

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Építészmérnöki Kar

Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Tudományos Diákköri Dolgozat

Geometria és Tartószerkezetek szekció

2022.

Egyenes és körív tengelyű, változó keresztmetszetű tartók szilárdságtani problémái

Tóth Gergely Péter

BITQJH

Konzulens: Dr. Sajtos István

2022. november 2.

Tartalomjegyzék:

1. Bevezetés

1.1 A dolgozat célja, módszere

1.2 Irodalom

2. Szilárdságtani modell

Koordináta- és teher- és igénybevitelirányok feltételezése

2.1 Alapvető feltevések

Bernoulli-Navier hipotézis

A Hooke-törvény

Elemi szilárdságtani módszer

2.2 A képletek értelmezése

A vizsgált keresztmetszetek geometriája

A nyírófeszültség eredményei: átlagos értékek

3. Egyenes tengelyű, állandó keresztmetszetű tartók összefüggései, tulajdonságai

3.1 A teher és az igénybevételek közötti kapcsolat

3.2 A normál és nyírófeszültségek számítása

4. Egyenes tengelyű, változó keresztmetszetű tartók

4.1 Normálerő igénybevétel

4.1.1 Egyenes tengelyű, állandó szélességű, változó magasságú tartók

4.1.1.1 Nyírófeszültség számítása

4.1.1.2 Y irányú normálfeszültség számítása

4.1.1.3 Számpélda, az eredmények ellenőrzése

4.1.2 Egyenes tengelyű, változó szélességű, változó magasságú tartók

4.1.2.1 Nyírófeszültség számítása

4.1.2.2 Y irányú normálfeszültség számítása

4.2 Hajlítással egyidejű nyírás igénybevétel

4.2.1 Egyenes tengelyű, állandó szélességű, változó magasságú tartók

4.2.1.1 Nyírófeszültség számítása

A derivált tagok kifejtése, magyarázata

4.2.1.2 Y irányú normálfeszültség számítása

4.2.1.3 Számpélda, az eredmények ellenőrzése

4.2.2 Egyenes tengelyű, változó szélességű, változó magasságú tartók

4.2.2.1 Nyírófeszültség számítása

5. Körív tengelyű tartók, állandó keresztmetszetű tartók

5.1 A teher és az igénybevételek közötti kapcsolat körív tengelyű tartók esetében

5.2 Az érintőirányú normálfeszültség számítása

5.3 Nyírófeszültség számítása

integrálegyenlet

Megoldás nyomatéki egyensúlyra

A horizontális egyensúly igazolása

5.3 Y irányú normálfeszültség számítása a felhasznált összefüggésekkel

5.4 Számpélda, az eredmények ellenőrzése

6. Körív tengelyű, változó keresztmetszetű tartók

A két eset összehangolása, kiindulási feltételek

6.1 Nyírófeszültség számítása

integrálegyenlet

Megoldás nyomatéki egyensúlyra

A horizontális egyensúly igazolása

A derivált tagok kifejtése, magyarázata

6.2 Számpélda, az eredmények ellenőrzése

7. Összefoglalás

8. Irodalom



A kettes metró Pillangó utcai megállójának tetőszerkezete

(<https://mapio.net/pic/p-5777035/>)

1. Bevezetés

1.1 A dolgozat célja, módszere

Ebben a dolgozatomban az Építészmérnöki karon oktató Szilárdságtan 1. című tantárgyon tanított elemi szilárdságtani módszer segítségével szeretnék olyan geometriájú tartószerkezeteket vizsgálni, amelyek a megoldási menetük miatt nem képezik részét a tananyagban, ugyanakkor számos helyen előfordulnak az építészetben. Ugyanis napjainkban az építészeti formatervezésben számos olyan geometriával rendelkező tartószerkezet is megjelent, amelyek feszültségállapotai nem modellezhetőek az egyszerű hajlítási képlettel és a nyírófeszültség kiszámítására használt Zsuravszkij képlettel.

Ilyen szerkezet például egy síkgörbe tengelyű tartó vagy egy olyan gerenda, amelynek nem állandó méretűek a keresztmetszetei, hanem a tengely mentén változnak.

1.2 Irodalom

A kiindulási pont Muttynyánszky Ádám Szilárdságtan című könyve volt. Ezen felül a képleteket összevetettük Grashof: Theorie Der Elasticitat Und Festigkeite című könyvében szereplő eredményekkel.

