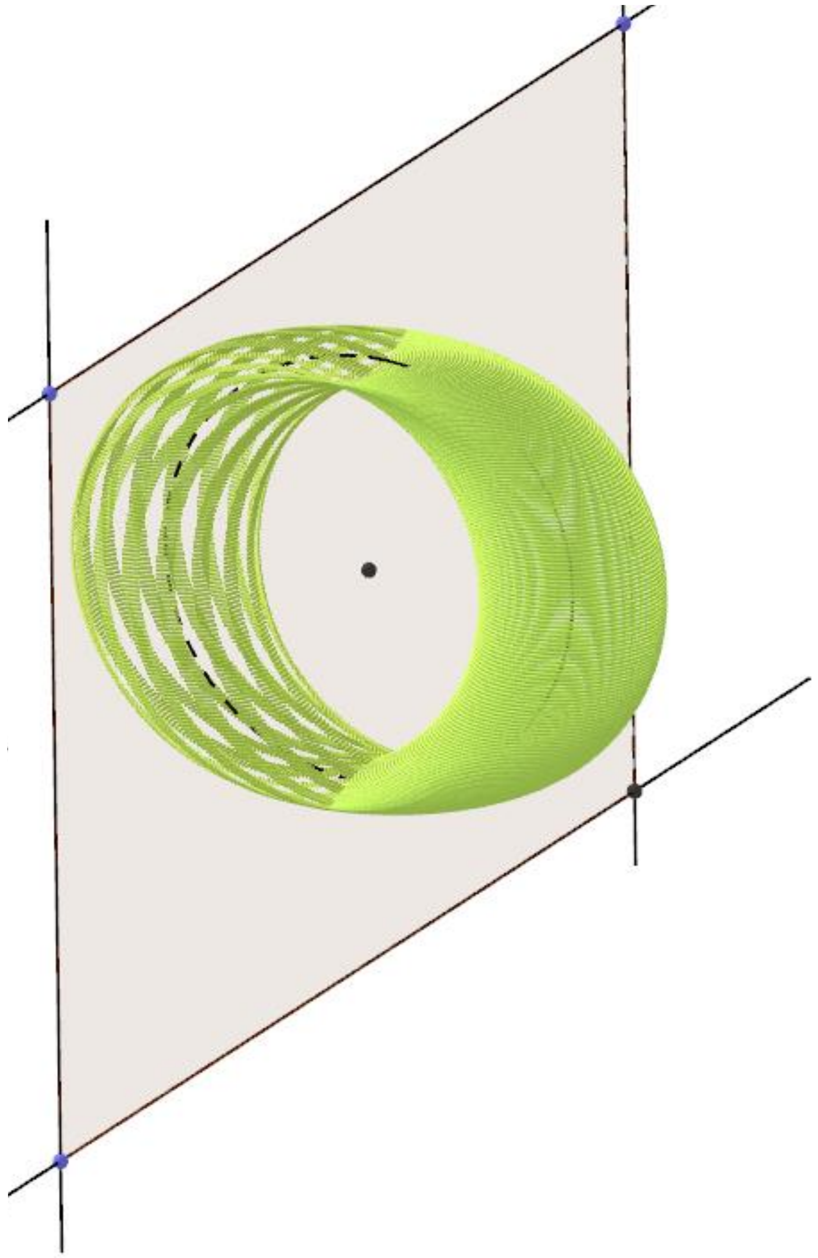
Szimmetriasíkok és szimmetria-középpont

A kör mentén eltolt kör által alkotott felületek mindig középpontosan szimmetrikusak, a szimmetria-középpont a pályagörbe körének középpontja.

A kör mentén eltolt kör által meghatározott transzlációs felületnek merőleges síkok és eltérő sugárméret esetén összesen három szimmetriasíkja van:

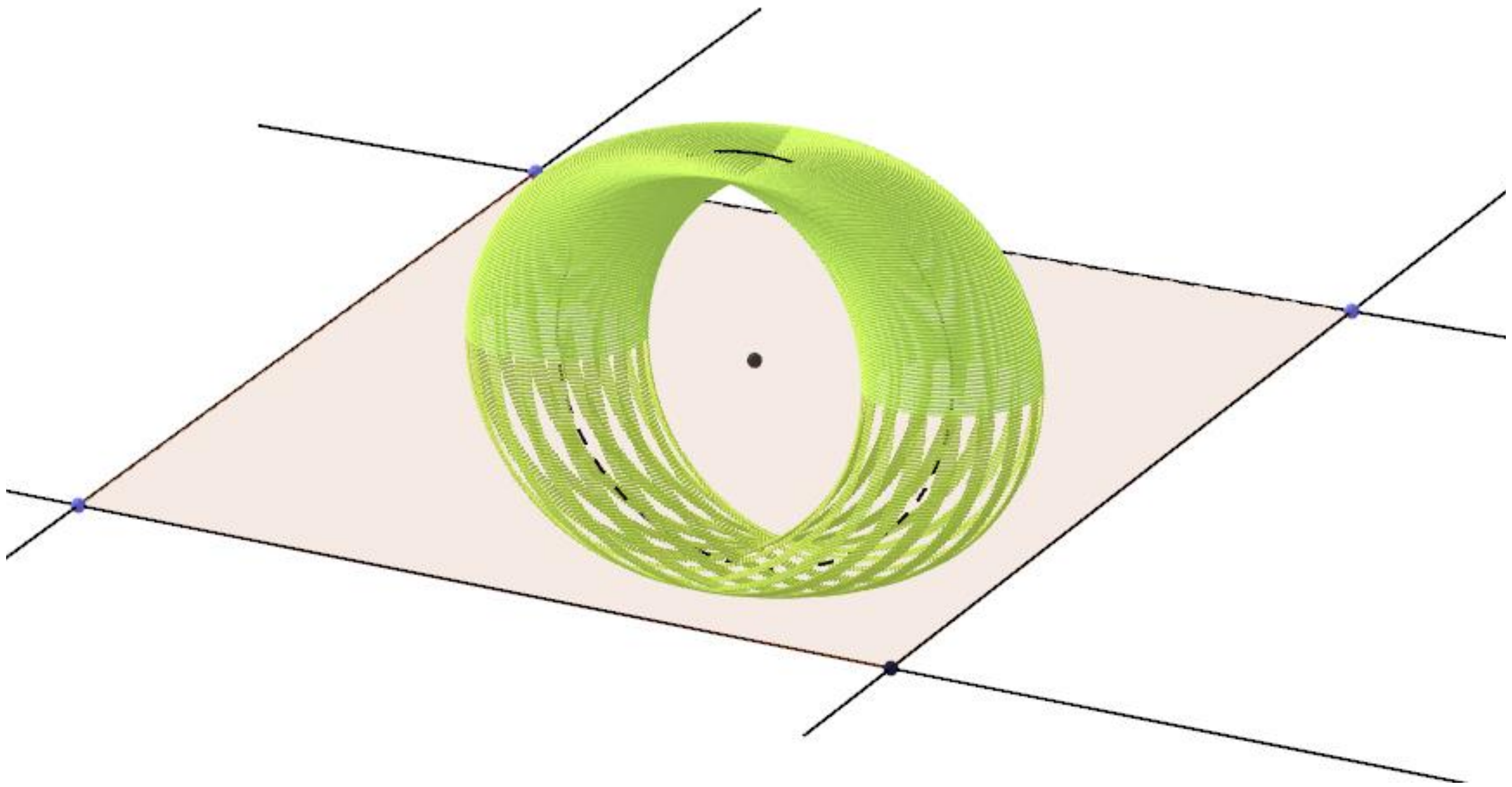
- A pályagörbe középpontján átmenő, pályagörbével párhuzamos sík **(20. ábra)**
- A pályagörbe középpontján átmenő, vezérgörbével párhuzamos sík **(21. ábra)**
- A pályagörbe középpontján átmenő, a pálya-, és vezérgörbe síkjára is merőleges sík **(22. ábra)**

