BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
ÉPÍTÉSZMÉRNÖKI KAR
Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék

NEM LÉTEZIK MONO-MONOSTATIKUS TETRAÉDER

Almádi Gergő

Konzulensek:

Dr. Domokos Gábor

Regős Krisztina

MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA 2022

Absztrakt

Tetraédernek nevezzük azokat a poliédereket, melyeket négy háromszöglap határol.

Bármely poliéder esetén 3 különböző típusú (nem degenerált) egyensúly létezik. A lapokon elhelyezkedő egyensúlyi helyzeteket *stabil,* a csúcsokon elhelyezkedő egyensúlyi helyzeteket *instabil,* és az éleken elhelyezkedő egyensúlyi helyzeteket *nyeregtípusú* egyensúlyoknak nevezzük, és számukat rendre $S,$ U és H betűkkel jelöljük. A három mennyiség nem független, a Poincaré-Hopf tétel alapján, konvex poliédereken $S + U - H = 2$.

Egyensúlyi helyzeteik száma alapján a poliédereket az $(S, U)^E$ egyensúlyi osztályokba soroljuk.

Inhomogén tömegeloszlást feltételezve egy poliéder súlypontja bárhová eshet a poliéderen belül.

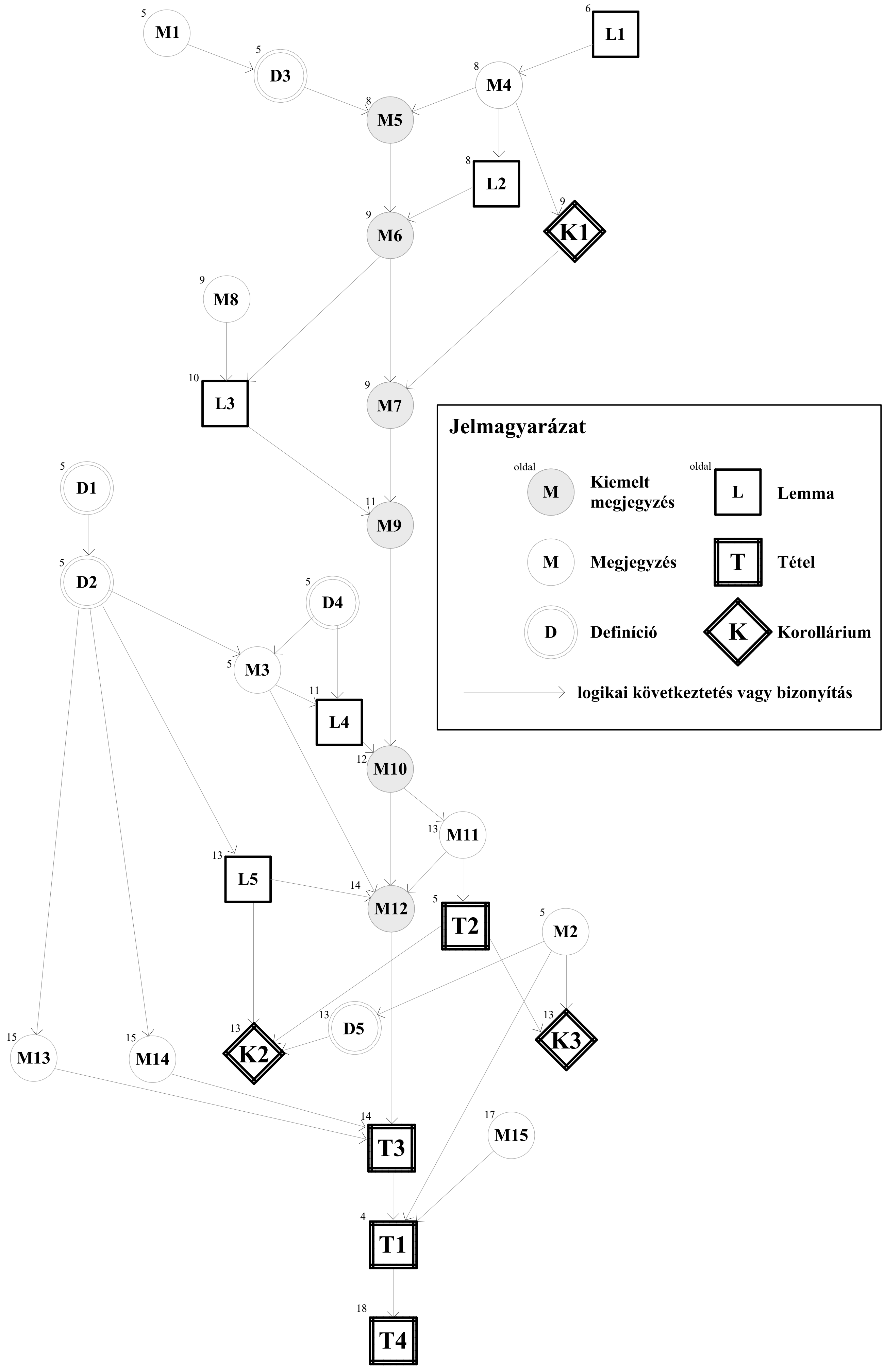
Monostabilnak illetve mono-instabilnak nevezzük az $(1, U)^E$ illetve az $(S, 1)^E$ egyensúlyi osztályba sorolható poliédereket és mono-monostatikusnak nevezzük az $(1,1)^E$ osztály elemeit.

A dolgozat témája annak igazolása, hogy nem létezik mono-monostatikus tetraéder.

A Poincaré-Hopf tétel alapján a tétel egyik korolláriuma, hogy egy tetraéder nyeregtípusú egyensúlyainak száma legalább egy illetve egy tetraéder összes egyensúlyainak számára $S + U + H \geq 4$.

Tartalomjegyzék

A BIZONYÍTÁS LOGIKAI SZERKEZETE



1. Bevezetés – A tétel kimondása

Konvex poliéderek statikai egyensúlyi helyzeteinek megértésére legalább azóta törekszenek az emberek, mióta dobókockát használnak, utóbbiak története pedig sok ezer évre nyúlik vissza [1]. Egy homogén anyagú kocka minden lapján stabilan áll és ezt a tényt úgy is kifejezhetjük, hogy $S=6$ stabil egyensúlyi helyzete van. Ugyanakkor, némi ügyességgel, dinamikusan egyensúlyozható 8 csúcsán is, és ezt úgy is kifejezhetjük, hogy $U=8$ instabil egyensúlyi helyzete van. A 12 él is alkalmas egyensúlyozásra, az éleket és a súlypontot tartalmazó síkokban stabil, minden más irányban instabil a viselkedés, ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy $H=12$ nyereg típusú egyensúlyi helyzete van. A három mennyiség nem független, közöttük a Poincaré-Hopf tétel [2] teremt kapcsolatot, mely szerint konvex poliédereken:

$$S + U - H = 2. \tag{1}$$

A konvex poliéderek statikai egyensúlyaival kapcsolatos, minden bizonnyal legérdekesebb kérdést J.H. Conway és R. Guy vetette fel 1966-ban [3]: olyan homogén, konvex poliédert kerestek mely csak egyik lapján tud stabilan megállni, tehát $S=1$. Az ilyen, $S=1$ típusú testeket monostabilnak, duális párjukat, az $U=1$ típusú testeket mono-instabilnak, a két halmaz unióját monostatikusnak, a két halmaz metszetét (tehát az $(S,U)=(1,1)$ testeket) mono-monostatikusnak nevezzük.

