



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építészmérnöki Kar
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Nemes Péter Alex

Részben feltöltött hengerek billegő mozgásának vizsgálata

TDK dolgozat

Konzulensek

Dr. Ther Tamás, Dr. Várkonyi Péter László

2023

Tartalomjegyzék

1. Absztrakt.....	3
2. Bevezetés	4
3. A Housner-modell ismertetése.....	6
4. Részben töltött henger billegésének elméleti levezetése a modell alapján.....	7
5. Az elmélet igazolása kísérletekkel, mérésekkel	11
6. Más lábelrendezések mérési eredményei, jelenségek vizsgálata, magyarázata	15
7. Az eredmények felhasználása a gyakorlatban	23
8. Kitekintés a jövőbe	25
9. Bibliográfia	27

1. Absztrakt

Földünk számos tektonikailag aktív területtel rendelkezik, ahol a földrengések fokozott kockázatot jelentenek. A tervezők és mérnökök felelőssége is, hogy folyamatosan keressék az új megoldásokat az itt felmerülő kihívásokra.

Régóta ismert, hogy azok a szerkezetek, melyeknek megengedjük a billegést, jobban teljesítenek földrengésekre. Bár ez nem minden épület esetében kivitelezhető, számos helyen találkozhatunk billegő szerkezetekkel, mint például a falazott vagy kőből készült falak, a silók vagy a tartályok esetében. A munkám során testek billegését vizsgálom elsősorban Housner (1963) modellje alapján. Keresem a megoldást a modell hibáinak speciális esetekben történő kiküszöbölésére, vizsgálom a különböző töltöttségű hengerek billegését elméleti és kísérleti alapon, valamint bemutatom, hogy egy részben feltöltött henger földrengésállósága hogyan függ a feltöltés mértékétől. Méréseim során x-IMU mérőműszer segítségével mérem a szöggyorsulást különböző töltöttségű kísérleti hengerek esetében. Célom egy olyan tervezési és használati módszer kidolgozása, ami növelheti a magas, karcsú tárolók, gabonasilók állékonyságát földmozgások esetén.

Emellett kitérek arra is, milyen szempontok alapján tervezem a modellt fejleszteni és finomítani a jövőben:

- Hogyan reagál egy tároló a benne lévő anyag halmazállapotára?
- Hogyan mozog egy változó tömegközéppont-magassággal rendelkező test a térben?



fondo-conico-silo-de-prado.jpg (800×500) (pradosilos.com)

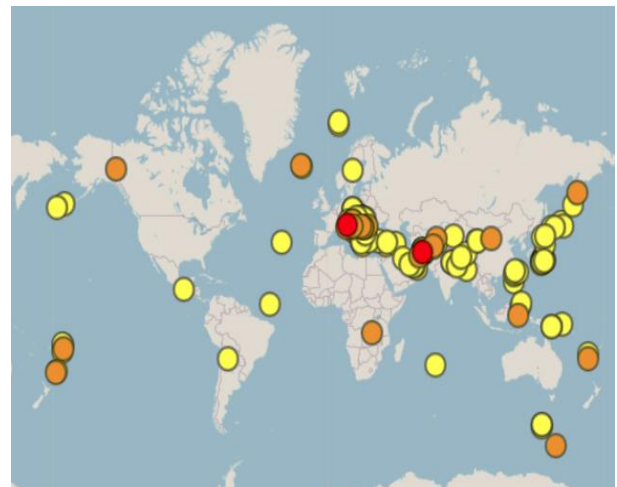
2. Bevezetés

A földkéreg mozgásai már a múlt emberének is számos fejfájást okoztak. Hazánk területéről is vannak feljegyzések, miszerint 455-456 környékén a mai Szombathely területét akkora földrengés rázta meg, hogy az ott tartózkodó Avitus császár katonái körében hatalmas pánik tört ki: „*Félelmükben kitódultak a városkapun, és azt hívén, ellenség tört rájuk, a sötétben még egymást is kaszabolták.*”¹

A földrengések a közelmúltban is komoly nehézségeket okoztak, rengeteg áldozatot követelve. Elég csak az év eleji, törökországi földrengésre gondolni, minek következtében számtalan épület megsemmisült, és rengetegen életüket veszítették. Az Isztambuli Műszaki Egyetemnek felajánlott segítségnyújtás keretein belül a helyszínre utazó magyar mérnökök tettek egy kijelentést, miszerint: „*Egy jól megtervezett épület életet menthet!*”²

Bár a média általában csak a nagy pusztítással járó rengéseket közli, érdemes megemlíteni, hogy számos földmozgás kerül rögzítésre minden hónapban:

- 2023.10.25, Észak-Olaszország, 4.9-es magnitúdó
- 2023.10.28, Észak-Olaszország, 4.1-es magnitúdó
- 2023.10.26, Kongói Demokratikus köztársaság, 5.2-es magnitúdó
- 2023.10.28, Kanada, 5.5-ös magnitúdó
- 2023.10.28, Afganisztán, 5.2-es magnitúdó
- 2023.10.28, Kína, 5,5-ös magnitúdó



Csupán néhány érték az elmúlt 30 nap földrengései közül, amikről lehet, hogy a legtöbben nem is hallottunk.

Legutóbbi földrengések - www.seismology.hu

¹ http://www.foldrenges.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=30:456-szeptember-7-savaria-a-mai-szombathely&catid=3&Itemid=11

² https://www.bme.hu/hirek/20230330/A_torokorszagi_foldrenges_tapasztalatai_merno

A tektonikailag aktív területeken tehát kiemelt fontosságú a földrengések hatásainak vizsgálata, valamint az épületek tudatosan erre történő méretezése. Ez az ötlet nem újkeletű, Housner (1963) már a 60-as években vizsgálta karcsú szerkezetek billegését földrengések esetén, és síkbeli billegő testekkel kapcsolatos kutatási eredményei számos, későbbi tanulmány alapjául szolgáltak.

Aik-Siong és Ghulani (1990) számos megállapítást tettek a hengerek térben történő mozgására, valamint leírták, hogy az egyes ütközések során hogyan fordul el a test az ütközési pont körül. Emellett számos tanulmány született olyan billegő szerkezetekről is, melyek folyadékkal vannak megtöltve. Veletsos és társai (1987) sikeresen leírták ezen szerkezetek viselkedését a bennük lévő folyékony anyag függvényében, valamint megállapítást tettek a szilárd és rugalmas anyagú tartályok különbségeire. Whittaker és társai (2021) az előbb említett kutatási területek metszetéről írtak, vagyis henger alakú, folyadékkal töltött tárolók billegő mozgását vizsgálták, szem előtt tartva számos hidrodinamikai paramétert is.

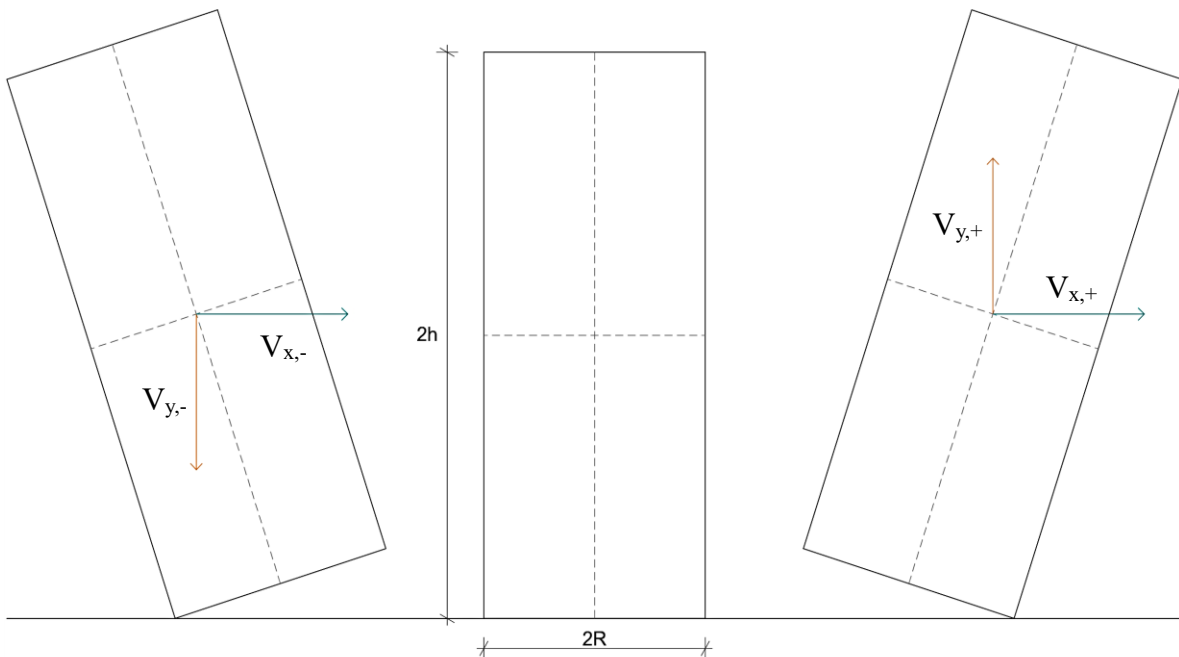
A Housnerre hivatkozó szakirodalom tehát sokféleképpen dolgozza fel a Kaliforniai Technológiai Intézet volt professzorának munkásságát, és egy összefüggő képet ad arról, milyen komplex is a billegő szerkezetek térbeli mozgása.

3. A Housner-modell ismertetése

A már lassan fél évszázados módszer elég jó közelítést ad karcsú szerkezetek billegésére. A modell feltételezi, hogy a test földnek csapódó csúcsára számított perdület az ütközés során nem változik, és ezt felhasználva számít ütközés előtti és utáni szögsebességeket, majd ezek hányadosát képezi. Ezen érték az úgynevezett AVR (Angular Velocity Reduction Factor), melynek jele r , továbbiakban r -számként fogok rá hivatkozni. Housner (1963) szerint ez az érték egy adott blokkra állandó, ezért jól használható annak billegő mozgásának leírására.

$$r = \frac{\theta + mh^2 - mR^2}{\theta + mh^2 + mR^2}$$

ahol θ a billegő test tehetetlenségi nyomatéka a súlyponti tengelyre, R az ütköző él hosszának, h a magasságának a fele, m pedig a teljes test tömege. A jelölések részben eltérnek azoktól, amiket Housner használt, annak érdekében, hogy a továbbiakban a hengerre általánosított képletek könnyebben értelmezhetőek legyenek. A modell feltételezi, hogy az ütközés két csúcsnál történik, a test magassága lényegesen nagyobb a szélességénél, valamint tömegeloszlása homogén.