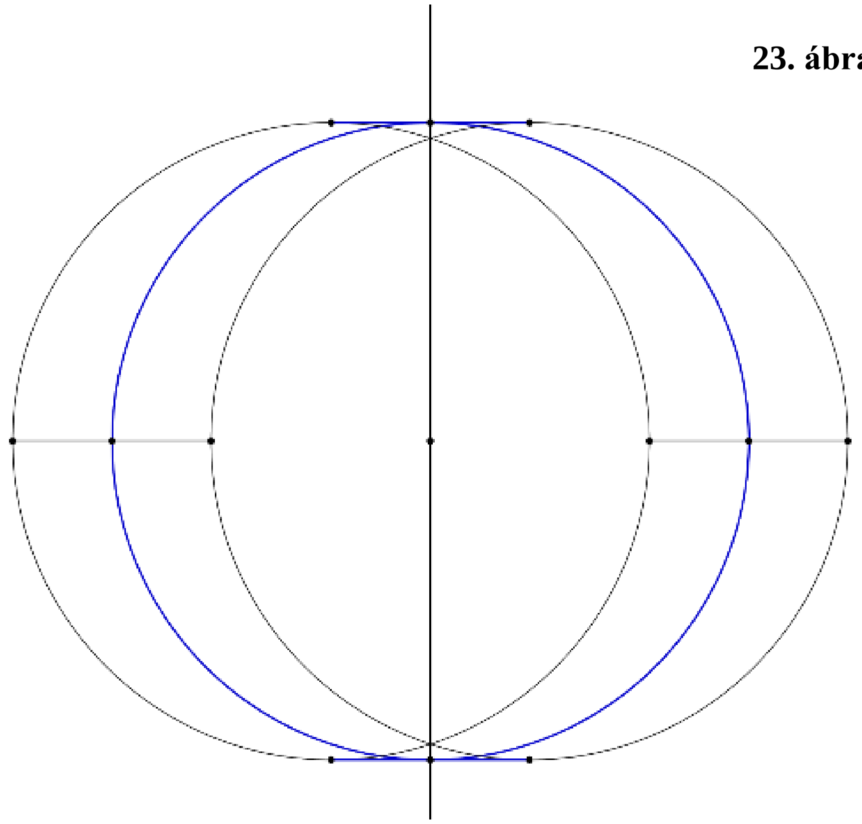
(Az itt, és a továbbiakban szereplő háromdimenziós ábrák elkészítéséhez halványabb színeket választottam, mert a sötét színekhez képest jobban visszaadják a felületek térbeliségét.)



22. ábra

21. ábra



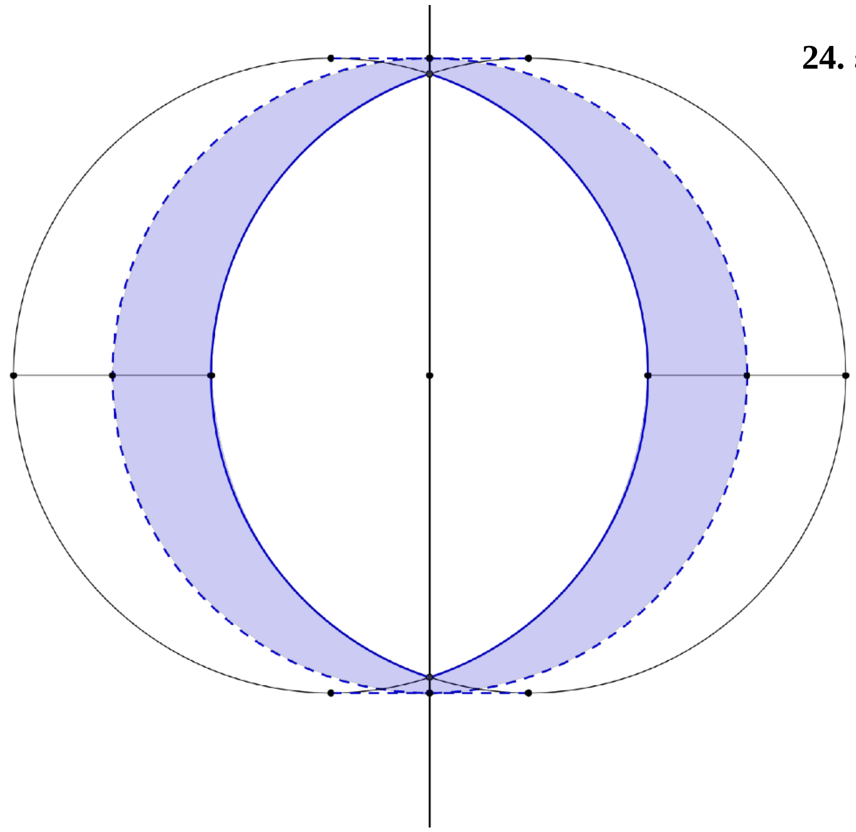


23. ábra

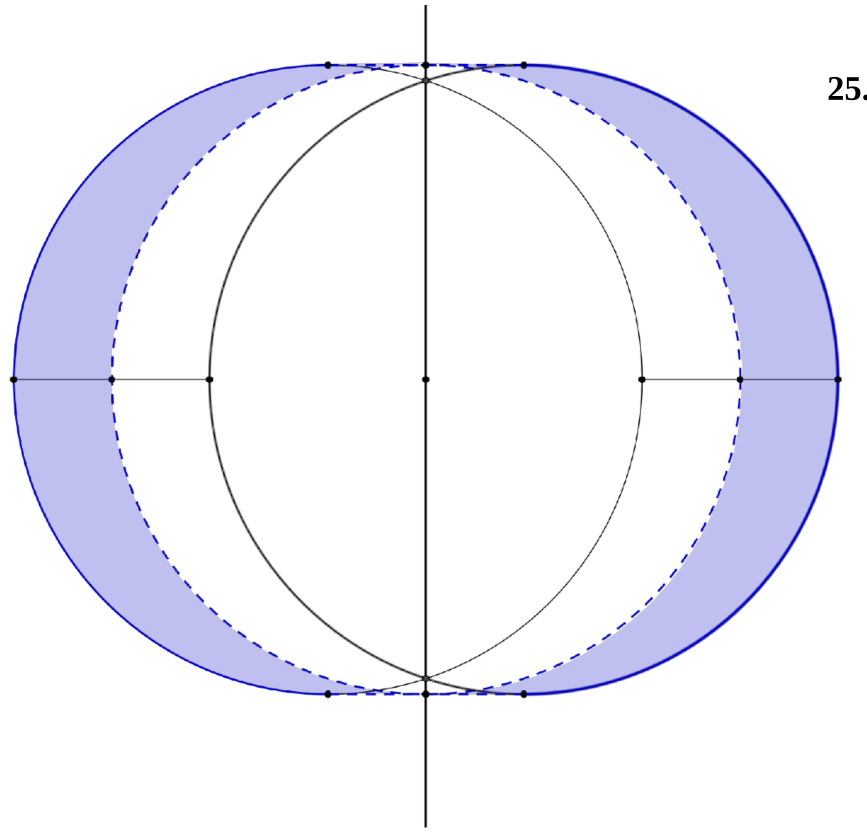
Felületi pontok osztályozása

A felületi pontok osztályozásához az utolsóként említett szimmetriasíkot használhatjuk fel. A szimmetriasíkkal elmetsszük a felületet, és az összes felületi pontot erre a síkra vetítjük merőlegesen.

- A képsíkon keletkező egyszeres vetületekhez tartozó pontok *parabolikusak* **(23. ábra)**
- A képsíkon keletkező kétszeres vetületekhez tartozó, a síkhoz közelebb eső pontok *hiperbolikusak* **(24. ábra)**
- A képsíkon keletkező kétszeres vetületekhez tartozó, a síktól távolabb eső pontok pedig *elliptikusak.* **(25. ábra)**