Bár a Conway-Guy kérdésre 3 évvel később válasz született egy F=19 lapú, V=34 csúcsú poliéder konstrukciójával [4], nyitva maradt a mélyebb probléma, hogy vajon minimálisan hány lap és hány él szükséges a monostabil tulajdonsághoz. Homogén anyageloszlás esetén ez a kérdés máig nyitott, bár Conway azt igazolta [5], hogy egy homogén tetraéder nem lehet monostatikus. Egy alternatív, bizonyos értelemben diszkrét homogenitásként értelmezhető anyageloszlás esetén (amikor a súlytalan poliéder csúcsaiba egységnyi tömegeket helyezünk el) ismert, hogy a mono-instabil tulajdonsághoz legalább $V=8$ csúcs szükséges [6].

Az inhomogén anyageloszlás esetére kevesebb eredmény ismert. Conway igazolta, hogy létezik inhomogén, monostabil tetraéder [5] és ezen állítás duálisa (vagyis az inhomogén, mono-instabil tetraéder létezése) is ismert [7].

Jelen dolgozat célja, hogy igazoljuk az alábbi állítást:

1. Tétel

Ha egy tetraéder monostatikus, akkor pontosan 4 egyensúlyi helyzete van.

Az 1. Tételből több más, érdekes állítás következik, többek között a dolgozat címében megfogalmazott is. Az alapfogalmak precíz bevezetése után a bizonyítást ismertetjük, melynek során úgy fogunk eljárni, hogy egy monostabil T tetraéderről látunk be egyre több tulajdonságot. A bizonyítás áttekinthetősége érdekében ezt a bővülő tulajdonság listát tipográfiailag elkülönülő, vastagon szedett megjegyzések sorozatával dokumentáljuk.

2. A tétel bizonyítása

1. Definíció: [8] Legyen *K* egy konvex test, és *X* a test egy belső pontja. Azt mondjuk, hogy a test egy *Y* határpontja K egy egyensúlyi pontja *X*-re nézve, ha az *Y*-on átmenő, *XY* szakaszra merőleges sík nem metszi a *K* test belsejét.

2. Definíció: [8] Legyen *P* egy konvex poliéder, *X* a *P* tömegközéppontja és *Y* a *P* egyensúlyi pontja *X*-re nézve.

- Ha *Y* a *P* egy lapjának belső pontja, akkor azt mondjuk, hogy *Y* egy stabil egyensúlyi pont.
- Ha *Y* a *P* egy élének belső pontja, és az *XY* szakaszra merőleges, *Y*-on átmenő sík *P* -t csak ebben az élben metszi, azt mondjuk, hogy *Y* egy nyereg típusú egyensúlyi pont.
- Ha Y a P egy csúcsa, és az *XY* szakaszra merőleges, *Y*-on átmenő sík *P* -t csak ebben a csúcsban metszi, azt mondjuk, hogy Y egy instabil egyensúlyi pont.
- Ha *Y*-ra a fenti három feltétel egyike sem teljesül, azt mondjuk, hogy *Y* egy degenerált egyensúly.

Inhomogén testsűrűséget feltételezve *K* tetszőleges belső pontja lehet *K* tömegközéppontja.

1. Megjegyzés: Ismert [5], hogy nem létezik homogén, monostabil tetraéder. Ha azonban megengedünk inhomogén anyageloszlásokat is, akkor a súlypont a tetraéder tetszőleges belső pontja lehet. Erre az esetre bizonyította Conway [5], hogy létezik olyan anyageloszlás és olyan geometria, mely mellett a tetraéder monostabil, vagyis csak egyetlen lapján van stabil egyensúlyi pont. A továbbiakban egy ilyen (monostabil) tetraédert fogunk vizsgálni.

2. Megjegyzés:[8] A Poincaré–Hopf-tételből [2] következik, hogy ha egy konvex poliédernek csak nemdegenerált egyensúlyi pontjai vannak, akkor a stabil pontok *S*, instabil pontok *U* és a nyeregpontok *H* száma kielégíti az *(1)*-es egyenletben leírt összefüggést.

3. Definíció: Legyen *A, B, C* és *D* egy monostabil *T* inhomogén tetraéder 4 csúcsa, melynek felszínén az egyetlen stabil egyensúlyi pont az *ABC* lap belsejébe esik. A továbbiakban végig ezt a jelölést fogjuk használni.

4. Definíció: A *T* tetraéderben *D*-prizmának nevezünk egy olyan végtelen egyenes hasábot, melynek alaplapja az *ABC* háromszög és analóg módon definiáljuk az *A-, B-* és *C*-prizmákat is. Ezt a négy prizmát kollektíven a *T* tetraéder prizmáinak nevezzük.

3. Megjegyzés: Ha a *T* tetraéderben a stabil egyensúly az *ABC* lapon van, akkor a stabil egyensúly definíciójából (2. Definíció) és a 4. Definícióból következik, hogy van olyan belső pontja *T*-nek, amelyet *T* prizmái közül csak a *D*-prizma tartalmaz.

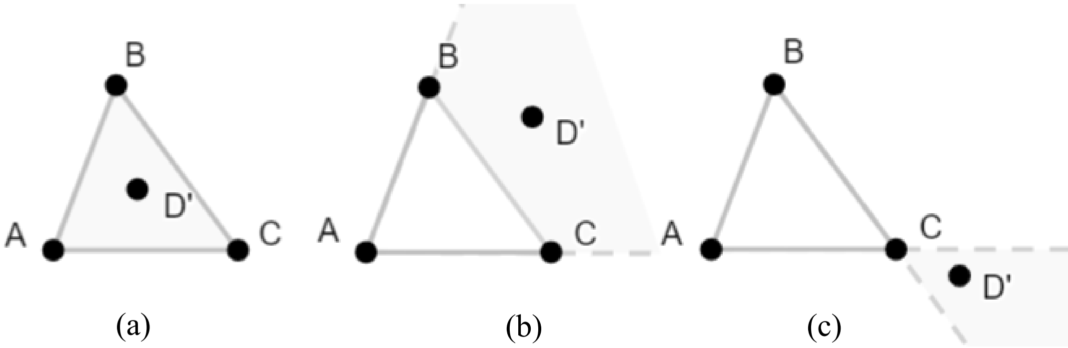
2. Tétel:

A *T* tetraédernek pontosan 2 olyan csúcsa van, melyekre külön-külön igaz, hogy az oda befutó 3 él egymással páronként hegyesszöget zár be.

Bizonyítás (2. Tétel):

1. Lemma:

Az ABC háromszög oldalegyenesei a síkot 7 tartományra osztják. Legyen a T tetraéder D csúcsának az ABC síkra vetített merőleges vetülete D'. Ekkor igaz az az állítás, hogy D' a jelzett 7 tartomány közül sem a háromszög belsejében, sem a vele élszomszédos 3 tartományban nem lehet. Tehát D' csak 3 tartományban lehet, ezek egyikét mutatja az 1(c). ábra.



