



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
ÉPÍTÉSZMÉRNÖKI KAR
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

PIRAMISOK GEOMETRIÁJA

Regős Krisztina

Konzulensek:

Dr. Domokos Gábor

Dr. Lángi Zsolt

Dr. Kovács Norbert Krisztián

MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA 2018

ABSZTRAKT

Poliédereknek nevezzük a 3 dimenziós térben véges sok síklappal határolt testeket. Konvexnek nevezünk egy poliédert, ha két tetszőleges pontját összekötő szakasz a poliéder belsejében halad. Konvex poliéderre jó példa egy kocka, vagy akár egy tetraéder.

A poliédereket csoportosíthatjuk lapjaik, csúcsaik és éleik száma szerint. Az Euler-féle poliéder-tétel alapján konvex poliéderekre igaz az $f+v=e+2$ összefüggés, ahol f a lapok, v a csúcsok, e pedig az élek száma. Ezt felhasználva azt mondjuk, hogy az f lapú, v csúcsú konvex poliéderek az $(f,v)^C$ elsődleges kombinatorikai osztály elemei.

Ennél kevésbé ismert, ám bizonyos szempontból hasonló osztályozása a poliédereknek az egyensúlyi helyzetek száma alapján való csoportosítás. Degenerált esetektől eltekintve a lapokon lévő egyensúlyi helyzeteket stabilnak nevezzük és számukat S -sel jelöljük, a csúcsokon lévőket instabilnak nevezzük és számukat U -val jelöljük, az éleken lévőket pedig nyereg típusú egyensúlyoknak nevezzük és számukat H -val jelöljük. A Poincaré-Hopf tétel alapján igaz az $S+U=H+2$ összefüggés, melynek alapján a poliédereket $(S,U)^E$ elsődleges egyensúlyi osztályokba soroljuk.

Azon túlmenően, hogy $f \geq S$, $v \geq U$, elég kevés általános összefüggés ismert a két osztályozás kapcsolatáról, még a legegyszerűbb osztályokban is rengeteg a nyitott kérdés.

A dolgozat témája az $(5,5)^C$ osztály (az úgynevezett pentaéderek, vagy más néven négyszög alapú gúla, avagy piramisok) besorolása az $(S,U)^E$ osztályokba MATLAB számítógépes program használatával. A következő kérdésekre kerestem a választ:

- (a) **SEJTÉS:** (J.H. Conway, 1969): Nem létezik pentaéder az $(S,1)^E$, $(1,U)^E$ $(S,U=1,2,3,4,5)$ egyensúlyi osztályokban.
- (b) **TÉTEL:** Létezik pentaéder az $(S,U)^E$, $(S,U=2,3,4,5)$ osztályok mindegyikében.

A program segítségével numerikusan megerősítettem J.H. Conway 1969-es sejtését és konstruktív eszközökkel bebizonyítottam a (b) sejtést. Az utóbbival kapcsolatos eredmény alátámasztására az azonosított 16 egyensúlyi osztály egy-egy kiválasztott elemét 3D nyomtatóval is megvalósítottam.

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés.....	4
2. Poliéderek szabadsági fokainak száma	6
3. Kombinatorikai és egyensúlyi osztályok.....	8
3.1. Elsődleges kombinatorikai osztályok	8
3.2. Elsődleges egyensúlyi osztályok	9
4. A pentaéderek definiálása	11
4.1. Szabadsági fokok egy pentaéder esetén.....	11
4.2. Pentaéder megjelenítése MATLAB-ban.....	12
4.3. Pentaéderek konfigurációs tere	17
5. Egyensúlyok vizsgálata	18
5.1. Súlypont helyzete.....	18
5.2. Stabil egyensúly	18
5.3. Instabil egyensúly	19
5.4. Nyereg típusú egyensúly.....	20
5.5. Pentaéderek elsődleges egyensúlyi osztályokba sorolása.....	21
6. Eredmények.....	22
6.1. J. H. Conway sejtése	22
6.2. Elért eredmények	22
6.3. 3-dimenziós megjelenítés	23
7. Összegzés	26
Köszönetnyilvánítás	27
Irodalomjegyzék.....	27
Ábrajegyzék	28

1. BEVEZETÉS

A geometriai formák alkalmazása mindig is jelen volt az építészetben. Ezen formák közül kiemelkednek a legegyszerűbb poliéderek, melyek már az ókorban megjelentek. Dolgozatomban az 5 lapú, 5 csúcú konvex testtel, a pentaéderrel foglalkozom, melynek kimagasló építészeti alkalmazásai az egyiptomi, vagy a kevésbé ismert közép-amerikai és kínai piramisok. Ez a test napjainkig végigkíséri az építészeti formaalkotást, népszerű példa erre a Louvre üvegpiramisa.

1. definíció:

Síkban ($d=2$) a politópokat poligonoknak nevezzük, melyeknek v csúcuk és e élük van. Mivel mindig $v=e$, ezért egy konvex poligon $(e)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályát az élek száma meghatározza.

Térben ($d=3$) a politópokat poliédereknek nevezzük, melyeknek v csúcuk, e élük és f lapjuk van. Mivel az Euler-tétel alapján $v-e+f=2$ ezért egy konvex poliéder $(f,v)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályát a lapok és csúcuk száma meghatározza.

2. definíció:

Egy d -dimenziós P konvex politóp szabadsági foka azon skalár paraméterek $n(P,d)$ száma melyek P formáját merevtest-szerű mozgásoktól és lineáris hasonlóságtól eltekintve egyértelműen meghatározzák.

A 2. fejezetben $d \leq 3$ -ra bizonyítjuk, hogy a szabadsági fokot az elsődleges kombinatorikai osztály egyértelműen meghatározza.

1. tétel:

$$(a) n(P,2)=2(e(P)-2)$$

$$(b) n(P,3)=(e(P)-1)$$

A 3. fejezetben a kombinatorikai osztályozás mellett bevezetjük az egyensúlyi osztályozást is.

3. definíció

Jelölje egy 2-dimenziós (ill. 3-dimenziós) konvex politóp stabil, instabil (és nyereg-típusú) egyensúlyainak számát rendre S , U , H . Mivel a Poincaré-Hopf tétel [4] alapján konvex politóp

esetén síkban $S=U$, és térben $S+U-H=2$, ezért a politóp elsődleges $(S)^E$ $((S,U)^E)$ elsődleges egyensúlyi osztályát a stabil (stabil és instabil) egyensúlyok száma meghatározza.

A 4. fejezetben az $(f,v)^C=(5,5)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályt alkotó pentaéderek definiálását részletezem. Leírom ezen testek 7 dimenziós konfigurációs terét és ennek a térnek egy MATLAB számítógépes program segítségével történő letapogatását. Az 5. fejezetben vizsgálom a pentaéderek stabil (S), instabil (U) és nyereg (H) típusú egyensúlyi helyzeteinek feltételeit, és ezek számát, melyek alapján $(S,U)^E$ elsődleges egyensúlyi osztályokba sorolhatjuk őket. A 6. fejezetben közlöm a számítási eredményeket, melyek egyrészt alátámasztják az alábbi sejtést:

1. sejtés:(J.H. Conway [1], 1969)

Nem létezik pentaéder az $(S,1)^E$, $(1,U)^E$ ($S,U=1,2,3,4,5$) egyensúlyi osztályokban.

Számítási eredményeim egyúttal konstruktív bizonyítását adják az alábbi tételnek:

2. tétel:

Létezik pentaéder az $(S,U)^E$, ($S,U=2,3,4,5$) osztályok mindegyikében.

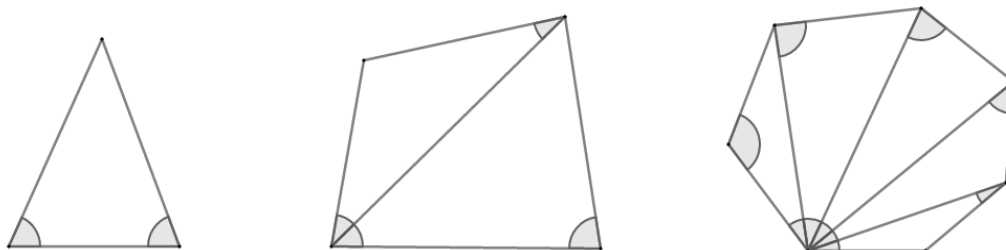
A bizonyítás további illusztrálásaként a fent szereplő 16 osztály mindegyikéből kiválasztottam egy-egy pentaédert, és 3D nyomtatóval megvalósítottuk őket.

A 7. fejezet összefoglalja a kutatás eredményeit.

2. POLIÉDEREK SZABADSÁGI FOKAINAK SZÁMA

Elsőként az 1. tétel (a) állítását igazoljuk.