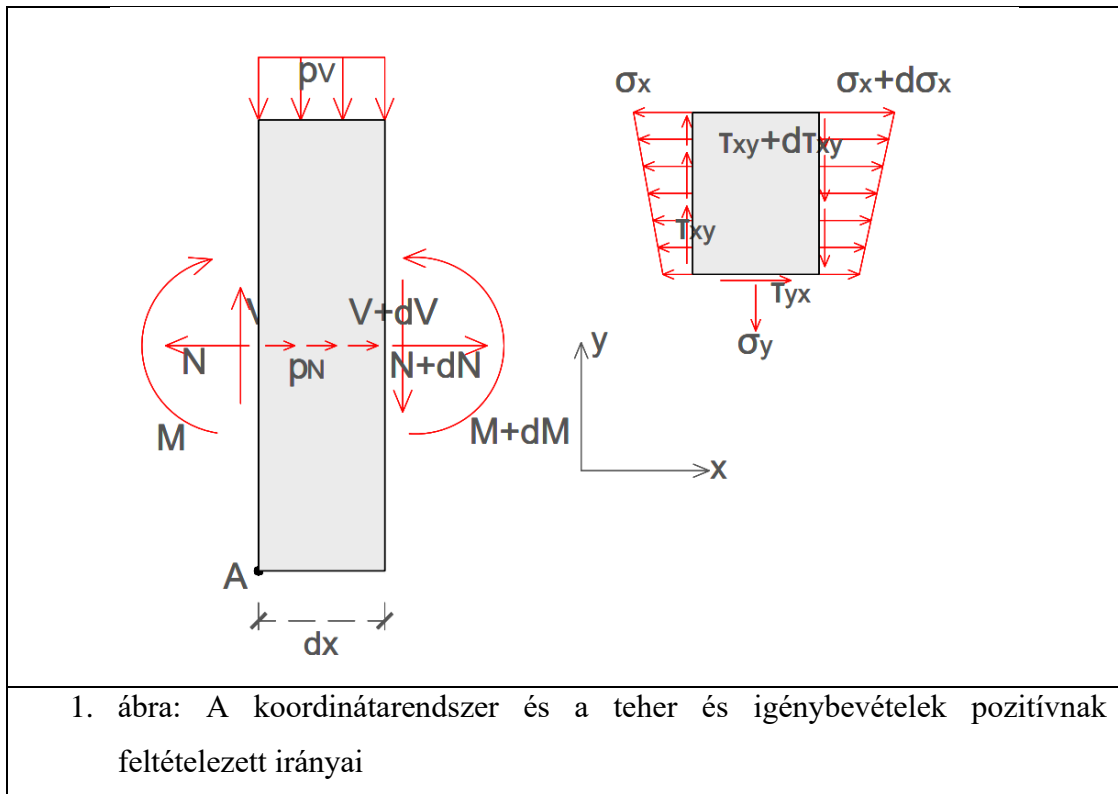
2. Szilárdságtani modell

Szilárd testek feszültségállapotainak vizsgálataira számos módszer létezik a klasszikus mechanikában. A folyadékokkal és gázokkal ellentétben – amely esetekben a nyomás fogalmat használjuk és amely analóg a szilárd testek esetében használt feszültséggel – a szilárd testek feszültségállapota nem jellemezhető egy skalárértékkel a helykoordináta ismeretében. A feszültség nagysága és iránya függ a testet elvágó sík irányától is a vizsgált pont elmozdítása nélkül is. Ezen sík ismeretében a feszültségvektor szétbontható a síkra merőleges (ezt nevezzük normálfeszültségnek és σ a jele) és a síkkal párhuzamos (ezt nyírófeszültségnek nevezzük és τ a jele) komponenseire.

Számításaimat az elemi szilárdságtan módszereivel végzem el, vagyis egyszerűsített alakváltozási állapotok alapján adjuk meg a feszültségek elosztását. A tartóból kivágott elemi hosszúságú testek esetén a vágási síkokon az anyagi folytonosságot normál és nyírófeszültségekkel helyettesítjük.

Koordináta- és teher- és igénybevételirányok feltételezése

A különböző geometriájú tartók közös vizsgálata érdekében szükséges megtenni a koordináták, az igénybevételek és a feszültségek előjeleinek meghatározását térbeli viszonyuk alapján. Ekkor a képletek összehasonlíthatóak egymással és számos további összefüggést lehet felírni, amely egyszerűsítheti számításainkat. Ezt az alábbi ábra mutatja:



2.1. Alapvető feltevések

A rúdmodell

Az egyszerű geometriájú és felépítésű szerkezeteket – jelen esetünkben egy rudat – nagyon könnyű így modellezni. Egy rúdként definiálható test létrehozásához hozzunk létre egy tetszőleges egyenes tengelyt, amely tengelyre a kezdőpontban, merőlegesen egy választott geometriájú és területű keresztmetszetet illesztünk, úgy, hogy a keresztmetszet súlypontja illeszkedjen a rúdtengelyre. Ezután a rúdtengely mentén vigyük végig önmagával párhuzamosan a keresztmetszetet a tengely végéig. Ezzel egy háromdimenziós testet kaptunk. A dolgozatomban olyan rúd jellegű testekkel foglalkozom, amelyek esetén a rúdtengelyt síkgörbe alakúnak vesszük – tehát térgörbékkel nem foglalkozunk -, illetve a keresztmetszetek méretei a tengely mentén lineárisan változnak.

A rúd feszültségállapotának számítását a keresztmetszetre merőleges normálfeszültségekkel kezdjük, mivel a rúdtengelyre merőleges síkban találhatóak a legnagyobb normálfeszültségek. Ezután a nyírófeszültséget egy elemi hosszúságú, rúddarabból kivágott elemdarab egyensúlyi vizsgálatából kapjuk meg.

Bernoulli-Navier hipotézis

A rudak feszültségállapotát -a rúd igénybevételeinek ismeretében- a Bernoulli-Navier hipotézis segítségével lehet a legkönnyebben megállapítani. A hipotézisnek két alapvető feltevése van. Az első pont a keresztmetszeteket infinitezimálisan kicsi vastagságú merev lapoknak képzeljük el, amelyek között szintén infinitezimálisan kicsi tér van. Ezek a merev lapok a bekövetkező deformáció után sem deformálódnak. A második pont azt mondja ki, hogy a keresztmetszetek deformációk hatására merőlegesek maradnak a rúdtengelyre.

Hooke-törvény

Másnéven a lineárisan rugalmas anyagmodell. Ez azt jelenti, hogy – például egy központosan húzott rúddal szemléltetve - egyenlő feszültség növekedéstől egyenlő mértékben változik a megnyúlás. Ez az arányosság a folyáshatárig teljesül, és a két érték hányadosát rugalmassági modulusnak (E) nevezzük. $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Az elemi szilárdságtani módszer

Számításaimat az elemi szilárdságtan módszereivel végzem el, vagyis a feszültségeket az elemi méretű testek egyensúlyi állapotának feltételezéséből adódó egyenletekből számítjuk ki. A tartóból kivágott elemi hosszúságú testek esetén a vágási síkokon az anyagi folytonosságot normál és nyírófeszültségekkel helyettesítjük.

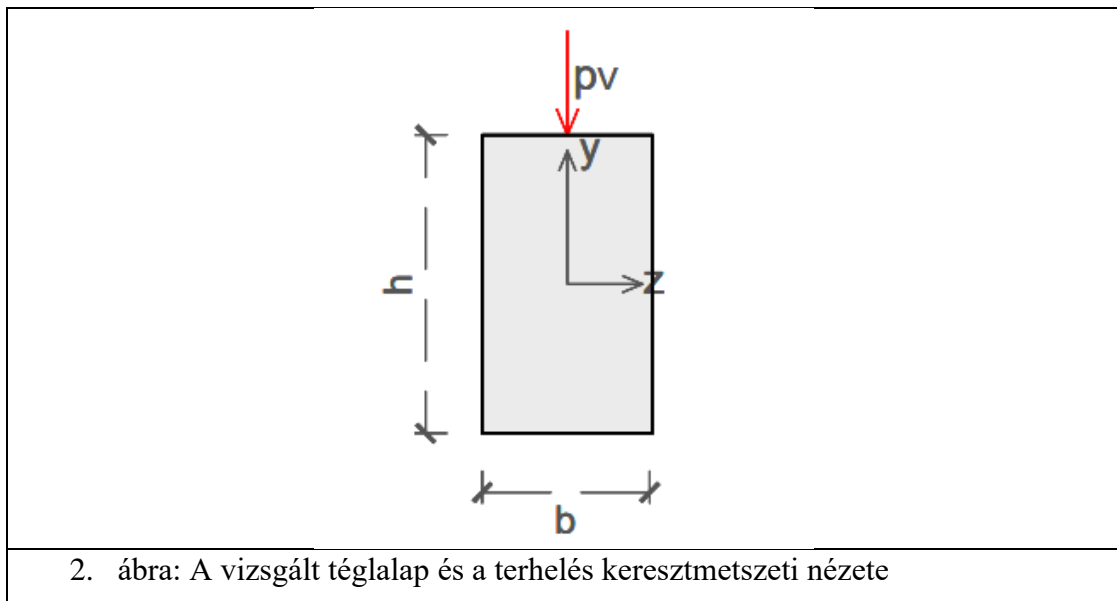
A keresztmetszet egyensúlya (normálerő és nyomatéki igénybevétel esetén két egyenlet), a Hooke-törvény és a Bernoulli-Navier hipotézisből a rúdmodellnek összesen 4 egyenletét kapjuk.