1. ábra: Ha a T tetraéder D csúcsát az ABC síkra merőlegesen vetítjük, akkor a D' vetület kombinatorikai értelemben 3 lehetséges helyzetben lehet: ezeket mutatja be az (a), (b) és (c) diagram. Az 1. Lemma állítása szerint, ha T monostabil és az egyensúlyi pontja az ABC háromszög belső pontja, akkor csak a (c) konfiguráció jöhet létre.

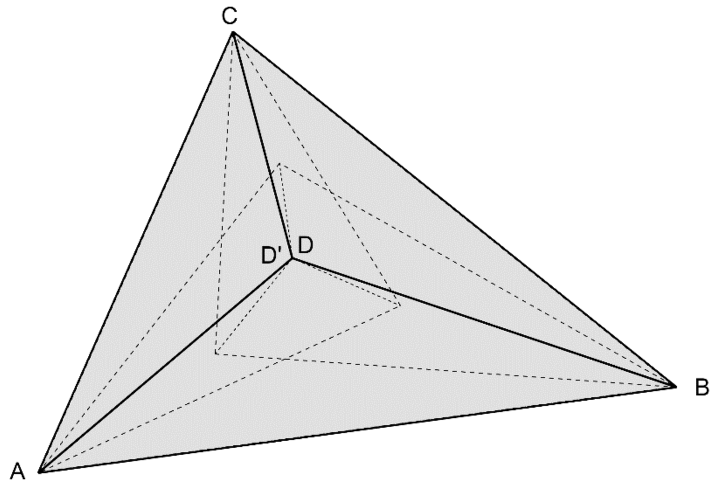
Bizonyítás (1. Lemma):

A 4 tiltott tartomány közül 3 kombinatorikailag ekvivalens, ezért csak két esetet kell megkülönböztetnünk (az általánosság megszorítása nélkül a bizonyítást BC éllel szomszédos tartományra fogjuk elvégezni).

1. Eset: a D' pont az ABC háromszögön belül van (1 (a). ábra).

Ha a D' pont az ABC háromszögön belül van, akkor az A-, B- és C-prizma is tartalmazza D'-t (2. ábra), és tudjuk, hogy D csúcsot is. Egy ilyen (mindhárom prizma által tartalmazott) pont létezéséből következik, hogy a tetraédernek nincs olyan pontja, amely csak a D-prizma része.

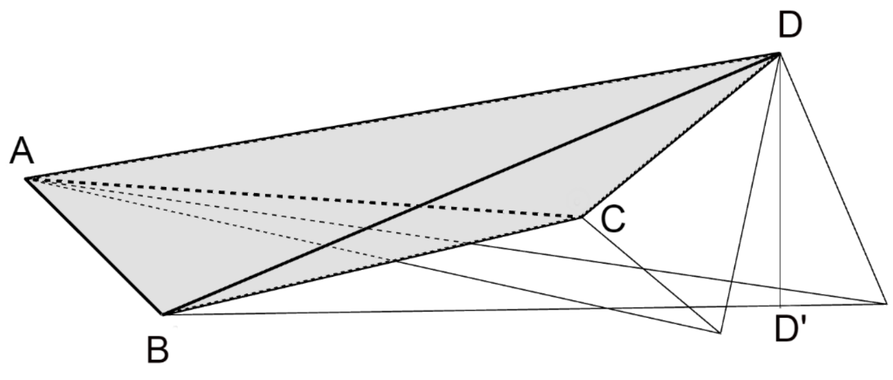
Ebben az esetben tehát nem lehet a tetraéder monostabil.



2. ábra: Ha a *T* tetraéder *D* csúcsát az *ABC* síkra merőlegesen vetítjük, akkor létrejöhet olyan helyzet, amikor a *D'* vetület az *ABC* háromszög belsejében van. Ilyenkor nincs olyan pontja a tetraédernek, amely csak a *D*-prizma része. Az ábra az *ACD*, *BCD* és *ABD* oldalakra állított egyenes prizmák *ABC* síkkal vett metszésvonalait, és a *D'* pont helyzetét mutatja ebben az esetben.

2. Eset: a *D'* pont az *ABC* háromszögön kívül, a *CB* élnek az *A* csúccsal ellentétes oldalán, az *AB* és az *AC* félegyenesek által közrezárt szögtartománynak az *ABC* háromszögön kívüli részén van (1(b). ábra).

A *T* tetraéder *AB* és *AC* éleinél a találkozó lapok hegyesszöget zárnak be, így *B*- és *C*-prizmák közösen lefedik az *ABC* háromszög minden pontját (3. ábra). Mindkét prizma tartalmazza *D* csúcsot is, tehát a tetraéderen belüli részeik összege, amely egy konvex tartomány, biztosan tartalmazza az egész tetraédert, mert a tetraéder is konvex. Ezek alapján igaz, hogy a tetraédernek amelyik pontjait a *D*-prizma tartalmazza, azok a pontok valamelyik másik prizmának is a részei.



3. ábra: Ha a *T* tetraéder *D* csúcsát az *ABC* síkra merőlegesen vetítjük, akkor létrejöhet olyan helyzet, amikor a *D'* vetület az *ABC* háromszögön kívül, a *CB* élnek az *A* csúccsal ellentétes oldalán, az *AB* és *AC* félegyenesek által közrezárt szögtartománynak az *ABC* háromszögön kívüli részén van. Ilyenkor a tetraéder azon pontjait amit a *D*-prizma tartalmaz, azt valamelyik másik prizma is biztosan tartalmazza. Az ábra az *ACD*, és az *ABD* oldalakra állított egyenes prizmáknak (rendre *B*-és *C*-prizmák) az *ABC* síkkal vett metszésvonalait, és a *D'* pont helyzetét mutatják.

Mivel sem az első, sem a második esetben nem lehet a tetraéder monostabil, ezért a 7 tartományból csak a 3 *ABC* háromszöggel csúcsszomszédos tartományokban lehet *D'* (1(c). ábra).

4. Megjegyzés: Ennek a konfigurációnak 3 kombinatorikailag ekvivalens változata létezhet, amelyekből az 1(c) ábra az egyiket ábrázolja. A továbbiakban a tárgyalás megkönnyítése érdekében, de az általánosság megszorítása nélkül fel fogjuk tételezni, hogy a *D* csúcsnak a *D'* vetülete az *AC* egyenesnek a *B*-vel ellentétes oldalára, a *BC* egyenesnek az *A*-val ellentétes oldalára esik.