4. Részben töltött henger billegésének elméleti levezetése a modell alapján

A Housner-modell, mint ahogy azt az előző bekezdésben említettem, perdületből számol r-számot, amihez szükség van az ütközés előtti és utáni perdületértékekre. Egy részben feltöltött hengernek azonban más lesz tömegközépponti magassága az alaphoz képest, mint azt a modell mutatná, emiatt pedig a tehetetlenségi nyomatéka is megváltozik a vizsgált tengelyre, valamint az r-számra is téves értéket kapnánk.

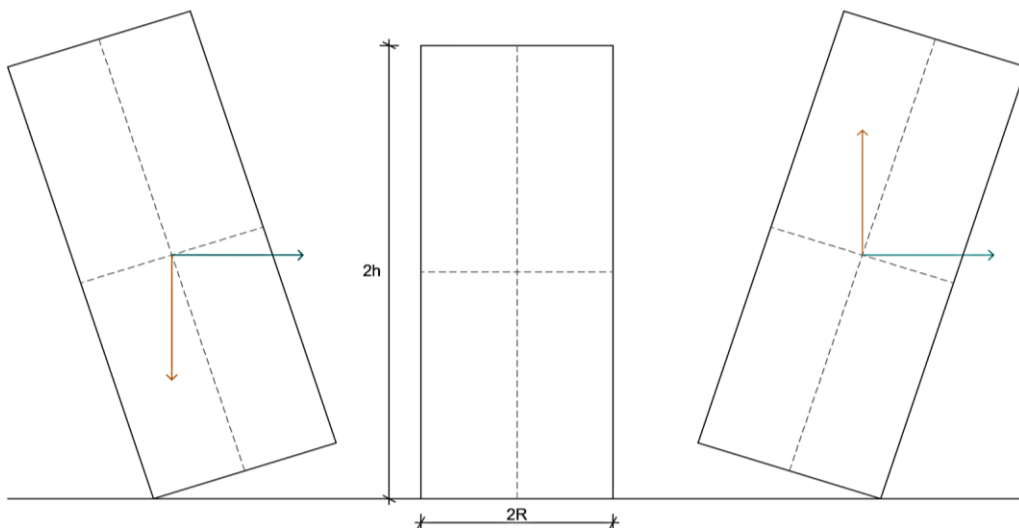
A megoldást egy megfelelő hengermodell jelentheti, aminél lényegében két henger együttes mozgását vizsgáljuk. Az eredeti hengert egy elhanyagolhatóan vékony falú, de nem elhanyagolható tömegű merev csőként, a hengerben lévő anyagot pedig egy, az előző hengerbe tökéletesen illő tömör hengerként kezeljük. Mivel a perdületek egymástól függetlenül összegezhető fizikai mennyiségek, használhatjuk a Housner-modellt azzal a változtatással, hogy az r-szám a két ütközés utáni és a két ütközés előtti perdület összegének a hányadosa.

Ütközés előtti és utáni perdületek a henger ütközés során leérő sarkára:

$$N_{1;henger} = \omega_- \cdot \theta_{henger} + \omega_- \cdot M_{henger} \cdot h^2 - \omega_- \cdot M_{henger} \cdot R^2$$

$$N_{2;henger} = \omega_+ \cdot \theta_{henger} + \omega_+ \cdot M_{henger} \cdot h^2 + \omega_+ \cdot M_{henger} \cdot R^2$$

(ω_- és ω_+ az ütközés előtti és utáni szögsebességek, θ_{henger} a henger tehetetlenségi nyomatéka a súlyponti tengelyre)



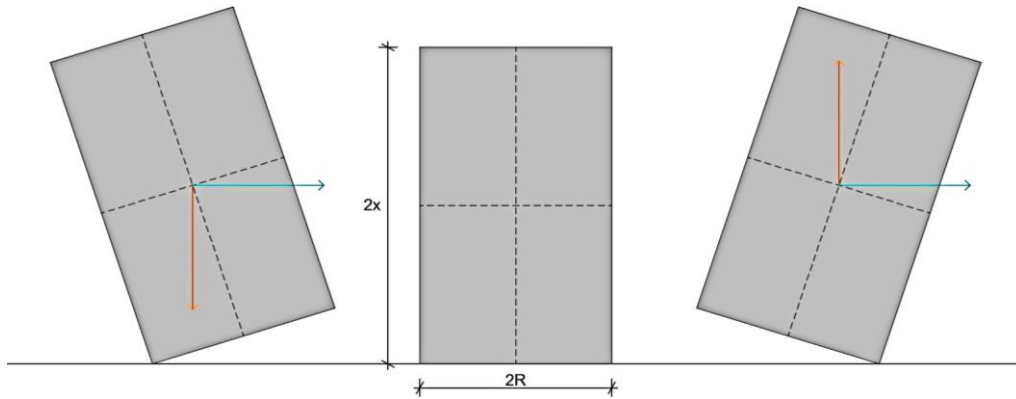
M tömegű henger hosszanti tengelymetszetének paraméterei

Ütközés előtti és utáni perdületek a töltőanyagra:

$$N_{1;töltőanyag} = \omega_- \cdot \theta_{töltőanyag} + \omega_- \cdot m_{töltőanyag} \cdot x^2 - \omega_- \cdot m_{töltőanyag} \cdot R^2$$

$$N_{2;töltőanyag} = \omega_+ \cdot \theta_{töltőanyag} + \omega_+ \cdot m_{töltőanyag} \cdot x + \omega_+ \cdot m_{töltőanyag} \cdot R^2$$

(x a töltőanyag félmagassága, $\theta_{töltőanyag}$ a töltőanyag tehetetlenségi nyomatéka a súlyponti tengelyre)

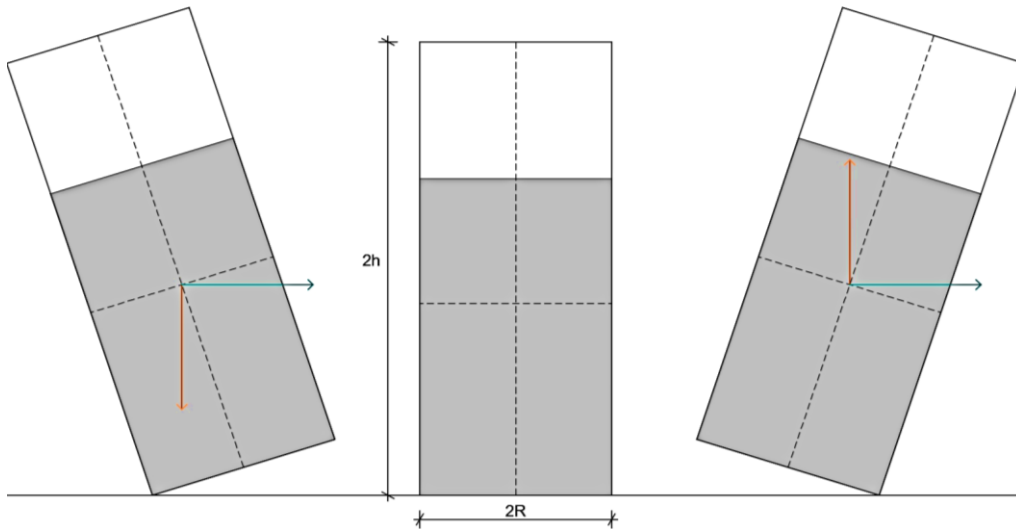


m tömegű töltőanyag hosszanti tengelymetszetének geometriai paraméterei

Ütközés előtti és utáni perdületek a teljes rendszerre:

$$N_{1;közös} = (\omega_- \cdot \theta_{henger} + \omega_- \cdot M \cdot h^2 - \omega_- \cdot M \cdot R^2) + (\omega_- \cdot \theta_{töltő} + \omega_- \cdot m \cdot x^2 - \omega_- \cdot m \cdot R^2)$$

$$N_{2;közös} = (\omega_+ \cdot \theta_{henger} + \omega_+ \cdot M \cdot h^2 + \omega_+ \cdot M \cdot R^2) + (\omega_+ \cdot \theta_{töltő} + \omega_+ \cdot m \cdot x^2 + \omega_+ \cdot m \cdot R^2)$$