2.2 A képletek értelmezése

A vizsgált keresztmetszetek geometriája

A dolgozatomban csak olyan tartókat vizsgálunk, amelyeknek állandó vagy rúdtengely mentén egyenletesen változó téglalap formájú keresztmetszete van. Ez a

döntés egy egyszerűsítés annak érdekében, hogy a képletek esetében a különböző mennyiségek könnyen beazonosíthatóak legyenek. Továbbá így maguk a képletek is átláthatóbbak lesznek.



A téglalap keresztmetszet azt is jelenti, hogy van két egymásra merőleges szimmetriatengelye, amelyek azonosak y és z tengellyel. Keresztmetszeti ábrázolásban nézve a terhet xy síkban működőnek modellezzük. A téglalap magasságát h-val, szélességét b-vel jelöljük. Emiatt b értéke állandó és így y szerinti integrálásakor kiemelhető. Az értelmezhetőség miatt az ilyen műveletek alkalmazásakor az $\int_{A} f(y) dA$ kifejezés helyett a $b * \int_{-h/2}^{h/2} f(y) dy$ integrált használjuk

A nyírófeszültség eredményei: átlagos értékek

Minden esetben, amikor egy kivágott elemi vastagságú rúddarab egyensúlyja alapján határozzuk meg a nyírófeszültséget az elem szélessége mentén állandó értéket kapunk, mivel azt feltételezzük – Zsuravszkijhoz hasonlóan - a számítás során, hogy ez állandó. A valóságban nem pontosan, ugyanis a numerikus végeleemes számítások és a de-Saint-Venant féle pontos megoldás nem ad tökéletesen egyenletes megoldást, hanem a súlypontban kisebb értéket számol, mint a szélső szálban. Azonban az állandótól való eltérés a téglalap keresztmetszet arányaitól is függ; abban az esetben, ha $\frac{h}{b}$ arányát növeljük, akkor egyre jobban hasonlít az eloszlás az egyenleteshez. Egy $\frac{h}{b} = 1,33$ esetén is 10-11%-os hibahatáron belül vannak a pontos és a végeleemes módszer

eredményei a Zsuravszikj-féle állandó feltételezéstől. (Bojtár-Pap: Egyenes és görbe gerendák feszültségeinek vizsgálata)

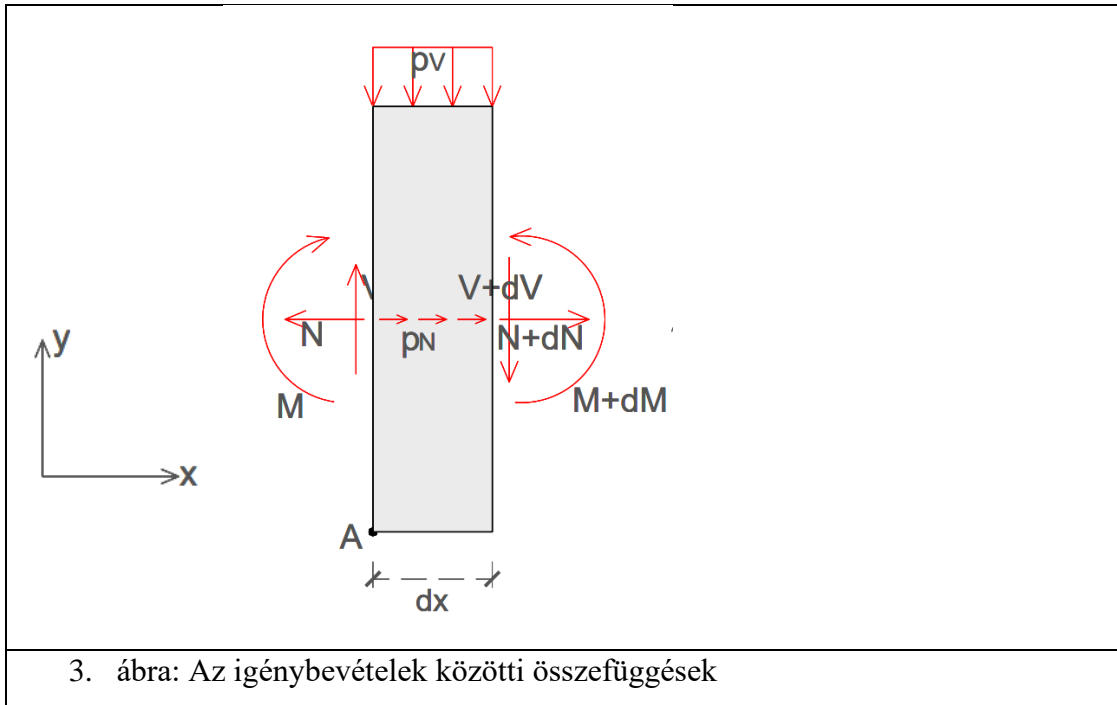
Ellenőrzés végeelem tárcsamodellel

A kapott eredményeinket hasonlítsuk össze az AxisVM végeelem szoftver eredményeire ugyanazon geometria és terhelés esetén. A változó keresztmetszetű esetekben a tárcsamodell nem tud kétirányban (magasságban és szélességben is) változó keresztmetszetet előállítani. Így az állandó szélességűeket vetjük össze ilyen módon.

3. Egyenes tengelyű, állandó keresztmetszetű tartók összefüggései, tulajdonságai

3.1 A teher és az igénybevételek közötti kapcsolat

A statikai terheknek két típusát használjuk a Bernoulli-Navier rúdmodellel való számításokor. A megoszló terhelést, amely a rúd tengelyét metsző síkban hat és [kN/m] mértékegységű; továbbá a koncentrált terhet, amelynek a hatásvonala szintén metszi a rúdtengelyt és – mivel erő jellegű mennyiség – [kN] mértékegységű. A tartó nyomatéki igénybevétel függvényének első deriváltja a nyíróerő függvény, második deriváltja a megoszló terhelés függvény. Ezt egy előjelhelyes elemi hosszúságú keresztmetszeten ható igénybevételekkel lehet bemutatni:



3. ábra: Az igénybevételek közötti összefüggések

$$\sum F_y = 0, \quad -p_v * dx + (V + dV) - V = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad -(M + dM) + M + (V + dV) * dx = 0$$