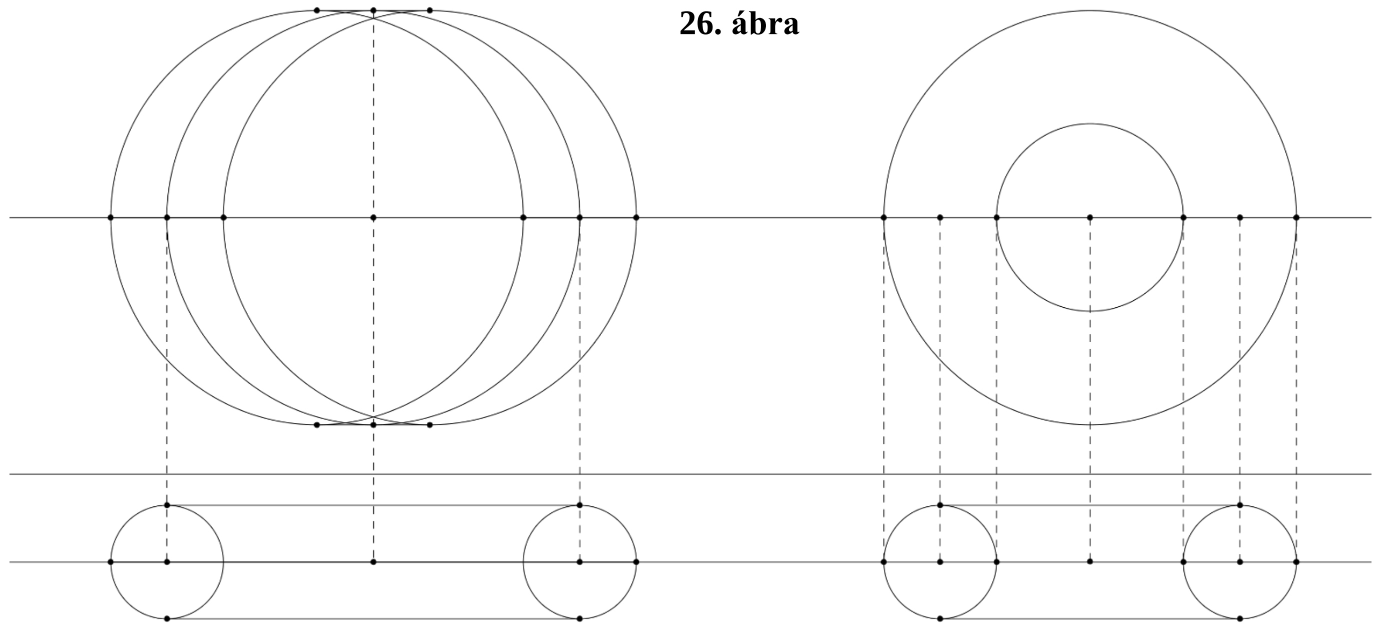


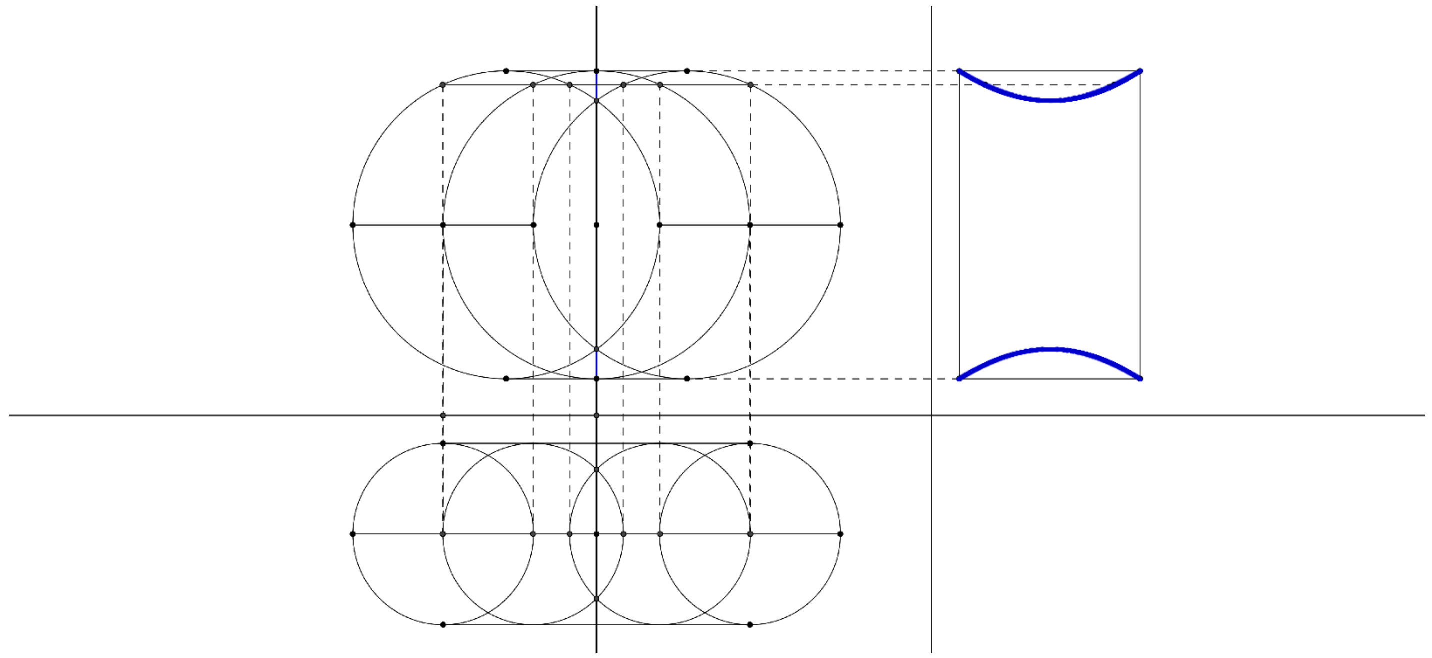
24. ábra



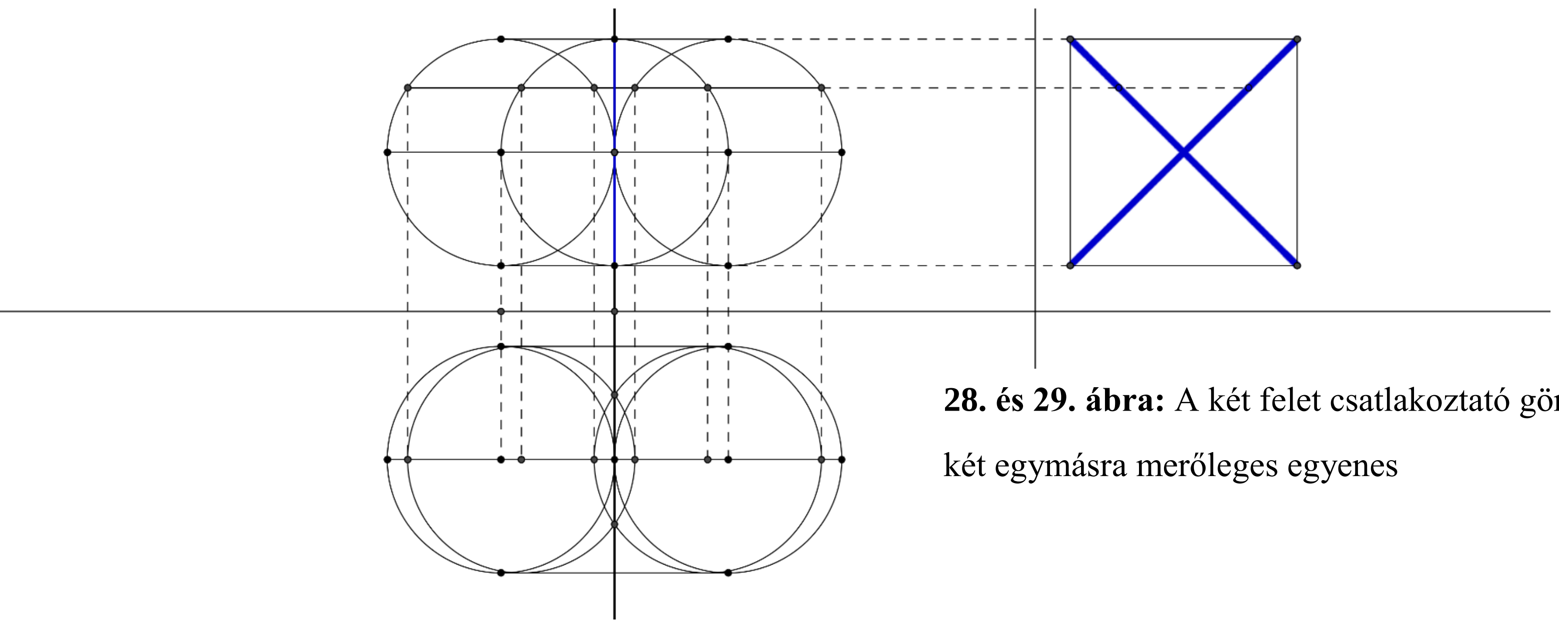
25. ábra

26. ábra





27. ábra: A két felet csatlakoztató görbe képe a harmadik képsíkon



28. és 29. ábra: A két felet csatlakoztató görbe két egymásra merőleges egyenes

A kör mentén eltolt kör által alkotott felület és a tórusz összehasonlítása:

A felület kinézetét valamelyest megismerve, már szemlélet alapján is beláthatjuk, hogy az eddig tárgyalt felület sok mindenben eltér a tórusztól. A tórusz belsejében kialakuló kör alakú lyuk itt „szilvamag” formát vesz fel **(26. ábra)**. A másik különbség emellett, a felület két átellenes végén található bemélyedés. Ha a felület középpontján átmenő, a vezér- és pályagörbe síkjára is merőleges síkkal metsszük el a testet (szimmetriasík), láthatjuk, hogy az említett két helyen a felület egy-egy görbében érintkezik **(27. ábra)**.

Ez a fajta görbe menti érintkezés lehetővé teszi, hogy a felületet úgy döfjük egy egyenessel, hogy csak egy döféspont adódjon. Ez is egy különbséget jelent a tóruszhoz képest, hiszen a tórusznál csak a felületet érintő egyenes esetében adódik egy közös pont, a felületen áthatoló egyenesek esetében legalább két döféspont keletkezik.