A két modell szuperpozíciója

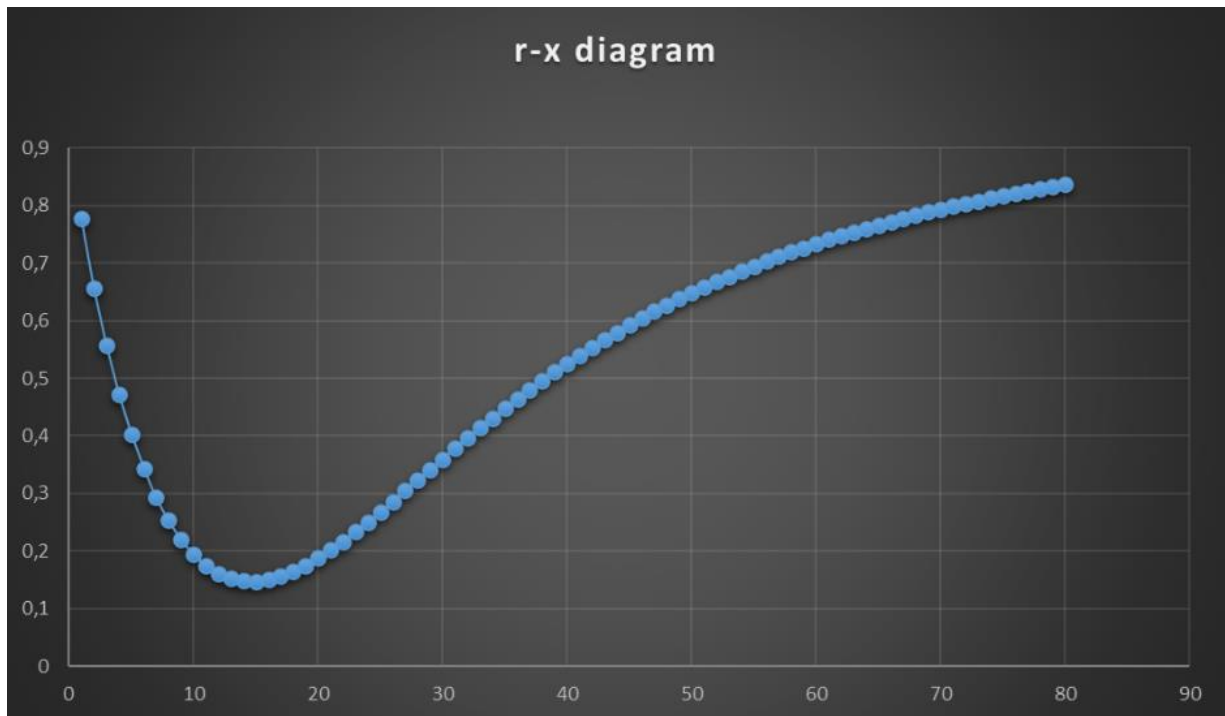
Mivel a két perdület megegyezik, ezért $N_{2,közös} = N_{1,közös}$

A szögsebességek kiemelése után:

$$r = \frac{\omega_+}{\omega_-} = \frac{(\theta_{henger} + M \cdot h^2 - M \cdot R^2) + (\theta_{töltő} + m \cdot x^2 - m \cdot R^2)}{(\theta_{henger} + M \cdot h^2 + M \cdot R^2) + (\theta_{töltő} + m \cdot x^2 + m \cdot R^2)}, ahol$$

$$\theta_{henger} = \frac{1}{4}M(2R^2) + \frac{1}{12}Mh^2 \text{ és } \theta_{töltő} = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mx^2$$

A megfelelőnek tűnő modell kiválasztása után egy fontos kérdés várt megválaszolásra: Van-e minimuma az r-számnak, és ha igen, az mitől és hogyan függ? Ennek vizsgálatára készítettem egy Excel-táblázatot, amiben megadtam egy tetszőleges henger paramétereit, betápláltam a számításhoz szükséges képletet. Különböző paraméterek választása esetén is jellemzően mindig az alábbi ábrának megfelelő diagramokat kaptam:

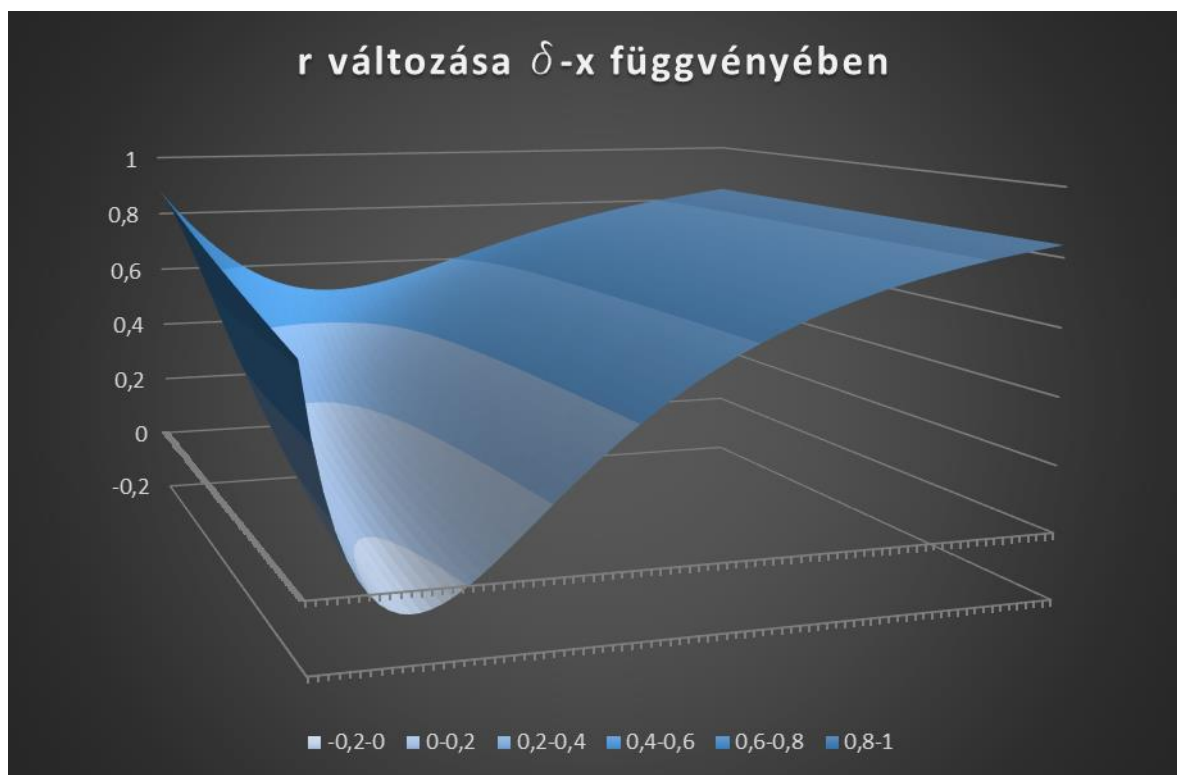


Adott paraméterekkel rendelkező részben töltött henger r-x diagramja

($M=30000 \text{ kg}$, $R=7\text{m}$, $2h=60\text{m}$, $\delta=860 \text{ kg/m}^3$)

A kapott eredmények arra engednek következtetni, hogy létezik minimuma az r -számnak, ez pedig deriválás útján bizonyosságot is nyert. Az Excel a megadott paraméterek alapján képes megmondani az adathalmazból választott minimum értéket, a hozzá tartozó x magasságot (x a feltöltés magasságának a fele), valamint számítás útján a tényleges minimum értékhez tartozó x magasságot.

Bár a gyakorlati alkalmazásban a töltőanyag magasságának szabályozása tűnik praktikusnak, érdemes megemlíteni, hogy a töltőanyag sűrűségének (δ) szabályozásával is elérhető az r -szám változása.



Adott paraméterekkel rendelkező részben töltött henger r-x- δ diagramja

Ezek alapján tehát elméleti úton bármilyen hengerhez tudunk mondani egy ideális töltöttségi szintet, amely esetén a henger a billegő mozgása alatt egy ütközés esetén a legtöbb mozgási energiáját veszíti el, ebből pedig következik, hogy a határhelyzetben a lehető legnagyobb szöget zárja be a vízszintessel, tehát a legkisebb a felborulás esélye.

5. Az elmélet igazolása kísérletekkel, mérésekkel

Housner modellje teljesen idealizált, 2D-s mozgást feltételez, és ehhez ad egy becült értéket, esetünkben azonban a mozgás könnyen térbelivé alakulhat. A részben feltöltött billegő henger, akárcsak a többi billegő térbeli test, érzékeny az érintkezési felületek, valamint a tömegeloszlás imperfekcióira, aminek okán a billegő mozgás elveszítheti 2D-s jellegét. Emellett a henger mozgását még a benne lévő anyag viselkedése is befolyásolhatja. Annak érdekében, hogy a modell helyessége bizonyosságot nyerjen, mérési eredményekre van szükség.

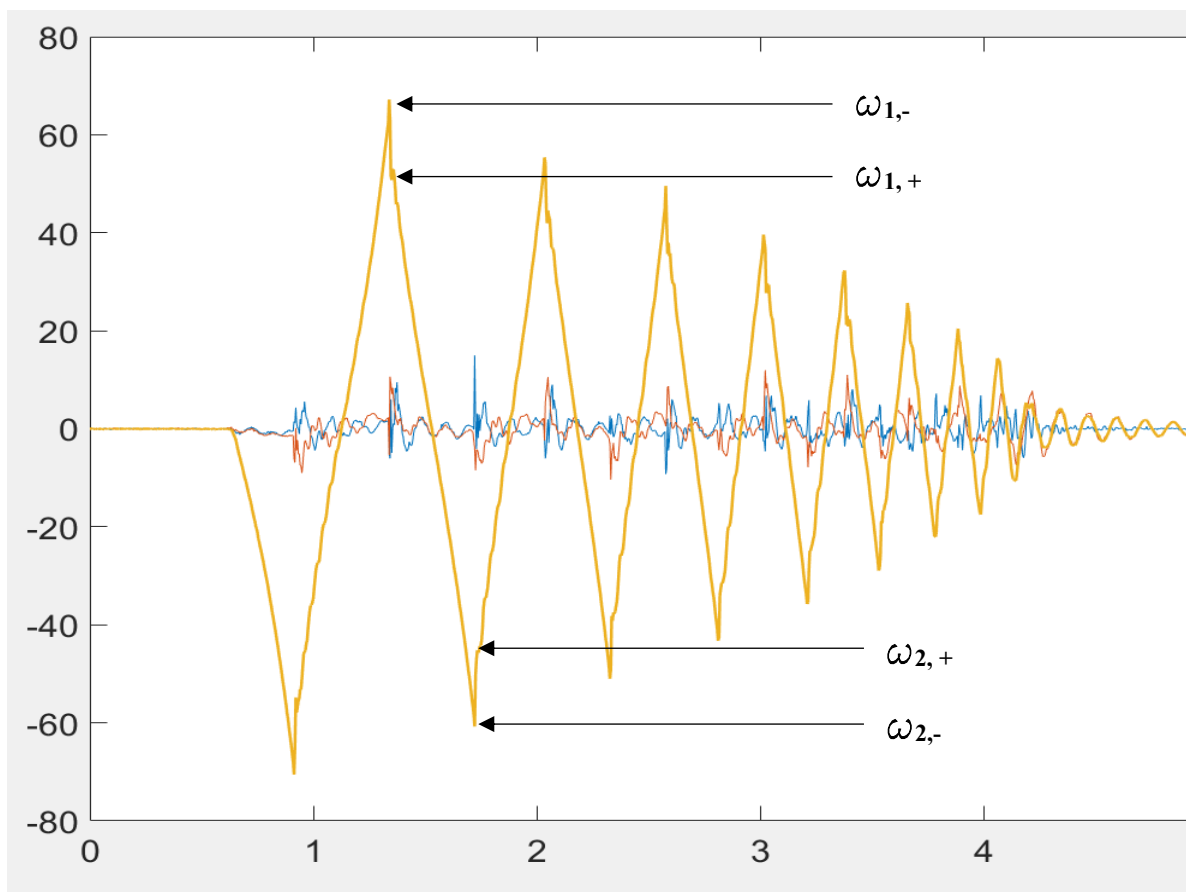
A kísérletet egy PVC hengerrel végeztem el, amit 1522 kg/mm^3 halmazsűrűségű homokkal töltöttem meg. A cső magassága 67 cm, alapkörének átmérője 8 cm, tömege a lezáró kupakkal együtt 2,59 kg. A kupak saját tömege 274 g. Annak érdekében, hogy a henger 2D-s mozgása a lehető legjobban közelíthető legyen, 4 db rövid, egyenként 30 mm hosszú és 10 g tömegű csavart helyeztem a kupakon keresztül a henger aljára. Ezek biztosították, hogy a henger a Housner-modellhez hasonlóan két él körül billegjen, valamint az esetleges imperfekciókból adódó köztes felütközési pontokat is kiküszöbölték. Az azonos kibillentések eléréséhez egy vékony falapot helyeztem a láb és a fal közé. Minden elrendezéshez 4 mérést végeztem, hogy az így kapott adatok átlagai pontosabb, a valósághoz közelebbi eredményt adjanak.