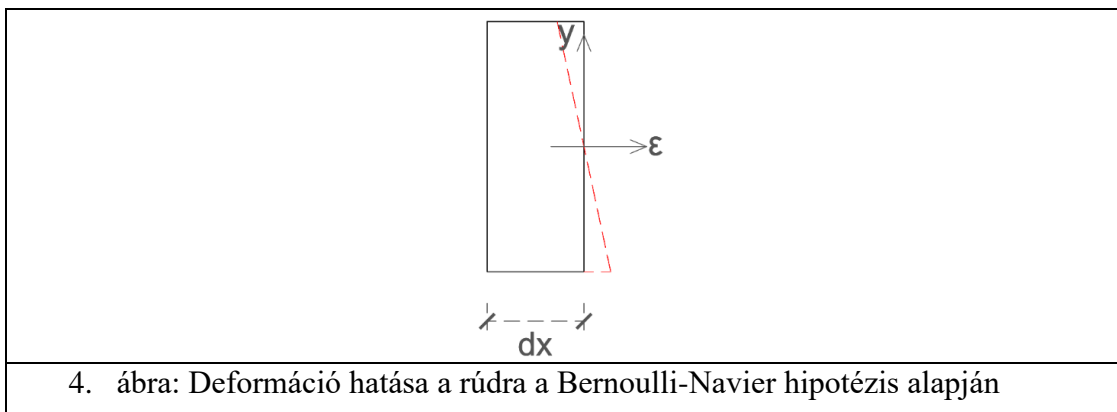
$dV * dx$ mennyiség másodrendűen kicsiny, így elhanyagolható

Az összefüggések tehát a következők: $\frac{dM}{dx} = V$, és $\frac{dV}{dx} = -p_v$

A megoszló terhelésnek ezenkívül létezik olyan típusa, mikor rúdtengely irányú a megoszló teher, ahogyan az ábra mutatja, ekkor az összefüggés a következő:

$$\sum F_x = 0, \quad N + dN - N - p_N * dx = 0, \quad \frac{dN}{dx} = p_N$$

3.2 A normál és nyírófeszültségek számítása



4. ábra: Deformáció hatása a rúdra a Bernoulli-Navier hipotézis alapján

Az ilyen tartók rendelkeznek a legegyszerűbb geometriával. Ezen esetben a tengely irányú normálfeszültség egyenletei a keresztmetszetek egyensúlyára, deformációjára és anyagára az alábbi módon írhatóak fel:

$$\text{Egyensúlyi egyenletek: } N = \int_{-A}^A \sigma_x dA, M = \int_{-A}^A \sigma_x y dA$$

$$\text{Geometriai egyenletek: } \varepsilon = -a \cdot y + b$$

$$\text{Anyagegyenlet: } \sigma_x = E \cdot \varepsilon$$

Amely esetben N a keresztmetszeten ható normálerő, M a keresztmetszeten ható hajlítónyomaték, A a keresztmetszet területe: ε a relatív megnyúlás és E a rugalmassági modulus.

$$\text{Ezekből az alábbi összefüggést kapjuk: } \sigma_x = -\frac{M}{I_z} \cdot y + \frac{N}{A}$$

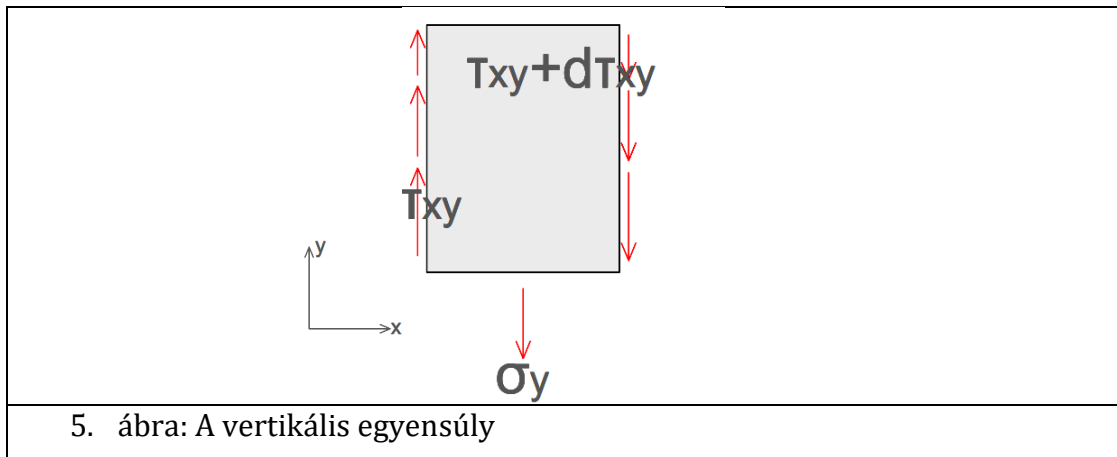
Itt I_z a keresztmetszet másodrendű nyomatéka, amely kifejezés jelentése az alábbi: $I_z = \int_A y^2 dA$

A nyírófeszültség a fent kifejtett normálfeszültség ismeretében az elemi rúddarab egy

$$\text{részének tengelyirányú vetületi egyensúlya alapján számolható: } \tau_{yx} = \frac{dM}{dx} \frac{\int_{-A}^A y dA}{I_z \cdot b} = \frac{V \cdot S_y}{I_z \cdot b}$$

Amely képletben V a keresztmetszetre ható nyíróerő, S_y az elcsúszni akaró keresztmetszetrész területe, azaz a kivágott elemi rúddarab tengelyre merőleges területe, b pedig a keresztmetszet szélessége.

A Bernoulli-Navier hipotézisből kiindulva nem lehet kiszámolni, de bizonyos igénybevételi feltételek mellett létezik y irányú normálfeszültség is egy rúdban. Ez akkor teljesül, ha a nyíróerő – és velük arányosan a nyírófeszültség – változik x -tengely mentén. A nyírófeszültség kiszámításakor az elemi hosszúságú rúddarabból kivágott darab y irányú, vertikális vetületi egyensúlya csak az ábrán mutatott y -irányú szigma feszültség működésével lehetséges. Ekkor a kiinduló egyenlet a következő:



$$-\int_y^{\frac{h}{2}} b * (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) dy + \int_y^{\frac{h}{2}} b * \tau_{yx} dy - \sigma_y * b * dx = 0$$

Összevonva ezt kapjuk:

$$-\frac{dV}{I_z * b} \int_y^{\frac{h}{2}} S_y dy - \sigma_y * b * dx = 0$$

Kiintegrálva, szigmára rendezve a következő:

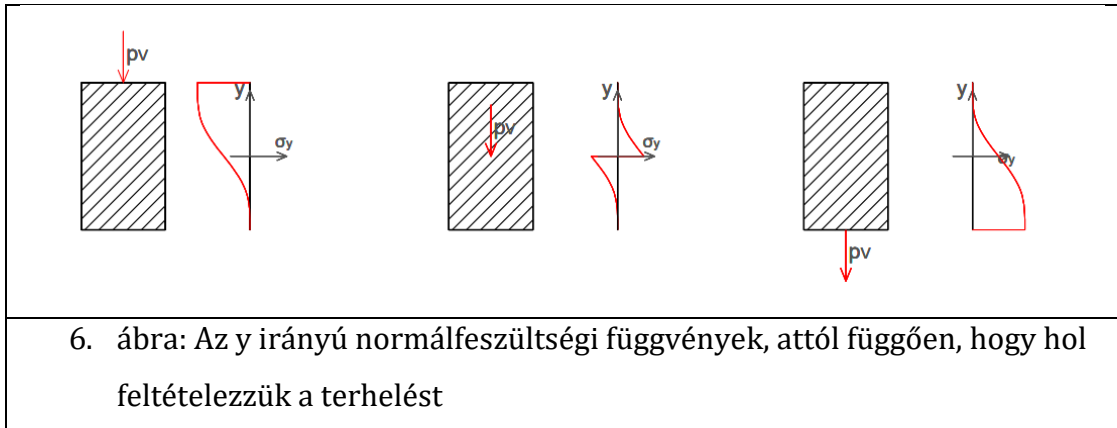
$$\sigma_y = -\frac{p}{I_z * b} * \left(\frac{\bar{A}^2}{6 * b} * (h + y) \right)$$