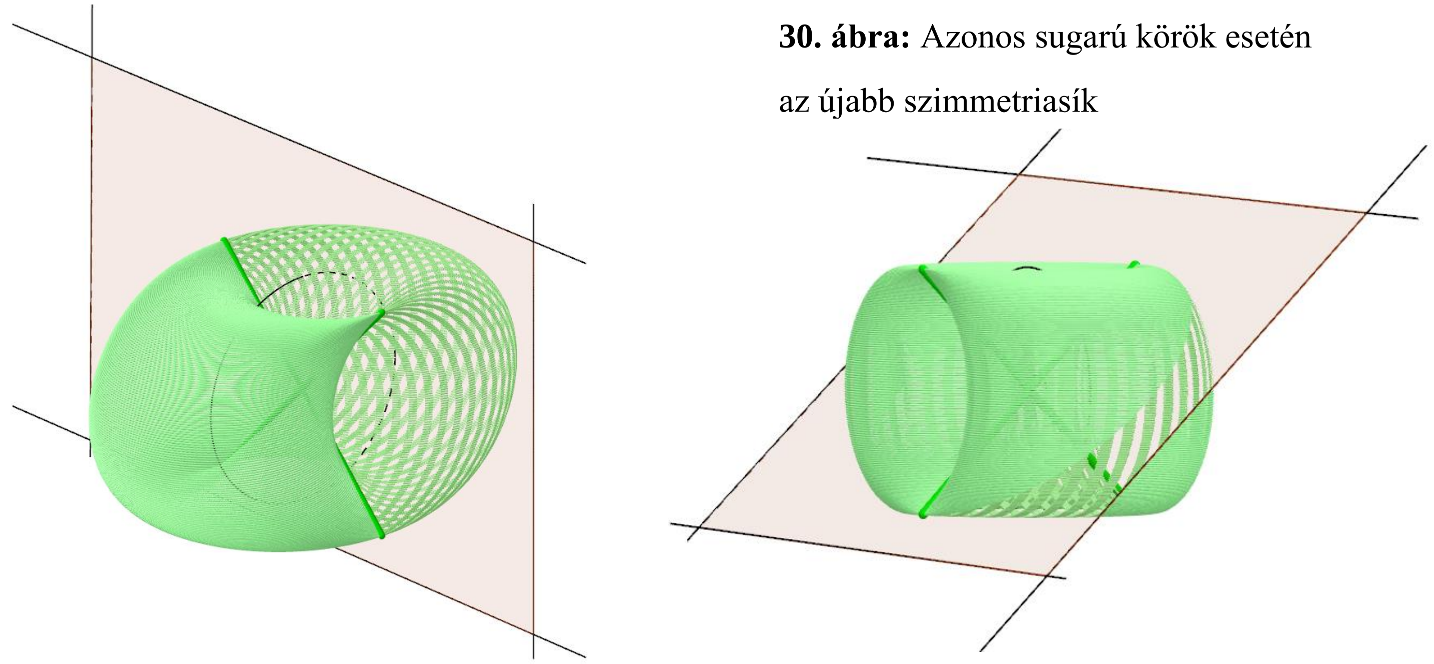
A kör mentén eltolt kör által alkotott felület alesetei

Azonos sugarú körök

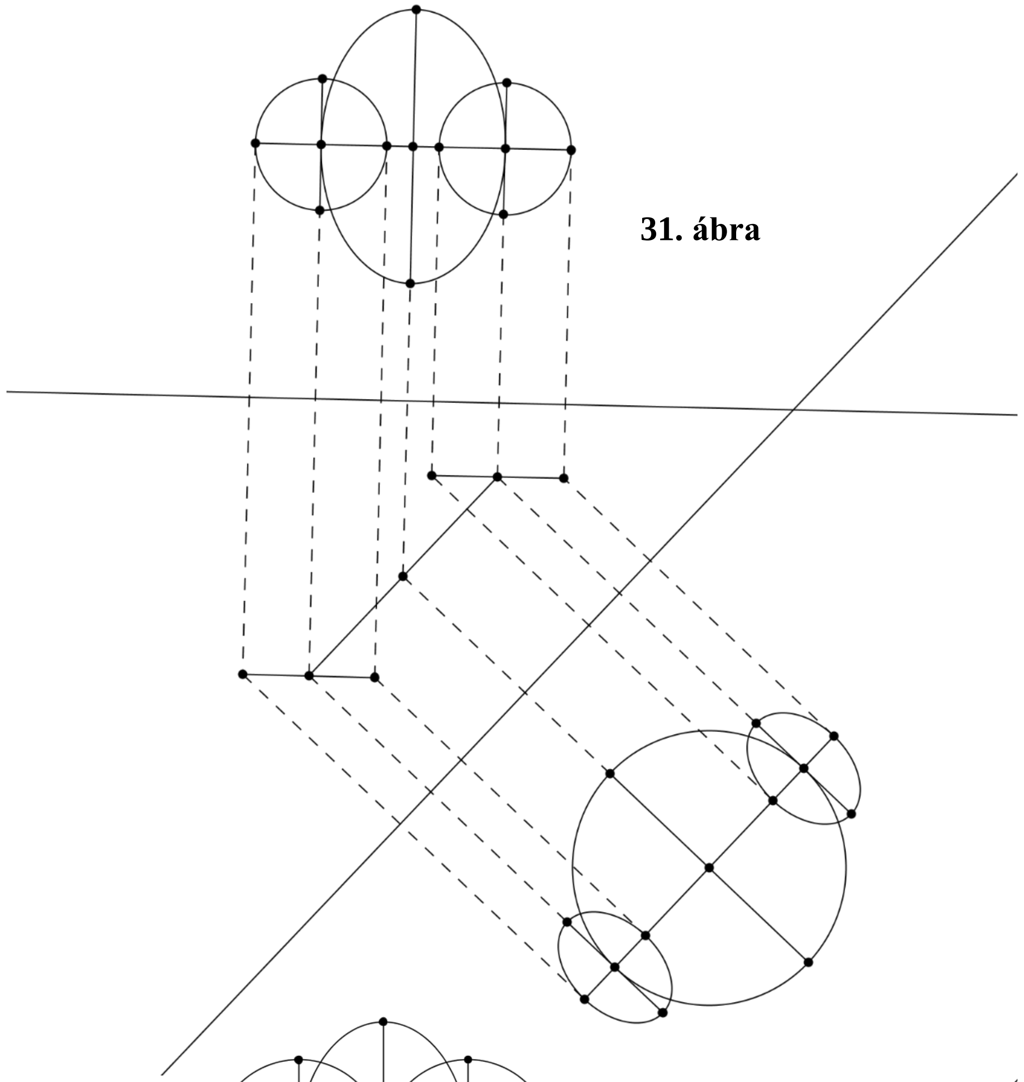
Ha a pályakör és a vezérkör sugara megegyezik, az előbb tárgyalt két görbe, amelyben a két felület fél csatlakozik, két egyenes lesz, melyek egymásra merőlegesek. **(28. és 29. ábra)**

Szemléletből is adódóan ezek az egyenesek egy-egy szimmetria síkot határoznak meg (oldalnézetben a felület négyzetnek látszik, a kapott két egyenes pedig egy-egy négyzetátló, melyek egy-egy élben látszódó szimmetriasíknak felelnek meg). **(30. ábra)**

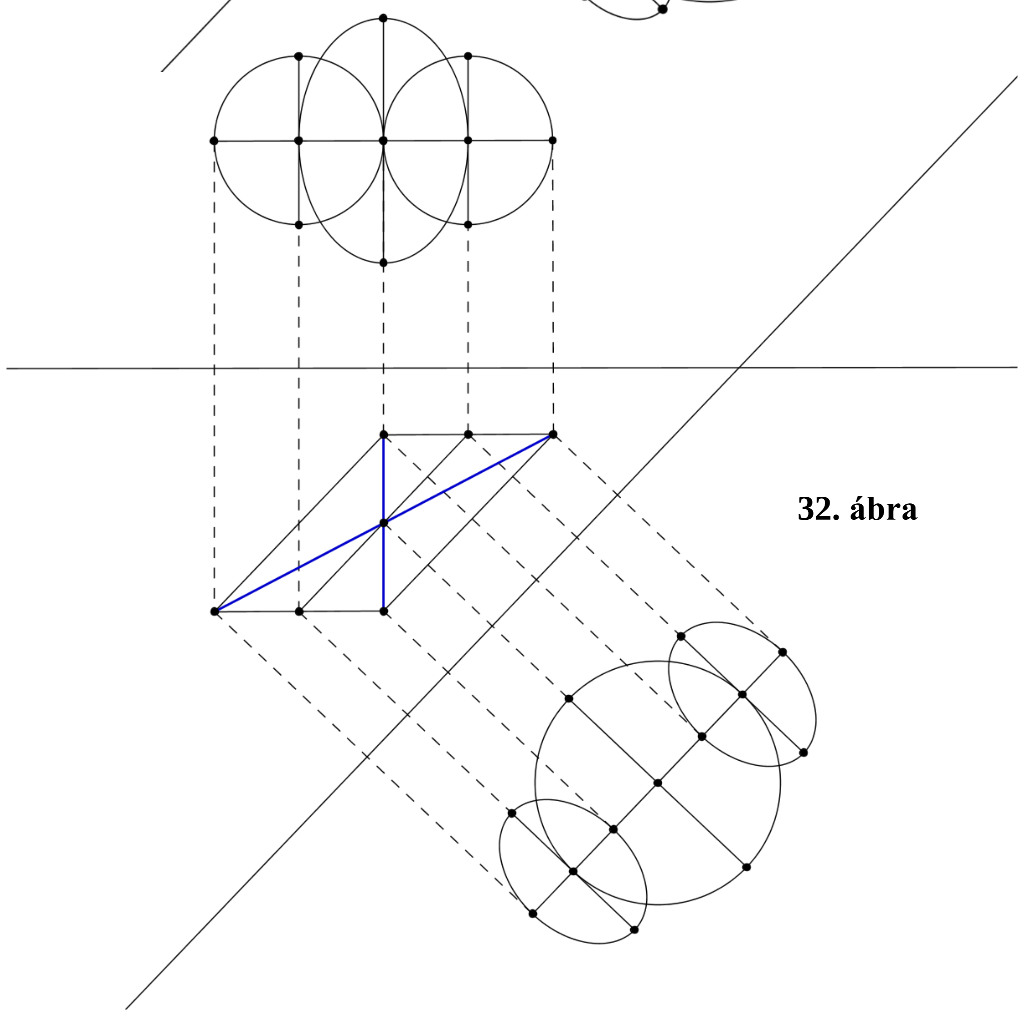
Az azonos sugarú köröknél az általános esetben keletkező „szilvamag” alakú lyuk bezárul, és két újabb bemélyedés marad a helyén a felület két átellenes oldalán.
(29. és 30. ábra)



