

# Rideg hajlított rudak fragmentációja – avagy hány darabra törik a spagetti?

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

TDK konferencia 2015

Szerző: Horváth Marcell Gergely

Konzulens: Dr. Sipos András Árpád



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

## Tartalomjegyzék

Absztrakt .....	- 3 -
Bevezetés.....	- 4 -
Kísérletek .....	- 6 -
Első sorozat.....	- 7 -
Második sorozat.....	- 8 -
Harmadik sorozat.....	- 9 -
Negyedik sorozat .....	- 10 -
Laborkísérletek.....	- 11 -
Diszkrét valószínűségi modell .....	- 13 -
A kísérleti és numerikus eredmények összevetése.....	- 19 -
Első sorozat.....	- 21 -
Második sorozat.....	- 22 -
Harmadik sorozat.....	- 23 -
Negyedik sorozat .....	- 24 -
A görbületnövekedés hatása az értékekre .....	- 25 -
Összefoglalás.....	- 28 -
Köszönetnyilvánítás .....	- 29 -
Hivatkozások.....	- 30 -
Függelék .....	- 31 -
Programkód: .....	- 31 -

## Absztrakt

Érdekes tapasztalat, hogy az ívesen meghajlított spagetti a várakozással ellentétben nem kettő, hanem több darabra törik. A jelenségre Richard Feynman, a kiemelkedő fizikus hívta fel a figyelmet komoly fejtörést okozva az ezzel a látszólag „komolytalan” témával foglalkozó kutatóknak.

Később B. Audoly és S. Neukirch [1] végükön koncentrált nyomatékkel terhelt, befogott konzolokon vizsgálták a jelenséget. Megállapították, hogy a többszörös fragmentáció az első törésponttól kiinduló rugalmas hullámmal magyarázható, melynek hatására a fragmentált darabok görbülete a törést megelőző görbület közel másfélszeresére is növekedhet, ami tipikusan újabb töréseket eredményez. A modell nyomán meglehetősen sok törés bekövetkezésére számítottunk. Ezzel szemben egyszerű kézi kísérletekben kevés, jellemzőn 1-3 darab törést tapasztaltunk. Dolgozatomban ezen látszólagos ellentmondás okát keresem.

A jelenséget statisztikai eszközökkel vizsgáltam: ehhez számos törési kísérletet végeztem. A mintegy 26 cm hosszú spagettiket a két végükön befogva körívesre hajlítottam, a törés után meghatároztam az eltört darabok számát és hosszát. A mért értékekből az irodalomban használatos (pl: [2]) gyakorisági diagramokat állítottam elő. A törések számának és a fragmensek hosszának vizsgálatához diszkrét valószínűségi modellt készítettünk, amely figyelembe veszi a rúdvégek nem tökéletes befogását. A modellben szereplő anyagi paramétereket laborkísérletekkel támasztottuk alá.

Az új modell jó egyezést ad a kísérleti eredményekkel, továbbá alátámasztja az [1] alapján várt görbületnövekedés nagyságát is. A modell segítségével kimutattam, hogy a fragmensek alacsony száma a befogás tökéletlensége miatt a rúd hossza mentén fellépő nem állandó görbület következménye. A dolgozatban felvetett kérdés megválaszolásán túl munkám felhívja a figyelmet arra, hogy a tartószerkezetek rideg törése nyomán kialakuló dinamikus hatás további károk okozója lehet.

## Bevezetés

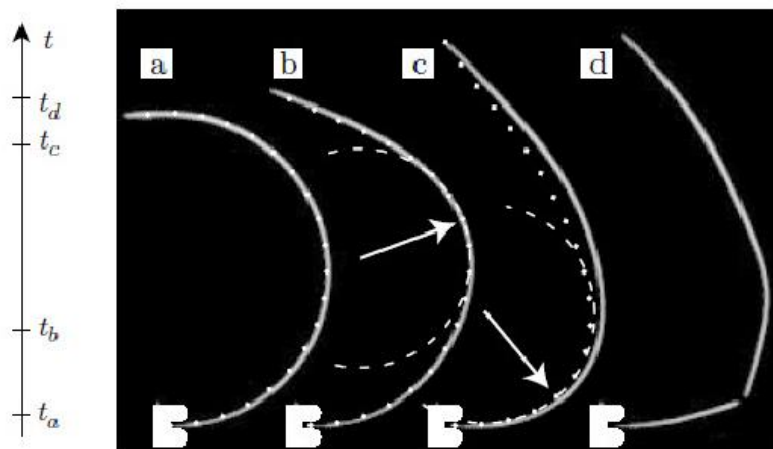
Érdekes tapasztalat, hogy ha meghajlítunk egy spagettit, az általában nem kettő, hanem leginkább három, néha több darabra törik. A jelenségre Richard Feynman amerikai Nobel-díjas fizikus hívta fel a figyelmet, azonban ő még nem talált kielégítő magyarázatot a jelenségre. Daniel W. Hillis a *No Ordinary Genius* című könyvben [3] így emlékszik vissza Feynman-nal közös kísérleteikre:

*„Egyszer, közös kedvenc ételünket: spagettit készítettünk. [...] Feltűnt számunkra, hogyha eltörsz egy darab spagettit, akkor az majdnem mindig három darabra törik. Miért igaz ez – miért törik három darabra? Az elkövetkező két órát örült elméletek gyártásával töltöttük. Különböző kísérleteket találtunk ki, mint például a víz alatti törés, mert azt gondoltuk, hogy így csillapíthatjuk a vibrációt. Nos, néhány óra után lett egy halom összetört spagettink a konyhában, még sem sikerült előállni egy jó elmélettel arra, hogy miért is törik a spagetti három darabra.”*

Ez a látszólag „komolytalan” probléma később több kutató figyelmét felkeltette. Köztük volt B. Audoly és S. Neukirch is [1], akik meg is oldották a rejtélyt. Ők a fragmentációt egymást után lejátszódó törések sorozataként modellezték. Nem foglalkoztak az első törés részletes leírásával, csak az első törés hatására lejátszódó eseményekre koncentráltak. Elméletük szerint az állandó görbületű rúd törése révén egy olyan konzol keletkezik, amelynek végén a törés pillanatában nem nulla a görbület, azonban konzolként az egyensúly csak zéró nyomaték (azaz nulla görbület) esetén teljesülhet. Elméletük szerint a zavart peremfeltétel miatt rugalmas lökéshullám indul el a töréspontból. A lökéshullámról a klasszikus Kirchhoff egyenletek ún. önhasonló megoldásainak előállításával megmutatták, hogy a hullám hatására a rúd görbülete akár 1,428-szorosára is növekedhet. A modell szerint a további fragmentáció ezen görbületnövekedés miatt következik be.

Audoly és Neukirch az említett zavart peremfeltétel vizsgálatához végükön koncentrált nyomatékkal terhelt konzolokon végeztek kísérleteket. A koncentrált nyomatékkal a konzol (egyenletes) görbületét valamivel a határgörbület alatt vették fel. Hirtelen megszüntették a rúd végén a nyomatékot, és nagysebességű kamerával készült képeken igazolták, hogy a rúdvégből induló rugalmas hullám a rúdon helyi görbületnövekedést okoz, amely gyakran töréshez vezet (*1. ábra*). Elméletük nyomán arra számíthatnánk, hogy a leírt folyamat ismétli önmagát (például

az első törés mindkét oldalán újabb töréseket idéz elő) így „láncreakció” szerűen akár sok törés is bekövetkezhet.



1. ábra: [1] 3. ábrája: közel határgörbületig hajlított konzol kiegyenesedése folyamán a görbület lokális növekedése miatt törést szenved. A nagysebességű kamerával készült felvételek jó egyezést mutatnak a Kirchhoff egyenlet önhasonló megoldásával (szaggatott vonal)

A modell alapján tehát több törésre számíthatunk, míg a kézi kísérletek esetében a R. Feynmann által is megfigyelt 1-3 darab törés volt a jellemző, és az irodalomban felelhető kísérletekben sem jellemző a sokszoros fragmentáció (2. ábra). Dolgozatomban ezen ellentmondás okát statisztikai eszközökkel szeretném vizsgálni. Ehhez törési kísérleteket végeztem, a kísérletből nyert statisztikákat pedig egy általunk kifejlesztett diszkrét valószínűségi modell eredményeivel vettem össze. A modell segítségével kimutatható, hogy a viszonylag kevés fragmens a befogás tökéletlenségéből adódó, a rúd hossza mentén változó görbület következménye. A modell jó egyezést mutat a rugalmas hullám következtében kialakuló görbületnövekedés Audoly és Neukirch modelljében megjósolt [1] számszerű értékével is.



2. ábra: Ívesre hajlított spagetti négy töréses fragmentációja nagysebességű kamerával [4]

## **Kísérletek**

A jelenség megértése céljából több törési sorozatot végeztem. Minden sorozat alatt 50 darab spagettit törtem el. A Gyermelyi márkájú spagettik átlagos hossza 25,6 cm, átmérőjük elhanyagolható szórás mellett 1,6 mm volt. Minden egyes törés után meghatároztam a keletkezett fragmensek darabszámát és megmértem a hosszúságukat. Ezen felül (filctollal megjelöltem a közepét, így meg tudtam mérni) megnéztem, hogy történt-e a spagetti közepénél (a közepétől +/-20mm távolságban) törés. A mért értékekből gyakorisági diagramokat állítottam elő. A diagram elkészítéséhez a fragmentált darabok hosszát normáltam az eredeti hosszal. A 0-1-ig terjedő normált hossztartományt 20 egyenlő intervallumra osztottam és meghatároztam, hogy hány darab fragmentum esik az egyes intervallumokba az 50-es mintára összesítve. Ezeket a gyakoriságokat oszlopdiagramokon ábrázoltam. A kísérletek négy csoportba sorolhatóak, a törések megvalósításának módja szerint.