Ekkor p a tengelyre merőleges megoszló terhelés, \bar{A} az elcsúszni akaró keresztmetszet területe, h a keresztmetszet magassága. és y a kivágott rúddarab és a súlyponti tengely távolsága a fenti ábrán mutatott helyzetben.

Ez a feszültség a gerenda keresztmetszetének összenyomódását, vagy széthúzóását okozza.

Az alábbi egyenlet y -tengely mentén harmadfokú parabola egyenletét adja.

Keresztirányú normálfeszültség esetén meg kell határozni, hogy a keresztmetszet melyik pontjára helyezzük el a megoszló terhelést. A három leghetőséget az alábbi ábra mutatja, ahol azt lehet észrevenni, hogy mindig abban a pontban ugrik a függvény $\frac{p}{b}$ értéket, ahová a megoszló terhelést feltételeztük.

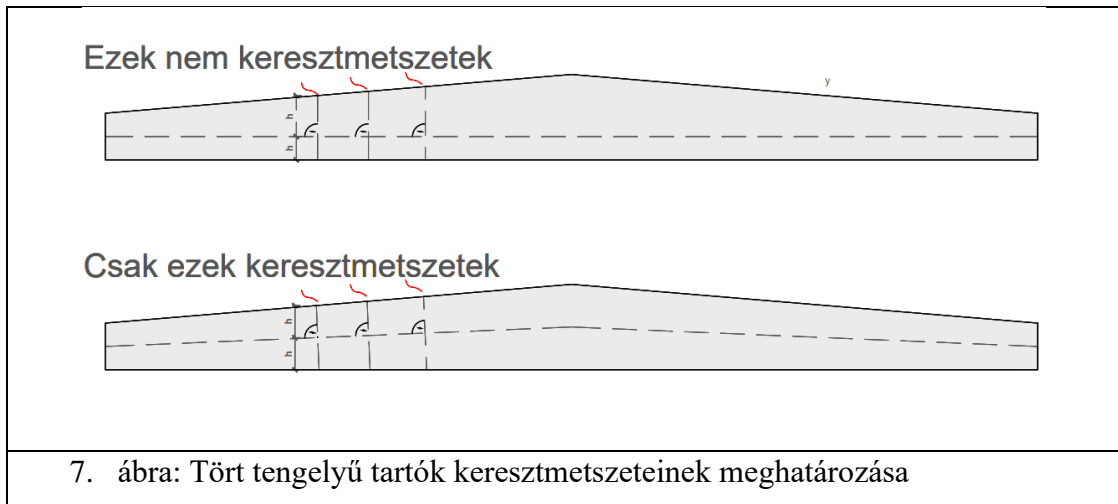


4. Egyenes tengelyű, változó keresztmetszetű tartók

Változó keresztmetszet alatt olyan rúdtengely menti egyenletes magassági és szélességi méretváltozást értünk, amely a rúd kezdetétől a végéig tart hirtelen ugrás nélkül. Abban az esetben, ha a méretváltozás nem nagyobb mint 10° , akkor a Bernoulli-Navier hipotézist érvényesnek tekintjük, tehát az állandó keresztmetszetű rudak összefüggései itt is érvényesek.

Egyenes tengely esetén mindig igaz, hogy a központos igénybevételeket (központos húzás ill. nyomás) és a külpontos igénybevételeket (hajlítással egyidejű nyírás) külön-külön is – egymástól függetlenül is lehet vizsgálni. Ebben a dolgozatban is így teszünk.

A változó keresztmetszet kifejezés kapcsán érdemes hangsúlyozni, hogy akkor számít keresztmetszetnek egy rúdbéli metszet, ha merőleges a rúdtengelyre. A rúdtengely meghatározása pedig egy olyan tengely, amely a rá merőleges metszeteknek mindig a súlypontján halad át. Az alábbi rajz azt mutatja, hogy a rúdtengely nem feltétlenül vízszintes helyzetű, hanem ferde az esetben, ha az egyik fedőlap vízszintes síkban helyezkedik el. Ebből az is következik, hogy az alsó és a felső fedőlapjai a rúdnak mindig azonos szöget zárnak be magával a tengellyel.



4.1 Normálerő igénybevétel

A rudat a két végén felület mentén megoszló erővel, amelyeknek mindkét oldalon megegyezik az eredőjük, és irányuk ellentétes az egyensúly megtartása érdekében. Ilyen terhelés esetén azt feltételezzük, hogy érvényes a Bernoulli-rúdmodell.

A feltevés érvényességét az alábbi $\alpha=10^\circ$ esetre ellenőrizni lehet egy központosan nyomott 2α szögtartományú élalakú rúdra felírható összefüggés esetén ($b=1$ egységnyi szélesség esetén) Kozmann képlete alapján:

$$\sigma_x = \frac{N}{y} * \frac{\cos^4(\varphi)}{\left(\alpha + \frac{1}{2} * \sin[2 * \alpha]\right)} \text{ol } y = \frac{h_x}{2 \tan(\alpha)} \text{ és } \varphi \text{ egy tetszőleges szög az ék csúcsából}$$

nézve.

Abban az esetben, ha $\alpha < 10^\circ$ akkor

$\sigma_x = \frac{N}{h_x} * \frac{\cos^4(\varphi)}{1}$ mivel $\varphi < \alpha$, így $\sigma_x = \frac{N}{h_x} * 1$, tehát az állandónak feltételezett normálfeszültség igaz lesz a teljes keresztmetszeten az említett szögtartományban.