A méréseket az x-IMU szenzorral végeztem, amelynek segítségével szöggyorsulás, szögsebesség és Euler-szög adatokat rögzítettem. Bár az eszköz vezeték nélküli adattovábbításra is képes, a fizikai kapcsolat megbízható módon, több adat szállítását tette lehetővé, a csatlakozó USB-kábel pedig ebben az elrendezésben nem befolyásolta a henger viselkedését.



Az adatok kiértékelése a MATLAB programban történt, a mérések mindegyikéből megbecsültem az r-szám értékét, majd ezen adatok átlagát és szórását vettem figyelembe.

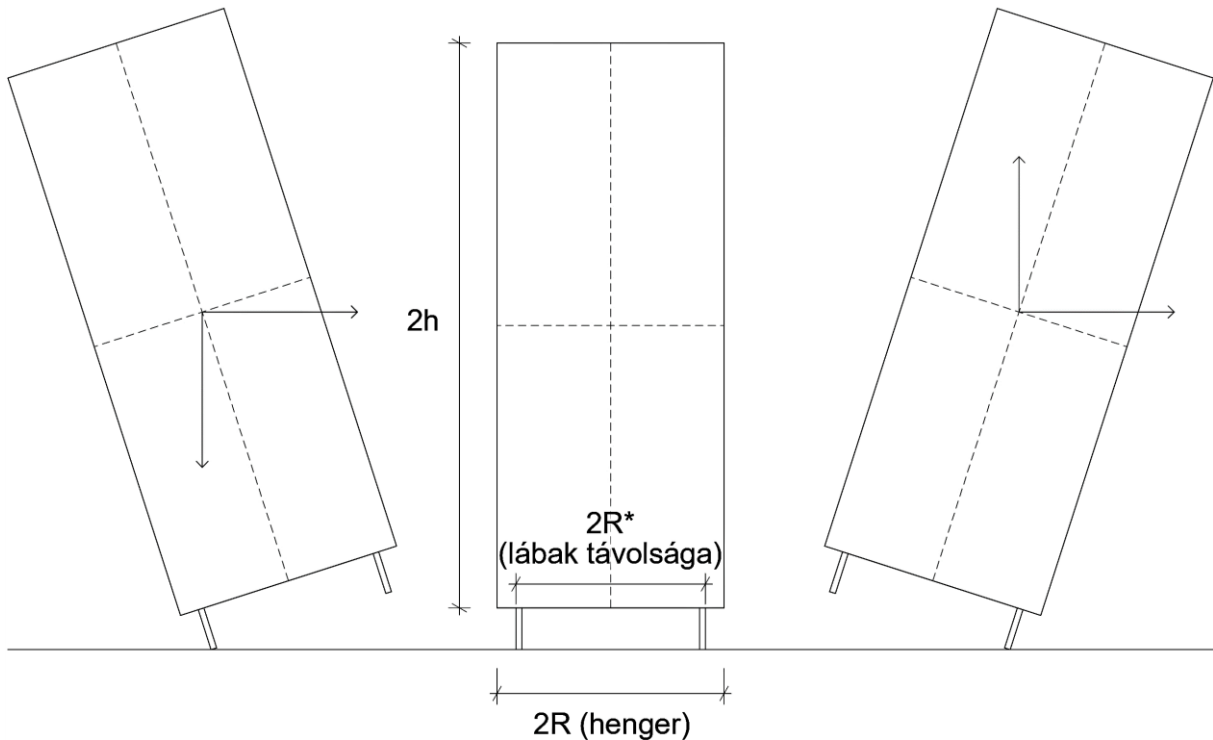
Housner modellje szerint az r-szám úgy számolható, hogy a szögsebességi diagram „csúcsainál” lévő ugrás két végpontján lévő szögsebesség (ω_- ; ω_+) hányadosát képezzük. A töréspont meghatározása azonban nehézkes, lévén, hogy a mérési adatok több kisebb kiugrást tartalmazhatnak. Ennek elkerülése érdekében tehetünk egy megállapítást, miszerint, ha a légellenállást elhanyagoljuk (amit a kis szögsebességek miatt megtehetünk), akkor az energiamegmaradásból következik, hogy a következő ütközésbe ugyanakkora szögsebességgel kell belemennie a hengernek, amekkorával az előzőből kijött, hiszen a teljes mozgási energiája először potenciálissá alakul, majd vissza. Eszerint $\omega_{1,+} = \omega_{2,-}$, így az r-számok meghatározásához elég a szomszédos csúcsok értékeinek hányadosát képezni, vagy pontosabb eredmény érdekében egymástól n-re lévő csúcsok hányadosának az (n-1)-edik gyökét venni.



4 lábon billegő, 24,5 cm-ig töltött henger szögsebesség-diagramja, valamint a csúcsoknál lévő ugrások

($\omega_{1,-} = 67,19$ fok/s, $\omega_{2,-} = \omega_{1,+} = 60,75$ fok/s, $\omega_{2,+} = 55,38$ fok/s, ezekből $r_{\text{átlag}} = 0,9079$)

A részben feltöltött henger r-számának elméleti meghatározásához a kezdeti módszer változtatást igényel. Mivel a lábak vastagsága, valamint az oldaltól való távolságuk nem elhanyagolható a henger sugarához képest, ezért a modell a következőképpen alakul:



Ennek megfelelően az r-szám meghatározása a következő:

$$r = \frac{\omega_+}{\omega_-} = \frac{(\theta_{henger} + M \cdot h^2 - M \cdot R_*^2) + (\theta_{töltő} + m \cdot x^2 - m \cdot R_*^2)}{(\theta_{henger} + M \cdot h^2 + M \cdot R_*^2) + (\theta_{töltő} + m \cdot x^2 + m \cdot R_*^2)}$$

A henger sugarát (R) a tehetetlenségi nyomatékok meghatározásánál, a lábak távolságának felét (R^*) az ütközések felírásánál használjuk. A csavarok tömegét és magasságát tekinthetjük elhanyagolhatónak, mivel azok a henger tömegének 1,6%-át, magasságának pedig 4%-át teszik ki. Ezzel a számolás lényegesen egyszerűsödik, azonban érdemes megemlíteni, hogy minimális eltérésekhez vezethet a valósághoz képest.

Az elmélet által jósolt és a mért r-számok a hengerben lévő homok magasságának függvényében, 4 lábú henger esetén					
A hengerben lévő homok magassága		üres	10,8 cm	17,5 cm	24,5 cm
Elmélet	számolt r-szám	0,9678	0,9313	0,9171	0,9135
Mérés	r-számok átlaga	0,9647	0,9365	0,9226	0,9258
	r-számok szórása	0,0029	0,0098	0,0045	0,0103
Az ideális töltöttségi magasság és a hozzá tartozó r-szám becsült értéke az Excel-táblázat által számolt adatokból					
$2x_{\text{ideális}} = 24 \text{ cm}$			$r_{\text{min}} = 0,9134$		

A négy lábbal rendelkező henger mérési adatai jó közelítéssel megegyeztek a számítások által jósolt értékkel, melyből következtethető, hogy a modell megfelel a valóságnak, és használható lehet olyan szerkezetek esetén, melyek hasonlóan viselkednek egy részben feltöltött hengerhez. Az egyes eltéréseknek, amelyek a mért és a számolt értékek között tapasztalhatóak, számos oka lehet. A csavarokat nagyon nehéz pontosan egy síkba beállítani; a hengerben lévő homok csak jó közelítéssel homogén; valamint az részben alakváltozhat a billegés során, a henger fala nem elhanyagolhatóan vékony. Látható, hogy a homok magasságának növelésével egy bizonyos szintig csökken az r-szám, ami összhangban van az elmélettel, miszerint az optimális szint eléréséig a feltöltés stabilizálja a hengert.

Összegezve az eredményeket, a kísérlet két lényeges feltételezést igazolt:

- Housner-modellje használható karcsú, négylábú, henger alakú testekre a képletben szereplő tehetetlenségi nyomaték, valamint a billegés síkjának helyes meghatározásával.
- A modell, miszerint egy részben feltöltött hengert két egymáshoz rögzített merev testként modellezhető, megfelel a valóságnak.