## Első sorozat

Az első csoportnál csak egyszerűen eltörtem a spagettiket, itt még nem koncentrálna az egyenletes görbület létrehozására. A kísérletben legtöbbször három darabra tört a spagetti. Számszerűen:

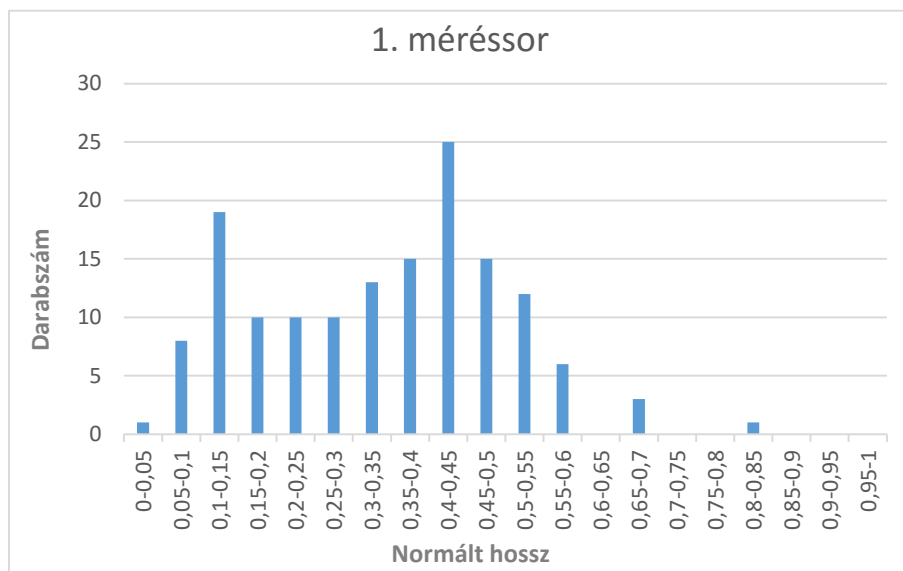
2 darabra 14-szer tört (28%)

3 darabra 24-szer tört (48%)

4 darabra 11-szer tört (22%)

5 darabra 1-szer tört (2%)

A 3. ábra a normált hossz szerinti gyakoriságot mutatja be oszlopdiaqramon. Az ábrán jól látszik, hogy az eloszlásnak két maximuma van.



3. ábra: az első mérési sorozat fragmenseinek normált hossz szerinti gyakoriság eloszlása

## Második sorozat

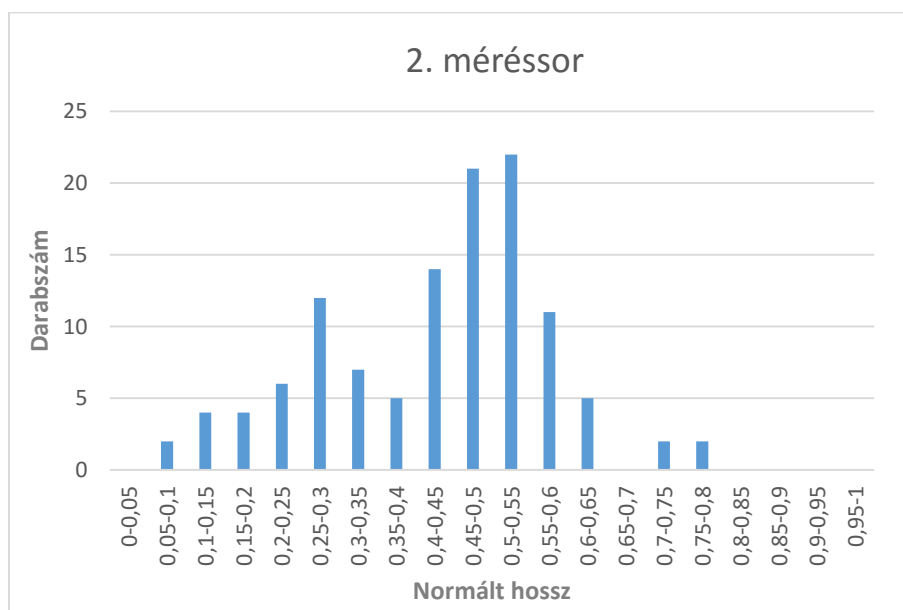
A második csoportnál igyekeztem a spagettiket körív alakúra hajlítani, ugyanis egyenletes görbülettel érhetjük el, hogy a spagetti hossza mentén állandó nyomtér alakuljon ki. Várakozásom szerint az első törés azonos valószínűséggel következhet be bárhol a spagetti mentén, és az utána kialakuló rugalmas hullám is több további törést fog eredményezni. A mérési eredmények azonban ellentmondanak a várakozásnak. A várakozással ellentétes eredmények oka vélhetően a befogás (kezem) tökéletlensége. A törések száma az alábbiak szerint alakult:

2 darabra 34-szer tört (68%)

3 darabra 15-ször tört (30%)

4 darabra 1-szer tört (2%)

A hozzá tartozó gyakoriság-diagram a 4. ábrán látható. E szerint meglehetősen sok, körülbelül fél spagetti hosszúságú fragmens keletkezett, amely a sok kettő darabra és majdnem félbe törő spagettivel magyarázható. Ezenkívül megfigyelhető egy alacsonyabb második csúcs a kisebb normált hosszúságú (0,25-0,30) tartományoknál:



4. ábra: a második mérési sorozat fragmenseinek normált hossz szerinti gyakoriság eloszlása



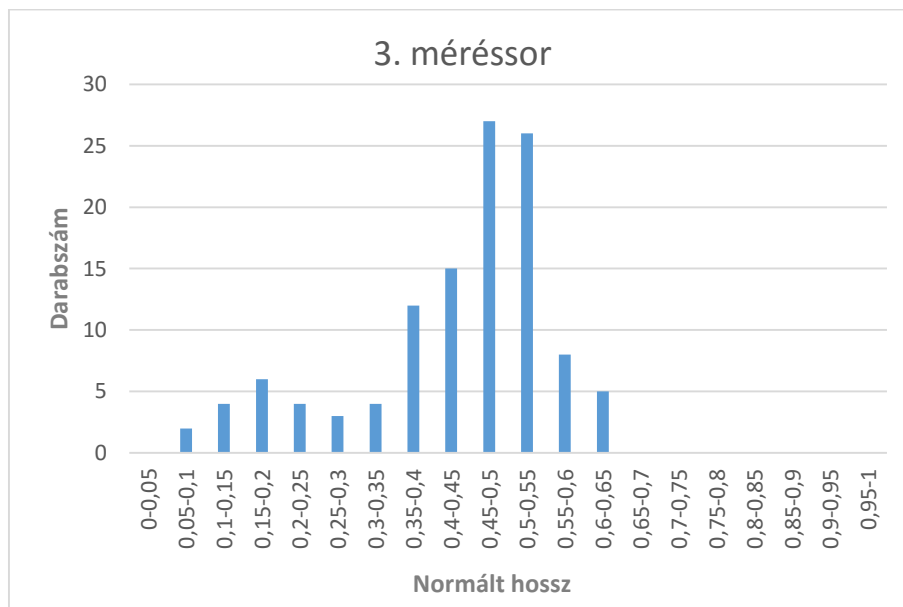
## Harmadik sorozat

A harmadik csoport nagyon hasonlít a második csoportra, azzal a különbséggel, hogy itt pontosabban jártam el, kinyomtatott körívek (lásd később, a 10. ábrán) mentén végeztem a törést. A törések száma szerinti eredmények szinte azonosak a második csoporttal:

2 darabra 34-szer tört (68%)

3 darabra 16-szor tört (32%)

A gyakorisági diagramon (5. ábra) megfigyelhető, hogy a kisebb hosszaknál az előző esetekben megfigyelt csúcs szinte teljesen eltűnik, és valamivel több, közel fél spagetti hosszúságú fragmens keletkezett:



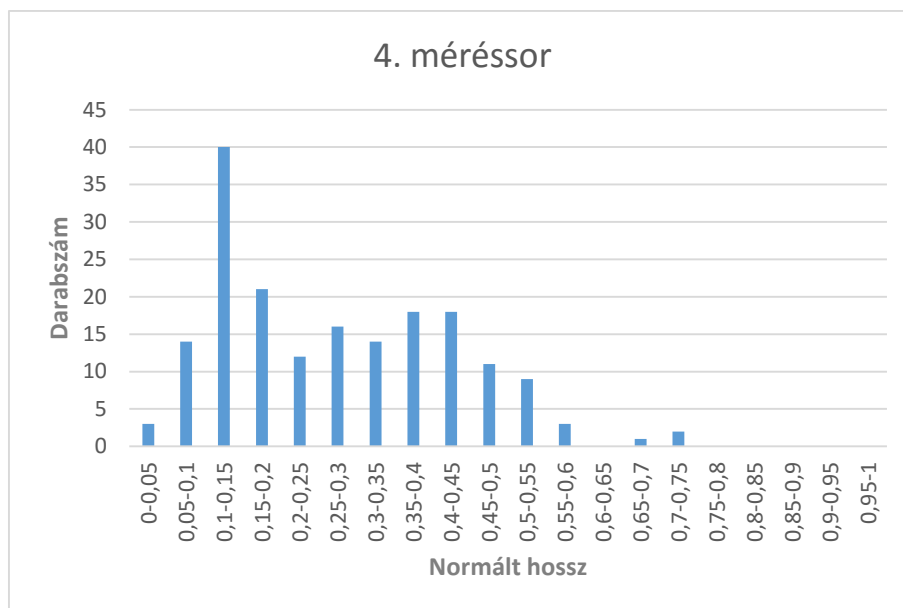
5. ábra: a harmadik mérési sorozat fragmenseinek normált hossz szerinti gyakoriság eloszlása

## Negyedik sorozat

A negyedik mérésort már a valószínűségi modell felállítása után végeztem, ez az úgynevezett „gyors törés” volt. Ez annak az igazolására történt, hogy ha gyorsan rántok egyet a spagettin, akkor kevésbé alkalmazok nyomóerőt a spagettik végein, így a görbületeszlás a rúd hossza mentén várhatóan egyenletesebb:

- 2 darabra 3-szor tört (6%)
- 3 darabra 21-szer tört (42%)
- 4 darabra 19-szer tört (38%)
- 5 darabra 5-ször tört (10%)
- 6 darabra 2-szer tört (4%)

A 6. ábrán látható oszlopdiagram itt is két csúccsal rendelkezik, azonban itt a nagyobb maximum a kisebb normált hosszúságoknál (0,10-0,15) jelenik meg:



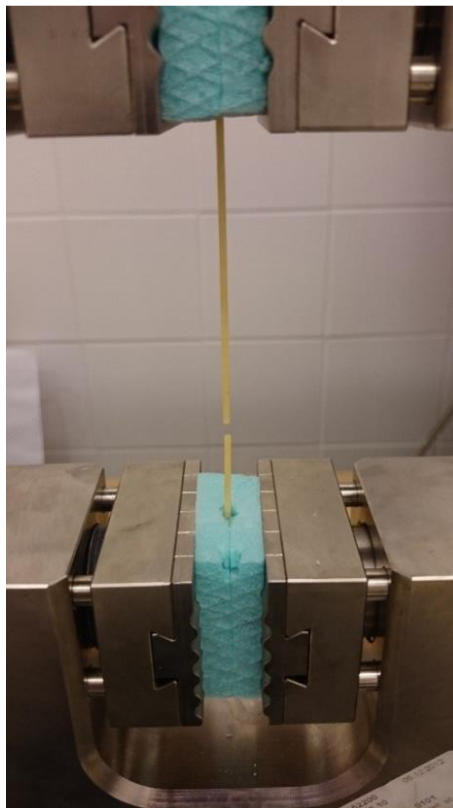
6. ábra: a negyedik mérési sorozat fragmenseinek normált hossz szerinti gyakoriság eloszlása

A fragmentáció statisztikai elemzésének széles irodalman van (például [5-7]), ezekben nem találtunk alkalmas modellt a diagramok magyarázatára. Ugyan a [2] szereplő modell közeli jelenséget vizsgál, de feltételezi, hogy a fragmentálódás egy időpontban játszódik le, így kizárja, hogy a későbbi fragemntáció egy korábban létrejött törés következménye legyen.