5. Megjegyzés: Tehát *T* egy olyan monostabil, inhomogén tetraéder, melyre igazak a következő állítások:

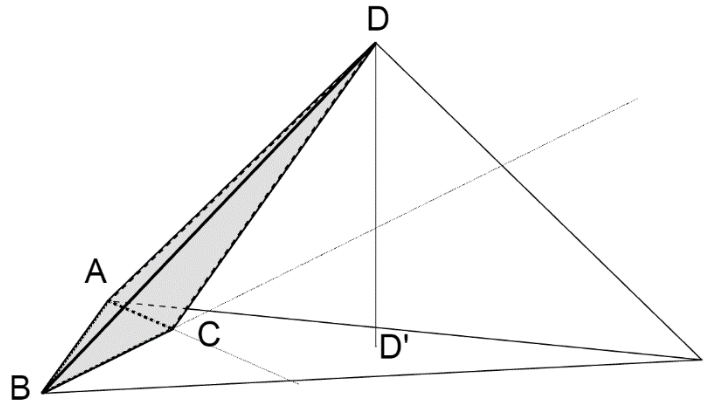
1) **felszínén az egyetlen stabil egyensúlyi pont az *ABC* lapra esik (3. Definíció)**
2) ***D* csúcs *D'* vetülete *AC* egyenes *B*-vel ellentétes, *BC* egyenes *A*-val ellentétes oldalára esik (1. Lemma, 4. Megjegyzés)**

2. Lemma:

A 4. Megjegyzés szerint a *D'* pont a három megengedett tartomány közül a *C* csúccsal érintkezőben van. Ekkor az *ABC* lapon a *C* csúcsnál hegyesszög van.

Bizonyítás (2. Lemma):

Ha az *ABC* lapon *C* csúcsnál tompaszög van, akkor a *C*-prizma az *ABC* háromszög teljes területét lefedi (4. ábra). Tehát a *C*-prizma tartalmazza a tetraédernek mind a 4 csúcsát, és mivel a *T* tetraéder és a *C*-prizma is konvex, ezért a teljes tetraédert is tartalmazza. Ez alapján elmondható, hogy nincs olyan pontja a tetraédernek, amit csak a *D*-prizma tartalmaz.



4. ábra: Ha a *T* tetraéder *D* csúcsát az *ABC* síkra merőlegesen vetítjük, akkor létrejöhet olyan helyzet, amikor a *D'* vetület sem a háromszög belsejében, sem a vele élszomszédos 3 tartományban nincs. Hogyha az *ABC* lapon *C* csúcsnál tompaszög van, akkor a *C*-prizma az *ABC* háromszög teljes területét lefedi. Az ábra az *ABD* oldalra állított egyenes prizmának (*C*-prizma) az *ABC* síkkal vett metszésvonalait, és a *D'* pont helyzetét mutatja.

6. Megjegyzés: Tehát *T* egy olyan monostabil, inhomogén tetraéder, melyre igazak a következő állítások:

1) felszínén az egyetlen stabil egyensúlyi pont az *ABC* lapra esik (3. Definíció)

2) a *D* csúcsának *D'* vetülete az *AC* egyenes *B*-vel ellentétes, a *BC* egyenes *A*-val ellentétes oldalára esik (1. Lemma, 4. Megjegyzés)

3) az *ABC* lapján *C* csúcsnál hegyesszög van (2. Lemma)

1. Korollárium (az 1. Lemmához): A 4. Megjegyzés szerint a *D*' pont a három megengedett tartomány közül a *C* csúccsal érintkezőben van. Ekkor a *T* tetraéderben az *AC* élnél az *ABC* és az *ADC* lapok egymással tompaszöget zárnak be, és a *BC* élnél az *ABC* és a *BCD* lapok is tompaszöget zárnak be egymással.

7. Megjegyzés: Tehát *T* egy olyan monostabil, inhomogén tetraéder, melyre igazak a következő állítások:

1) felszínén az egyetlen stabil egyensúlyi pont az *ABC* lapra esik (3. Definíció)

2) a *D* csúcsának *D*' vetülete az *AC* egyenes *B*-vel ellentétes, a *BC* egyenes *A*-val ellentétes oldalára esik (1. Lemma, 4. Megjegyzés)

3) az *ABC* lapján *C* csúcsnál hegyesszög van (2. Lemma)

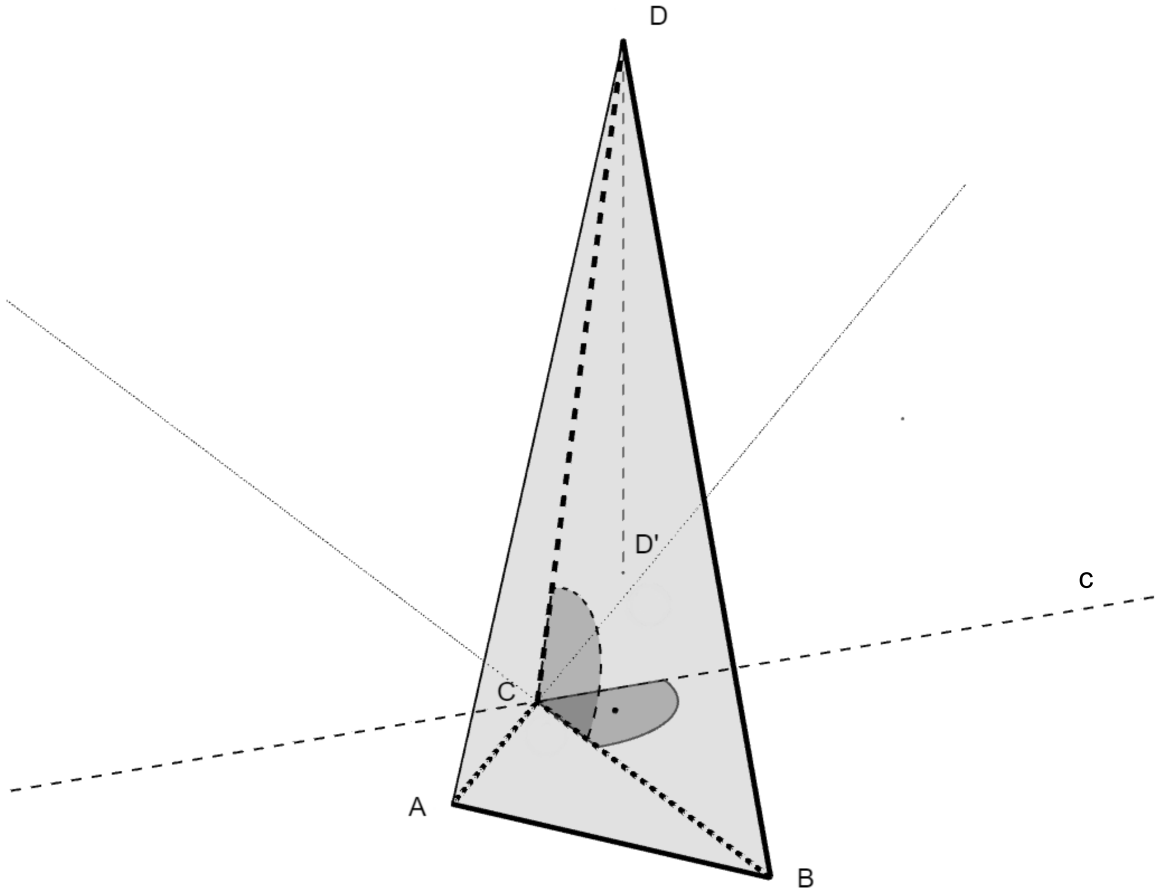
4) az *AC* élénél az *ABC* és az *ADC* lapok egymással tompaszöget zárnak be (1. Korollárium)

5) a *BC* élénél az *ABC* és a *BCD* lapok egymással tompaszöget zárnak be (1. Korollárium)

8. Megjegyzés: Ha a *T* tetraéder *CB* élére az *ABC* síkon a *C* pontban egy *c* merőleges egyenest állítunk, akkor a *T* tetraéder *BCD* lapjának *C* csúcsánál lévő szögére 3 különböző eset állhat fenn:

1) a *D*' pont a *c* egyenes *B*-vel átellenes oldalán van; ekkor a *BCD* lapon a *C* csúcsnál tompaszög van (5. ábra)
2) a *D*' pont a *c* egyenesen rajta van; ekkor a *BCD* lapon a *C* csúcsnál derékszög van.
3) a *D*' pont a *c* egyenes *B*-vel azonos oldalán van; ekkor a *BCD* lapon a *C* csúcsnál hegyesszög van.