Bizonyítás: Egy háromszög (hasonlóság erejéig) 2 paraméterrel határozható meg (például a háromszög két szöge) Egy négyszög megadásához 4 adatra van szükség: egy átlója két háromszögre bontja, amit $2+2=4$ adat határoz meg. A fenti gondolat alapján, teljes indukcióval beláthatjuk az állítást: ha egy n -szöget p paraméter határoz meg, akkor egy $(n+1)$ szöget $(p+2)$ paraméter fog meghatározni. Ezért egy e éllel rendelkező konvex poligon szabadsági fokainak száma $2(e-2)=2e-4$. Ezzel az 1. tétel (a) állítását beláttuk. A 2.1-es ábrán a paraméterek egy lehetséges megadását ábrázoltam.



2.1.ábra: Poligonok meghatározása szögekkel

Az 1. Tétel (b) állítását az alábbiakban bizonyítjuk:

Bizonyítás: Egy konvex poliéder egy lapjának 3 pontja által alkotott háromszöget nevezzük ki *alappnak*, melyet az előző bizonyítás alapján 2 adattal határozhatjuk meg. A térbeli csúcsok hozzáadását elsőként egy tetraéder példáján vizsgáljuk. A negyedik csúcsot az öt tartalmazó három lap alappal bezárt szögével adjuk meg. Ezt a módszert használva egy f lapú, v csúcsú és e élű konvex poliéder szabadsági fokainak számára az $n(P,3)=2+3(v-3)=3v-7$ eredményt kapjuk.

A képlet helyes eredményt ad szimpliciális (vagyis csupa háromszög lappal rendelkező) poliéderek esetén, azonban redukálható a kapott eredmény más poliéderekre.

Legyen a k -adik lap élszáma e_k . Ekkor minden lapon összegezve az éleket $\sum e_k=2e$, mert minden élt két lap tartalmaz. Egy lapon e_k-3 kényszerfeltétel kell, hogy a csúcsok síkidomot alkossanak. Ez összegezve minden lapra $(\sum e_k)-3f=2e-3f$. Ezt az élszám kétszereséből kivonva megkapjuk, hogy mennyivel csökken a $3v-7$ érték egy nem szimpliciális poliéder esetén.

$$n(P,3)=3v-7-(2e-3f)=3(v+f-2)-2e-1=3e-2e-1=e-1$$

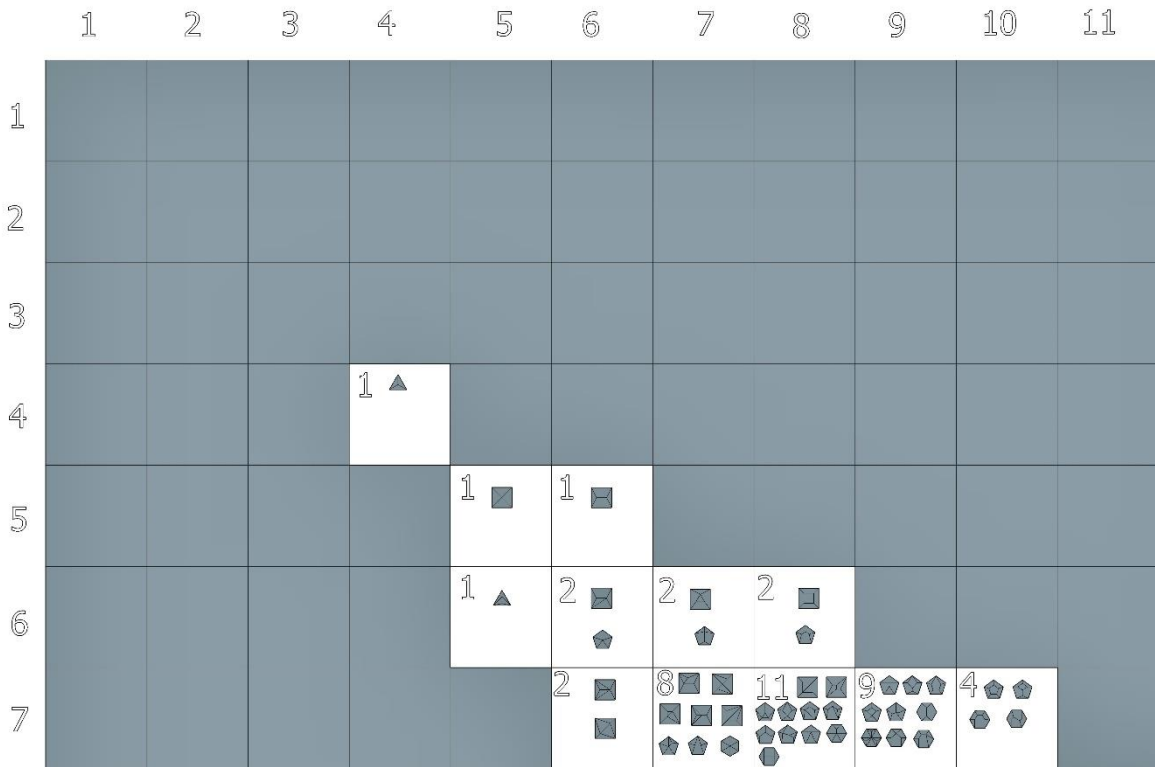
Egy tetszőleges konvex poliéder szabadsági fokainak száma tehát $e-1$ és azt is láthatjuk, hogy a tetraéder esetében a fenti képlet kiadja a korábban kapott $n=3v-7$ értéket. A fenti átalakítást az Euler-féle poliéder-tétel alapján végezhetjük, ami kimondja, hogy a fennálló jelölések mellett $v+f=e+2$.

3. KOMBINATORIKAI ÉS EGYENSÚLYI OSZTÁLYOK

3.1. Elsődleges kombinatorikai osztályok

Az Euler-féle poliédertétel alapján az f lapú, v csúcsú és e élű konvex poliédereket $(f,v)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályokba sorolhatjuk. Steinitz bizonyította, hogy az $(f,v)^C$ osztály akkor és csak akkor nem üres, ha (f,v) poliéderális pár, ahol az x és y pozitív egészek esetén (x,y) akkor és csak akkor poliéderális pár, ha $x \geq 4$ és $x/2 + 2 \leq y \leq 2x - 4$. [2,3]

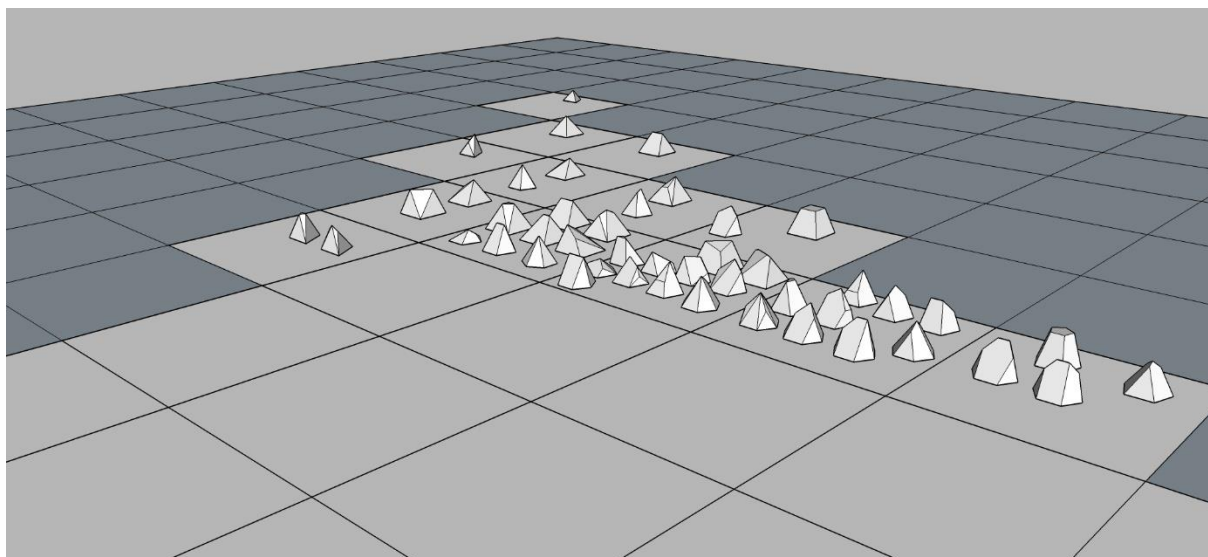
Az $(f,v)^C$ elsődleges kombinatorikai osztályok egy táblázat segítségével megjeleníthetők és Steinitz tétele meghatározza, hogy ezen táblázat mely mezőiben lehetnek poliéderek, és melyekben nem. Ennek a táblázatnak egy részletét mutatja be a 3.1.1. és 3.1.2. ábra.



3.1.1. ábra: Az f,v táblázat egy részlete a benne szereplő poliéderekkel (felülnézetben) [6]

A vízszintes tengely a lapok számát, a függőleges tengely a csúcsok számát jelöli.

A fehér mezőkben léteznek poliéderek, a szürke mezőkben nem.



3.1.2. ábra: Az f, v táblázat a 3. ábrán szereplő poliéderekkel térben.