Célunk egy olyan sztochasztikus modell létrehozása, mely feltételezi, hogy a fragmentáció folyamata nem egy időpillanatra koncentrálódik, hanem láncreakció-szerűen halad végig a rúdon. Mielőtt rátérnék a diszkrét valószínűségi modell ismertetésére, a számításokhoz szükséges anyagi paraméterek laboratóriumi meghatározásáról számolok be.

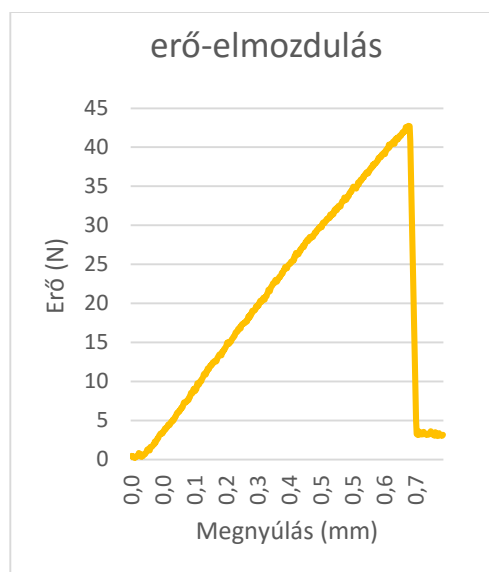
## Laborkísérletek

A tézsza anyagi paramétereinek meghatározásához szükséges húzási kísérleteket a Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék Czakó Adolf laboratóriumának ZWICK Z150 törőgéppel végeztem el. Mivel a tésztát a befogópofák összeroppantanák, ezért a spagettik végét egy téglatest alakú polisztirolhabból készült tömbbe építettem be. Ez úgy történt, hogy két polisztirol lapba mélyedéseket vágtam, majd azokat epoxi-ragasztóval kitöltöttem, így rögzítve két lap közé a spagettit. A bevágások fűrészfogasok voltak, így megakadályozva a spageti kihúzódtást a polisztirol lapok közül.



7. ábra: Spagetti szakítókísérlete a ZWICK Z150 törőgépben

A szakító kísérletek során (7. ábra) a tészta erő-elmozdulás diagramját (8. ábra), szakítóerejét, illetve a szakadó nyúlását határoztam meg. A húzás elmozdulás-vezérelt módon történt. Összesen 17 kísérletet végeztünk, amiből 14-nél kaptunk értékelhető eredményt. (Az elsőnél túl gyors húzási sebességet állítottunk be, a másik kettőnél meg beletört a spagetti a befogásba.) A spagettik hossza a két befogópofa között  $100 \pm 5$  mm volt. A spagettik mindig tisztán rugalmas viselkedtek, egészen törésig (8. ábra). A szakítóerő átlagos értéke  $F_{\text{szakító}}=42,8$  N volt. A szakítószilárdság meghatározásához szükségünk volt továbbá a spagettik átmérőjére, mely elhanyagolható szórás mellett 1,6 mm-nek adódott, (az átmérőt tolómérővel határoztam meg). Ebből szakítószilárdságot számoltam, melynek átlaga  $21,3$  N/mm<sup>2</sup>.



8. ábra: Az egyik mintadarab erő-elmozdulás diagramja

A szakadó nyúlás átlaga  $\Delta l_{\text{szakító}}=0,669$  mm 14 mérésre számított szórása 0,089 mm volt. Az ebből számított relatív szórás:  $s=0,134$ .

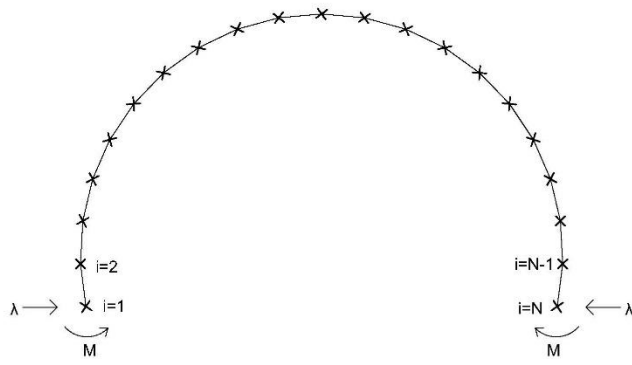
## Diszkrét valószínűségi modell

A kísérletekben tapasztalt eloszlások magyarázatára diszkrét valószínűségi modellt állítottunk fel. A modell a spagetti törésének valószínűségén alapul, figyelembe veszi az Audoly és Neukirch féle modellben szereplő, rugalmas hullám után keletkező görbületnövekedést olyan módon, hogy az első törés után a további törésekhez nagyobb valószínűséget rendel. A modell tartalmazza a befogás tökéletlensége miatt nem egyenletes görbületeloszlás hatását is. A modell alapján készült algoritmus a bemenő paramétereiből számítja a törések várható számát, és a kísérletekhez hasonló gyakorisági diagramot állít elő.

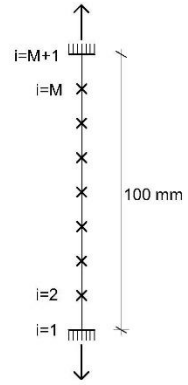
A diszkrét valószínűségi modellben az  $L=256$  mm hosszú spagettit egy rúdlánccal modelleztük melynek (a végpontjaival együtt)  $N=21$  csomópontja van (*9/a ábra*), a csomópontok közötti  $(N-1)$  darab rúd elem  $dl$  hossza azonos. Az egyes rúdelemként a törési valószínűségeket a csomópontokba koncentráljuk, azaz törés csak a csomópontokban következhet be. A csomópontokhoz rendelt törési valószínűséget  $p_i$  jelöli ( $i=1\dots N$ ). Feltesszük továbbá, hogy egy időpontban csak egy helyen következhet be törés, ennek fő oka, hogy egy törés nagyon rövid idő alatt ( $\sim 1\mu s$  [1]) játszódik le. Ez a feltételezés egyben összhangban van Audoly és Neukirch modelljével: a fragmentáció a diszkrét modellben is egymás utáni törési események sorozatként következik be. Az [1]-ben megjósolt görbületnövekedést olyan módon vesszük figyelembe, hogy az első törés után keletkező rúdláncokban a pontokhoz rendelt törési valószínűséget a görbületnövekmény maximumával (azaz az eredeti görbület 1,428-szorosával) határozzuk meg és  $p_i^*$ -gal jelöljük és ez alapján vizsgáljuk ezen rúdláncok törését. A  $p_i$  és ennek következtében a  $p_i^*$  valószínűségeket a térszta - nem egyenletesnek feltételezett -  $\kappa_E$  görbülete és a laborkísérletek alapján meghatározott  $\kappa_R$  határgörbülete alapján vesszük fel.

Modellünk tartalmaz egy további egyszerűsítést: csak az első három törésig, azaz négy fragmentumig vizsgáljuk a jelenséget. Ennek több oka is van: egyrésztől - ahogy azt a kísérletek leírásánál látható - a valóságban háromnál több törést meglehetősen ritkán tapasztaltunk, másrésztől a bevezetőben említett modell ugyan magyarázatot ad az első törés után következő törésre, de sem a befogásoknál bekövetkező visszaverődés, sem a már egyébként is rezgő spagetti-darab viselkedésének leírására sem alkalmas.