Az *ACD* lap *C* csúcsánál lévő szögéről ez hasonlóképpen elmondható.



5. ábra: Ha a *T* tetraéder *CB* élére az *ABC* síkon a *C* pontban egy *c* merőleges egyenest állítunk, és *D*' a *c* egyenes *B*-vel átellenes oldalán van, akkor a *T* tetraéder *BCD* lapjának *C* csúcsánál lévő szöge tompaszög. Az *ACD* lap *C* csúcsánál lévő szögéről ez hasonlóképpen belátható.

3. Lemma:

A *T* tetraéderre a 7. és 8. Megjegyzés alapján igaz, hogy a *BCD* lapon *C* csúcsnál és az *ACD* lapon *C* csúcsnál is tompaszög van (5. ábra).

Bizonyítás (3. Lemma):

A bizonyításban a *T* tetraéder *BCD* lapjára mutatjuk meg, hogy a *C* csúcsnál tompaszög van, azaz a 8. Megjegyzés 1. esete teljesül.

A 2. Lemmából következik, hogy az *ABC* lapon a *C* csúcsnál lévő szög kiegészítő szöge tompaszög. Ekkor ahhoz, hogy *D*' az 1. Lemmában szereplő *ABC* sík tartományai közül a *C*-vel csúcsszomszédosban helyezkedjen el ((c) konfiguráció), csak a 8. Megjegyzésben leírt 1-es eset jöhet létre, mert az egész tartomány a *C* egyenes *B*-vel átellenes oldalán van (5. ábra).

A *T* tetraéder *ACD* lapjának *C* csúcsánál fekvő szögéről analóg módon ugyanez megmutatható.

9. Megjegyzés: Tehát *T* egy olyan monostabil, inhomogén tetraéder, melyre igazak a következő állítások:

1) felszínén az egyetlen stabil egyensúlyi pont az *ABC* lapjára esik (3. Definíció)

2) a *D* csúcsának *D’* vetülete az *AC* egyenes *B*-vel ellentétes, a *BC* egyenes *A*-val ellentétes oldalára esik (1. Lemma, 4. Megjegyzés)

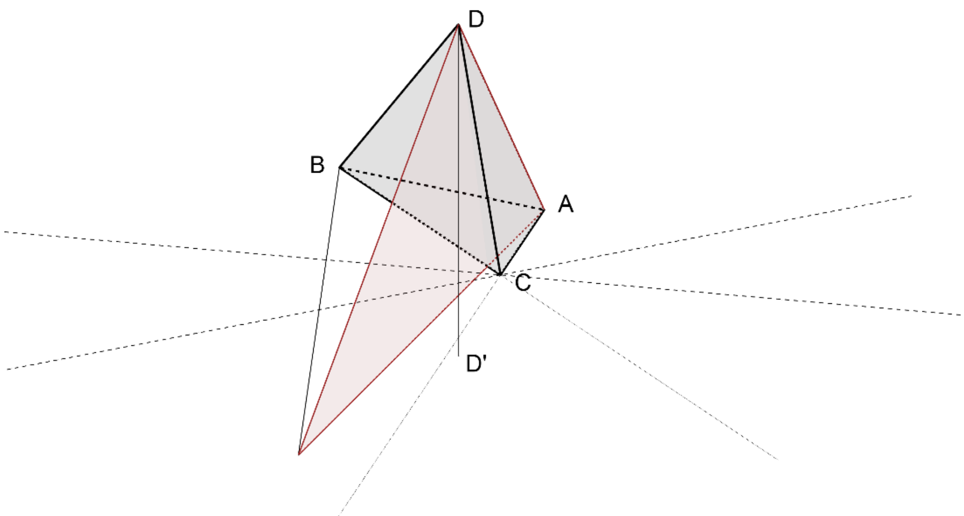
3) az *ABC* lapján a *C* csúcsnál hegyesszög van (2. Lemma)

4) az *AC* élénél az *ABC* és az *ADC* lapok egymással tompaszöget zárnak be (1. Korollárium)

5) a *BC* élénél az *ABC* és *BCD* lapok egymással tompaszöget zárnak be (1. Korollárium)

6) az *ACD* lapjának *C* csúcsánál tompaszög van (3. Lemma)

7) a *BCD* lapjának *C* csúcsánál tompaszög van (3. Lemma)



6. ábra: A *T* tetraéder *ABD* lapjára állított egyenes prizma (*C*-prizma) *AD* élt tartalmazó oldala a tetraéder belsejében halad (az *ABC* sík alatti rész nincs ábrázolva). Ilyenkor vannak olyan pontjai a tetraédernek, amelyeket a *C*-prizma nem tartalmaz.

4. Lemma:

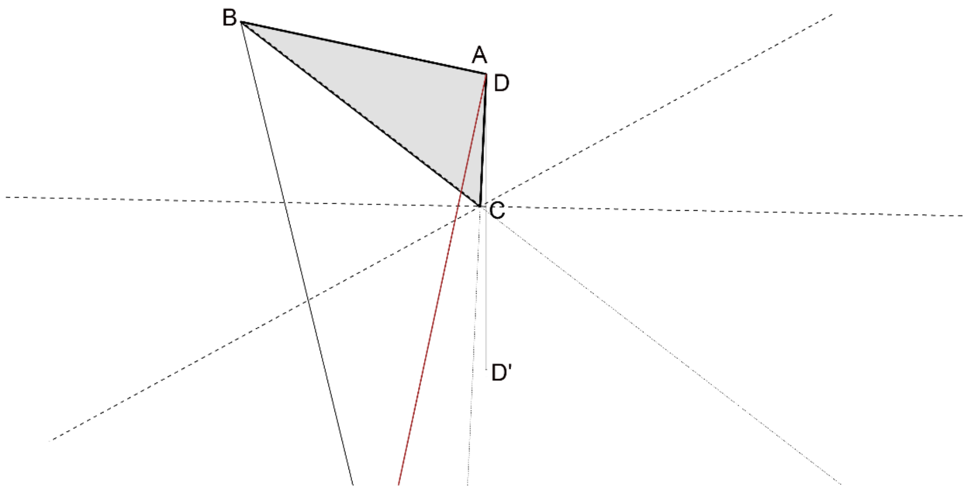
A *T* tetraéderre igaz, hogy az *AD* élnél az *ACD* és az *ABD* lapok egymással tompaszöget zárnak be.