30. ábra: Azonos sugarú körök esetén az újabb szimmetriasík



31. ábra



32. ábra

Egymásra nem merőleges síkú pálya-, és vezérkör

Az azonos sugarú körök esetében a felület újabb szimmetriasíkokat nyer, míg ha a két kör síkja nem merőleges egymásra, az eredeti három szimmetriasíkból kettő elveszik, így csupán egy szimmetriasíkkal rendelkezik a felület. Míg a merőleges síkok esetében a felület oldalnézete egy téglalap, addig ebben az esetben egy paralelogrammát kapunk (ezért veszik el a többi szimmetriasík, de a paralelogramma tulajdonságaiból következően a felület továbbra is középpontosan szimmetrikus lesz).

Fontos átgondolnunk, hogyan lehet ezzel a típussal bánni, hiszen nincs két olyan egymásra merőleges képsík, amelyekre levetítve a testet, mind a két kör körnek látszódik. Ekkor egy olyan helyzetbe tudunk transzformálni, ahol a képsík az egyik kör síkjával lesz párhuzamos. Ekkor a másikat ellipszisnek látjuk. Az ellipszis egyenessel való metszésére, illetve érintőjének szerkesztésére léteznek megoldások, így a felület ebben a formában is szerkeszthető lesz, leforgatások használatával.

Egy olyan módszert is alkalmazhatunk, ahol nem képsík párral, hanem képsík hármassal dolgozunk. Ha a felületet oldalról nézzük, majd felveszünk a vezérkör síkjával és a pályakör síkjával párhuzamosan egy-egy új képsíkot, egy olyan alternatívát kapunk, ahol a szerkesztéshez szükséges pontokat elmaradó rendezővel tudjuk átmérni. **(31. ábra)**

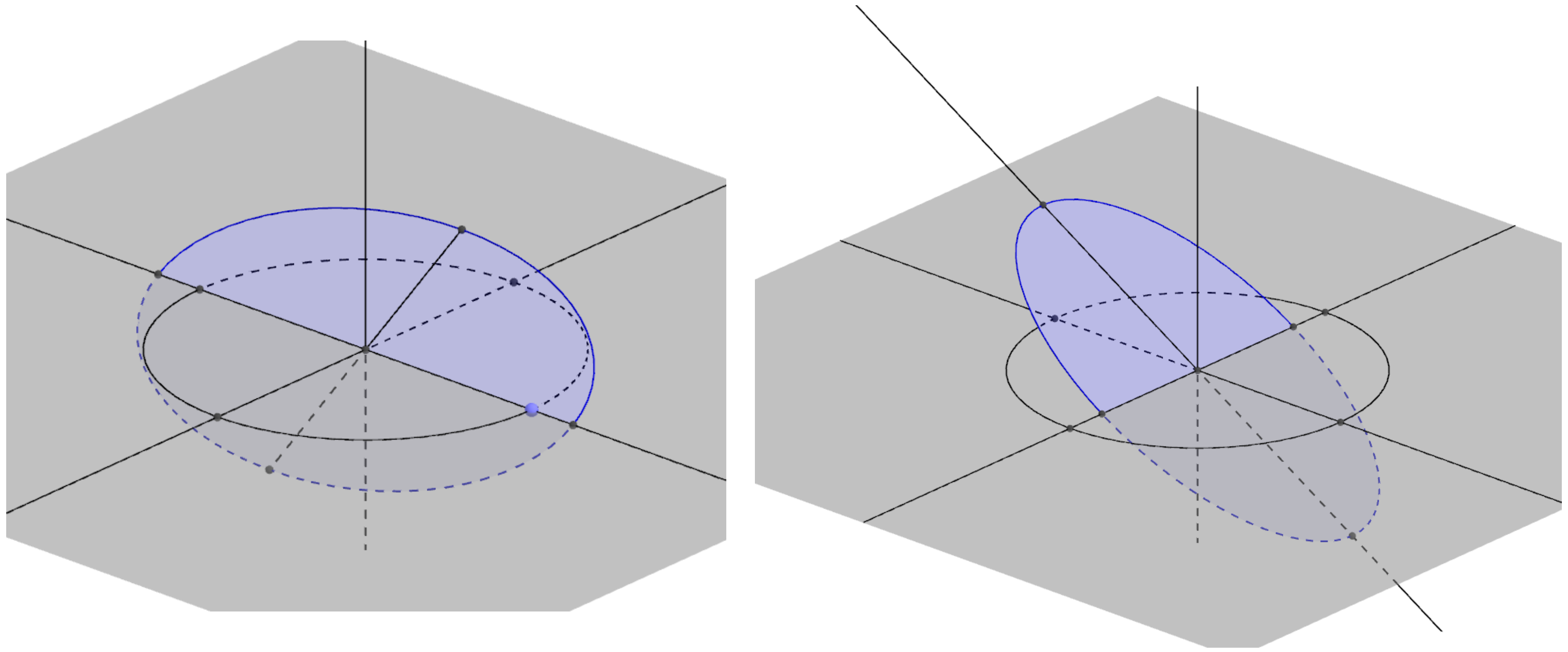
Ez az eljárás időigényesnek, és feleslegesnek tűnhet, hiszen az alapvető ábrázoló geometriai oktatásban többnyire leforgatásokkal próbálunk szerkeszteni, és az ellipsziseket kis- és nagytengelyükkel meghatározni, azonban az itt taglalt felületeknél az ellipszis csupán egy segédszerkesztés terméke, a végeredmény a legtöbb esetben negyedrendű görbe, vagy térgörbe, amelyek esetében nem hagyatkozhatunk speciális tengelyekre, pontjaikat pedig egyesével tudjuk szerkeszteni, így ez a módszer ebben a tekintetben praktikus.

Azonos sugarú, egymásra nem merőleges síkú pálya-, és vezérkörök

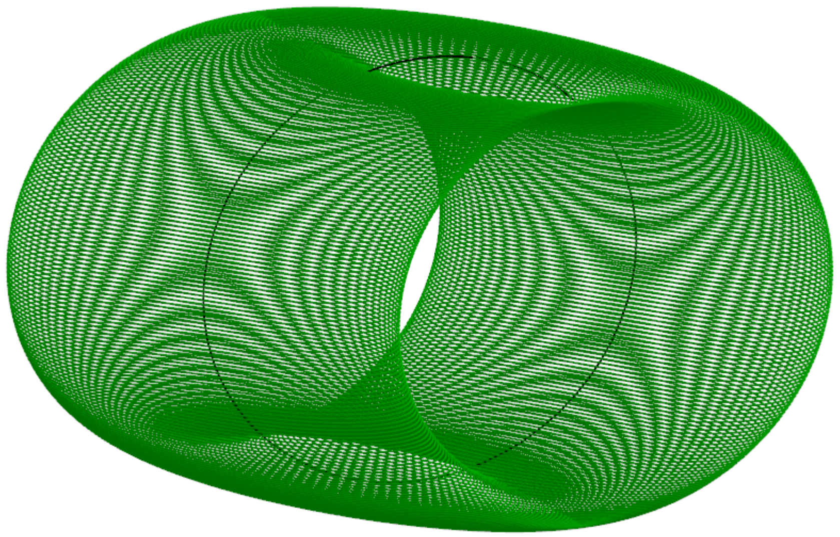
Érdemes megfigyelni, hogy ebben az esetben a fentebb tárgyalt két felületnek mely tulajdonságai öröklődnek, hiszen a két eredet-felület egyes tulajdonságai ellent mondanak egymásnak (például szimmetriasíkok számában).