6. Más lábelrendezések mérési eredményei, jelenségek vizsgálata, magyarázata

A billegő testek mozgásának, viselkedésének vizsgálata viszonylag régre nyúlik vissza. Ismert, hogy ha egy ütközési él vagy felület nem tökéletesen egyenes, ahogyan azt a modell idealizálja, akkor köztes felütközési pontok jönnek létre. Belátható, hogy minél több ilyen pont alakul ki a felületen, a test ütközései annál jobban közelítik a tiszta gördülést. Ez adta az ötletet, hogy a próbahenger billegését más lábelrendezés esetén is megvizsgáljam. A felület, amin a henger lábai találhatóak, úgy készült, hogy abba szimmetrikusan több csavar is elhelyezhető legyen.

A méréseket a 4 lábas elrendezés mellett még 3, 6 és 10 lábbal is megismételtem. A billegések minden esetben jó közelítéssel egy síkban történtek, azonban ennek ellenére is számos említésre méltó jelenséget sikerült megfigyelnem.

- 3 láb

Ez egy aszimmetrikus lábelrendezés, a pont és az él nem egyenlő távolságra vannak a henger tengelyétől, ezért az oda-, és a visszabillegésekhez különböző r -szám tartozik, melyeknek a mérés és a számítás során is a mértani közepe értelmezendő. Előzetesen ezen összeállítást vártam a leginstabilabbnak és kiszámíthatatlanabbnak, mivel azon ütközések esetén, amikor csak az egyik láb van a talajon, a legkisebb tömegeloszlásbeli hibák is jelentős kitérést okozhatnak. Ezzel ellentétben azonban a mozgás közel tökéletesen egy síkban zajlott.



- 6 láb

Ezen elrendezés esetén a gyorsulás diagramon egy érdekes jelenséget figyeltem meg. Az oda-, és a visszabillegés esetében nem volt ugyanakkora az energiadisszipáció mértéke. A henger talpai, az ütközési felület, valamint a henger tartalmának vizsgálata után sem észleltem ebben változást. A jelenség oka az lehet, hogy az egyik irányba nem

azonos számú láb ütközik, mint a másik irányba, ezért eltérő jellegű az ütközés. Ezen felül a hibát okozhatja még a szenzor pontatlansága is, mivel az x-IMU mérőműszer a pillanatnyi nagy gyorsulásváltozásokat nem tudja tökéletesen detektálni. Emellett fontos még megemlíteni, hogy a henger az utolsó periódusait már a kezdeti kilengések síkjára merőlegesen végezte. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen konzulenseim már korábban is tapasztaltak ilyen jellegű kitérést billegő mozgások esetén. (Várkonyi, Kocsis, Ther, 2022)

- 10 láb

Hasonlóan a 6 lábas elrendezéshez, itt is felmerült a tökéletlen ütközés gyanúja, valamint a kezdeti kibillentésre merőleges kilengések az utolsó periódusokban. A lábak számának növelése ugyan egy stabilabb, kevésbé billegő felületet ad, ugyanakkor szinte biztosak lehetünk abban, hogy a billegések között eltérések lesznek.

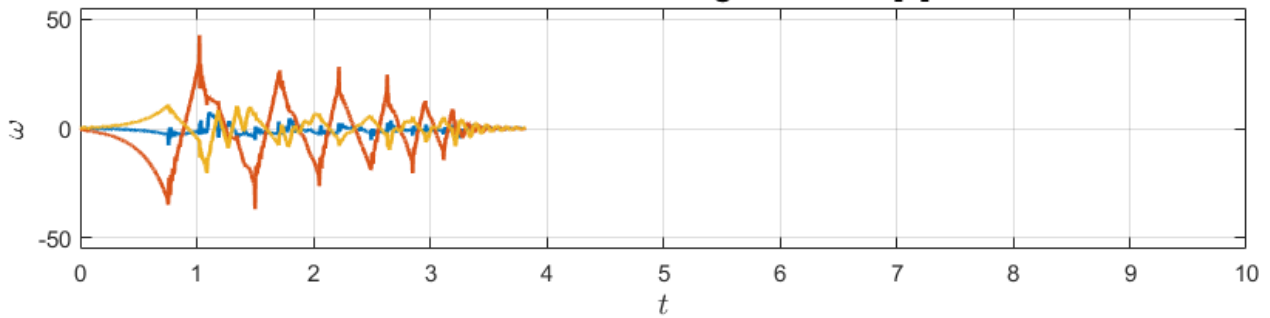
Általános tapasztalat volt a mérések során, hogy a hengerek elkezdtek „lépkedni”. Housner modellje feltételezi, hogy a test és a talaj között olyan nagy a súrlódási együttható, hogy nem történik csúszás. A kísérletek során azonban ez nem teljesült, ezért a henger általában a kezdeti kitérés irányába kezd tolni, akár 1 cm-t is.

A mérések során szabad szemmel is látható jelenségek közé tartozik még a henger billegő mozgásának lecsengése is. Ahogy növeltem a benne lévő homok mennyiségét, a henger egyre kisebb szögsebességgel lépett ki az ütközésekből, szinkronban az elmélettel, miszerint a henger ideális töltöttség szintjéig a homok magasságának emelése csökkenti az r-számot.

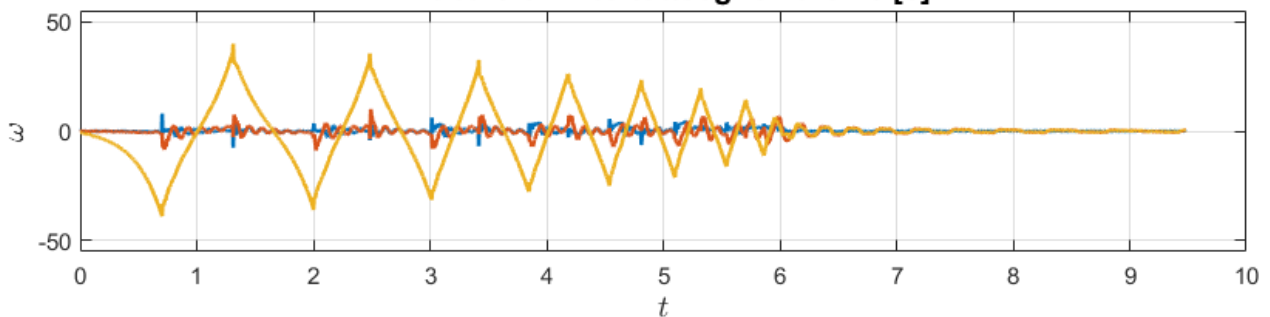


A különböző lábelrendezések szögsebesség-diagrammjai üres henger esetén

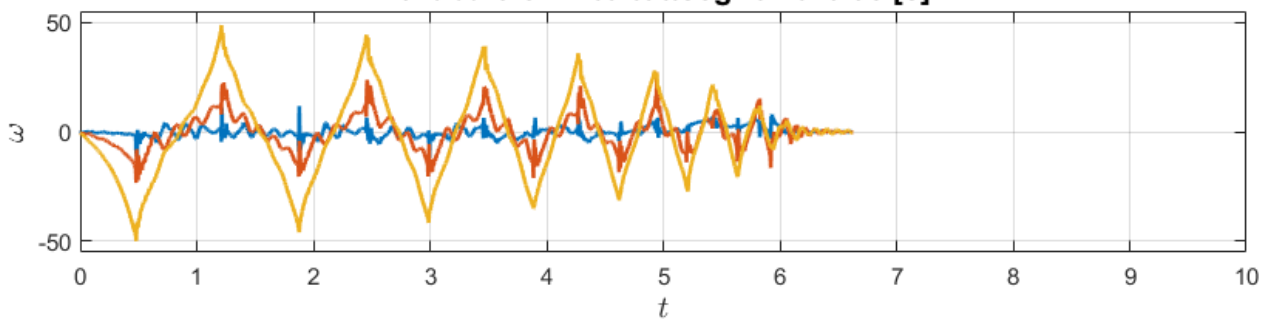
3 lábú elem - töltöttség: 0 - t=3.82 [s]



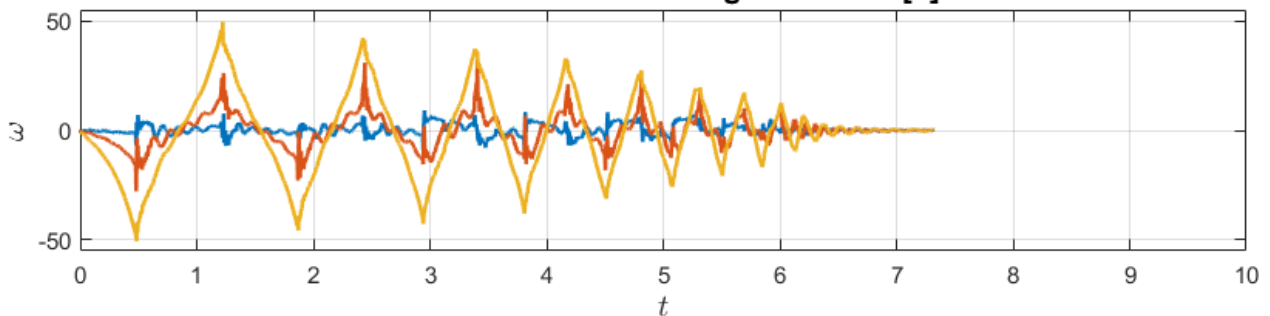
4 lábú elem - töltöttség: 0 - t=9.48 [s]



6 lábú elem - töltöttség: 0 - t=6.63 [s]