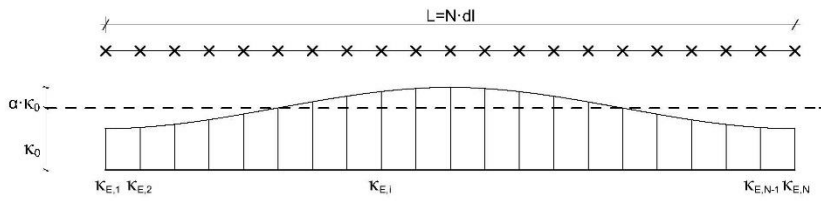
a) Rúdlánc:



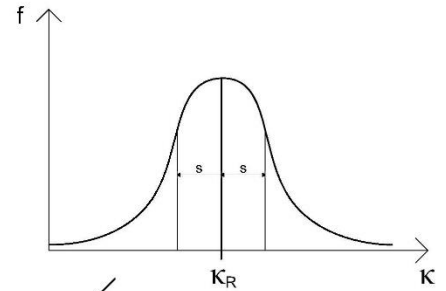
b) Húzási kísérlet



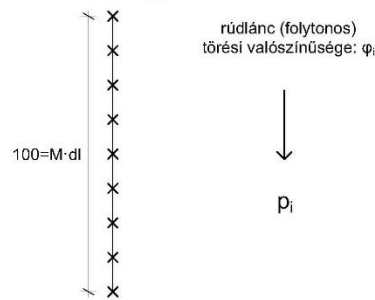
c)  $\kappa_E$  görbület:



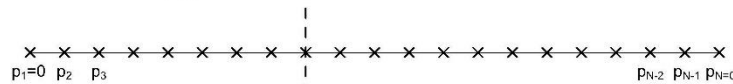
d)  $\kappa_R$  görbület:



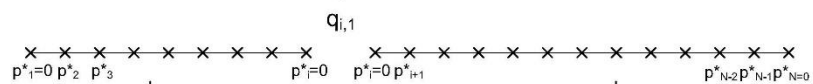
e)  $\phi$  meghatározása:



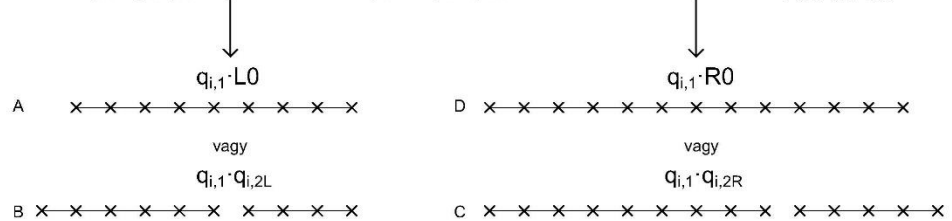
f) p valószínűségek:



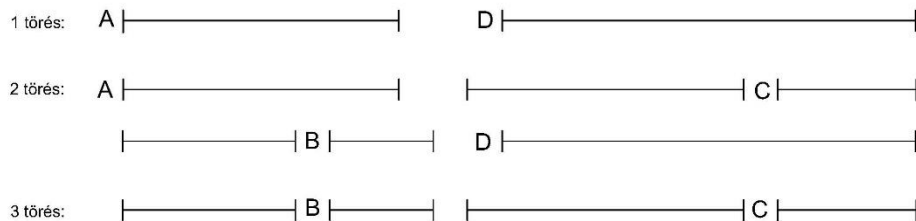
g) Első törés:



h) Második törés:



i) Lehetséges kimenetek:



9. ábra: A diszkrét valószínűségi modell működésének egyszerűsített ábrája

A diszkrét modell működését a 9. ábrán foglaltam össze. Mint láttuk, a modellhez szükséges az egyes csomópontokban  $p_i$  és  $p_i^*$  törési valószínűségek meghatározása. Ezt a laboratóriumban végrehajtott húzási kísérletekre vezettük vissza (9/b ábra). A lineáris erő-elmozdulás diagramok (8. ábra) alapján az anyag rugalmasan viselkedik egészen a törés bekövetkeztéig. Feltételeztük, hogy a spagetti szakadó-nyúlásának értékei normális eloszlást követnek, és azt is feltesszük, hogy a hajlítás hatására bekövetkező törés a húzott oldalon indul és a keresztmetszet nyomott oldalon is rugalmasan viselkedik. A húzási kísérletekből megállapítottam a spagetti szakadó-nyúlásának várható értékeit és szórását (lásd a laboratóriumi mérésekről szóló részt). Ismert, hogy rugalmas viselkedésű hajlított tartó esetén a szélső szál nyúlása ( $\varepsilon$ ) és a rúd görbülete ( $\kappa$ ) között a következő összefüggés áll fent:

$$\kappa = \frac{\varepsilon}{r} \quad (1)$$

ahol  $r$  a kör keresztmetszet sugara,  $r=d/2$ . Amennyiben az (1) összefüggés jobb oldalán a szakadó-nyúlást helyettesítjük, akkor a bal oldalon a  $\kappa_R$  határ-görbület áll. Mivel a spagetti átmérője elhanyagolható szórást mutatott,  $\kappa_R$  eloszlása is normális, szórása a laboratóriumi mérések alapján normálás után  $s=0,134$  adódott (9/d ábra.).

A rúdlánc  $i$ . csomópontjában a törés valószínűsége  $p_i$  értéke nem csupán az anyagtól (azaz  $\kappa_R$  ellenállástól), hanem a meghajlított spagetti geometriájától, azaz az  $i$ . ponthoz rendelhető  $\kappa_{E,i}$  görbülettől (9/c ábra) is függ (hiszen nem állandó görbületű rudakat is szeretnénk modellezni).  $\kappa_{E,i}$  átlagos értékét jelölje  $\kappa_0$ , eltérését az állandó értéktől paraméterezze a  $0 \leq \alpha \leq 1$  szám,  $\alpha=0$  a rúd görbülete állandó ( $\kappa_0$  értékű),  $\alpha=1$  esetén a rúdvégeken a görbület 0, a rúd felező pontjában pedig  $2\kappa_0$  értékű. A rúd  $i$ . csomópontjában tehát

$$\kappa_{E,i} = \kappa_0 - \alpha \cdot \cos((i-1)dl \cdot \pi \cdot 2) \cdot \kappa_0 \quad (2)$$

görbületet tételezünk fel.  $\kappa_0$  értékét  $\kappa_R$  várható értékének arányában adjuk meg, azaz  $\kappa_0=1$  esetén a rúdlánc átlagos görbülete a határgörbület várható értékével egyezik meg.  $\kappa_0$  és  $\alpha$  a diszkrét modell bemenő paraméterei lesznek.

A diszkrét valószínűségek számításához annak valószínűségét  $\varphi_i$  határozzuk meg, hogy egy adott pontban a  $\kappa_R$  valószínűségi változó alatta marad a  $\kappa_{E,i}$  pontbeli görbületnek. (Mint az (1)

egyenletnél láttuk, ez azonos azzal a kérdéssel, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a rúd szélső szálának nyúlása meghaladja a határnyúlást.) Mivel  $\kappa_R$  normális eloszlású valószínűségi változó 1 várható értékkel és  $s = 0.134$  szórással, az ehhez tartozó eloszlásfüggvénybe  $\kappa_{E,i}$  értékét helyettesítve kapjuk a keresett  $\varphi_i$  valószínűséget (9/e ábra). Ennek diszkrét megfelelőjét a következő módon határozzuk meg: mivel a húzási kísérleteket 100 mm hosszú próbadarabokon hajtottam végre, a program első lépésben egy 100 mm hosszú, M darabra felosztott rúdláncon határozza meg  $p_i$  értékét azon feltétel mellett, hogy a diszkrét modellben a törés valószínűsége megegyezik a (folytonos)  $\varphi_i$  törési valószínűséggel. Az M elemű rúdlánc törik, ha bármely csomópontjában bekövetkezik törés, azaz

$$1 - (1 - p_i)^M = \varphi_i, \quad (3)$$

ahol M értékét úgy vesszük fel, hogy a 100 mm hosszú rúdlánc egy rúdjának eleme körülbelül azonos hosszú legyen a spagetti diszkrétizálásánál használt rúdelem hosszával. (Számításainkban  $256/20 \sim 12,5$  miatt  $100/12,5 = 8 = M$ ). A (3) egyenletből egy nemlineáris zérushely kereső algoritmussal a  $0 < p_i < 1$  valószínűségi érték számítható. Az ismertett eljárást a spagettit jelképező rúdlánc minden pontjában végrehajtva a diszkrét rúdmodell minden csomópontjában ismert a törési valószínűség (9/f. ábra). A görbületnövekmény figyelembevételéhez a  $\kappa_{E,i}$  értékét megnöveljük:  $\kappa_{E,i}^* = \text{coeff} \cdot \kappa_{E,i}$  ahol  $\text{coeff} = 1,428$  [1]. A megnövelt görbülettel a  $p_i^*$  törési valószínűség az imént ismertett módon számítható. Megjegyezzük, hogy a dinamikus hullám miatt kialakuló növekmény "felépüléséhez" távolságra van szükség, ezért a  $p_i^*$  valószínűségekkel a keletkező fragmensek korábbi törés melletti második csomópontjától számolunk.

Átérthetünk a fragemntáció modellezésére. Ehhez felhasználjuk az imént számított, egy csomópontra vonatkozó törési valószínűséget ( $p_i$ ). Egy diszkrét, N csomópontú rúdlánc törésmentes állapotának valószínűsége:

$$P_0 = \prod_{i=1}^N (1 - p_i) \quad (4)$$

Ezután meghatároztuk annak valószínűségét, hogy a rúdlánc pontosan az  $i$ . csomópontban szenved törést (9/g. ábra):



$$\tilde{q}_i = \frac{P0}{1-p_i} \cdot p_i \quad (5)$$

Mivel a törés bármelyik csomópontban bekövetkezhet, a rúdlánc pontosan egy törésének valószínűsége az egyes csomóponti törések valószínűségének összege, tehát:

$$P1 = \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i = \sum_{i=1}^N \frac{P0}{1-p_i} \cdot p_i \quad (6)$$

Feltételezésünk nyomán egyszerre több törést a rúdláncban nem engedünk meg, ezért a törésmentes és az egy törés szerinti feltételes valószínűséggel dolgozunk. A kísérletekben minden spagettit eltörünk, ezt a modellben úgy interpretáljuk, hogy az első törés számításánál a feltételes valószínűséget kizárólag P1 alapján vesszük fel, azaz annak valószínűsége, hogy egy adott csomópont eltörik:

$$q_{i,1} = \frac{\tilde{q}_i}{P1} \quad (7)$$

Az első törés után keletkező fragmensek csomópontjaiban a  $p_i^*$  a törési valószínűség, ezek a darabok vagy törésmentesek, vagy egy helyen törnek. A bal oldali fragmens (4)-gyel analóg módon számítható törésmentes valószínűségét jelölje  $L0$ , hasonlóan a jobb oldali darabra kapjuk  $R0$ -t. Annak (feltételes) valószínűsége, hogy egy adott csomópont eltörik a bal oldali,  $N_L$  csomópontú fragmensben, a (4)-(7) egyenletekkel analóg módon, a következő egyenletekkel számítható, azzal a különbséggel, hogy itt (11) már az egyes fragmensek törésmentesek maradhatnak:

$$L0 = \prod_{i=1}^{N_L} (1-p_i^*) \quad (8)$$

$$\tilde{q}_{i,L} = \frac{L0}{1-p_i^*} \cdot p_i^* \quad (9)$$

$$L1 = \sum_{i=1}^{N_L} \tilde{q}_{i,L} = \sum_{i=1}^{N_L} \frac{L0}{1-p_i^*} \cdot p_i^* \quad (10)$$

$$q_{i,2L} = \frac{\tilde{q}_{i,L}}{L0 + L1} \quad (11)$$

A jobb oldali fragmenesek törési valószínűségei ( $R_0$ ,  $R_1$  és  $q_{i,2R}$ ) teljesen analóg módon számíthatóak. A számítások során további feltétel, hogy a rúd két végén lévő csomópontban nem lehet törés ( $p_1=p_N=p_1^*=p_N^*=0$ ). Vegyük észre, hogy annak valószínűsége, hogy az első törés után a bal oldali már nem törik, pontosan  $q_{i,1} \cdot L_0$ , azaz ekkora valószínűséggel keletkezett egy  $(i-1)$  hosszúságú fragmens. Hasonlóan, feltételeink miatt annak valószínűsége, hogy az  $i$ . csomóponttól balra lévő  $j$ . csomópont törést szenved nem más, mint  $q_{i,1} \cdot q_{j,2L}$ . Ekkor keletkezik egy  $(j-1)$  és egy  $(i-j)$  hosszúságú fragmens (9/h. ábra). A keletkező fragmens hosszakat az ilyen módon számított valószínűségekkel súlyozva (természetesen a jobb oldali fragmensekre is) kapjuk a kísérletekkel összevethető hosszúság eloszlásokat és az 1-2-3 darab törés várható értékét is (9/i. ábra).