A $(4,4)^C$ osztályban csak a tetraéder, az $(5,5)^C$ osztályban csak a pentaéder szerepel. Magasabb osztályokban már több, egymástól eltérő lapszerkezetű poliédert találhatunk, tehát az elsődleges kombinatorikai osztály még kombinatorikai szempontból sem egyértelmű megadása a poliédereknek. Egyazon $(f, v)^C$ osztályokba tartozó poliédereket a lapszerkezetet is tartalmazó másodlagos kombinatorikai osztályokba sorolással különböztethetünk meg.

3.2. Elsődleges egyensúlyi osztályok

Konvex poliédereknek a lapjaikon stabil, csúcsaikon instabil, éleiken nyereg-típusú egyensúlyi helyzetei lehetnek, melyek darabszámát rendre S , U , H fogja jelölni. Az Euler-féle poliédertételhez formai szempontból hasonlít a konvex testekre vonatkoztatott Poincaré-Hopf tétel [4], mely a 3. definícióban leírtak szerint kimondja, hogy $S+U=H+2$, mely alapján a konvex poliédereket az $(S, U)^E$ elsődleges egyensúlyi osztályokba soroljuk. Bár az $(f, v)^C$ és $(S, U)^E$ osztályozás közötti kapcsolat bonyolult, bizonyított [5], hogy bármely $(f, v)^C$ osztályban létezik olyan poliéder, amelyre $f=S$ és $v=U$, azaz az $(f, v)^E$ elsődleges egyensúlyi osztályba sorolható be.

Az triviális, hogy $S \leq f$ és $U \leq v$, de kevés egyéb általános összefüggés ismert. Nem tudjuk például általánosságban, hogy mely $(S, U)^E$ osztályokban léteznek adott f lapú v csúcsú poliéderek.

J. H. Conway bizonyítása alapján [1] tudjuk, hogy nem létezik $S=1$ stabil egyensúllyal rendelkező homogén tetraéder. Sok egyéb olyan $(f, v)^C$ osztály van azonban, ahol ugyanez sejthető, de bizonyított eredmény nincs.

A kutatásom célja volt megerősíteni a Conway által megfogalmazott 1. sejtést, és bizonyítást adni a 2. tételre.

4. A PENTAÉDEREK DEFINIÁLÁSA

A pentaéderek vizuális megjelenítéséhez a MATLAB számítógépes programot használtam. A program a csúcsok koordinátáinak ismeretében 3 dimenzióban kirajzolja a pentaédert.

4.1. Szabadsági fokok pentaéder esetén

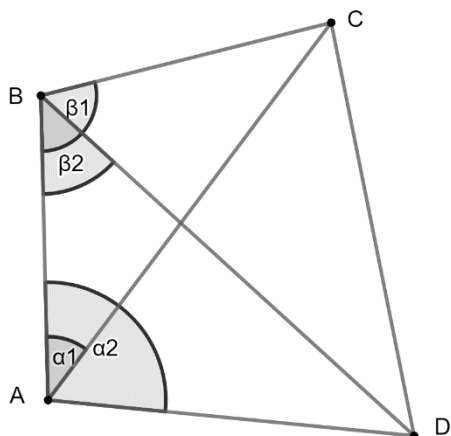
Tetszőleges pentaéder esetén $f=5$, $v=5$, $e=8$. Az 1. tétel alapján szabadsági fokainak száma $e-1=7$.

Nem egyértelmű azonban, hogy ezen adatok milyen típusúak. Megadhatjuk az $ABCDE$ pentaédert csúcsainak C_x , C_y , D_x , D_y , E_x , E_y , E_z koordinátaival, a nagyítás és a 3 dimenzióban való forgatás kiküszöbölésére legyen $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$ és $C_z=0$, $D_z=0$. Ezzel megadtuk az egyik oldal hosszát és az egyik lap síkját.

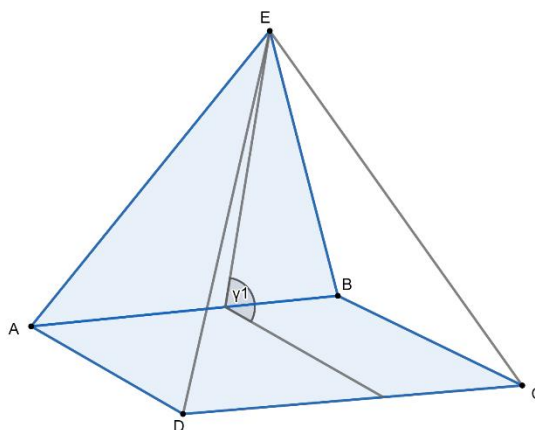
Egy másik fajtája a szabadsági fokok meghatározásának a szögekkel való megadás. Az alap négyszög 4 szög segítségével adható meg, E csúcshoz pedig 3, a csúcsot tartalmazó lap bezárt szöge szükséges.

A feladat egyik lényeges eleme, hogy a pentaéderek konfigurációs terét minél teljesebb mértékben le tudjuk tapogatni. Ehhez a szögek megadását célszerű választani, hiszen ekkor a konfigurációs tér egy kompakt tartomány.

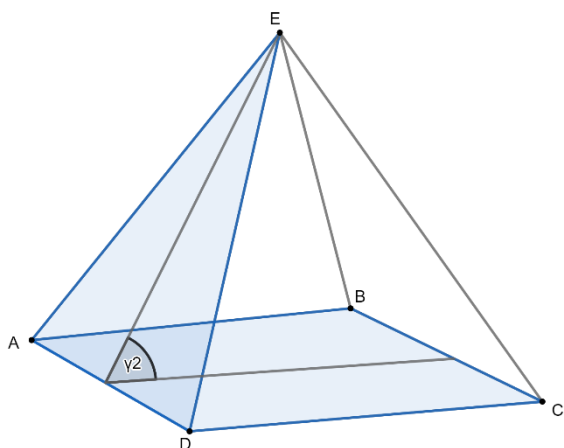
A kiválasztott 7 szög a következő: $\alpha_1=BAC$ szög, $\beta_1=ABC$ szög, $\alpha_2=BAD$ szög, $\beta_2=ABD$ szög, γ_1 $ABCD$ lap és ABE lap bezárt szöge, γ_2 $ABCD$ lap és ADE lap bezárt szöge, γ_3 $ABCD$ lap és BCE lap bezárt szöge. Ezt mutatják be a 4.1.1., 4.1.2., 4.1.3 és 4.1.4. ábrák.



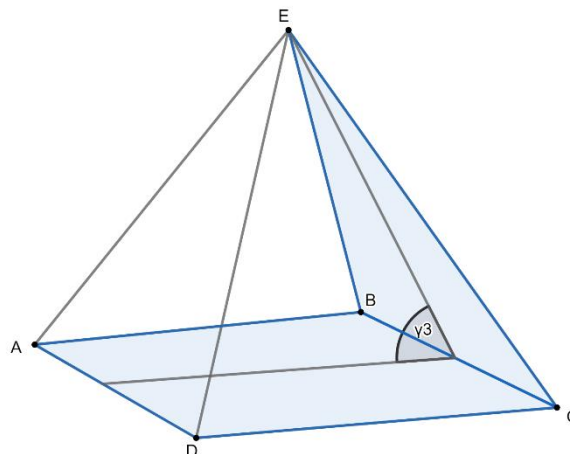
4.1.1. ábra: $\alpha_1=BAC$ szög, $\beta_1=ABC$ szög,
 $\alpha_2=BAD$ szög, $\beta_2=ABD$ szög



4.1.2. ábra: γ_1 $ABCD$ lap
és ABE lap bezárt szöge



4.1.3. ábra: γ_2 $ABCD$ lap
és ADE lap bezárt szöge



4.1.4. ábra: γ_3 $ABCD$ lap
és BCE lap bezárt szöge

4.2. Pentaéder megjelenítése MATLAB-ban

A koordinátákat szögekkel kifejezve tudjuk a pentaédert kirajzolni a programmal:

$$AB = 1,$$

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{Dx}{Dy},$$

$$(2) \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{Dx}{1-Dy}.$$

A Dx és Dy értékek az (1) és (2) egyenletekből kifejezhetők:

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{Dx}{1 - \frac{Dx}{\operatorname{tg}\alpha_2}},$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 - \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\alpha_2} \cdot Dx = Dx,$$

$$Dx = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{1 + \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\alpha_2}} = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\alpha_2}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\beta_2},$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 \cdot Dy}{1 - Dy},$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 - \operatorname{tg}\beta_2 \cdot Dy = \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot Dy,$$

$$Dy = \frac{\operatorname{tg}\beta_2}{\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\beta_2}.$$

Ugyanígy számolhatjuk a Cx és Cy értékeket:

$$Cx = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\beta_1},$$

$$Cy = \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\beta_1}.$$

Az E csúcs koordinátáit az ADE , ABE és BCE síkok metszéséből számoljuk.