(Kozmann: Változó keresztmetszetű rudak szilárdságtana)

Így a rúd összes keresztmetszetében állandó a normálfeszültség, értéke szintén $\sigma_x = \frac{N}{A}$. Azonban a magasság (h), a szélesség (b), így a terület (A) is x függvénye, amelyeket az alábbi módon definiálunk:

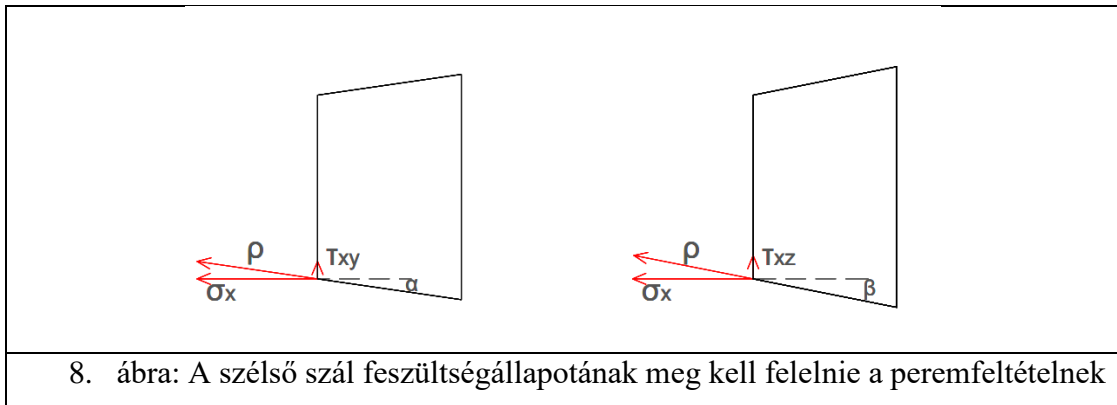
$$h_x = h_0 + 2 \cdot \tan(\alpha) \cdot x$$

$$b_x = b_0 + 2 \cdot \tan(\beta) \cdot x$$

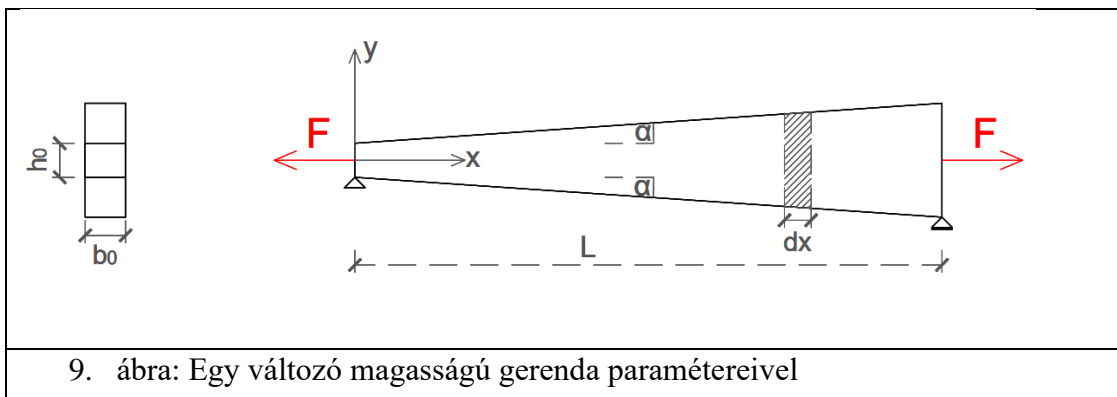
$$A_x = h_x * b_x$$

Az állandó keresztmetszetű központos igénybevételek esetén kizárólag σ_x van jelen a tartóban, de ha h vagy b nem állandó, az esetben nyírófeszültségek továbbá y és z irányú normálfeszültségek is felléphetnek.

Erre a **peremfeltétel** ad magyarázatot. A peremfeltétel azt mondja ki, hogy a tartó szélső szálában az eredő (ρ) feszültségvektor biztosan benne lesz a kontúrfelület síkjában. Sarokhelyzetű (y és z irányban is szélső helyzetű szál) szálban pedig mindkét kontúrfelület síkjában. Abban az esetben, ha a keresztmetszet állandó, akkor a feltétel önmagában σ_x -től is teljesül. Más esetben szükséges, hogy legyen τ_{xy} a keresztmetszet szélső szálában is, illetve ezen nyírófeszültség és a normálfeszültség eredőjének α szöget kell bezárnia a rúdtengellyel. Ezzel a feltétellel ellenőrizni lehet a szélső szálra alkalmazva a kapott képletek helyességét.



4.1.1 Egyenes tengelyű, állandó szélességű, változó magasságú tartók



A keresztmetszet két méretének változása külön-külön is vizsgálható, így három eset lehetséges; csak a magasság változik, csak a szélesség, illetve mindkettő. A központos igénybevételek esetén a keresztmetszet ellenállása (A, azaz a terület) irányfüggetlen, így a koordináta rendszer x tengely körüli elforgatásával az első két eset valójában ugyanaz, így csak két esetet vizsgálunk. Jelen esetben a magasság (a továbbiakban: h) változik lineárisan a tengely mentén (másnéven függ x-től), a szélesség (a továbbiakban: b) állandó marad. Ezt úgy is ki lehet fejezni, hogy:

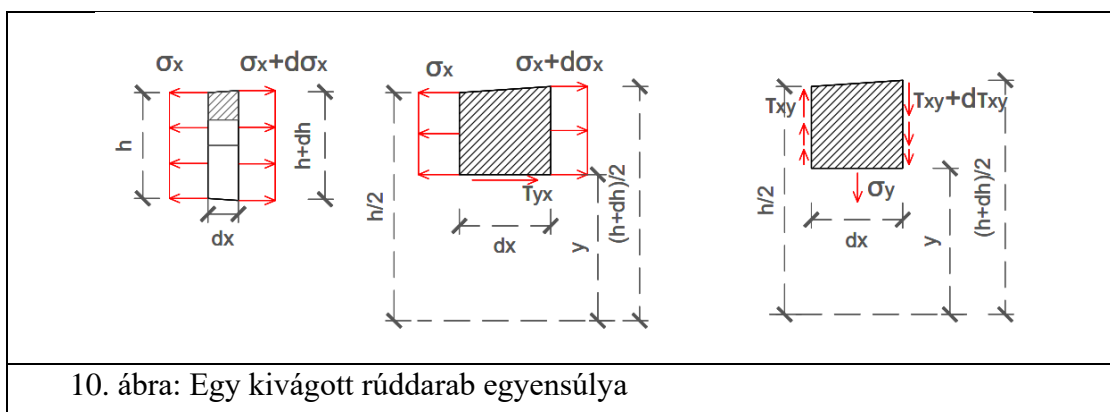
$$h_x = h_0 + 2 \cdot \tan(\alpha) \cdot x$$

ahol h_0 a kezdeti magasság, α a rúd alsó és felső lapja és a rúd tengelyének szöge, x pedig a távolság. Ezt x mentén deriválva:

$$\frac{dh}{dx} = 2 \cdot \tan(\alpha)$$

4.1.1.1 Nyírófeszültség számítása

Az ismert normálfeszültségek ismeretében vágjunk ki egy elemi hosszúságú darabot, amiből még vágjunk le egy darabot az ábrán mutatott módon. A nyírófeszültségek dualitási tételének köszönhetően, amely azt mondja ki, hogy a rúd egy tetszőleges pontjában a tengellyel párhuzamos vágási él mentén működő nyírófeszültség megegyezik az abban a pontban a keresztmetszeten működő nyírófeszültséggel. Így tehát a keresztmetszeten működő nyírófeszültséget is ki tudjuk számítani. A vizsgált elem vízszintes vetületi egyensúlya a következő:



10. ábra: Egy kivágott rúddarab egyensúlya

$$\int_y^{\frac{h+dh}{2}} b \cdot (\sigma_x + d\sigma_x) dy - \int_y^{\frac{h}{2}} b \cdot \sigma_x dy + \tau_{yx} \cdot b \cdot dx = 0$$

Behelyettesítve és kiemelve:

$$\frac{N}{(h+dh) * b} \int_y^{\frac{h+dh}{2}} 1 dy - \frac{N}{h * b} \int_y^{\frac{h}{2}} 1 dy + \tau_{yx} * dx = 0$$

Ezután:

$$\frac{N}{h * b} * \left(\frac{h+dh}{2} - y \right) * \left(1 - \frac{dh}{h} \right) - \frac{N}{h * b} * \left(\frac{h}{2} - y \right) + \tau_{yx} * dx = 0$$

Majd:

$$\frac{N}{A} * \frac{y}{h} * dh - \tau_{yx} * dx = 0$$

Végül taura átrendezve:

$$\tau_{yx} = -\frac{N}{A} * \frac{y}{h} * 2 \tan(\alpha)$$

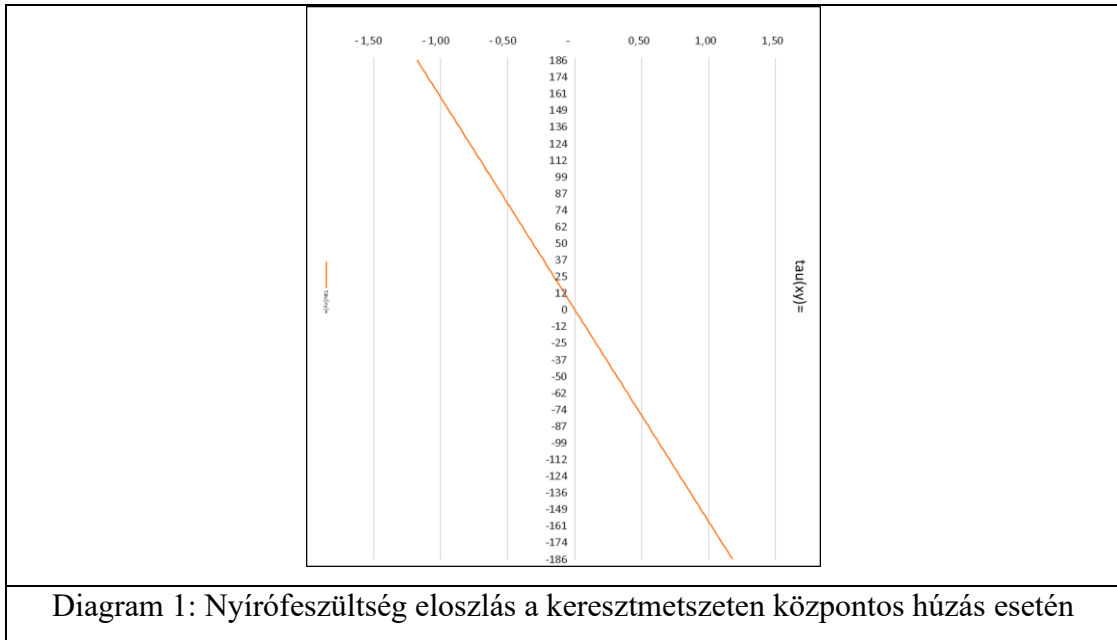
Tehát azt kaptuk eredményül, hogy annak ellenére van nyírófeszültség a keresztmetszetben, hogy nincsen nyíróerő. Ez azt is jelenti, hogy a teljes keresztmetszeti felületen integrált τ_{yx} függvény értéke 0 kell, hogy legyen,

$$\text{ez } \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{N}{A} * \frac{y}{h} * 2 \tan(\alpha) dy \text{ esetén teljesül, ugyanis } \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -y dy = 0.$$

A képlet előjele tehát függ az igénybevétel (N) előjelétől, a vizsgált pont magasságától (y) előjelhelyesen megadva és a keresztmetszet változásának irányától. Ez utóbbi a peremfeltétel vizsgálatokor derül ki.

A nyírófeszültségek dualitása értelmében a vizsgált pontban megkapott érték azonos lesz az x normálisú síkban keresett τ_{xy} értékével. Így, ha a keresztmetszeten ábrázolni kívánjuk az eredményt akkor azt az

$$\tau_{xy} = -\frac{N}{A} * \frac{y}{h} * 2 \tan(\alpha) \text{ függvénnyel a látható módon tegyük meg:}$$

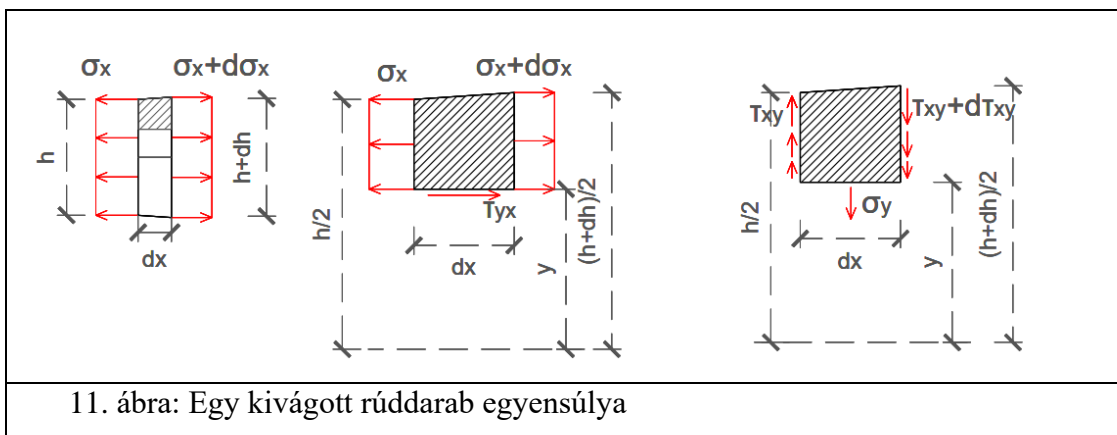


A fent bemutatott peremfeltételt ellenőrizhetjük a szélső szárra ebben az esetben:

$$\tan(\alpha) = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_x}$$

Továbbá: $\tau_{xy} = \frac{N}{A} * 2 \tan(\alpha) \frac{y}{h}$ és $\sigma_x = \frac{N}{A}$, illetve az ábráról leolvasható, hogy $y = -\frac{h}{2}$ ezt rendezve $\tan(\alpha) = -(-\tan(\alpha))$ miatt a peremfeltétel teljesül.