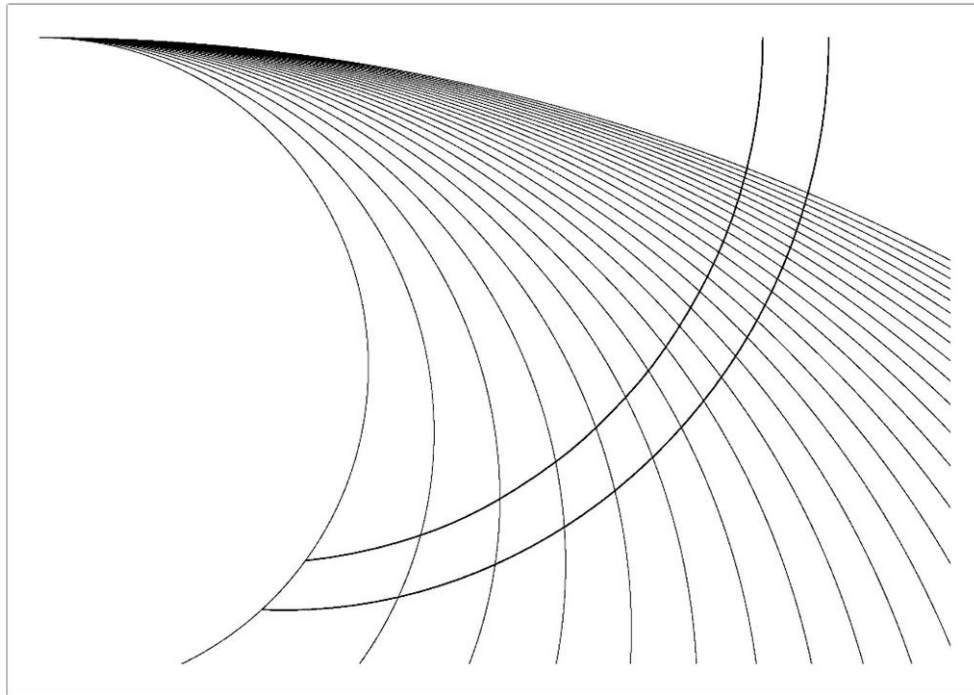
## A kísérleti és numerikus eredmények összevetése

Mint láttuk, a valószínűségi modell bemenő paraméterei a következők voltak:

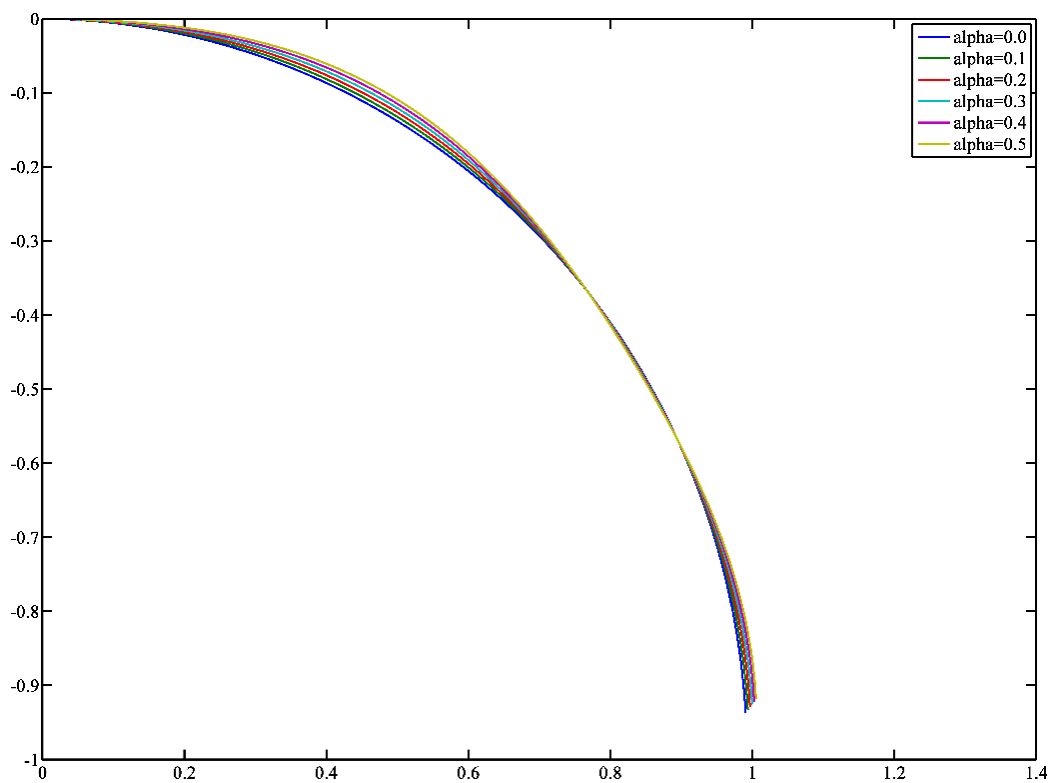
- L a rúdlánc hossza, jelen esetben 256 mm
- N a rúdlánc csomópontjainak száma
- $\kappa_0$ , az átlagos görbület nagysága, értéke 0 és 1 között változhat
- $\alpha$  a konstans görbülettől való eltérést méri (lásd a (2) egyenletet)
- coeff az első törés utáni görbületnövekmény
- $s$  a  $\kappa_R$  értékeinek a szórása (normálás miatt  $\kappa_R$  várható értéke 1)

A kísérletekkel való egyezést  $\kappa_0$  illetve  $\alpha$  paraméterek változtatásával vizsgáltuk, hiszen L kis szórással konstans, coeff értékét [1] alapján 1,428-nak vettük és az  $s$  szórás a méréseink nyomán ismert. A  $\kappa_0$  és  $\alpha$  paramétereket addig változtattuk, amíg közelítő egyezést nem kaptunk a mérésorozatok töréseinek számával, illetve a kirajzolódó gyakoriság diagramok is jól egyezéssel illeszkedtek a mérésekből származtatott diagramokkal. A legjobbnak ítélt  $\kappa_0$ ,  $\alpha$  kombinációból következtetni lehet a görbület függvény egyenletlenségére, vagy más szavakkal a befogás tökéletlenségére (Ez leginkább a 9/a ábrán  $\lambda$ -val jelölt nyomóerő nem zérus voltával függhet össze). Tökéletes egyezést több okból nem kaphatunk, érdemes kiemelni, hogy a modell nagyon érzékeny a bemenő paraméterekre, ezek kicsiny változtatásával is jelentős eltéréseket érhetünk el.

Ahogy azt a kísérleti részben említettem, a második és a harmadik mérésornál törekedtem az egyenletes görbület létrehozására, a harmadiknál még kinyomtatott köríveket (10. ábra) is felhasználtam ehhez, mégis azt tapasztaltam, hogy nagyon sokszor tört félbe a spagetti. Felmerülhet a kérdés, hogy a körívek mentén hajlított spagettinél miért nem vettem észre, hogy továbbra sem egyenletes a görbület? Ennek magyarázata az, hogy még a viszonylag nagy  $\alpha$  értékeknél is alig változik a spagetti alakja (11. ábra), az eltérés a körívektől szemmel szinte észrevehetetlen.



10. ábra: A körívek, amik mentén a spagettiket törtem a 2. és 3. kísérleti sorozatban



11. ábra: Az ív alakja konstans átlagos görbület és növekvő  $\alpha$  értékek esetén. Vegyük észre, hogy még  $\alpha=0.5$  esetén is alig különböztethető meg a görbe a körívtől ( $\alpha=0$ )

A következőkben mérésorozatonként mutatom be a numerikus és kísérleti eredményeimet.