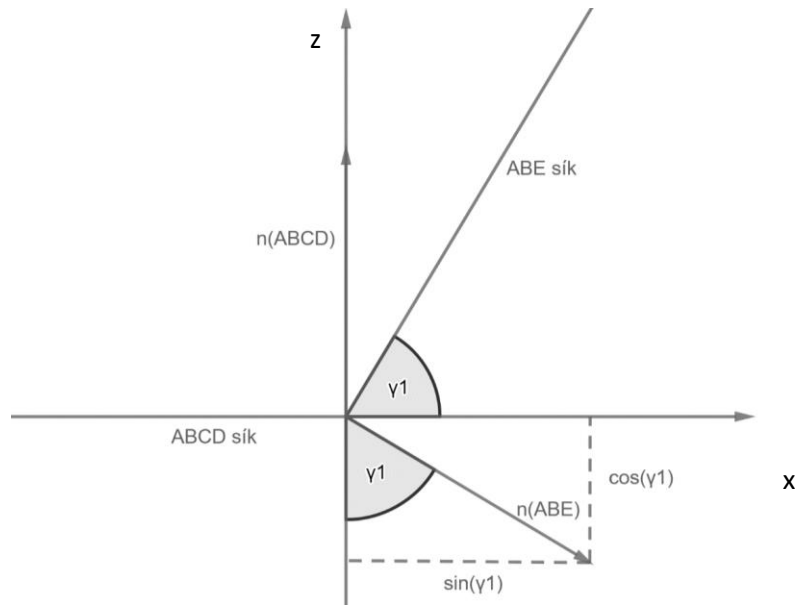
Két sík normálvektorának bezárt szöge megegyezik a két sík bezárt szögével. A síkok egyenleteit normálvektorukkal és egy rajtuk lévő ponttal határozzuk meg. A háromismeretlenes egyenletrendszer megoldása Ex , Ey és Ez .

Az $ABCD$ sík normálvektora $n_{ABCD}(0; 1; 0)$, egyenlete: $z = 0$.

Az ABE sík normálvektorát az n_{ABCD} vektort az y tengely körül γ_2 -vel elforgatva kapjuk, koordinátái a 4.2.1. ábráról leolvashatóak. Tehát az ABE sík normálvektora $n_{ABE}(\sin\gamma_1; 0; -\cos\gamma_1)$, egyenlete:

$$(I) \quad \sin\gamma_1 \cdot x - \cos\gamma_1 \cdot z = 0.$$

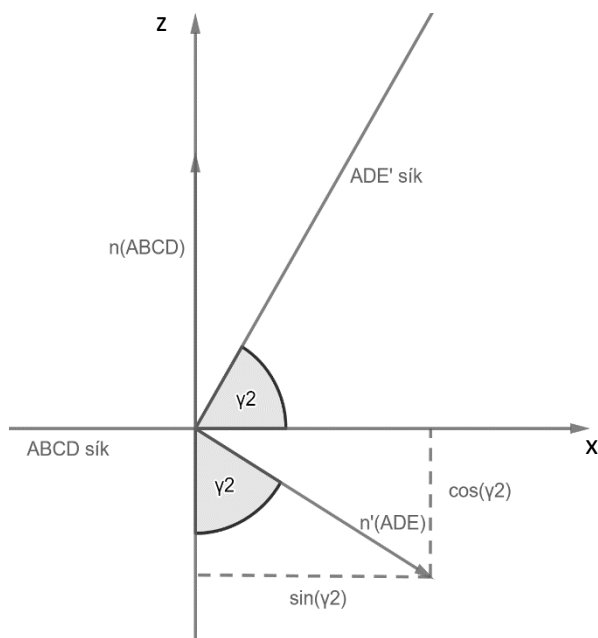
Piramisok geometriája



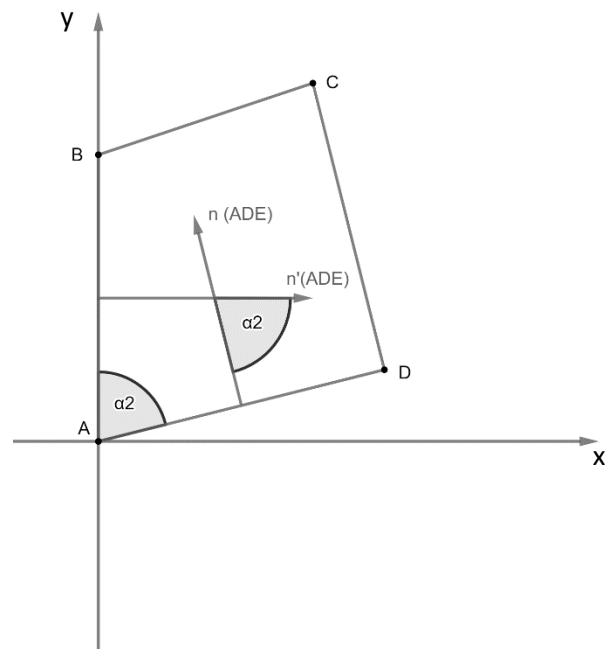
4.2.1. ábra: Az ABE sík normálvektora

Az ADE sík normálvektorát az $n_{ABCD}(0; 1; 0)$ vektort y tengely körül γ_2 -vel, z tengely körül α_2 -vel elforgatva kapjuk. A 4.2.2. és 4.2.3. ábrák ezt a transzformációt ábrázolják. Tehát a keresett vektor $n_{ADE}(-\cos\alpha_2; \sin\alpha_2; -ctg\gamma_2)$, a sík egyenlete:

$$(II) \quad -\cos\alpha_2 \cdot x + \sin\alpha_2 \cdot y - ctg\gamma_2 \cdot z = 0.$$



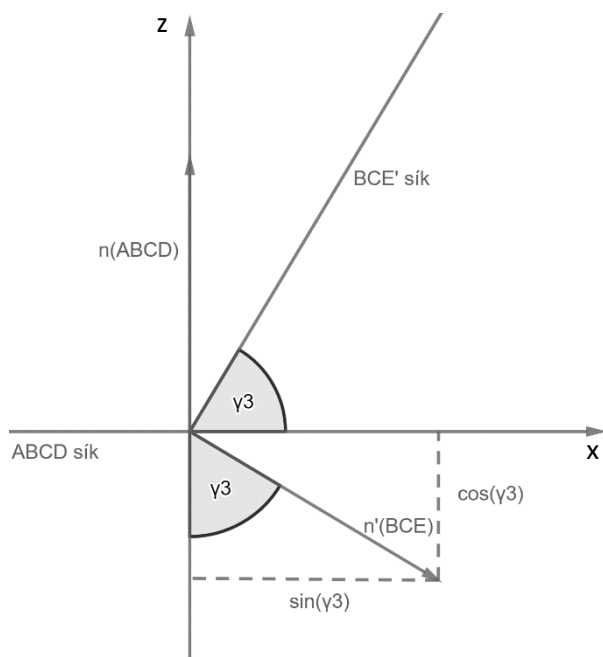
4.2.2. ábra: Az n_{ABCD} vektort y tengely körül forgatjuk, n'_{ADE} koordinátái az ábráról leolvashatóak.



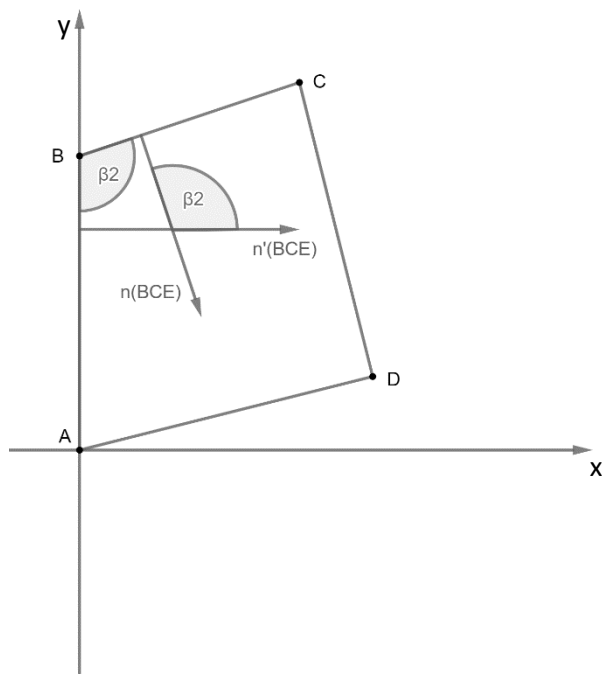
4.2.3. ábra: Az n'_{ADE} vektort z tengely körül forgatjuk α_2 -vel.

A BCE sík normálvektorát az $n_{ABCD}(0; 1; 0)$ vektort y tengely körül γ_3 -mal, z tengely körül β_1 -gyel elforgatva kapjuk. Ezt a 4.2.4. és 4.2.5. ábrák mutatják be. Tehát a keresett vektor $n_{BCE}(-\cos\beta_1; -\sin\beta_1; -ctg\gamma_3)$, a sík egyenlete:

$$(III) \quad -\cos\beta_1 \cdot x - \sin\beta_1 \cdot y - ctg\gamma_3 \cdot z = -\sin\beta_1.$$



4.2.4. ábra: Az n_{ABCD} vektort y tengely körül forgatjuk, n'_{BCE} koordinátái az ábráról leolvashatóak.