Bizonyítás (4. Lemma):

A 3. Megjegyzésben leírt feltétel teljesüléséhez szükséges, hogy a *T* tetraéder *C*-prizmája ne tartalmazza *T* minden pontját. Ez teljesül, amennyiben a *C*-prizmának az *AD* élt vagy a *BD* élt tartalmazó oldala a tetraéder belsejében halad. Ez 2 kombinatorikailag ekvivalens változatot jelent. A továbbiakban a tárgyalás megkönnyítése érdekében, de az általánosság megszorítása nélkül fel fogjuk tételezni, hogy *T* tetraéder *C*-prizmájának az *AD* élt tartalmazó oldala halad a tetraéder belsejében (6. ábra).

A *T* tetraéder *C*-prizmájának az *AD* élt tartalmazó oldala akkor és csak akkor halad a *T* tetraéder belsejében, ha a *C*-prizma ezen oldala kisebb szöget zár be a *T* tetraéder *ABD* lapjával, mint amekkora szöget a *T* tetraéderben az *AD* élnél az *ABD* és az *ACD* lapok bezárnak (7. ábra).

A 4. Definíció szerint a *C*-prizmának minden oldala derékszöget zár be az *ABD* síkkal. Ezekből következik, hogy a *T* tetraéderben az *ACD* és az *ABD* lapok az *AD*-élnél tompaszöget zárnak be.



7. ábra: Ha a *T* tetraéder *AD* élét pontban látjuk, akkor a *BD* és *CD* lapokat, és az *ABD* síkra merőleges egyenes hasáb (*C*-prizma) *AD* élét tartalmazó oldalát is élben látjuk. Belátható, hogy a *C*-prizmának az *AD* élt tartalmazó oldala akkor és csak akkor halad a *T* tetraéder belsejében, ha a *C*-prizma ezen oldala kisebb szöget zár be a *T* tetraéder *ABD* lapjával, mint amekkora szöget a *T* tetraéderben az *AD* élnél az *ABD* és az *ACD* lapok bezárnak.

10. Megjegyzés: Tehát *T* egy olyan monostabil, inhomogén tetraéder, melyre igazak a következő állítások:

1) felszínén az egyetlen stabil egyensúlyi pont az *ABC* lapjára esik (3. Definíció)

2) a *D* csúcsának *D'* vetülete az *AC* egyenes *B*-vel ellentétes, a *BC* egyenes *A*-val ellentétes oldalára esik (1. Lemma, 4. Megjegyzés)

3) az *ABC* lapján a *C* csúcsnál hegyesszög van (2. Lemma)

4) az *AC* élénél az *ABC* és az *ADC* lapok egymással tompaszöget zárnak be (1. Korollárium)

5) a *BC* élénél az *ABC* és *BCD* lapok egymással tompaszöget zárnak be (1. Korollárium)

6) az *ACD* lapjának *C* csúcsánál tompaszög van (3. Lemma)

7) a *BCD* lapjának *C* csúcsánál tompaszög van (3. Lemma)

8) az *AD* élénél az *ACD* és az *ABD* lapok egymással tompaszöget zárnak be (4. Lemma)

11. Megjegyzés: A 10. Megjegyzés alapján *T* egy olyan monostabil, inhomogén tetraéder, melynek csúcsszögeire igazak a következő állítások:

a) A 4. és 8. állítások alapján az *ABC* lap *BAC* szöge és az *ABD* lap *BAD* szöge tompaszög, tehát *ABC* szög, A*CB* szög, *ABD* szög és *ADB* szög hegyesszög.
b) A 7. állítás alapján a *BCD* lap *CB*D és *CDB* szöge hegyesszög.
c) A 6. állítás alapján az *ACD* lap *ADC* szöge hegyesszög.

Tehát a *T* tetraédernek pontosan 2 olyan csúcsa van, a *B* és a *D* csúcs, melyekre külön-külön igaz, hogy az oda befutó 3 él egymással páronként hegyesszöget zár be. Q.e.d.

Ezzel a 2. Tétel bizonyítását befejeztük.

5. Lemma: Ha egy tetraéder egy csúcsába befutó 3 él egymással páronként hegyesszöget zár be, akkor az adott csúcs instabil egyensúly a tetraéder bármely belső (vagy felszíni) pontjára nézve.

Bizonyítás (5. Lemma):

Az instabil egyensúly definíciójából (2. Definíció) következik, hogyha egy tetraédernek az *A* csúcsába befutó *AB* él hegyesszöget zár be az *A* csúcsba befutó másik két éllel, akkor az *A* csúcs instabil egyensúly a tetraéder *B* csúcsára nézve.

Ha a tetraéder *A* csúcsa instabil egyensúly a *B*, a *C* és a *D* csúcsra nézve is, akkor az *A* csúcsba befutó élek egymással páronként hegyesszöget zárnak be.

Ebből következik, hogy ilyenkor nincs olyan belső (vagy felszíni) pontja a tetraédernek, amelyet összekötve az *A* csúccsal az bármely éllel hegyesszöget zárna be, tehát amelyre nézve az *A* csúcs ne lenne instabil egyensúlyi pont.

5. Definíció: [8,9] Mono-monostatikusnak nevezzük az olyan poliédereket, amelyeknek pontosan 1 stabil, és pontosan 1 instabil egyensúlyi helyzete van. A Poincaré-Hopf tétel értelmében egy mono-monostatikus poliédernek nincsen nyeregtípusú egyensúlya.

2. Korollárium (2. Tétel): Nem létezik mono-monostatikus tetraéder.

A 2. Tételből és az 5. Lemmából következik a 2. Korollárium állítása.

3. Korollárium (2. Tétel): Egy tetraéder legalább 4 egyensúlyi ponttal rendelkezik.

Az 2. Tételből következik, hogy egy olyan tetraédernek, melynek pontosan egy stabil egyensúlyi pontja van, az instabil egyensúlyainak száma legalább 2. A Poincaré-Hopf tétel értelmében (2. Megjegyzés) ekkor a tetraédernek pontosan 1 nyereg típusú egyensúlya van, tehát az összes egyensúlyi pontjainak száma legalább 4.

3. Tétel:

Legyen T egy inhomogén, monostabil tetraéder. Ekkor a T tetraéder $U(T)$ instabil egyensúlyainak száma pontosan 2.

Bizonyítás (3. Tétel):

A bizonyítást a 2. Tétel bizonyításához használt T inhomogén, monostabil tetraéderen végezzük el.

A 3. Megjegyzés alapján a T tetraéder lehetséges súlypontjait az A-, B- és C-prizmák közül egyik sem tartalmazza.

A T tetraédernek azon pontjai, amelyeket nem fed le a C-prizma, a C-prizma AD élt tartalmazó lapjának a C csúcs felőli oldalán helyezkednek el.

A T tetraédernek azon pontjai, amelyeket nem fed le az A-prizma, az A-prizma BC élt tartalmazó lapjának az A csúcs felőli oldalán helyezkednek el.