## Első sorozat

Az első sorozat összehasonlításánál jó egyezést mutattak a mért illetve a számított értékek. A számításhoz használt paraméterek a következők voltak:

$$\kappa_0 = 0,67 \quad \alpha = 0,28$$

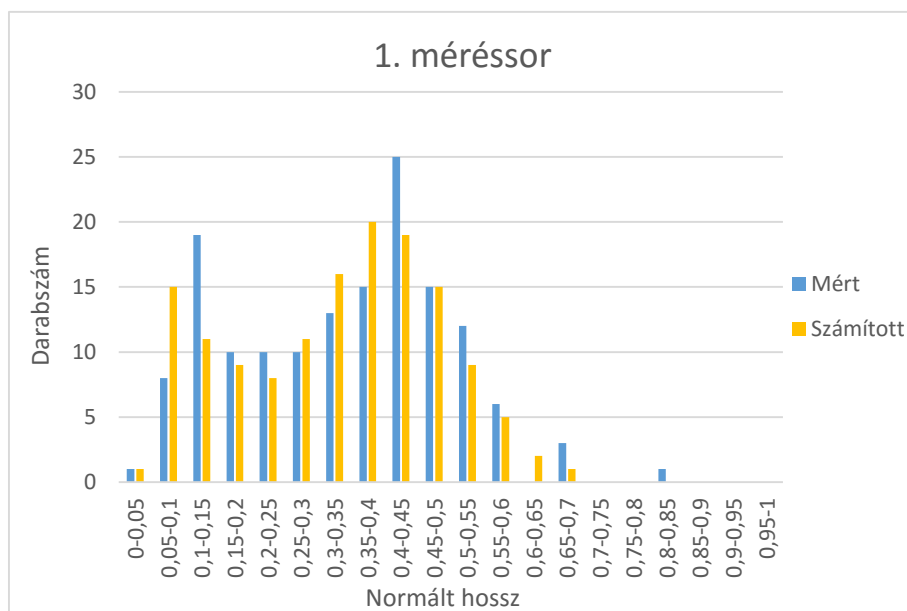
A törések száma a szimuláció során:

2 darabra a modell szerint 30%, a mérések alapján 28% tört

3 darabra a modell szerint 56%, a mérések alapján 48% tört

4 darabra a modell szerint 14%, a mérések alapján 22% tört

5 darabra a modell szerint 0%, a mérések alapján 2% tört



12. ábra: a számított és mért normált hossz szerinti gyakoriság diagram az 1. mérési sorozathoz

## Második sorozat

A második sorozatnál is hasonló diagramot kaptunk, egyedül az alacsonyabb második csúcs helye nem egyezik. A modell által számított törések száma pontosan megegyezik a mérésorozat töréseinek számával. Ahogy a mérésnél, úgy a modell szerint is viszonylag sok körülbelül fél spagetti hosszú fragmens keletkezett. A viszonylag magas  $\alpha$  értékből arra lehet következtetni, hogy hiába figyeltem oda a görbültre (tudjuk, hogy a tökéletesen egyenes görbület és a deformált görbület között alig van különbség *11. ábra*), a nem megfelelő befogás miatt tört ilyen sokszor két darabra. A használt paraméterek a következők voltak:

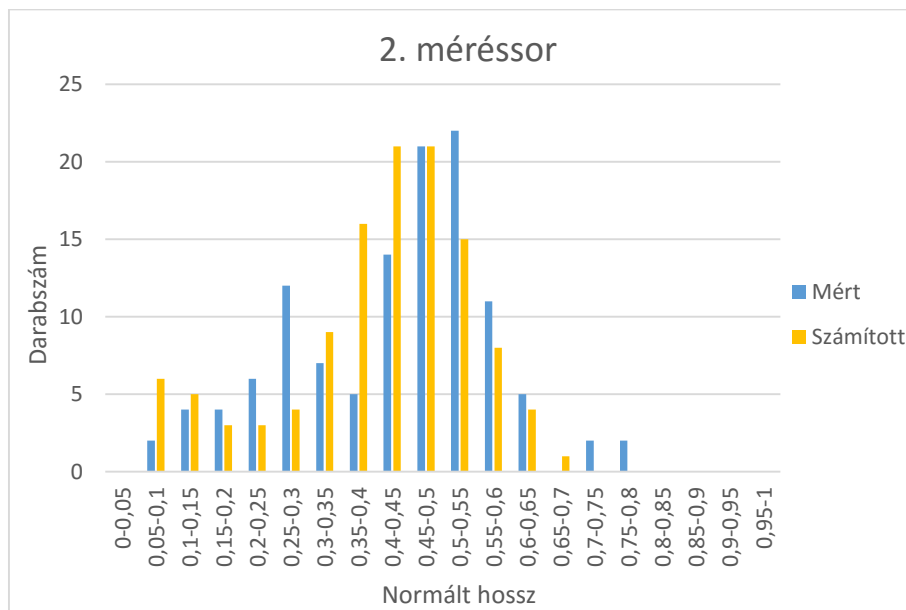
$$\kappa_0 = 0,56 \quad \alpha = 0,31$$

A törések száma a szimuláció során:

2 darabra a modell szerint 68%, a mérések alapján 68% tört

3 darabra a modell szerint 30%, a mérések alapján 30% tört

4 darabra a modell szerint 2%, a mérések alapján 2% tört



13. ábra a számított és mért normált hossz szerinti gyakoriság diagram az 2. mérési sorozathoz

## Harmadik sorozat

A harmadik sorozta szintén jó egyezést mutat. Ahogy a méréseknél itt is sok spagetti tört félbe, ez a viszonylag magas  $\alpha$  értékkel magyarázható, mely a közepénél megemeli a görbület nagyságát, ezzel szimulálva a befogás tökéletlenségét. A használt paraméterek a következők voltak:

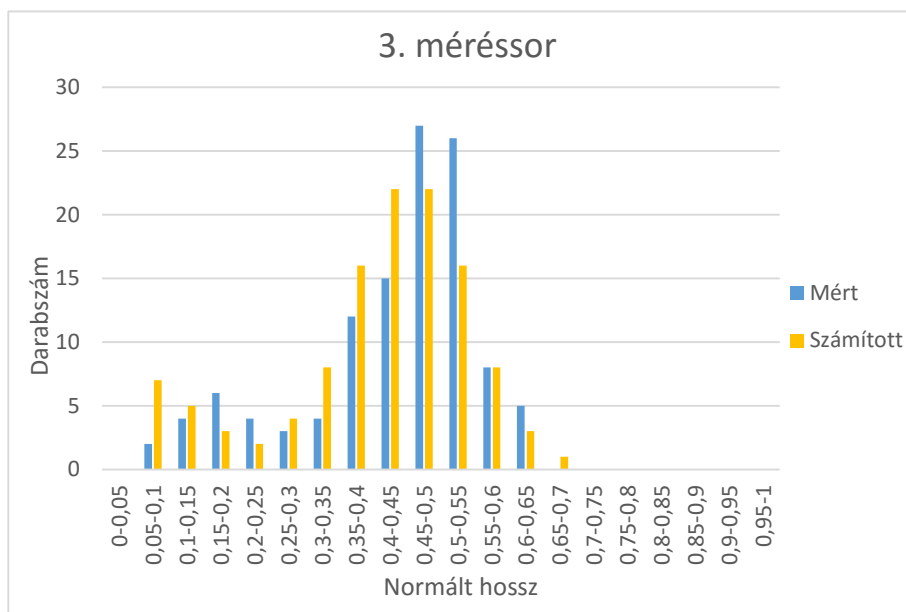
$$\kappa_0 = 0,54 \quad \alpha = 0,38$$

A törések száma a szimuláció során:

2 darabra a modell szerint 68%, a mérések alapján 68% tört

3 darabra a modell szerint 30%, a mérések alapján 32% tört

4 darabra a modell szerint 2%, a mérések alapján 0% tört



14. ábra: a számított és mért normált hossz szerinti gyakoriság diagram a 3. mérési sorozathoz

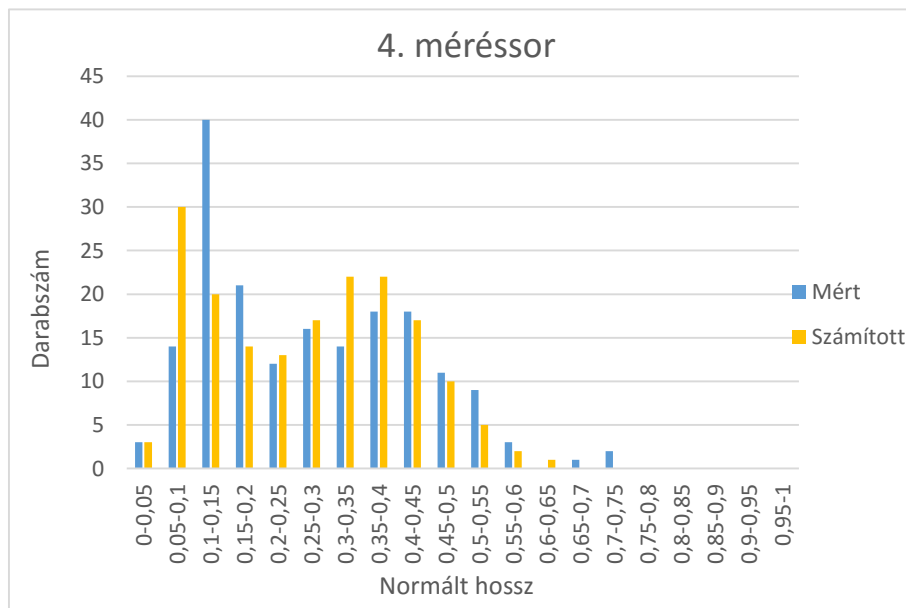
## Negyedik sorozat

A negyedik sorozatban a mérésnél a kisebb normált hosszoknál nagyobb csúcsot kaptunk, ez annak köszönhető, hogy viszonylag sok 5, 6 darabra tört spagetti volt. Ennél a sorozatnál vélhetően jobb egyezést kapnánk, ha a modell a 3. törés után is tudna számolni. A használt paraméterek a következők voltak:

$$\kappa_0 = 0,8 \quad \alpha = 0,38$$

A törések száma a szimuláció során:

- 2 darabra a modell szerint 6%, a mérések alapján 4% tört
- 3 darabra a modell szerint 42%, a mérések alapján 44% tört
- 3 darabra a modell szerint 38%, a mérések alapján 52% tört
- 3 darabra a modell szerint 10%, a mérések alapján 0% tört
- 3 darabra a modell szerint 4%, a mérések alapján 0% tört



15. ábra a számított és mért normált hossz szerinti gyakoriság diagram az 4. mérési sorozathoz



## A görbületnövekedés hatása az értékekre

A dolgozatom bemutatott eljárás egyben segít statisztikai alapon értékelni a Audoly és Neukirch által meghatározott görbületnövekedés (coeff=1,428) [1] nagyságát is. A 16. ábrán bemutatom ezen paraméter kis megváltoztatásának hatását a törések után létrejövő fragmensek hosszára illetve darabszámára. Diagramokat készítettem coeff = 1,2; 1,428 és 1,65 értékekkel. Minden diagramnál a kísérleti kiértékelés alapján (némileg önkényesen) megválasztott, azonos  $\kappa_0 = 0,7$  értéket és oszloponként eltérő  $\alpha = 0; 0,25; \text{és } 0,5$  paramétert használtam. A jó szemléltethetőség érdekében itt 100 spagettin végeztem el a szimulációt.