4.2.5. ábra: Az n'_{BCE} vektort z tengely körül forgatjuk β_1 -gyel.

Ha megoldjuk az egyenletrendszer, akkor $x=Ex$, $y=Ey$, $z=Ez$ adódik:

$$(I+II) \quad 0 = (\sin\gamma_1 - \cos\alpha_2)x + \sin\alpha_2 \cdot y + (-\cos\gamma_1 - ctg\gamma_2)z,$$

$$y = \frac{(\cos\gamma_1 + ctg\gamma_2)z + (\cos\alpha_2 - \sin\gamma_1)x}{\sin\alpha_2},$$

$$(II+III) \quad -\sin\beta_1 = (-\cos\alpha_2 - \cos\beta_1)x + (\sin\alpha_2 - \sin\beta_1)y + (-ctg\gamma_2 - ctg\gamma_3)z.$$

Most y -t behelyettesítve:

$$\begin{aligned} -\sin\beta_1 = & \left(-\cos\alpha_2 - \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 - \sin\gamma_1 - \frac{\sin\beta_1(\cos\alpha_1 - \sin\gamma_1)}{\sin\alpha_1} \right) x \\ & + \left(-ctg\gamma_2 - ctg\gamma_3 + \cos\gamma_1 + ctg\gamma_2 \right. \\ & \left. - \sin\beta_1 \frac{\cos\gamma_1 + ctg\gamma_2}{\sin\alpha_2} \right) z. \end{aligned}$$

Legyen

$$K = -ctg\gamma_3 + \cos\gamma_1 - \sin\beta_1 \frac{\cos\gamma_1 + ctg\gamma_2}{\sin\alpha_2}$$

és

$$L = -\cos\alpha_2 - \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 - \sin\gamma_1 - \frac{\sin\beta_1(\cos\alpha_1 - \sin\gamma_1)}{\sin\alpha_1}.$$

Így

$$-\sin\beta_1 = L \cdot x + K \cdot z, \text{ azaz}$$

$$x = \frac{-\sin\beta_2 - K \cdot z}{L}.$$

(I)-be behelyettesítve:

$$\sin\gamma_1 \cdot \frac{-\sin\beta_2 - K \cdot z}{L} - \cos\gamma_1 \cdot z = 0,$$

$$-\frac{\sin\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{L} - \frac{\sin\gamma_1 \cdot K \cdot z}{L} - \cos\gamma_1 \cdot z = 0,$$

$$\frac{\sin\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{L} = \left(\frac{\sin\gamma_1 \cdot K}{L} - \cos\gamma_1 \right) z,$$

$$z = -\frac{\sin\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{K \cdot \sin\gamma_1 + L \cdot \cos\gamma_1}.$$

Ebből kifejezhető x és y :

$$x = -\frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma_1} \cdot \frac{\sin\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{K \cdot \sin\gamma_1 + L \cdot \cos\gamma_1} = -\frac{\cos\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{K \cdot \sin\gamma_1 + L \cdot \cos\gamma_1},$$

$$y = \frac{-\cos\alpha_2 \cdot \frac{\cos\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{K \cdot \sin\gamma_1 + L \cdot \cos\gamma_1} - ctg\gamma_2 \cdot \frac{\sin\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{K \cdot \sin\gamma_1 + L \cdot \cos\gamma_1}}{\sin\alpha_2}.$$

Tehát az E csúcs koordinátái:

$$E_x = -\frac{\cos\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{K \cdot \sin\gamma_1 + L \cdot \cos\gamma_1},$$

$$E_y = \frac{-\cos\alpha_2 \cdot \frac{\cos\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{K \cdot \sin\gamma_1 + L \cdot \cos\gamma_1} - ctg\gamma_2 \cdot \frac{\sin\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{K \cdot \sin\gamma_1 + L \cdot \cos\gamma_1}}{\sin\alpha_2},$$

$$E_z = -\frac{\sin\gamma_1 \cdot \sin\beta_2}{K \cdot \sin\gamma_1 + L \cdot \cos\gamma_1}.$$

4.3. Pentaéderek konfigurációs tere

A fentiekben definiáltuk a pentaéderek konfigurációs terét, mely $[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$ 7-dimenziós tér alábbi kompakt tartománya:

$$0 < \alpha_1 < \pi,$$

$$0 < \beta_1 < \pi - \alpha_1,$$

$$0 < \alpha_2 < \pi,$$

$$0 < \beta_2 < \pi - \alpha_2,$$

$$0 < \gamma_1 < \pi,$$

$$0 < \gamma_2 < \pi,$$

$$0 < \gamma_3 < \pi - \gamma_2.$$

Ebben a tartományban definiáljuk az alábbi 7-dimenziós ekvidisztáns rácsot:

$$\alpha_1 = i_1 \pi / n,$$

$$\beta_1 = i_2 (\pi - \alpha_1) / n,$$

$$\alpha_2 = i_3 \pi / n,$$

$$\beta_2 = i_4 (\pi - \alpha_2) / n,$$

$$\gamma_1 = i_5 \pi / n,$$

$$\gamma_2 = i_6 \pi / n,$$

$$\gamma_3 = i_7 (\pi - \gamma_2) / n.$$

ahol az i_k ($k=1,2,3,4,5,6,7$) ciklusváltozók az $1,2,3,\dots,n-1$ értékeket vehetik fel 7 egymásba ágyazott ciklusban. A rács sűrűségét az n paraméter rögzíti.

A 4.2. részben írtak segítségével meghatározhatjuk az egyes rádspontokhoz tartozó koordinátákat.

5. EGYENSÚLYOK VIZSGÁLATA

Egyensúlyi pontnak nevezzük a konvex poliéder határának azon pontjait, melyeken a poliédert egy vízszintes síkon megtámasztva a poliéder statikai értelemben egyensúlyban van. Stabilitás szempontjából 3 típusú egyensúlyi pontot különböztetünk meg generikus konvex poliéderek esetén. Stabil egyensúlyi pont lehet a poliéder lapjain, instabil a csúcsain és nyereg típusú egyensúlyi pont lehet az élein.

Az egyensúlyok vizsgálatát saját készítésű programokkal végeztem.

5.1. Súlypont helyzete

Egy $z=0$ síkon lévő $ABCD$ négyszög súlypontjának koordinátái:

$$S_{ABCD} \left(\frac{Ax + Bx + Cx + Dx}{4}; \frac{Ay + By + Cy + Dy}{4}; 0 \right).$$

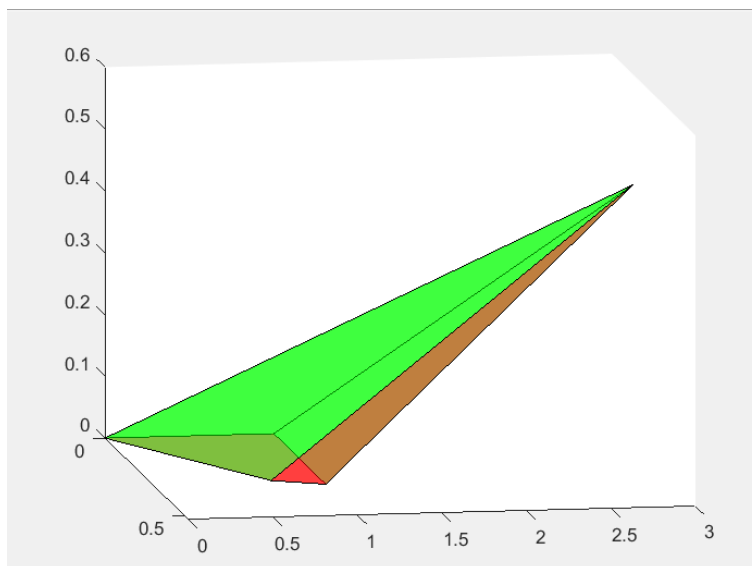
Egy gúla súlypontja az alap súlypontját és a csúcspontot összekötő szakasz negyedelőpontjában van. Ez alapján az $ABCD$ négyszögre emelt pentaéder súlypontjának koordinátái:

$$S \left(\frac{3Ax + 3Bx + 3Cx + 3Dx + 4Ex}{16}; \frac{3Ay + 3By + 3Cy + 3Dy + 4Ey}{16}; \frac{Ez}{4} \right).$$