A T tetraédernek azon pontjai, amelyeket nem fed le a B-prizma, a B-prizma AC élt tartalmazó lapjának a B csúcs felőli oldalán helyezkednek el.

12. Megjegyzés: Tehát *T* egy olyan monostabil, inhomogén tetraéder, melyre igazak a következő állítások:

1) felszínén az egyetlen stabil egyensúlyi pont az *ABC* lapjára esik (3. Definíció)

2) a *D* csúcsának *D'* vetülete az *AC* egyenes *B*-vel ellentétes, a *BC* egyenes *A*-val ellentétes oldalára esik (1. Lemma, 4. Megjegyzés)

3) az *ABC* lapján a *C* csúcsnál hegyesszög van (2. Lemma)

4) az *AC* élénél az *ABC* és az *ADC* lapok egymással tompaszöget zárnak be (1. Korollárium)

5) a *BC* élénél az *ABC* és *BCD* lapok egymással tompaszöget zárnak be (1. Korollárium)

6) az *ACD* lapjának *C* csúcsánál tompaszög van (3. Lemma)

7) a *BCD* lapjának *C* csúcsánál tompaszög van (3. Lemma)

8) az *AD* élénél az *ACD* és az *ABD* lapok egymással tompaszöget zárnak be (4. Lemma)

9) a *B* és a *D* csúcsokon biztosan van instabil egyensúly (11. Megjegyzés, 5. Lemma)

10) a szóba jöhető súlypontok a *C*-prizma *AD* élt tartalmazó lapjának a *C* csúcs felőli oldalán helyezkednek el

11) a szóba jöhető súlypontok az *A*-prizma *BC* élt tartalmazó lapjának az *A* csúcs felőli oldalán helyezkednek el

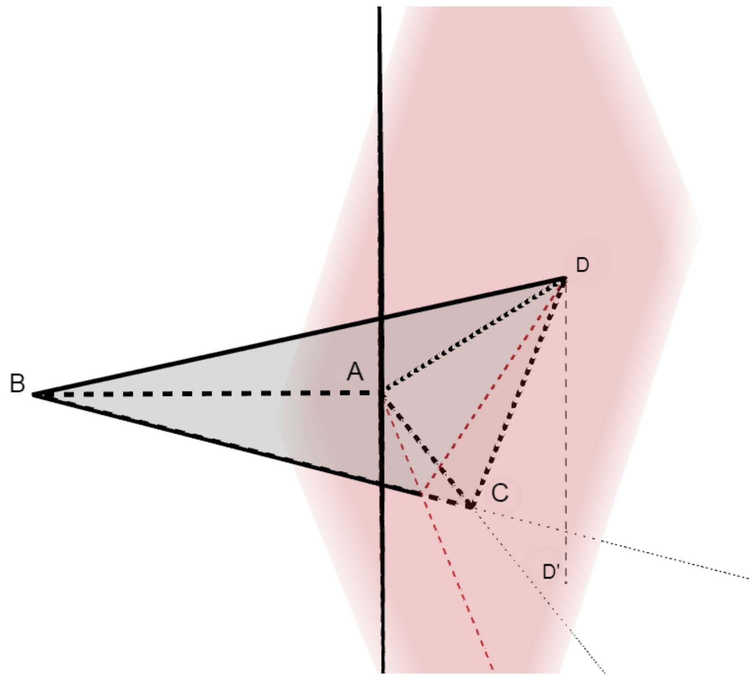
12) a szóba jöhető súlypontok a *B*-prizma *AC* élt tartalmazó lapjának a *B* csúcs felőli oldalán helyezkednek el

13. Megjegyzés: Az instabil egyensúly definíciójából következik (2. Definíció), hogy az *A* csúcson akkor jöhet létre instabil egyensúly, ha a *T* tetraéder *S* súlypontja az *AB* élre merőleges, az *A* csúcsot tartalmazó síknak a *B* csúcs felőli oldalára esik.

A 12. Megjegyzés 2) pontja miatt a *T* tetraéderben a *C* prizmának az *AD* élt tartalmazó lapja az *ABC* síkot egy olyan egyenesben metszi, amely az *AB* élre merőleges, az *A* csúcsot tartalmazó síknak a *D* felőli oldalán van. Ebből következik, hogy a *C* prizmának az *AD* élt tartalmazó lapja az *AB* élre merőleges, az *A* csúcsot tartalmazó sík *C* csúcs felőli oldalán van (8. ábra).

A 12. Megjegyzés 10) pontjából következik, hogy a *T* monostabil tetraéder szóba jöhető súlypontjai nem helyezkedhetnek el a 13. Megjegyzésben leírt módon.

Tehát a *T* tetraéderben biztosan nem jöhet létre az *A* csúcson instabil egyensúly.



8. ábra: Az instabil egyensúly definíciójából következik, hogy az *A* csúcson akkor jöhet létre instabil egyensúly, ha a *T* tetraéder *S* súlypontja az *AB* élre merőleges, az *A* csúcsot tartalmazó síknak (fekete sík, élben látva) a B csúcs felőli oldalára esik. A *T* tetraéderben a *C*-prizmának az *AD* élt tartalmazó lapja (piros) az *ABC* síkot egy olyan egyenesben metszi, amely az *AB* élre merőleges, az *A* csúcsot tartalmazó síknak a *D* csúcs felőli oldalán van. Ebből következik, hogy a *C*-prizmának az *AD* élt tartalmazó lapja az *AB* élre merőleges, az *A* csúcsot tartalmazó sík *C* csúcs felőli oldalán van.

14. Megjegyzés: Az instabil egyensúly definíciójából következik (2. Definíció), hogy a *C* csúcson akkor jöhet létre instabil egyensúly, ha a *T* tetraéder *S* súlypontját a *C* csúccsal összekötő szakasz a *CD* éllel hegyesszöget zár be.

Mivel a *T* tetraédernek a *DCB* lapján *C* csúcsnál tompaszög van, ezért a *B* csúcs a *DC* szakaszra merőleges, a *C* csúcsot tartalmazó síknak a *D* csúccsal ellentétes oldalán helyezkedik el.