A diagramon jól megfigyelhető, hogy  $\alpha = 0$  esetén az irodalom szerinti [2] hatványfüggvény alakú eloszlást kapjuk. Ha valóban egyenletes lenne a görbület, akkor a modell a kezdeti várakozásunkat igazolja: sok fragmensnek kellene keletkeznie. (A diagramok bal oldalán látható csökkenés pedig arra utal, hogy összhangban az [1] modellel, a görbületnövekmény kialakulásához távolságra van szükség, ilyen értelemben a diszkrét modell a legalkalmasabb mód ezen jelenség vizsgálatára).

Növekvő  $\alpha$  hatására az eloszlásfüggvény két maximummal rendelkezik, ami a középtájon feltételezett nagyobb görbület miatt plauzibilis. Nagyon nagy  $\alpha$  esetén az eloszlás már csak a bal oldali maximumot mutatja. Nem meglepő módon a paraméterek változtatása nem csak a fragmensek hosszára van hatással, hanem a törések számára is.

$\kappa_0 = 0,7; \alpha = 0,0$  esettén:

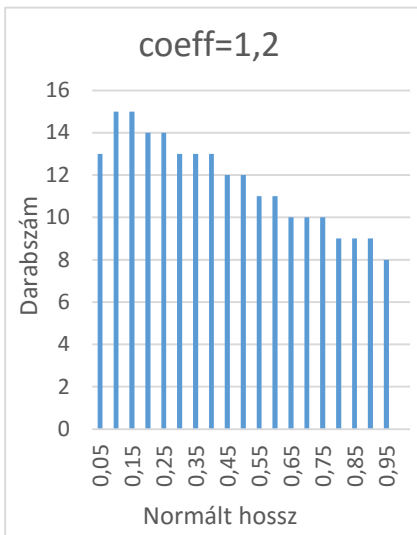
	coeff = 1,2	coeff = 1,428	coeff = 1,65
2 darabra tört	79	37	15
3 darabra tört	20	53	58
4 darabra tört	1	10	26

$\kappa_0 = 0,7; \alpha = 0,25$  esettén:

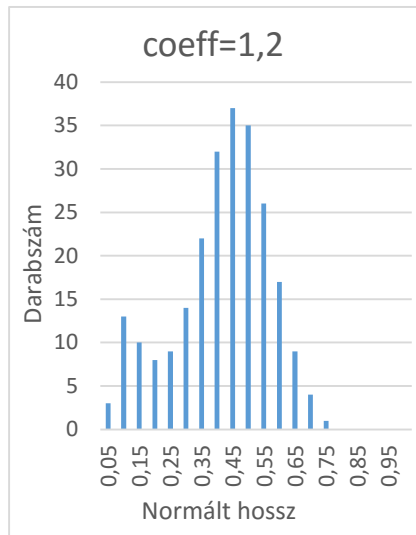
	coeff = 1,2	coeff = 1,428	coeff = 1,65
2 darabra tört	62	24	9
3 darabra tört	35	57	51
4 darabra tört	3	19	40

$\kappa_0 = 0,7; \alpha = 0,5$  esettén:

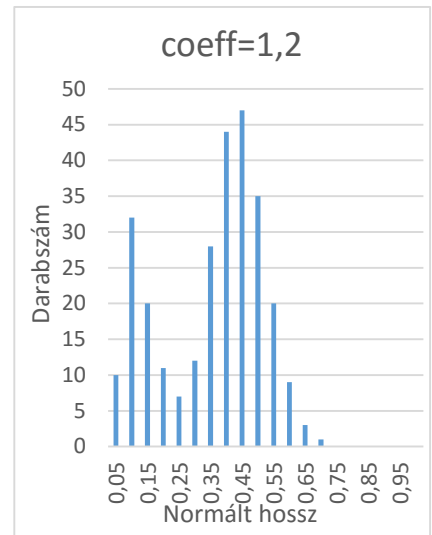
	coeff = 1,2	coeff = 1,428	coeff = 1,65
2 darabra tört	32	9	2
3 darabra tört	57	55	41
4 darabra tört	11	36	57



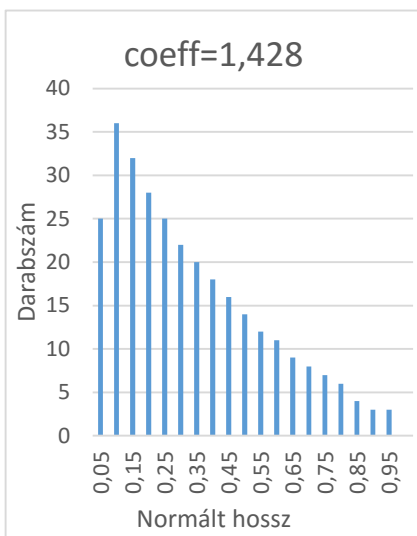
a)  $\kappa_0 = 0,7 \quad \alpha = 0,0$



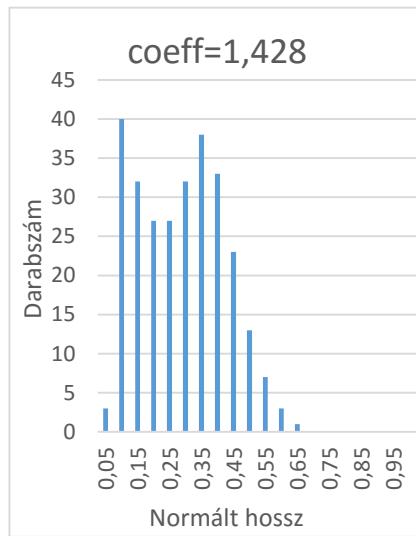
b)  $\kappa_0 = 0,7 \quad \alpha = 0,25$



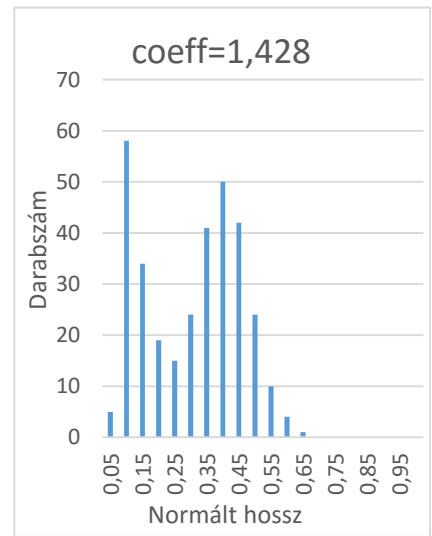
c)  $\kappa_0 = 0,7 \quad \alpha = 0,5$



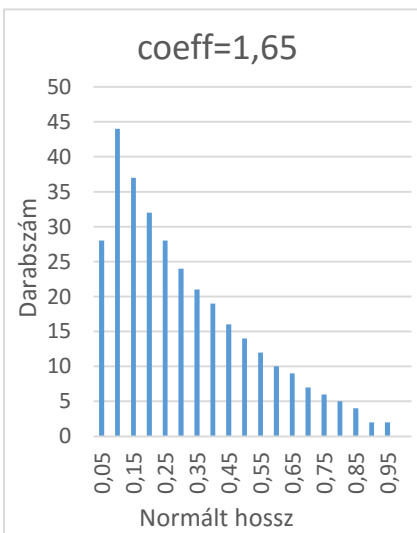
d)  $\kappa_0 = 0,7 \quad \alpha = 0,0$



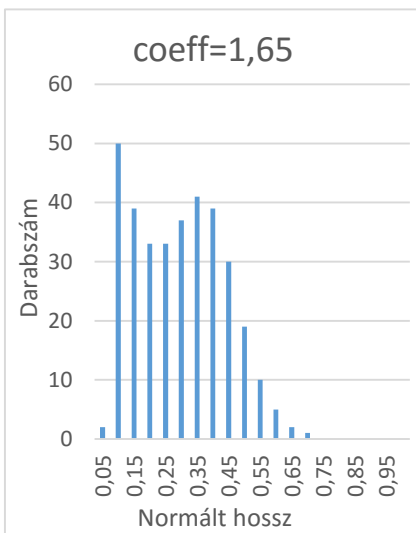
e)  $\kappa_0 = 0,7 \quad \alpha = 0,25$



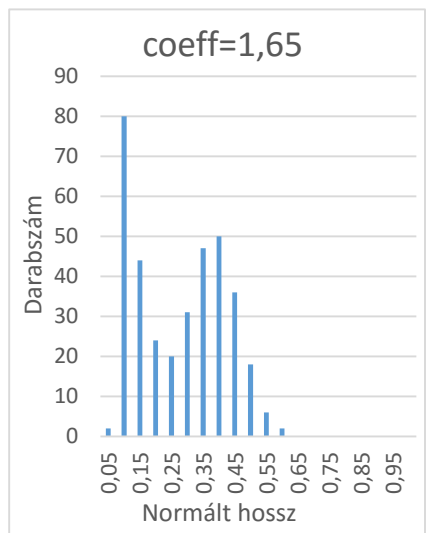
f)  $\kappa_0 = 0,7 \alpha = 0,5$



g)  $\kappa_0 = 0,7 \quad \alpha = 0,0$



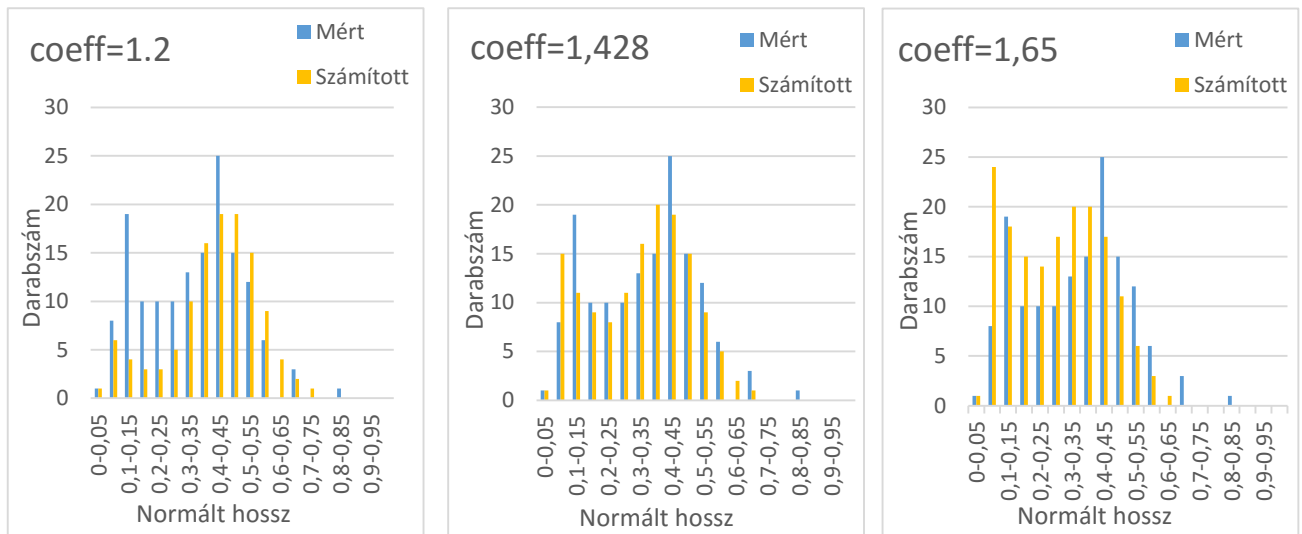
h)  $\kappa_0 = 0,7 \quad \alpha = 0,25$



i)  $\kappa_0 = 0,7 \alpha = 0,5$

16. A normált hossz szerinti gyakoriságok különböző  $\alpha$  és coeff értékek esetén

A görbületnövekményt jellemző coeff paraméter a 16. ábra szerint jelentősen befolyásolja az eloszlás-diagrammot. Következő lépésben az első mérési sorozat esetén vettem össze ezen paraméter hatását a kísérleti eredményekkel.