Ennél a felületnél szintén nem alakul ki középen lyuk, és a két felület-fél itt is két egyenesben csatlakozik egymáshoz, amelyek merőlegesek egymásra (akárcsak az azonos sugarú körök esetében).

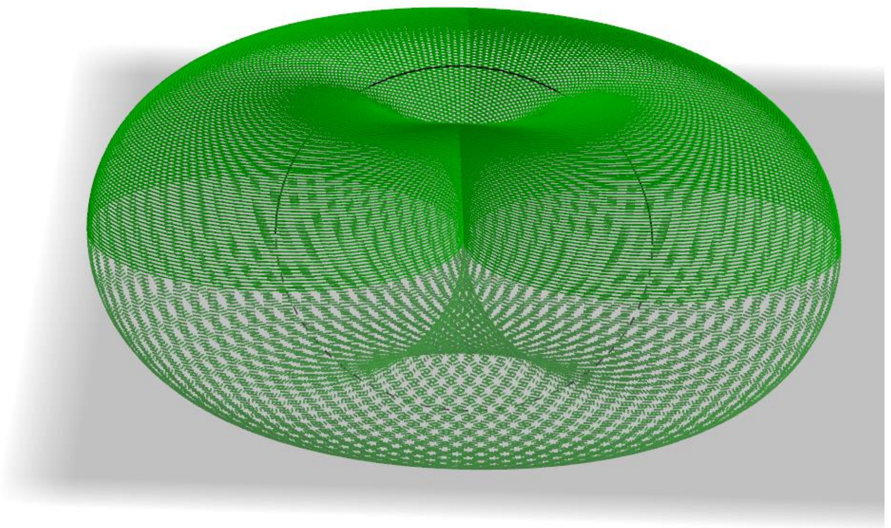
Oldalnézetben a felület rombusznak látszik, a csatlakozó-egyenesek pedig ennek az oldalnézeti rombusznak az átlói. Az erre illeszkedő, oldalról élben látszó síkok pedig szimmetriasíkjai a felületnek (síkidomok tekintetében a rombuszt nevezhetjük „átmenetnek” a paralelogramma és a négyzet között).
(32. ábra)



33. és 34. ábra: Az ellipszis síkja elforgatva az x és y tengelyek körül



35. ábra: A kör mentén eltolt, kisebb átmérőjű ellipszis



36. ábra: A kör mentén eltolt ellipszis, az adott átmérő végpontja a pályakör középpontjára esik.

További kúpszeletekből alkotott felületek

A továbbiakban a két kör által képezett transzlációs felület tulajdonságain keresztül próbálom megismerni, és ismertetni a többi felületet, szerkesztési eljárásaik során felhasználva a kör mentén eltolt körnél alkalmazottakat. Nem részletezem az összes kombinációt, csupán kiemelek néhány látványosabbat, és néhány szerkesztésen keresztül szemléltetve a két kör transzlációjából származó felülettel való kapcsolatukat.

Kör mentén eltolt ellipszis

Akárcsak a kör mentén eltolt kör esetében, itt is a lehetséges alapesetek vizsgálatával kezdem. Az alesetek képzésének módja itt is hasonló.

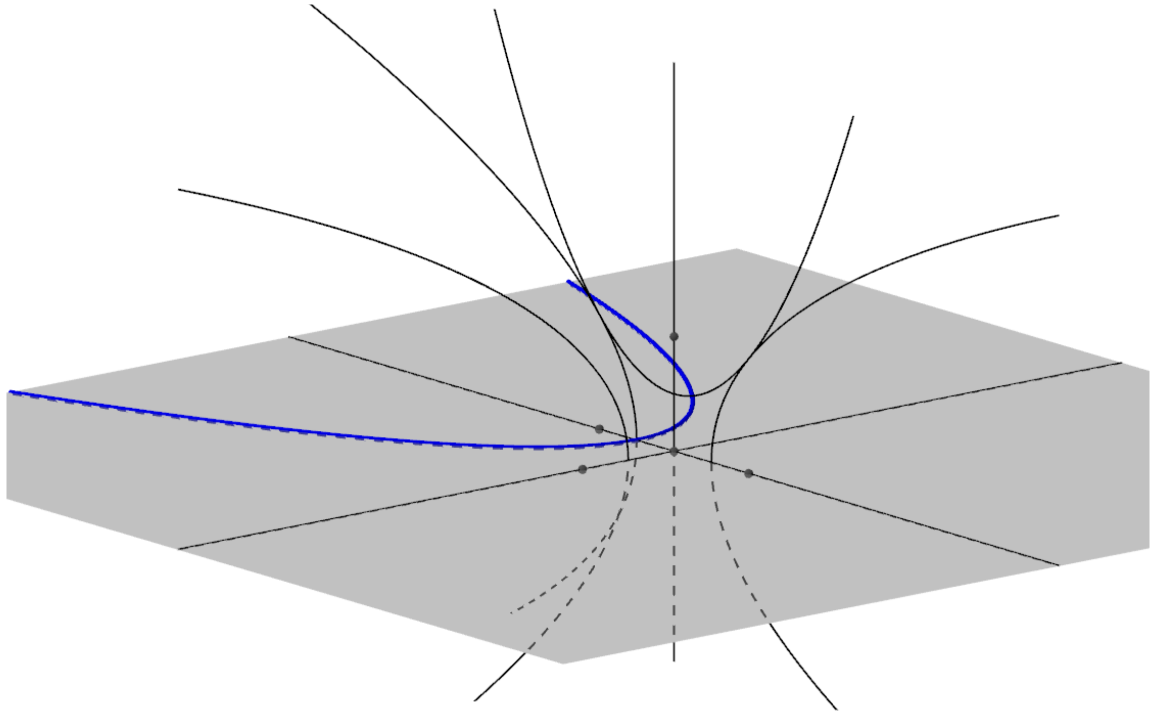
Ha a kör és az ellipszis síkját egymáshoz képest elforgatom (a kör síkja az xy sík, a forgatás során az ellipszis síkját forgatom a tengelyek körül), itt eltérést fog eredményezni az y és az x tengely menti elforgatás. Ennek oka, hogy az ellipszisnek a körrel ellentétben csak két szimmetriatengelye van. A z tengely menti forgatásnál azonban a kör szimmetriatulajdonságai érvényesülnek, így ez nem okoz változást. **(33. és 34. ábra)**

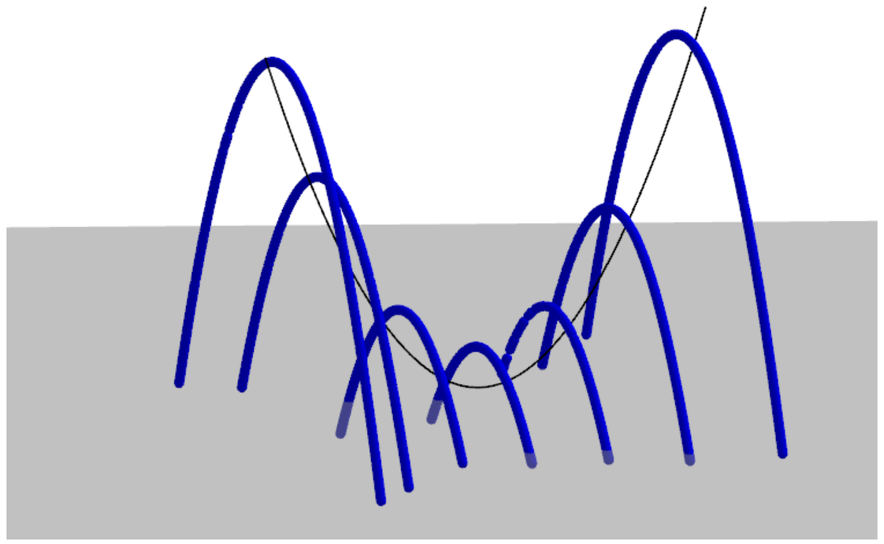
Az ellipszis és a kör méretének változtatásával két esetet különböztethetünk meg, mindkét esetben a kör síkja vízszintes, és az ellipszis kiinduló helyzete egy olyan függőleges sík, amely tartalmazza a kör tengelyét (természetesen az eltolt ellipszisek síkja már nem fogja tartalmazni). Az ellipszist felvesszük úgy, hogy a középpontja a körre illeszkedjen, és a két görbe síkjának metszésvonala által meghatározott ellipszis-átmérőt vizsgáljuk. A két eset a következőképp adódik:

a) ha a vizsgált átmérő kisebb a kör sugaránál, akkor egy általános esetet kapunk **(35. ábra)**
b) ha az átmérő egyenlő a kör sugarával, akkor az általános esetben keletkező lyuk bezárul (ez az azonos sugarú körök eltolásához hasonló eset). **(36. ábra)**

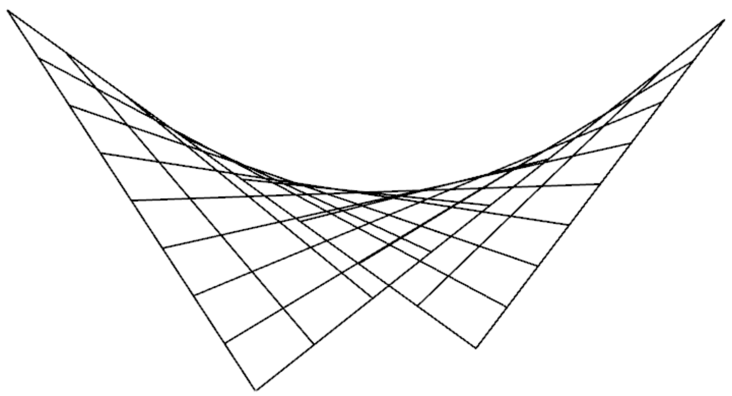
Amennyiben az átmérőt tovább növelem, akárcsak a két körös verziónál, a felület két másik helyen nyílik meg.