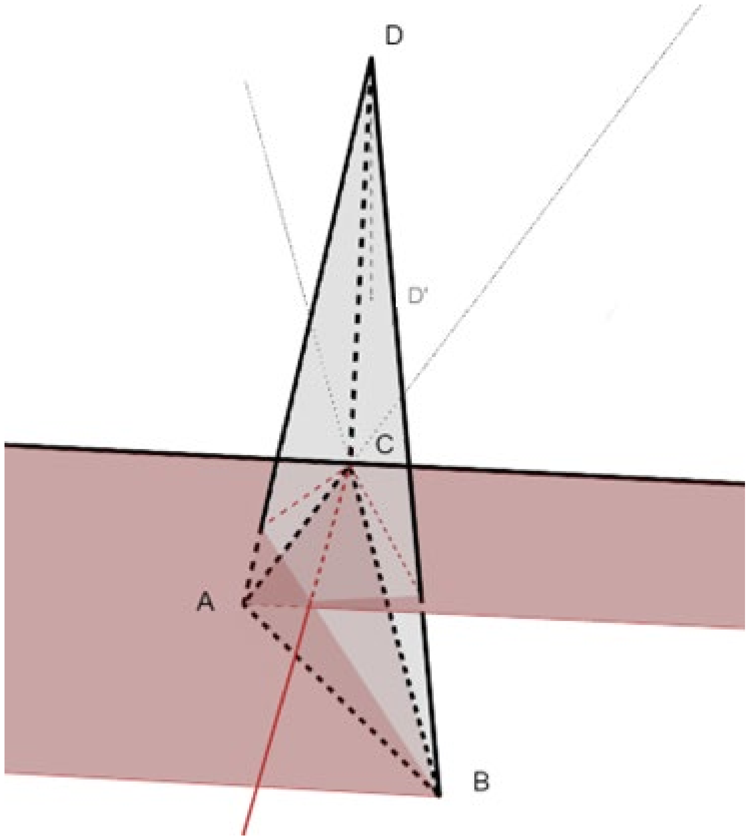
Mivel a *T* tetraédernek az *ACD* lapján *C* csúcsnál tompaszög van, ezért az *A* csúcs a *DC* szakaszra merőleges, a *C* csúcsot tartalmazó síknak a *D* csúccsal ellentétes oldalán helyezkedik el.

A 12. Megjegyzés 11) és 12) pontjából következik, hogy a szóba jöhető súlypontok a *DC* szakaszra merőleges, a *C* csúcsot tartalmazó síknak az *A* és *B* csúcs felőli oldalán helyezkednek el (9. ábra).

Ebből következik, hogy a *T* tetraéder *S* súlypontját a *C* csúccsal összekötő szakasz a *CD* éllel tompaszöget zár be, mely nem felel meg a 14. Megjegyzésben leírt feltételnek.

Tehát a *T* tetraéderben biztosan nem jöhet létre a *C* csúcson instabil egyensúly. Q.e.d.

Ezzel a 3. Tételt bizonyítottuk.



9. ábra: Az ábrán *DC* szakaszra merőlegesen nézve látjuk a *T* tetraédert. Mivel a *T* tetraédernek a *DCA* és a *DCB* lapján *C* csúcsnál tompaszög van, ezért az *A* és *B* csúcs a *DC* szakaszra merőleges, a *C* csúcsot tartalmazó síknak (fekete sík, élben látva) a *D*-vel ellentétes oldalán helyezkedik el. A szóba jöhető súlypontok az A-prizma BC élt tartalmazó lapjának *A* csúcs felőli oldalán, és a *B*-prizma *AC* élt tartalmazó lapjának *B* csúcs felőli oldalán helyezkednek el (piros síkok). Tehát a súlypontok a *DC* szakaszra merőleges, a *C* csúcsot tartalmazó síknak a *D* csúccsal ellentétes oldalán helyezkednek el.

A 3. Tétel bizonyításával beláttuk, hogy ha *T* egy monostabil tetraéder, akkor az instabil egyensúlyainak száma pontosan $U(T) = 2$.

15. Megjegyzés: [7] Egy poliéder stabil egyensúlyainak száma megegyezik a poliéder súlypontjára vett poláris duális poliéderének instabil egyensúlyainak számával, továbbá egy poliéder instabil egyensúlyainak száma megegyezik a poliéder súlypontjára vett poláris duális poliéderének stabil egyensúlyainak számával.

Ez azt jelenti, hogy ha létezne olyan tetraéder, mely az $(S,U) = (3,1)$ vagy $(S,U) = (4,1)$ egyensúlyi osztályokban szerepel, akkor léteznie kéne $(S,U) = (1,3)$ és $(S,U) = (1,4)$ osztályba sorolható tetraédernek is.

A 3. Tételből következik, hogy egy monostatikus tetraéder kizárólag az $(S,U) = (1,2)$ és az $(S,U) = (2,1)$ osztályokban létezhet.

Ez a kijelentés egyenértékű a címben megfogalmazott állítással is, miszerint nem létezik mono-monostatikus tetraéder (2. Korollárium). Ezzel igazoltuk az 1. Tétel állítását, miszerint ha egy tetraéder monostatikus, akkor pontosan 4 egyensúlyi helyzete van. Q.e.d.

3. Összegzés

4. Tétel: Tetraéderek az alábbi 11 egyensúlyi osztályban létezhetnek:

$(2,1)^E$, $(1,2)^E$, $(2,2)^E$, $(2,3)^E$, $(3,2)^E$, $(3,3)^E$, $(2,4)^E$, $(4,2)^E$, $(3,4)^E$, $(4,3)^E$, $(4,4)^E$

és a felsorolt 11 osztály mindegyikében létezik tetraéder.

Bizonyítás (4. Tétel):

Ebben a dolgozatban igazoltuk (1. Tétel), hogy ha egy tetraéder monostabil, akkor pontosan 4 egyensúlyi helyzete van. Ebből következik, hogy monostabil tetraéderek csak az $(1,2)^E$ és a $(2,1)^E$ egyensúlyi osztályban fordulhatnak elő. Conway igazolta [5], hogy létezik monostabil tetraéder és a [7] cikkben igazolták monoinstabil inhomogén tetraéder létezését. Ugyanezen cikk tartalmazza annak igazolását, hogy az összes nem-monostatikus osztályban létezik tetraéder. Q.e.d.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a dolgozat elkészítéséhez nyújtott támogatást és segítséget konzulenseimnek dr. Domokos Gábornak és Regős Krisztinának! Szintén köszönöm az NKFIH 134199-es kutatási témájából befolyó anyagi támogatást!

Irodalomjegyzék

[1] Wikipedia szócikk https://en.wikipedia.org/wiki/Dice

[2] J. W. Milnor, Topology from the Differentiable Viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, Virginia, 1965.

[3] J. H. Conway and R. K. Guy, Stability of polyhedra, SIAM Rev. 8 (1966), 381–381, doi:10.1137/1008075.

[4] M. Goldberg and R. K. Guy, Problem 66-12, Stability of polyhedra (by J. H. Conway and R. K. Guy), SIAM Rev. 11 (1969), 78–82, doi:10.1137/1011014.

[5] R. J. Mac, G. Dawson, Monostatic simplexes, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 541–546, doi: 10.2307/2323158.

[6] *S*. Bozóki, G. Domokos, F. Kovács, K. Regős: Mono-unstable polyhedra with point masses have at least 8 vertices. Int. J. Solids and Structures Volumes 234–235, January 2022, 111276 https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111276

[7] G. Domokos, F. Kovács, Z. Lángi, K. Regős and P.*T*. Varga: Balancing polyhedra. Ars Mathematica Contemporanea Vol 19 No 1. https://doi.org/10.26493/1855-3974.2120.085

[8] Középiskolai matematikai és fizikai lapok, 70. ´évfolyam 5. szám, Domokos Gábor, Kovács Flórián, Lángi Zsolt, Regős Krisztina, Varga Péter Tamás: Konvex poliéderek egyensúlyai

[9] Várkonyi, Péter & Domokos, Gabor. (2006). Mono-monostatic bodies. The Mathematical Intelligencer. 28. 34-38. 10.1007/BF02984701.

Ábrajegyzék