5.2. Stabil egyensúly

Egy lapon akkor van (stabil) egyensúlyi helyzet, ha a súlypont adott lap síkjára vetített képe a lapon belül van. Ennek teljesülését a program az „*egyensuly_lap.m*” nevű szubrutin meghívásával ellenőrzi. A program változói a 7 szög, melyeket szabadsági fokoknak választottunk. A „*piramis.m*” segítségével számolhatjuk a pentaéder A, B, C, D, E csúcsainak koordinátáit és az S súlypontot. Először létrehozuk az $ABCD, ABE, BCE, CDE$ és DAE síkokat 3 pontjuk segítségével, majd az S súlypont vetületeit az egyes síkokra, melyeket rendre $S_{ABCD}, S_{ABE}, S_{BCE}, S_{CDE}$ és S_{DAE} jelöl. Ezek lesznek az egyensúlyi pontok. Ha az egyensúlyi pont belül van a poliéder hozzá tartozó lapján, akkor azon a lapon stabil egyensúlyi helyzet van. Ezt a MATLAB-ba beépített `isPointInPolygon` paranccsal vizsgálhatjuk meg. A szubrutin lefuttatása után egy bináris kódot kapunk, mely az öt lap egyensúlyi helyzetét jelöli a fenti sorrendben (0

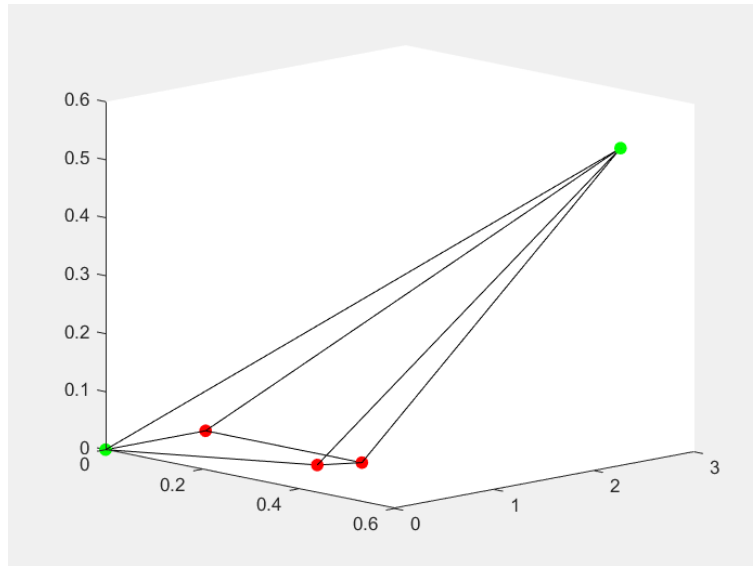
ha nincs egyensúly, 1 ha van egyensúly). A MATLAB-ban 3-dimenzióban is megjeleníthetünk térelemeket a `plot3` parancs segítségével. Az „*egyensuly_lap.m*” nevű szubrutin eredményeként a pentaédert is megjeleníti a program. Azokat a lapokat, melyeken van egyensúly zölddel, amelyeken nincs, azokat pirossal ábrázoltam.



5.2.1. ábra: Egyensúlyok a lapokon MATLAB-ban

5.3. Instabil egyensúly

Egy csúcs akkor instabil egyensúlyi helyzet, ha az őt és a súlypontot összekötő szakaszra a csúcsba állított merőleges sík nem metsz bele a pentaéderbe. A program meghívja az „*egyensuly_csucs.m*” nevű szubrutint, mely a maradék négy csúcsra megvizsgálja, hogy a létrehozott síknak azonos oldalán vannak-e. Mivel a vizsgált pentaéderek konvexek, ennek ellenőrzése elegendő a feltétel teljesüléséhez. A változók szintén a 7 szög, melyekből a „*piramis.m*” segítségével az A , B , C , D , E és S pontok koordinátáit számolhatjuk. A P_A sík normálvektora az SA vektor, egy pontja A . Így megkapjuk minden csúcsra rendre a P_A , P_B , P_C , P_D és P_E síkokat, melyek merőlegesek a csúcsot és a súlypontot összekötő szakaszra. Minden esetben megvizsgáljuk, hogy a négy csúcs, mely nem eleme a síknak, a sík megegyező oldalán vannak-e. Ehhez az `isBelowPlane` paranccsal három beágyazott ciklussal megvizsgálom, hogy az egyes pontok alatta vagy felette vannak a síknak, és ezek mind a négy esetben megegyeznek-e. Ha megegyeznek, akkor van instabil egyensúly a csúcson, ha nem, akkor nincs. Egyensúly esetén a csúcsot zölddel, ellenkező esetben pirossal jelenítem meg.



5.3.1. ábra: Egyensúlyok a csúcsokon MATLAB-ban

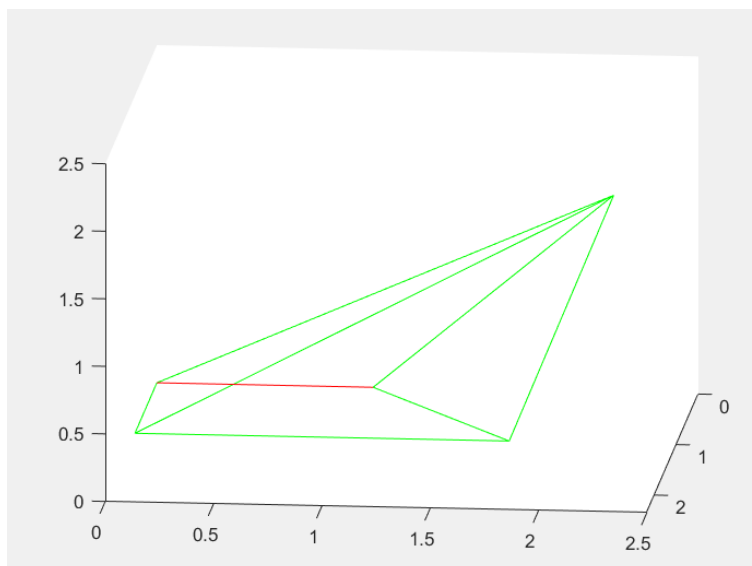
5.4. Nyereg-típusú egyensúly

Ahhoz, hogy egy élen nyereg-típusú egyensúly lehessen két feltételnek kell teljesülnie:

- (a) A súlypontnak az él egyenesére vetített képe az élen belül van.
- (b) A súlypont és a levetített képe által meghatározott egyenesre merőleges, az élre illesztett sík nem metsz bele a pentaéderbe.

Az „*egyensuly_el.m*” szubrutin megvizsgálja, hogy igaz-e az (a) feltétel, és a (b) vizsgálatához ellenőrzi, hogy az élen kívüli 3 csúcs megegyező oldalán van-e a létrehozott síknak. Miután a korábbiakhoz hasonlóan megkaptuk a csúcskoordinátákat és a súlypontot, a `projPointOnLine3d` paranccsal levetíthetjük az S súlypontot minden egyes él egyenesére (melyet az él két pontja ad meg). Ekkor rendre az S_{AB} , S_{AD} , S_{AE} , S_{BC} , S_{BE} , S_{CD} , S_{CE} és S_{DE} pontokat kapjuk. A pontokat a program egy 1×3 -as mátrixként kezeli, így lekérdezhethetjük egy-egy új változóként a kapott pontok x , y és z koordinátáit. Ahhoz, hogy S_{AB} az AB élen belül helyezkedjen el, x koordinátájának az A és B pont x koordinátáinak értéke között kell, hogy legyen, azaz az $Ax \leq S_{ABx} \leq Bx$ és $Bx \leq S_{ABx} \leq Ax$ egyenletek közül az egyiknek teljesülnie kell. Az (a) feltételt ezzel ellenőriztük. A (b) részben szereplő, AB élhez tartozó P_{AB} síkot SS_{AB} normálvektor és az S súlypont egyik pontja, például A segítségével kapjuk. P_{AD} , P_{AE} , P_{BC} , P_{BE} , P_{CD} , P_{CE} és P_{DE} síkok ugyanilyen módszerrel adódnak. Minden él esetében a kimaradó 3 csúcsra (AB él esetén C , D és E) megvizsgáljuk, hogy az élhez tartozó sík mely oldalán van az 5.3. részben használt

isBelowPlane paranccsal. Ha ugyanazon az oldalon vannak, akkor a (b) feltétel is teljesül. Egy élen akkor és csak akkor van nyereg-típusú egyensúly, ha a két feltétel mindegyike teljesül. Ekkor az élt zölddel, egyéb esetben pirossal rajzoltam meg. Az 5.4.1. ábrán egy példa látható erre.



5.4.1. ábra: Egyensúlyok az éleken MATLAB-ban

5.5. Pentaéderek elsődleges egyensúlyi osztályokba sorolása

Minden pentaéder esetén a program meghívja az „*egyensulyok*” nevű szubrutint. Ez tartalmazza az előző három részben leírt „*egyensuly_lap.m*”, „*egyensuly_csucs.m*” és „*egyensuly_el.m*” szubrutinokat, melyek segítségével megvizsgálva a pentaéder összes lapját, csúcsát és éleit eldönti, hogy van-e rajtuk egyensúlyi helyzet. A talált egyensúlyok alapján először ellenőrzi a Poincaré-Hopf [4] azonosságot:

$$S+U=H+2,$$

és ha ez teljesül, akkor besorolja a pentaédert $(S,U)^E$ elsődleges egyensúlyi osztályokba. Amennyiben nem teljesül a Poincaré-Hopf formula, akkor az adott pentaédert a program hibásnak tekinti és a további számításokban nem veszi figyelembe. Ilyen hiba például olyan esetekben adódhat, amikor az egyensúlyi pont a lap széléhez vagy él végpontjához nagyon közel esik. Az összes ellenőrzött pentaéder 2,05 százalékában tapasztaltunk ilyen hibát.