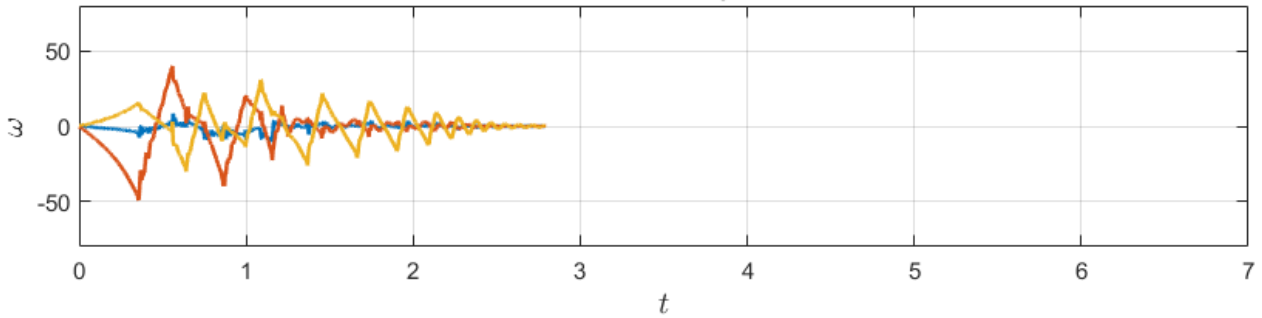


10 lábú elem - töltöttség: 0 - t=7.32 [s]

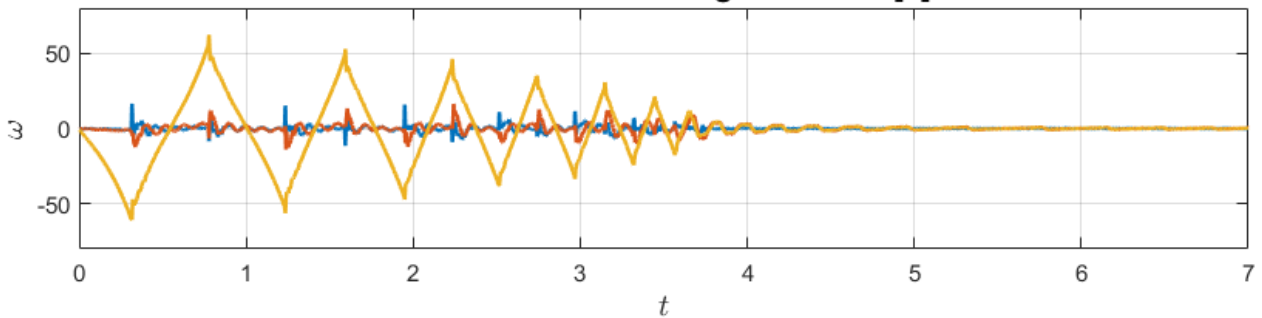


A különböző lábelrendezések szögsebesség-diagrammjai az első töltöttségi szint esetén

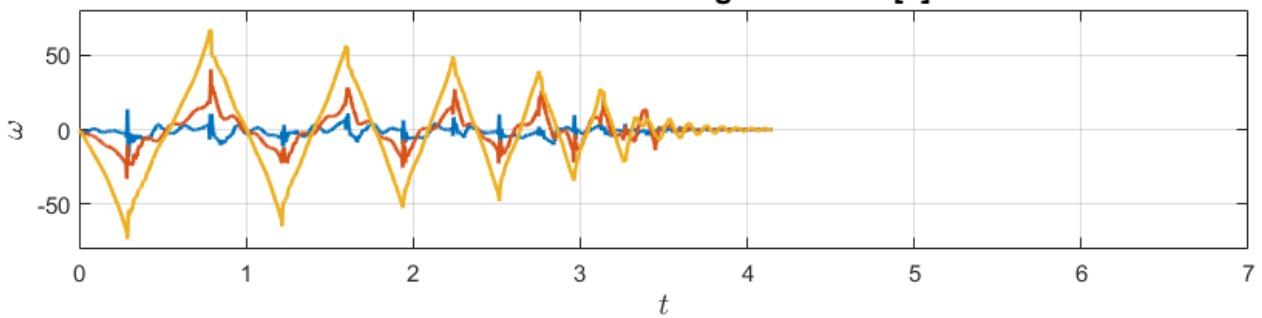
3 lábú elem - töltöttség: 1 - $t=2.80$ [s]



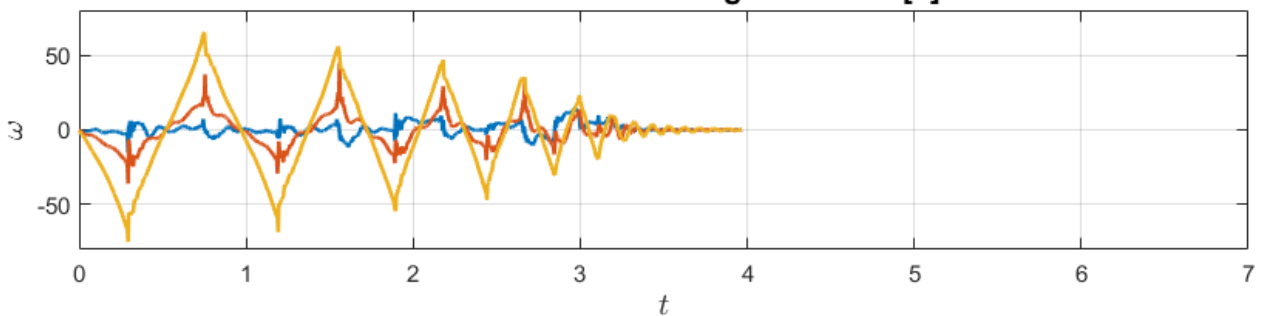
4 lábú elem - töltöttség: 1 - $t=7.04$ [s]



6 lábú elem - töltöttség: 1 - $t=4.16$ [s]

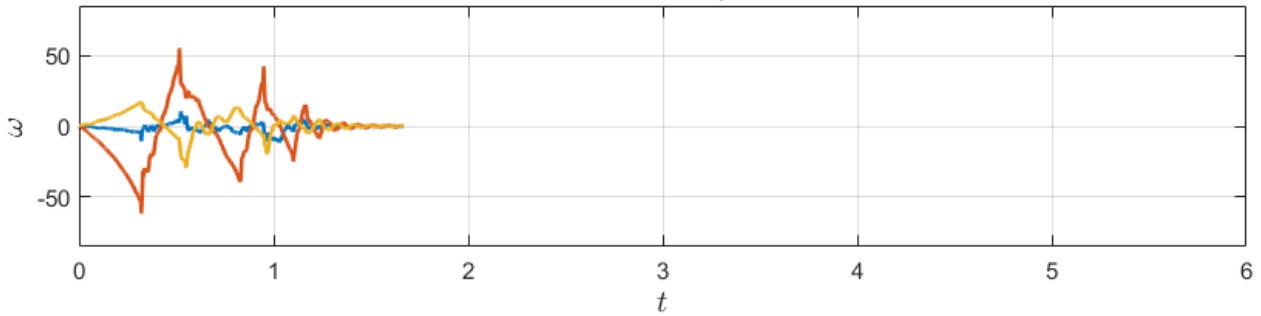


10 lábú elem - töltöttség: 1 - $t=3.97$ [s]

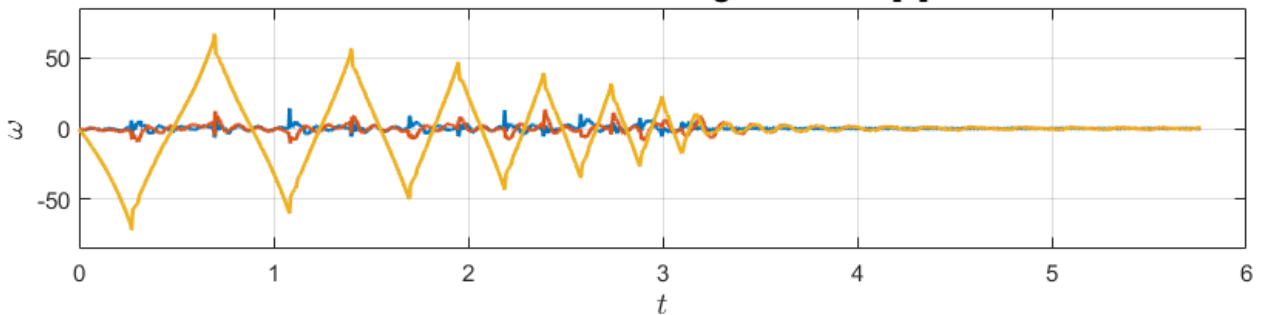


A különböző lábelrendezések szögsebesség-diagrammjai a második töltöttségi szint esetén

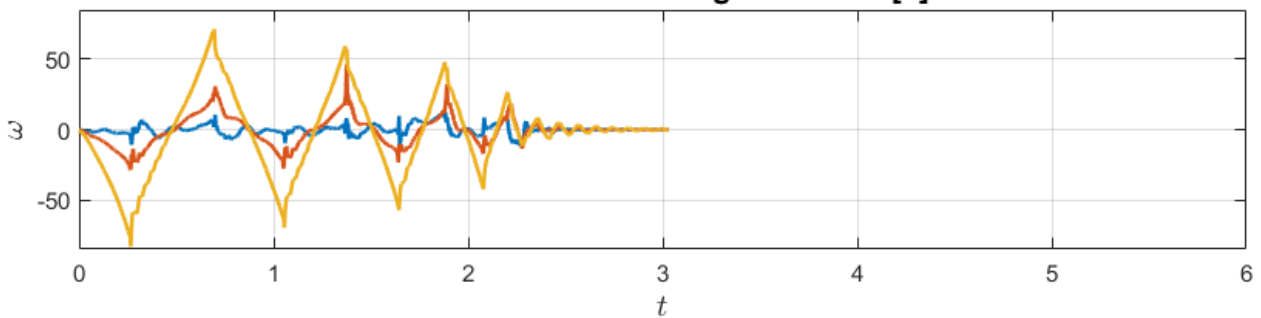
3 lábú elem - töltöttség: 2 - $t=1.67$ [s]