17. a coeff paraméter hatása

Látható, hogy a kisebb görbületváltozás esetén a kisebb normált hosszaknál nagyon eltér a mért eloszlástól (17/a. ábra), a nagyobb görbületváltozás pedig szinte minden értéket megnövel kivéve a nagyobb normált hosszakat (17/c. ábra).

## Összefoglalás

Érdekes tapasztalat, hogy a meghajlított spagetti általában három darabra törik. A jelenségre Audoly és Neukirch [1] adott magyarázatot, miszerint az első törés után egy rugalmas hullám keletkezik, ez a téstán helyi görbületnövekedést okoz, melynek nyomán újabb törések keletkeznek. Eszerint meglehetősen sok törésnek kellene bekövetkeznie, ezzel szemben kézi kísérleteknél jellemzően három darabra törik.

Dolgozatomban ezen látszólagos ellentmondás okát kerestem. Először többféle módon kézi méréseket végeztem, az eltört spagetti darabjainak hosszából és számából gyakorisági diagramot készítettem. Ezután egy diszkrét valószínűségi modellt készítettünk, ami kiszámolja a spagetti adott helyen bekövetkező törésének valószínűségét. Ennek segítségével meghatározza a keletkező fragmensek számát és hosszát, az eredményekből szintén gyakorisági diagramot állít elő.

Szemben az irodalomban felelhető statisztikai modellekkel, a kifejlesztett eljárás a törési valószínűséget mechanikai alapon, a rideg rúd anyagtulajdonságai és a görbület hosszmenti eloszlása alapján veszi fel. Fizikailag plauzibilis bemenő paraméterek esetén jó egyezést kaptunk a mért eredményekkel. Ekkor az általunk meghatározott bemeneti paraméterekből következtetni lehet a befogás tökéletlenségére, ami magyarázza a viszonylag kevés, jellemzően csak kettő törést. Ezen felül a modellel kapott gyakoriság diagramok jó egyezést mutatnak a megjósolt görbületnövekmény nagyságával. A megkezdett munka érdekes folytatása lehet előfeszített, illetve húzó és hajlító igénybevételnek egyszerre kitett rudak fragmentációjának vizsgálata. A spagettiken kiválóan vizsgálható a kvázi statikus állapotban az első törés hatására kialakuló dinamikus fragmentáció jelensége. Tágabb értelemben munkám felhívja a figyelmet arra, hogy tartószerkezetek rideg törése nyomán kialakuló dinamikus hatás további károk okozója lehet.

## **Köszönetnyilvánítás**

Köszönettel tartozom konzulensemnek, Dr. Sipos András Árpádnak (Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék), aki elméleti ismereteivel folyamatosan támogatott és programozási tudásával lehetővé tette a modell megalkotását és a számítások elvégzését.

Köszönöm szépen Juhász Károlynak (Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék), aki lehetővé tette a szakítógép használatát, és segített a mérések végrehajtásában.

A használt ZWICK Z150 törőgépet a TÁMOP 4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 pályázat biztosította.

## Hivatkozások

[1] B. Audoly, S. Neukirch: Fragmentation of rods by cascading cracks: why spaghetti do not break in half, *Phys. Rev. Lett.* 95, 095505 - Published 25 August 2005.

[2] M. Higley, A. Belmonte: Fragment distributions for brittle rods with patterned breaking probabilities. *Physica A*, 387, 6897-6912 (2008).

[3] Christopher Sykes: *No Ordinary Genius: The Illustrated Richard Feynman*, Norton, New York, 1994

[4] <https://www.youtube.com/watch?v=ADD7Q1QoFFI>

[5] O. Sotolongo-Costa, Y. Moreno-Vega, J.J. Lloveras-Gonzalez, J. Antoranz: Criticality in droplet fragmentation. *Phys. Rev. Lett.* 76, 42 (1996)

[6] G. Hernandez, H.J. Herrmann: Discrete models for 2-and 3-dimensional fragmentation, *Physica A* 215, 420 (1995)

[7] M. Matsushita, K. Sumida: How do thin glass rods break?-stochastic models for one-dimensional brittle fracture, *Bull. Fac. Sci. Eng. Chuo Univ.* 31, 69 (1988)

## Függelék

Programkód:

### Disc prob:

```
function p=DiscProb(kappa,mu,sigma,L)
```

```
%Discrete probability from measurements
```

```
% assuming l0=10 cm long specimen in tensile tests
```

```
%kappa: curvature along the rod
```

```
%mu: mean value of ultimate strain
```

```
%sigma: standard deviation of strain
```

```
%L0: length of the curved specimen
```

```
%p: equivalent probability
```

```
N=size(kappa,2); %Number of discretization points
```

```
l0=100; %Length of tensile test specimen [mm]
```

```
dl=L/N;
```

```
M=floor(l0/dl); %Number of discretization grid in tensile test
```

```
phi=normcdf(0,mu-kappa,sigma);
```

```
for i=1:N
```

```
p(i)=fzero(@(p)(1-(1-p)^M-phi(i)),0.5);
```

```
end
```

### sprobs:

```
function [P0,P1,e1,q]=sprobs(p)
```

```
%N darab csomópontú rúd kettétörése
```

```
%Bemenet:
```

```
% p : egyes csomópontok törési valószínűsége
```

```
%Kimenet:
```

```
% P0: Törésmentes állapot valószínűsége
```

```
% P1: Pontosán egy törés valószínűsége
```

```
N=size(p,2);
```

```
P0=prod(1-p); %Törésmentes állapot valószínűsége
```

```
q=P0./(1-p).^p; %Csomóponti törés valószínűsége (q elemeinek száma: N!)
```

```

P1=sum(q);      %Pontosan egy törés valószínűsége

el=zeros(N-1,1); %Adott hossz gyakorisága (feltételes valószínűség alapján)

for i=2:N-1
    el(i-1)=el(i-1)+q(i)/(P0+P1);
    el(N-i)=el(N-i)+q(i)/(P0+P1);
end

el(N-1)=(q(1)+q(N))/(P0+P1);

```

### Spag Simple

```

function [lst1 N4]=spag_simple(k0,alpha)
%Probabilistic procedure for spaghetti fragmentation
%% Initialization

N=21;          %Number of vertices
M=50;          %Number of specimen in the experiments
coeff=1.428;   %Growth factor in curvature
L=250;         %Length of the spaghetti [mm]

mu=1.0;        %Mean of limit curvature
sigma=0.134;   %Variation of limit curvature
x=linspace(0,1,N); %Discretization of the bar
kappa=-cos(x*pi*2)*k0; %Non-uniform curvature
kappa=k0+alpha*kappa; %Final curvature
kappa
k0+alpha*k0
L0=zeros(N,1); R0=zeros(N,1);
L1=zeros(N,1); R1=zeros(N,1);
lst1=zeros(N-1,1); lst2=zeros(N-1,1);
N4=zeros(4,1); %Number of breaks

p0=DiscProb(kappa,mu,sigma,L);
p1=DiscProb(kappa*coeff,mu,sigma,L);

%p0=normcdf(0,mu-kappa,sigma); %Static probability of break
%p1=normcdf(0,mu-kappa*coeff,sigma); %Probability of break under the dynamic wave

```



```

p0(1)=0;      p0(end)=0;   % There is no break at the ends of the bar
p1(1)=0;      p1(end)=0;
%% Core of the code

[P0,P1,~,q]=spprobs(p0);      %Probability of first break

q=q/P1;
d=0;
for i=1:N
    if i>1+d
        p=[p1(1:i-2-d),p0(i-1-d:i-1),0]; %Probability of a second break on the left
        [L0(i),L1(i),e12,~]=spprobs(p);
        lst1(1:i-1)=lst1(1:i-1)+e12*q(i);
        lst1(i-1)=lst1(i-1)+q(i)*L0(i)/(L0(i)+L1(i));

    end

    if i<N-d
        p=[0,p0(i+1:i+1+d),p1(i+2+d:end)]; %Probability of a second break on the right
        [R0(i),R1(i),e13,~]=spprobs(p);
        lst1(1:N-i)=lst1(1:N-i)+e13*q(i);
        lst1(N-i)=lst1(N-i)+q(i)*R0(i)/(R0(i)+R1(i));

    end

    if (i<N-d && i>1+d)
        N4(2)=N4(2)+q(i)*L0(i)/(L0(i)+L1(i))*R0(i)/(R0(i)+R1(i));

        N4(3)=N4(3)+q(i)*(L1(i)/(L0(i)+L1(i))*R0(i)/(R0(i)+R1(i))+L0(i)/(L0(i)+L1(i))*R1(i)/(R0(i)+R1(i)))
        ;
        N4(4)=N4(4)+q(i)*L1(i)/(L0(i)+L1(i))*R1(i)/(R0(i)+R1(i));
    end
end
N4
M*lst1
bar(lst1*M)
sum(lst1*M)

```