6. EREDMÉNYEK

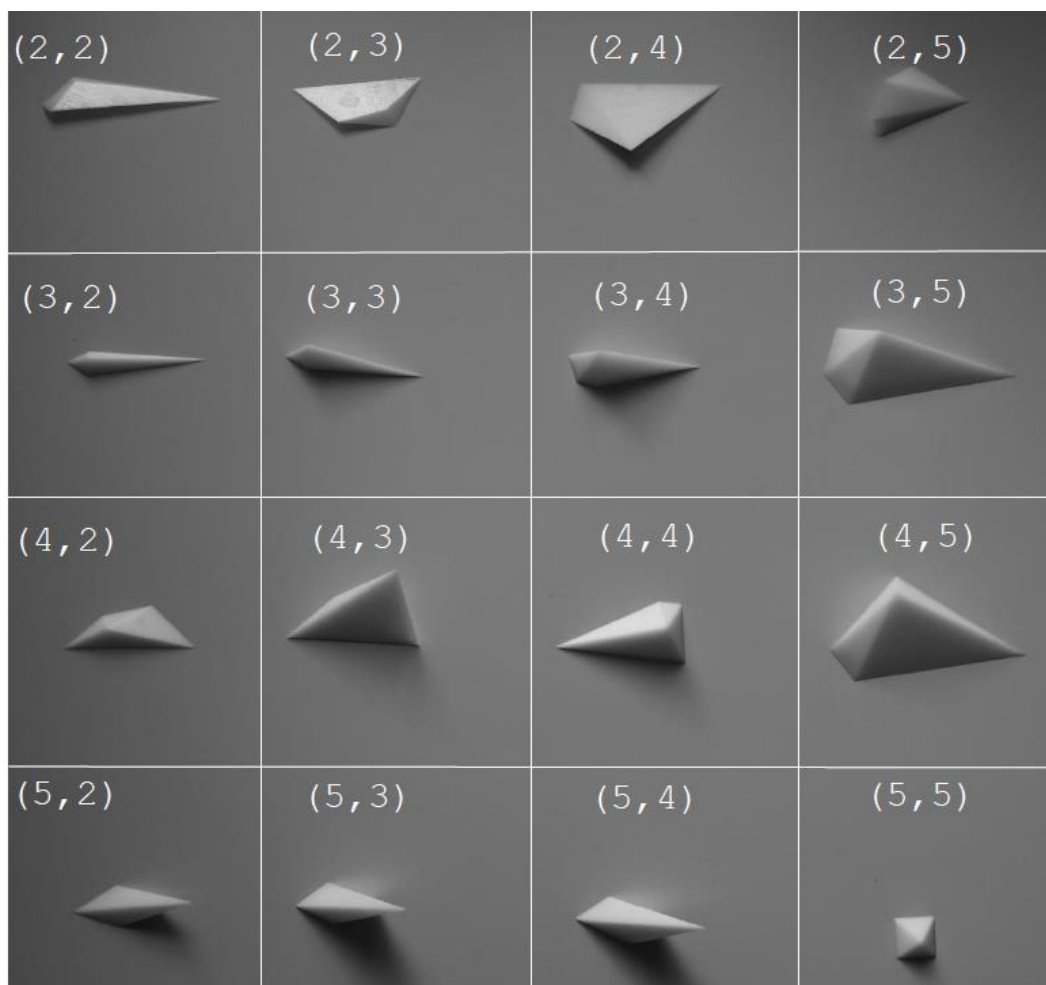
6.1. J. H. Conway sejtése

1969-ben J. H. Conway megfogalmazta az 1. sejtést, mellyel szorosan összefüggésbe hozható a 2. tétel. A kutatás fő célja volt eredményeket elérni ezen állítások igazolásával kapcsolatban.

6.2. Elért eredmények

Az 5. fejezetben leírt eljárás segítségével az összes $S, U=2,3,4,5$ osztályban azonosítottunk pentaédert és ezzel konstruktív bizonyítást adtunk a 2. tételre.

A vizsgálat során nem találtunk példát $S=1$ vagy $U=1$ osztályba tartozó pentaéderre, mely megerősítette az 1. sejtést.



6.2.1. ábra: Egy-egy pentaéder az $S, U=2,3,4,5$ osztályokból 3D nyomtatóval kinyomtattva.

S \ U	2	3	4	5
2	3,96%	15,03%	17,43%	0,07%
3	4,7%	10,43%	9,83%	0,7%
4	2,56%	4,35%	10,92%	5,55%
5	0,22%	0,73%	3,07%	8,4%

6.2.1. táblázat

A program által megvizsgált pentaédereket $(S,U)^E$ osztályuk alapján csoportosítottam, és a csoportok darabszámának százalékos arányát egy táblázatban összesítettem.

6.3. 3-dimenziós megjelenítés

A 16 osztály mindegyikéből kiválasztottam egy-egy pentaédert, amit 3D nyomtatóval kinyomtattunk. Az ezekről készült fénykép a 6.2.1. ábra.

Minden pentaédernél lemértem az egyensúlyi pontok távolságát a lapokon az élektől, az éleken a végpontoktól, és ezen két mérés eredményei közül a legkisebbet lekérdeztem a program segítségével. Ezek alapján olyan pentaédert választottam minden osztályban, ahol mindkét mérés minimuma elég nagy ahhoz, hogy a pentaéder a 3D nyomtatás esetleges hibáival együtt is a megfelelő osztályba tartozzon.

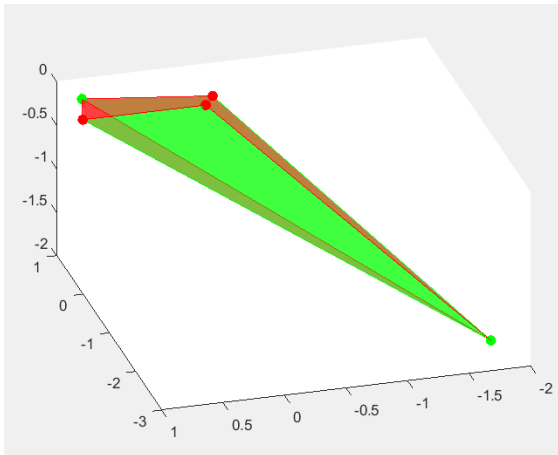
A végleges táblázat megalkotásánál a céлом az volt, hogy a koordinátákat minél kevesebb tizedesjeggyel rendelkező számokká redukáljam. Ehhez minden lépésben csökkentettem egyel a koordináták tizedesjegyeinek számát, és újra lefuttattam az „*egyensúlyok*” szubrutint. Ezután ellenőriztem, hogy az új pentaéder ugyanabban az osztályban maradt-e. Minden pentaéder koordinátáit egy tizedesjegyig lekerekítettem. A 6.3.1. táblázat összefoglalja a 16 pentaéder koordinátáit és egyensúlyi helyzeteit.

A 6.3.1., 6.3.2., 6.3.3., 6.3.4., 6.3.5. és 6.3.6 ábrákon néhány kiválasztott pentaéderről MATLAB-bal készült rajzok, valamint a 3D nyomtatáshoz készült stl file-ok szerepelnek.

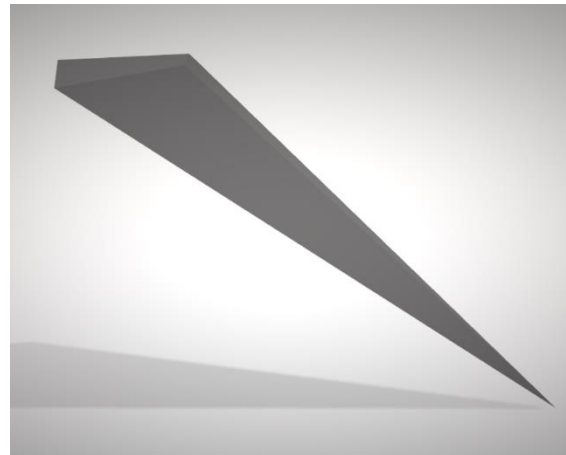
Piramisok geometriája

osztályok(S, U) ^E	2,2	2,3	2,4	2,5	3,2	3,3	3,4	3,5	4,2	4,3	4,4	4,5	5,2	5,3	5,4	5,5
A_x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B_x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B_y	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C_x	0,5	1	0,6	1	0,9	0,9	1	1	1	1	2,5	2,5	1	1	1	1
C_y	0,9	1,7	1,1	1,7	0,5	0,5	1,7	1,7	1,7	1,7	1,4	1,4	1,7	1,7	1,7	1
C_z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D_x	0,2	0,5	1,6	0,5	2,4	2,4	2,4	3,8	0,5	0,5	2,4	3,8	0,9	0,9	1,3	1
D_y	-0,1	-0,9	-0,9	-0,3	-4,2	-4,2	-4,2	-2,2	-0,9	-0,9	-4,2	-2,2	0,5	0,5	0,8	0
D_z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E_x	-2,9	-0,3	-0,1	2,1	0,4	0,8	1,3	1,6	0,3	-0,8	1,1	2	-0,6	1,5	1,5	0,5
E_y	-1,7	-0,1	-0,1	1,2	0,1	0,2	0,3	0,9	0,1	-0,2	0,3	1,2	-1,1	2,6	2,6	0,5
E_z	-1,7	-0,2	0,3	1,2	-0,7	1,4	2,2	0,9	0,4	-1,4	1,9	1,2	-1,1	2,6	2,6	0,6
$ABCD$	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ABE	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
BCE	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
CDE	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
DAE	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
A	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
B	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
C	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
E	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
AB	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
AD	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
AE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
BC	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
BE	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
CD	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
CE	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
DE	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