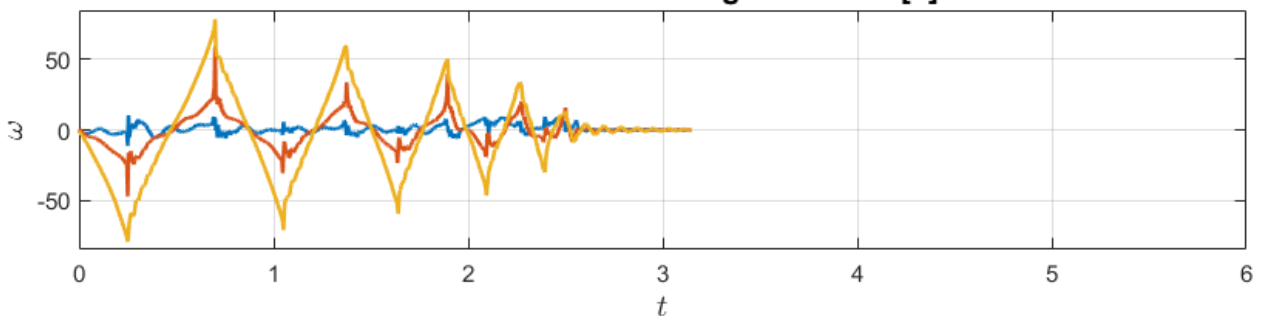
4 lábú elem - töltöttség: 2 - $t=5.77$ [s]



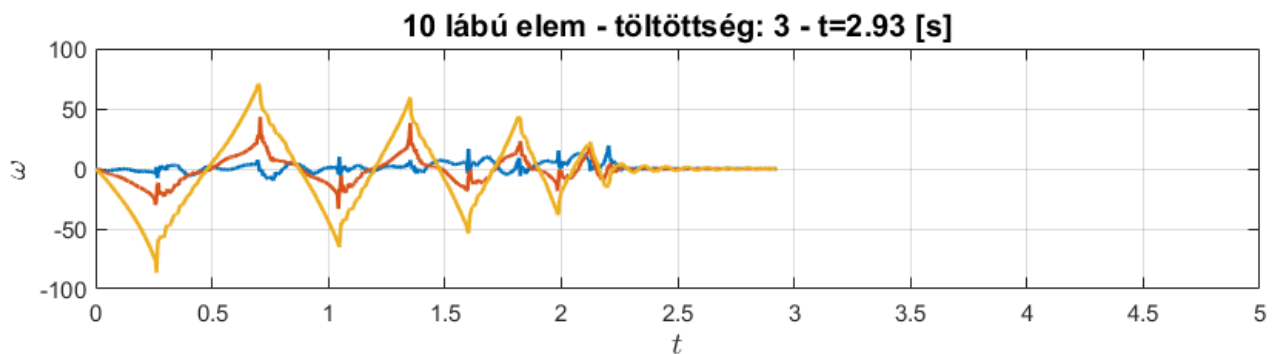
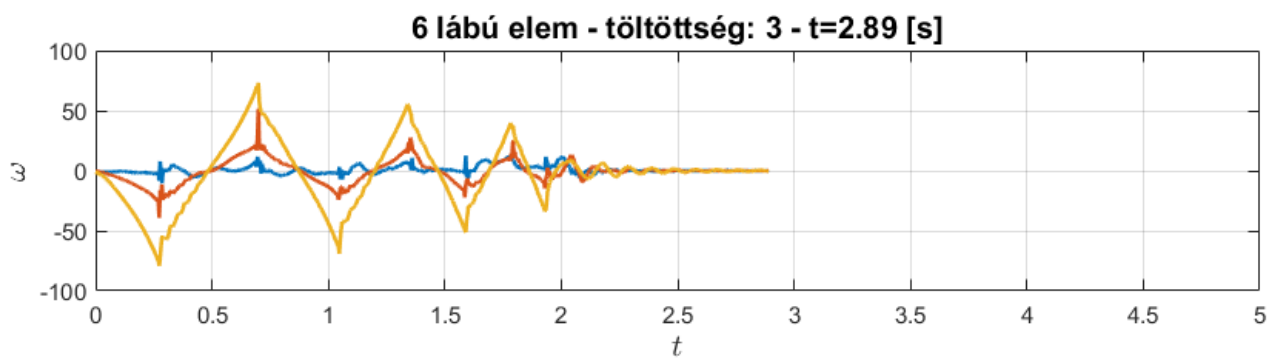
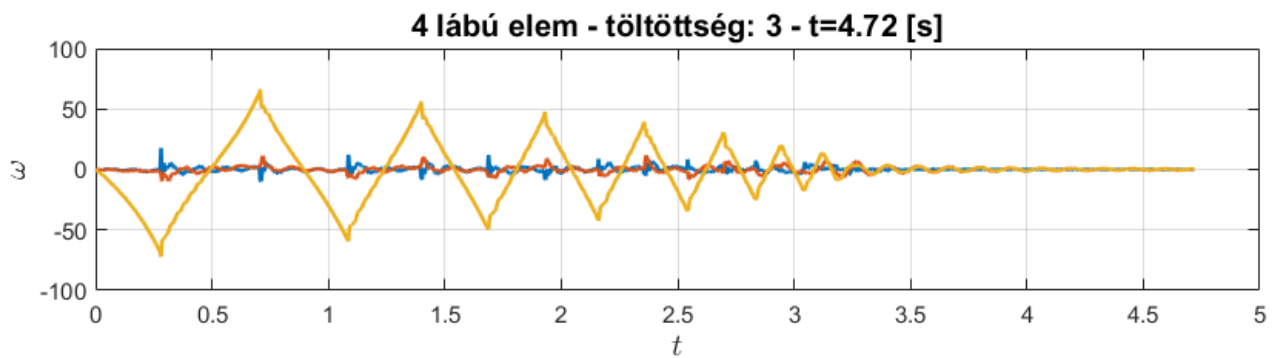
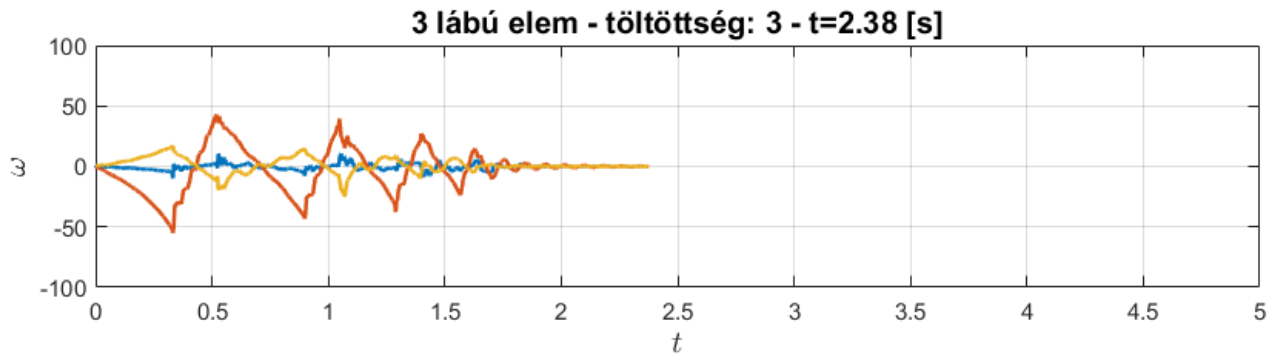
6 lábú elem - töltöttség: 2 - $t=3.04$ [s]



10 lábú elem - töltöttség: 2 - $t=3.15$ [s]

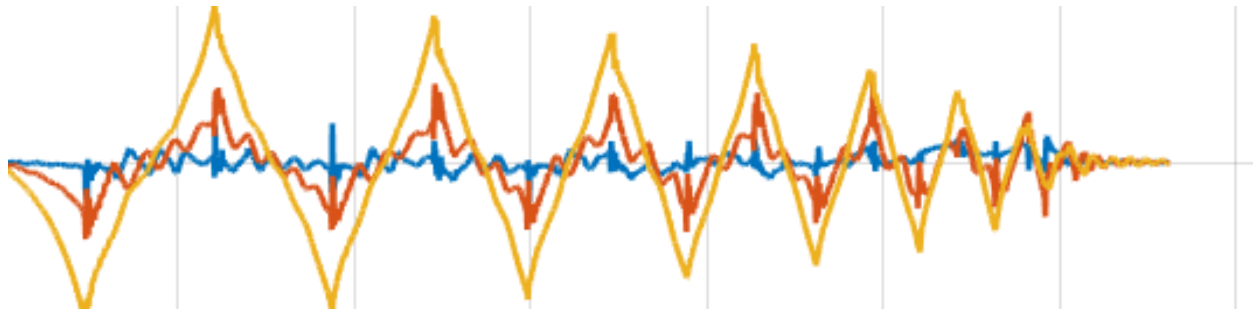


A különböző lábelrendezések szögsebesség-diagrammjai a harmadik töltöttségi szint esetén



A szögsebesség-diagramokról leolvasható, hogy az azonos mértékben kibillentett és az azonos lábelrendezésű hengerek (a 3 lábás elrendezés kivételével) billegési időtartama (t), ami a billegés kezdetétől addig tart, amíg a szögsebesség még nagyobb $0,5 \text{ 1/s}$ -nál, a töltési magasság növelésével csökken, alátámasztva a mérések során látottakat.

Bizonyosságot nyert azon feltételezés is, miszerint a köztes felütközési pontok jelenléte növeli a mozgás térbelivé válásának esélyét, ugyanis a 6 és 10 lábás elrendezésnél a gyenge tengelyre vett szögsebesség (pirossal jelölve) és az erős tengelyre vett szögsebesség (sárgával jelölve) aránya, valamint a csavarodás mértéke a billegés előrehaladtával változik, ami azt jelenti, hogy a test a billegése során kitér a kezdeti kibillentés síkjából. Ez a viselkedés a néglábú hengerre kevésbé igaz, ott ez az arány közel állandó.



A 6 lábú henger szögsebesség-diagramja töltés nélkül

Az 5. periódustól már jól látható az egyes tengelyekre vett szögsebességek arányainak a változása

Ahogy a négy lábú henger esetén, úgy itt is táblázatba foglaltam az eredményeket azok könnyebb értelmezése érdekében. Bár a 3 lábás elrendezés esetén jelentős eltérések figyelhetők meg, 6 és 10 láb esetén a mért értékek jól közelítik az elmélet által jósolt r-számot, ezzel ismét alátámasztva a modell helyességét. A 3 láb esetén tapasztalt eltérések egyik oka lehet, hogy a billegés az eddigiekkel ellentétben nem él-élmenti, hanem pont-élmenti, növelve ezzel az esetleges imperfekciók hatását.