37. ábra: A kékkel kiemelt parabola mentén eltolva az összes további parabola más jellegű felületet eredményez.





38. ábra: A nyeregfelület transzlációs felületként



39. ábra: A nyeregfelület torzfelületként

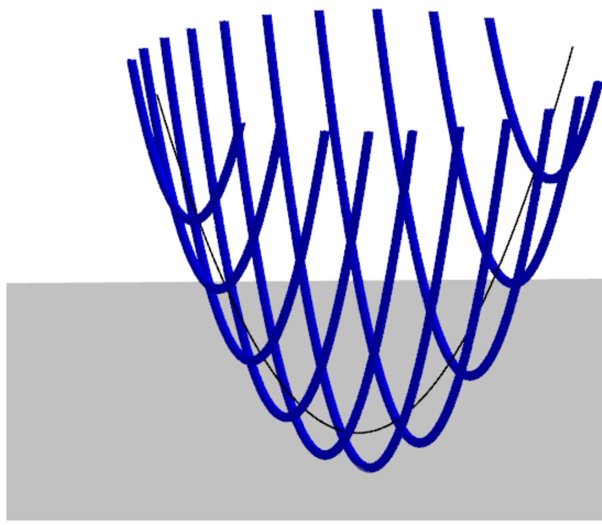
Parabola mentén eltolt parabola

A kör mentén eltolt kört használtam az általánosságban is alkalmazható szerkesztések levezetéséhez, a kör mentén eltolt ellipszist és a parabola mentén eltolt parabolát pedig az alesetek megfigyelése miatt emelem ki. A szokásos méretváltoztatáson kívül a két görbe síkja által bezárt szög adhatja ki az eltérő formációkat. A két görbe síkja által bezárt szög változtatásával ebben az esetben mindhárom tengely körül forgatva más és más eseteket kapunk. Ebből következtethetünk arra, hogy minél kevesebb szimmetriatengelye van az eltolásban részt vevő két görbének, annál többféle felület alkotható belőlük egymás mentén eltolva. **(37. ábra)**

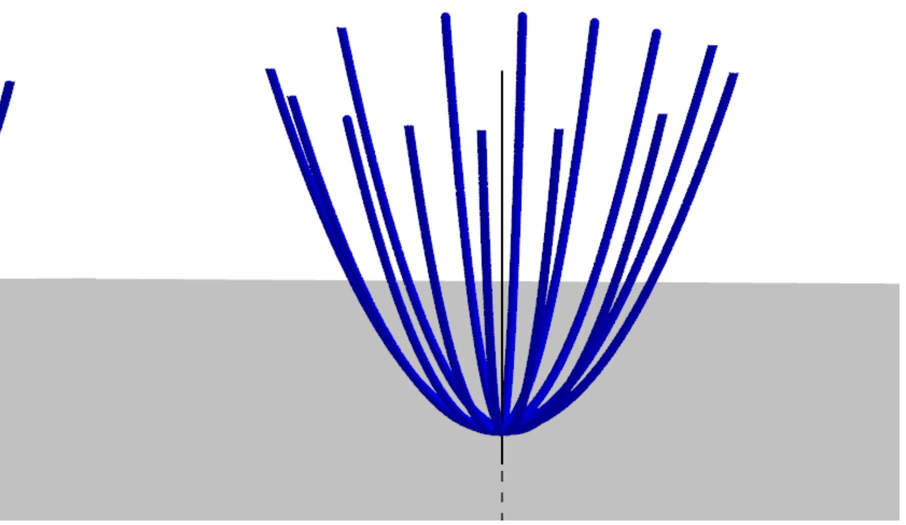
A két parabolát felhasználó transzlációnál, ha a pályagörbét az xy síkban lévő, y tengelyre szimmetrikus parabolának, míg a vezérgörbét az yz síkban lévő, szintén y tengelyű parabolának tekintjük, akkor két teljesen eltérő esetet kapunk attól függően, hogy a két parabola egymáshoz képest fordított állású, vagy azonos állású. Azonos állásnál elliptikus paraboloidot, ellentétes állásnál pedig leírható hiperbolikus paraboloidot (nyeregfelület) kapunk. A kiindulásban szereplő vezérgörbék két tengely körüli forgatás segítségével is fedésbe hozhatók.

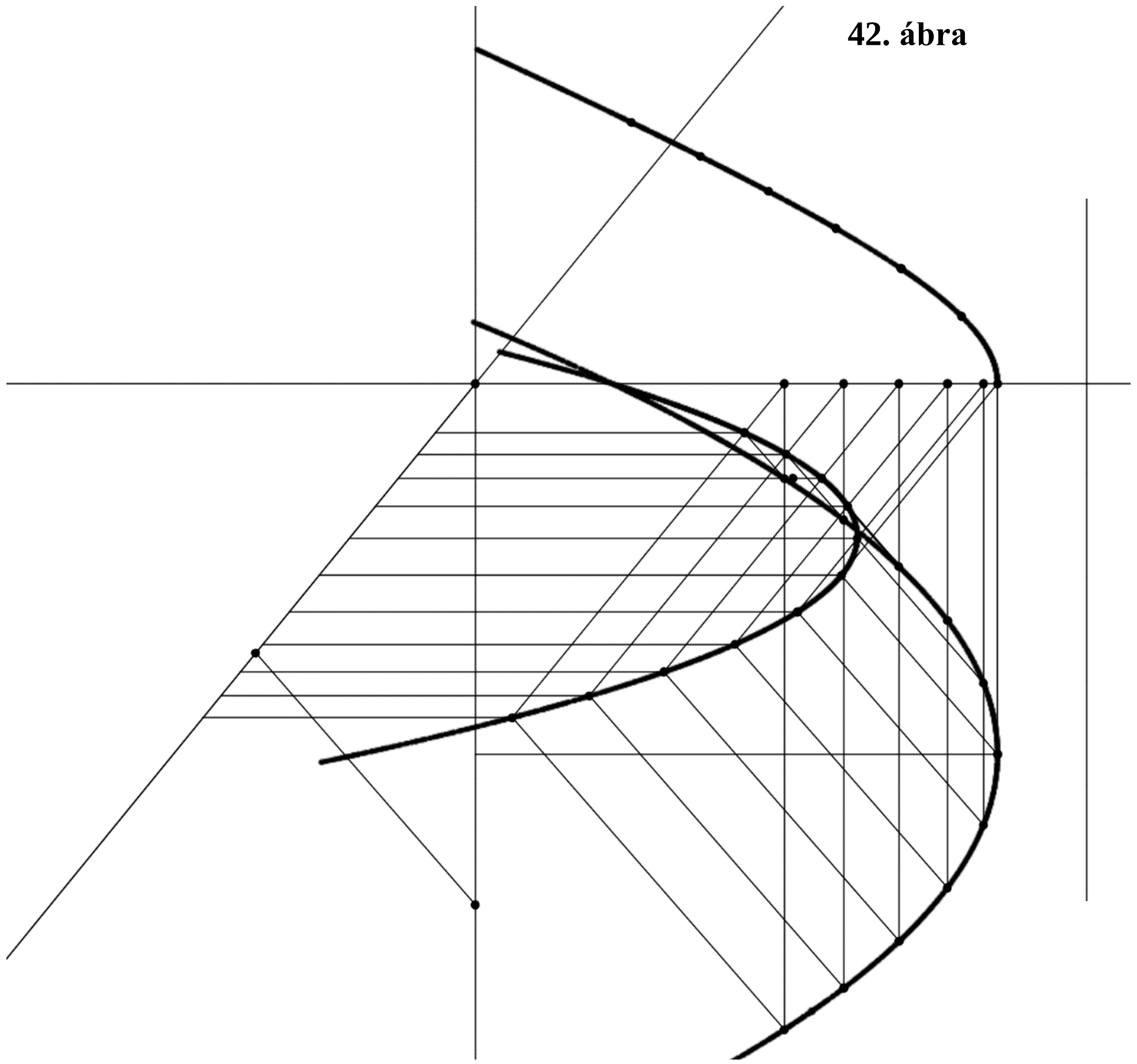
Ez a két felület más szemlélettel is leírható (a hiperbolikus paraboloid torzfelületként **(38. és 39. ábra)**, míg az elliptikus paraboloid forgásfelületként írható le **(40. és 41. ábra)**), és ez által már megközelítésből is szerkeszthetők.