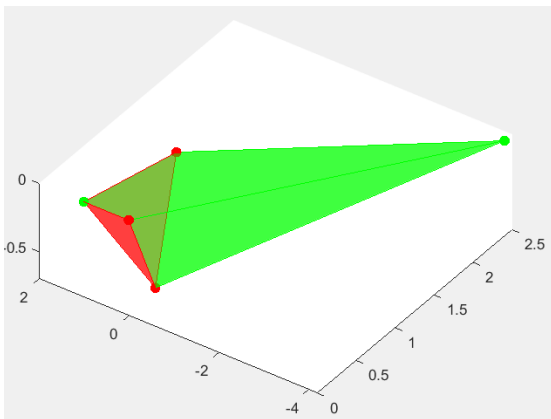
6.3.1. táblázat: A 16 kiválasztott pentaéder csúcsainak koordinátái, és az egyensúlyi helyzeteik. Ha nincs egyensúly az adott lapon, csúcson vagy élen, akkor a táblázatban 0 szerepel, ha van egyensúly, akkor 1.



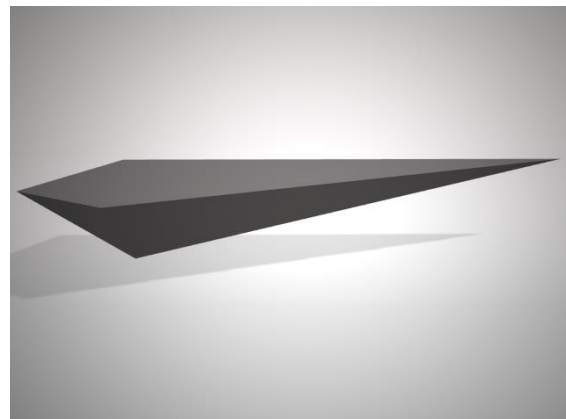
6.3.1. ábra: A $(2,2)^E$ osztályú pentaéder MATLAB-ban



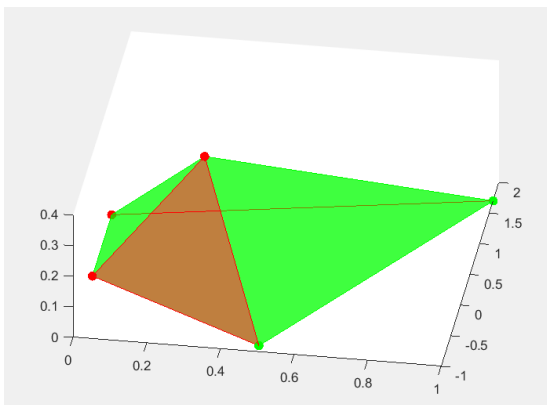
6.3.2. ábra: A $(2,2)^E$ osztályú pentaéder stl file-ba importálva



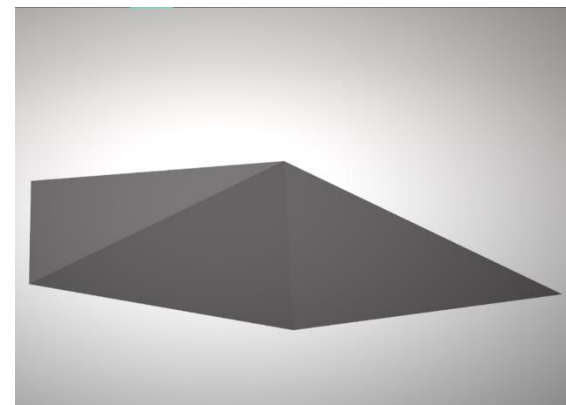
6.3.3. ábra: A $(3,2)^E$ osztályú pentaéder MATLAB-ban



6.3.4. ábra: A $(3,2)^E$ osztályú pentaéder stl file-ba importálva



6.3.5. ábra: A $(4,2)^E$ osztályú pentaéder MATLAB-ban



6.3.6. ábra: A $(4,2)^E$ osztályú pentaéder stl file-ba importálva

7. ÖSSZEGZÉS

A kutatáson eredményeként bebizonyítottam, hogy létezik pentaéder az $(S,U)^E$, $(S,U=2,3,4,5)$ osztályok mindegyikében (2. tétel), és megerősítettem a Conway által megfogalmazott 1. sejtést.

Ezekhez az eredményekhez először beláttam, hogy egy f lapú, v csúcsú és e élű P poliéder szabadsági fokainak száma $e-1$. Ez pentaéderekre vonatkoztatva 7 szabadsági fokot jelent. A pentaéderek megadásához definiáltam a pentaéderek konfigurációs terét. A 7 szabadsági foknak szögeket választottam.

A numerikus bizonyításhoz, és a sejtés megerősítéséhez a MATLAB-ban írt saját készítésű programokat használtam:

Stabilitás szempontjából 3 típusú egyensúlyi pontot különböztetünk meg generikus konvex poliéderek esetén. Stabil egyensúlyi pont lehet a poliéder lapjain, instabil a csúcsain és nyereg típusú egyensúlyi pont lehet az élein. A szubrutinok segítségével minden lapon, csúcson és élen megvizsgáltam, hogy van-e egyensúlyi helyzete az egyes poliédereknek. A talált egyensúlyok alapján besoroltam a pentaédereket az $(S,U)^E$ elsődleges egyensúlyi osztályokba.

Ezen eljárás segítségével az összes $S,U=2,3,4,5$ osztályban azonosítottam pentaédert és ezzel konstruktív bizonyítást adtam a 2. tételre. Az ezzel kapcsolatos eredmény alátámasztására az azonosított 16 egyensúlyi osztály egy-egy kiválasztott elemének csúcskoordinátáit és egyensúlyi helyzeteit egy táblázatban foglaltam össze. A kiválasztott testeket 3D nyomtatóval is megvalósítottam.

A vizsgálat során nem találtam példát $S=1$ vagy $U=1$ osztályba tartozó pentaéderre, mely megerősítette az 1. sejtést.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönöm a dolgozat elkészítésében nyújtott folyamatos segítséget és támogatást konzulensemnek, dr. Domokos Gábornak. Szintén köszönöm dr. Lángi Zsoltnak a dolgozat átnézését és javítását és Dr. Kovács Norbert Krisztiánnak a 3D nyomtatásban nyújtott segítséget.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] R. Dawson, *Monostatic simplexes*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 541-46.
- [2] E. Steinitz, *Über die Eulersche Polyderrelationen*, Arch. Math. Phys. **11** (1906), 86-88.
- [3] E. Steinitz, *Polyeder und Raumeinteilungen*, Enzykl. math. Wiss., Vol. 3 (Geometrie), Part 3AB12 (1922), 1-139.
- [4] V.I. Arnold, *Ordinary differential equations* 10th printing, 1998. MIT Press.
- [5] Gábor Domokos, Flórián Kovács, Zsolt Lángi, Krisztina Regős and Péter T. Varga, *Balancing Polyhedra*, arXiv:1810.05382, <https://arxiv.org/abs/1810.05382>
- [6] P.J. Federico, Polyhedra with 4 to 8 faces. *Geom. Dedicata* **3** (1975), 469-481

ÁBRAJEGYZÉK

Ábra sorszáma	Forrás, saját készítésű kép esetén a felhasznált program
2.1.	Geogebra
3.1.1.	Sketchup
3.1.2.	Sketchup
4.1.1.	Geogebra
4.1.2.	Geogebra
4.1.3.	Geogebra
4.1.4.	Geogebra
4.2.1.	Geogebra
4.2.2.	Geogebra
4.2.3.	Geogebra
4.2.4.	Geogebra
4.2.5.	Geogebra
5.2.1.	MATLAB
5.3.1.	MATLAB
5.4.1.	MATLAB
6.2.1.	Domokos Tanár Úr fényképe
6.3.1.	MATLAB
6.3.2.	MATLAB
6.3.3.	MATLAB
6.3.4.	MATLAB
6.3.5.	MATLAB
6.3.6.	MATLAB