Az elmélet által jósolt és a mért r-számok a hengerben lévő homok magasságának függvényében						
3 láb	A hengerben lévő homok magassága		üres	10,5 cm	20 cm	26 cm
	Elmélet	számolt r-számok mértani közepe	0,9607	0,9157	0,8961	0,8957
	Mérés	r-számok átlagának mértani közepe	0,8917	0,7227	0,7248	0,7706
		r-számok szórása	0,0525	0,1026	0,0307	0,0413
6 láb	A hengerben lévő homok magassága		üres	10 cm	19,5 cm	25 cm
	Elmélet	számolt r-szám	0,9531	0,9039	0,8774	0,8757
	Mérés	r-számok átlaga	0,9529	0,9261	0,8980	0,8922
		r-számok szórása	0,0050	0,0053	0,0146	0,0155
10 láb	A hengerben lévő homok magassága		üres	9,5 cm	20 cm	26 cm
	Elmélet	számolt r-szám	0,9531	0,9039	0,8774	0,8757
	Mérés	r-számok átlaga	0,9462	0,9169	0,9034	0,8721
		r-számok szórása	0,0190	0,0141	0,0100	0,0081
Az ideális töltöttségi magasság és a hozzá tartozó r-szám becsült értéke az Excel-táblázat által számolt adatokból 6 és 10 láb esetén						
2x ideális = 24 cm			$r_{\min} = 0,8753$			

7. Az eredmények felhasználása a gyakorlatban

Mint ahogy azt az absztraktban is említettem, számos helyen találkozhatunk olyan szerkezetekkel a mindennapokban, amiknek a viselkedése jól leírható billegő testként. A magas, karcsú épületek jól közelítik Housner modelljét mindaddig, amíg azok tömegeloszlása homogénnek tekinthető. Vannak azonban épületek, amelyek rendeltetésükből adódóan nem eshetnek ebbe a kategóriába. A silók, gabonatórolók tömegének jelentős része a bennük tárolt takarmánytól függ, ezeket nem kezelhetjük homogén testekként. Elsősorban ezen szerkezetek esetében tartom alkalmazhatónak az elért eredményeket.



Egy, a 2012-es Észak-Olaszországi földrengésben tönkrement siló (Emilia Romagna)

https://www.mdpi.com/buildings/buildings-07-00061/article_deploy/html/images/buildings-07-00061-g001-550.jpg

Bár a földrengések előrejelzése teljes bizonyossággal még nem lehetséges, számos kutatás zajlik elsősorban a tektonikailag aktív területeken annak érdekében, hogy ez megváltozzon. Elég csupán belegondolnunk abba, mennyit fejlődött a technológia az elmúlt 20 évben, mennyi mindenünk van, amiről akkor azt sem gondoltuk, hogy lehetséges. Ennek tükrében véleményem szerint minden okunk megvan bizakodónak lenni a földrengésészszezés jövőjével kapcsolatban.

Akár földrengésekről, akár más, az épületeket érő erőhatásról beszélünk, fontos foglalkoznunk azok épületekre gyakorolt hatásairól. Jelenlegi munkám nem titkolt célja volt egy olyan, tervezési és használati módszer kidolgozása, ami növelheti a billegő mozgást végző szerkezetek, például a silók állékonyságát. Ahogy az elméleti levezetésnél olvasható, csupán néhány, viszonylag könnyedén meghatározható paraméter ismeretében beállítható a rendszer r -száma a silóban lévő gabona magasságának szabályozásával.

Ezen szükséges paraméterek:

- A siló magassága ($2h$)
- A siló alapkörének sugara (R)
- A siló tömege üresen (M)
- A silóban tárolt gabona halmazsűrűsége (δ)

Adott szerkezet esetén eldöntendő például a veszélyforrás. Ha a szerkezetet egy rengés esetén az eldőlés veszélyezteti, célszerű az r -szám csökkentése, minimalizálása úgy, hogy a benne tárolt gabonát leeresztik a képletek által jósolt optimális töltési magasságig.

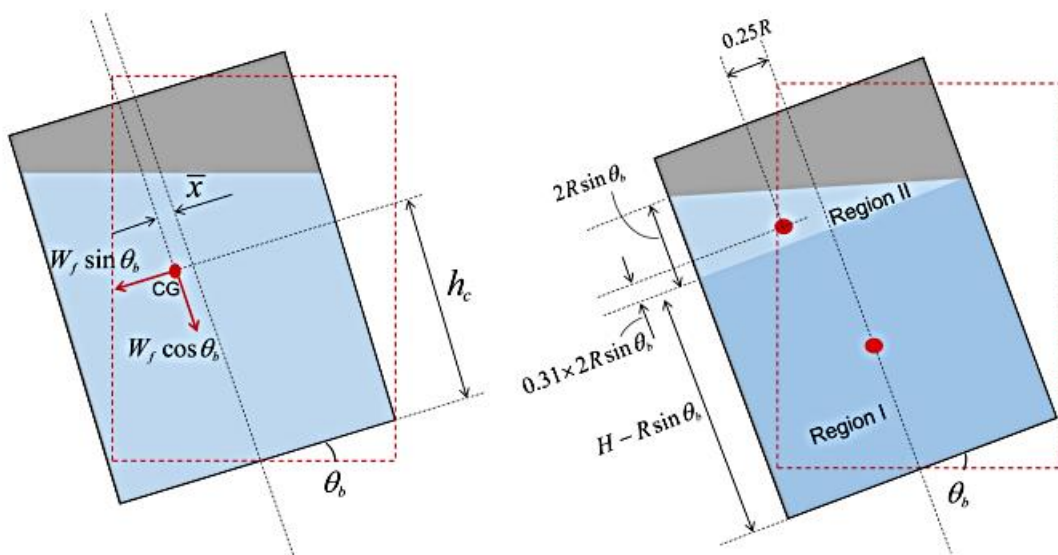
Ha azonban a szerkezetet nem a felborulás, sokkal inkább a tartószerkezet tönkremenetele fenyegeti, érdemes lehet (megfelelő korlátok között) az r -szám növelése, hiszen ilyenkor az ütközések esetén kevesebb energiát veszít a billegő test, amiből következik, hogy a lábainak kevesebb energiát kell elnyelnie, csökkentve ezzel a tönkremenetel esélyét.

Véleményem és reményeim szerint, ha ez a módszer tökéletesedni tud a következő évek folyamán, akár a gyakorlatba is átültethető lesz, és szükség esetén képes lehet súlyos anyagi károktól és balesetektől megmenteni azokat, akik ezt használják.

8. Kitekintés a jövőbe

Annak érdekében, hogy az elméleti számítások elvégezhetőek legyenek, számos idealizálást kellett bevezetni. Ezek közül az egyik, miszerint a henger tökéletesen síkban mozog, már a mérések során cáfolatot nyert. Bár az első periódusokra (amik sok szempontból a legfontosabbak) jó közelítéssel igaz az állítás, a folyamat vége sokszor teljesen más síkban játszódik le, mint amelyekben a kezdeti kitérés történt. A későbbiek során szeretném feltárni azon okokat, melyek a töltött henger mozgásának térbelivé válásáért felelősek, valamint az ebből fakadó jelenégek magyarázatait keresni. A méréseknél használt x-IMU szenzor sokrétű mérőműszerei lehetővé teszik a henger térbeli mozgásának feltérképezését, lehetőséget adva annak átfogó vizsgálatára.

Szintén lényeges közelítés volt a hengerben lévő anyag viselkedésének megkötése. A tárolt anyagok csak nagyrítván teljesen szilárdak, általában szemcsések vagy folyékonyak. Szemcsés anyagok esetén a billegés során az egyes szemcsék elgördülnek egymáson, létrehozva ezzel egy hullámszerű viselkedést. Ahogy a szemek mérete csökken, egyre inkább közelíti az anyag a folyékony halmazállapotot, ami pedig egy kibillentett tartály esetén lényeges tömegeltolódáshoz vezethet, megváltoztatva ezzel a teljes folyamatot. Terveim között szerepel a modellt úgy finomítani, hogy az képes legyen lekövetni a benne tárolt anyag mozgását is, ezzel adva pontosabb eredményt a használói számára.



Folyadékkal töltött henger tartalmának viselkedése az elfordulás függvényében

(Faizan Ul Haq; YU, Ching-Ching; WHITTAKER, Andrew S)

Végül, de nem utolsó sorban előttem áll egy olyan program megírása is, amely érthető és felhasználóbarát módon összegzi mindazt, amit egy Excel formájában az elmúlt időszakban összeállítottam. Ennek eredményeképp csupán pár lényeges adat kiválasztásával számítható lehet az r-szám, anélkül, hogy minden egyes apró részletet értenünk kellene a folyamatban. Beláthatjuk, hogy valószínűleg a legnagyobb igény erre lenne, hiszen, ha őszinték vagyunk magunkkal, mi sem elmélkedünk a robbanó motor felépítésén munkába menet, értjük szervezetünk pontos biológiai működését egy gyógyszer bevételekor, vagy gondoljuk át a teljes mikroelektronikát minden egyes alkalommal, amikor kezünkbe vesszük a telefonunk.

9. Bibliográfia

MIR, Faizan Ul Haq; YU, Ching-Ching; WHITTAKER, Andrew S. Rocking response of liquid-filled cylindrical tanks. *Earthquake Spectra*, 2021, 37.3: 1698-1709.

HOUSNER, George W. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bulletin of the seismological society of America*, 1963, 53.2: 403-417.

VÁRKONYI, Péter L.; KOCSIS, Márton; THER, Tamás. Rigid impacts of three-dimensional rocking structures. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 107.3: 1839-1858.

KOH, Aik-Siong; MUSTAFA, Ghulani. Free rocking of cylindrical structures. *Journal of engineering mechanics*, 1990, 116.1: 35-54.

VELETOS, Anestis S.; TANG, Yu. Rocking response of liquid storage tanks. *Journal of Engineering Mechanics*, 1987, 113.11: 1774-1792.