40. ábra: Az elliptikus hiperboloid transzlációs felületként



41. ábra: Az elliptikus hiperboloid forgásfelületként





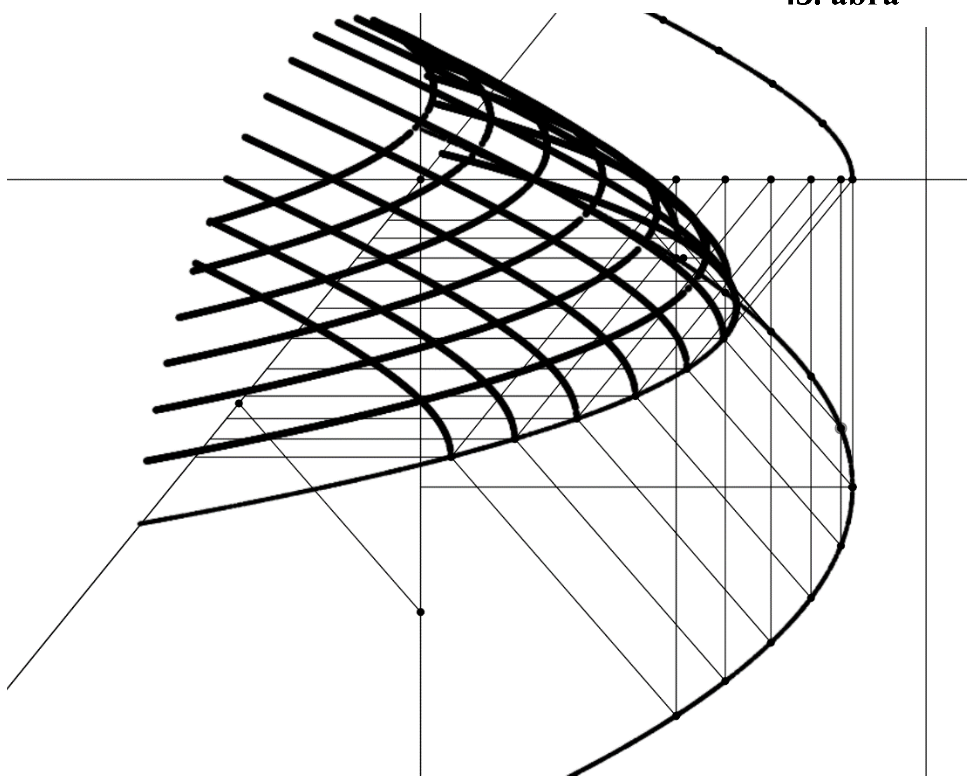
42. ábra

Gyakorlati alkalmazások

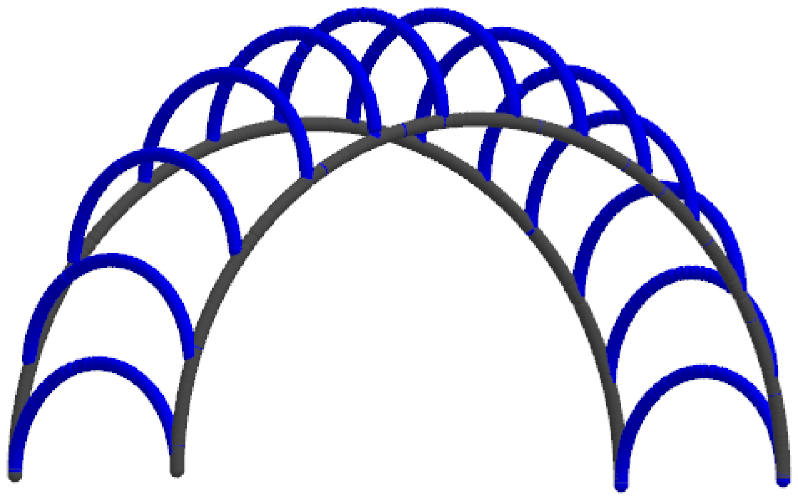
A kúpszeletek transzlációjából származtatott felületeket felhasználhatjuk például térlefedő formaként. Az egyik leglátványosabb ilyen felület talán a parabola mentén eltolt hiperbola transzlációs felülete. A bevezetésben említett szalagháló szerkezet felépítésére is hasonlít.

Első lépésben frontális axonometriában leforgatás segítségével megszerkesztettem a parabola és a hiperbola képét **(42. ábra),** majd a második lépésben párhuzamos eltolással kialakítottam a felület hálóját. **(43. ábra)**

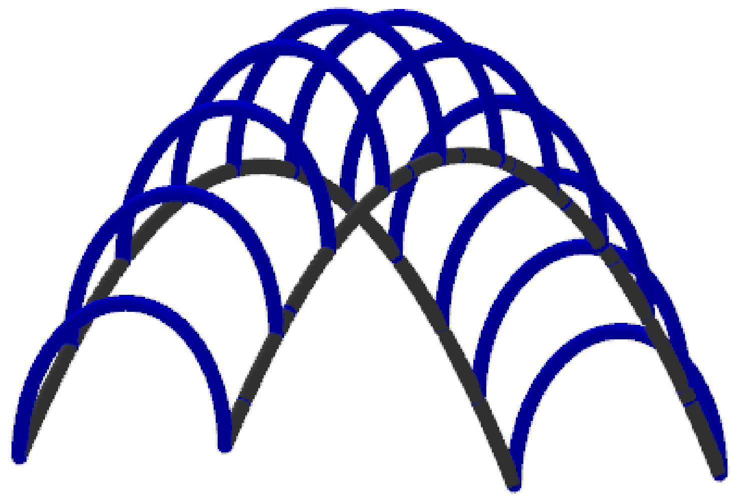
Egy másik gyakorlati alkalmazás a Petrich-féle ábrázoló geometriai tankönyvben is említett boltívek. Ezeknél a kúpszeleteknek csak a felét használja fel a transzláció (félkör, félellipszis). Szemléltetésképp elkészítettem a félkör mentén eltolt félellipszis által **(44. ábra),** és a parabola mentén eltolt félkör által létrejövő boltíveket **(45. ábra)**.



43. ábra



44. ábra



45. ábra

Összefoglalás

Dolgozatomban a két kör transzlációjából származó felületekből (azon belül is a legegyszerűbb esetből) indultam ki, elvégeztem rajtuk az ábrázoló geometriai tanulmányaim során megismert alapszerkesztéseket, melyek ahhoz szükségesek, hogy az adott felületet jellemezni tudjuk. A kontúr-, és árnyékhatár görbék kiszerkesztése pedig a felületek szemléletes ábrázolását teszi lehetővé.

Ezután megvizsgáltam néhány összetettebb felületet is hasonló előállítási módszerrel. Mivel a kör mentén eltolt kör által alkotott felületen a transzlációból származó tulajdonságai segítségével végeztem el a szerkesztéseket, az eljárások általánosíthatók a többi kúpszeletből képezett hasonló felületekre. A kúpszeleteken túl az összes transzlációval létrehozható felület szerkesztései elvégezhetők az itt tárgyalt lépésekkel. Természetesen léteznek egyszerűbb, vagy más jellegű szerkesztések, melyek az adott felület speciális jellegéből adódhatnak (például a két ellentétes állású parabolából származtatott felület, más néven a nyeregfelület, mely egyenes vonalú torzfelületként is értelmezhető, és ezt a tulajdonságát kihasználva az egyenes alkotói segítségével hajthatunk végre szerkesztéseket).

A transzlációs felületek témája azonban további elemzések alá vethető: megfigyelhetünk például olyan eseteket is, mikor a pályagörbén úgy toljuk el a vezérgörbét, hogy a vezérgörbe síkja a pályagörbe adott pontjában a pontbeli érintő egyenesre merőleges legyen. Ez a számítógépes programok körében söprés néven ismert funkció, amely ugyanúgy egy gyakran használt eszköz.

Irodalomjegyzék

[1]: A definíció Szakál Zoltán PhD értekezéséből származik

[2]: A szalagháló definíciója, illetve a szalaghálóhoz kapcsolódó képek Fekete Zoltán disszertációjából származnak

[3]: A definíció Dr. Petrich Géza Ábrázoló Geometria tankönyvéből származik

Az ábrákat a Geogebra nevű dinamikus szerkesztőprogrammal készítettem