4.1.1.2 Y irányú normál feszültség számítása



A fent vizsgált rúdelem oldalaira berajzolt nyírófeszültség értékek függőleges vetületi egyensúlyának vizsgálatakor ($\sum F_y = 0$) azt vesszük észre, hogy a magasságnövekedés miatt nem lesz feltétlenül egyensúlyban a két oldalsó felületen

működő nyírófeszültségek felületszerinti integráljai. Ekkor a rúdelemben y irányú szigma is jelen van, amely állandó keresztmetszet esetén csak rúdtengelyre merőlegesen ható megoszló terhelés esetén van jelen, központos igénybevétel esetén sohasem. A keresett y irányú normálfeszültség értékét az ábra alapján az alábbi egyenletből kapjuk meg:

$$\int_y^{\frac{h+dh}{2}} b * (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dy - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \tau_{xy} dy + \sigma_y * b * dx = 0$$

Behelyettesítve, kiemelve:

$$-\frac{N}{b * (h + dh)^2} * 2 \tan(\alpha) \int_y^{\frac{h+dh}{2}} y dy + \frac{N}{b * h^2} * 2 \tan(\alpha) \int_y^{\frac{h}{2}} y dy + \sigma_y * b * dx = 0$$

Integrálva, rendezve:

$$N * \tan(\alpha) * \left(-\frac{y^2}{(h + dh)^2} + \frac{y^2}{h^2} \right) = \sigma_y * b * dx$$

dh-t a nevezőből eltávolítva:

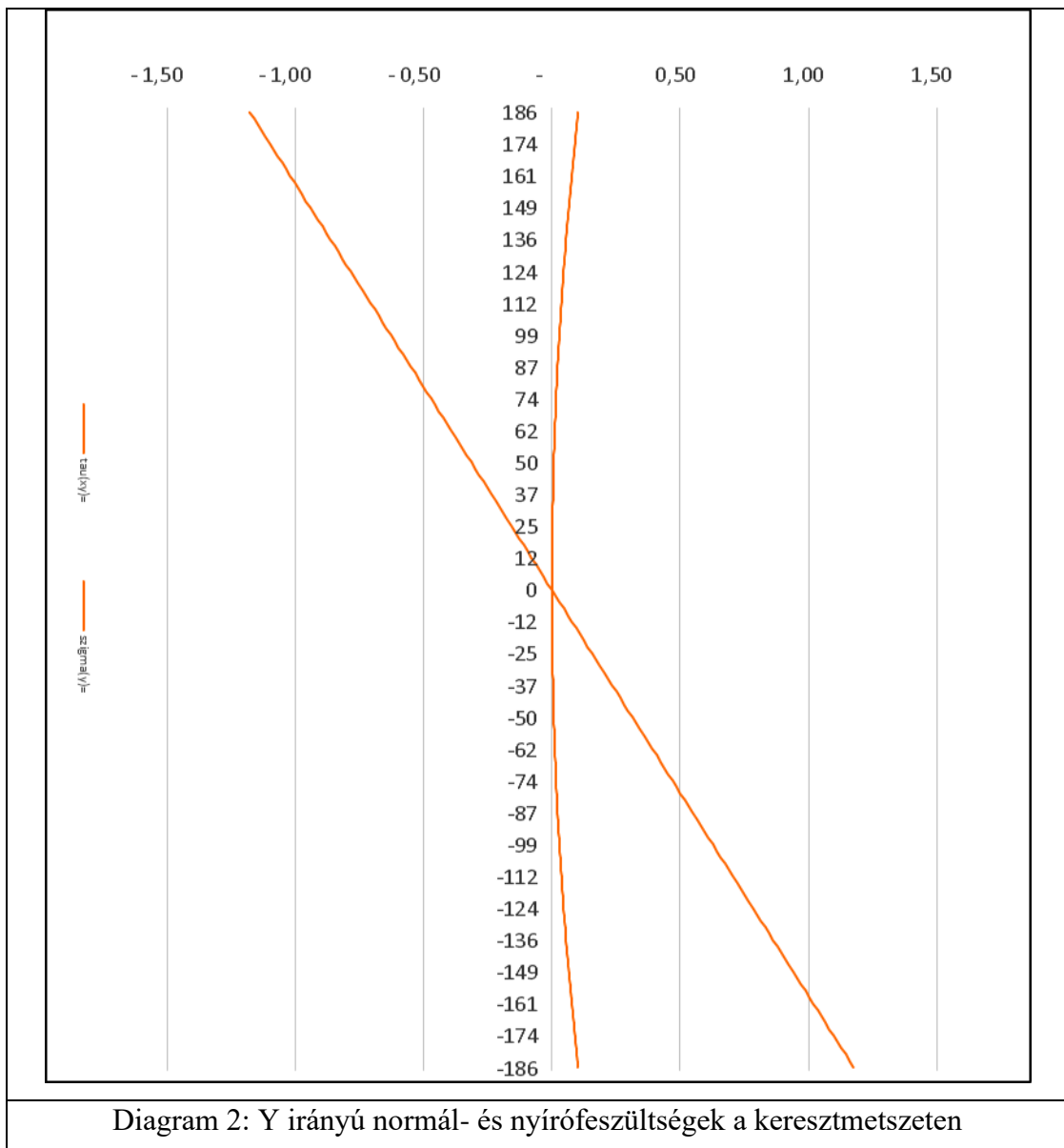
$$N * \tan(\alpha) * \left(\frac{-y^2 + y^2 + 2dh \frac{y^2}{h}}{h^2} \right) = \sigma_y * b * dx$$

Végül szigmára rendezve:

$$\sigma_y = \frac{N}{b * h} * 4 \tan^2(\alpha) \frac{y^2}{h^2} = \sigma_x * 4 \tan^2(\alpha) \frac{y^2}{h^2}$$

azt kaptuk eredményül, hogy pozitív tengelyirányú normálfeszültség esetén az y irányú is pozitív – húzó irányú – lesz, amely tehát a keresztmetszetet próbálja széthúzni y irányban. $\alpha = 0$ esetben minden eddig kapott feszültség értéke 0, amely eset az egyenes keresztmetszetet jelenti.

Ha az eredményt y mentén a keresztmetszeten szeretnénk ábrázolni, akkor azt a már ábrázolt nyírófeszültséggel együtt így tehetjük meg:



4.1.1.3 Számpélda, az eredmények ellenőrzése

A fenti számítások azt igazolják, hogy egy változó keresztmetszet okán egy központos igénybevételű gerendában is számos olyan feszültség is fellép, amelyek egyenes tengely esetén zérusok. Ezek numerikus vizsgálatát a következőkben számolási példákkal végezzük, amelyek az eredményeit hasonlítsuk össze egy végeelemmérszert használó szoftver eredményeivel. Továbbá más kísérleti vizsgálat eredményeivel is összevetjük.

Ebben az esetben határozzunk meg egy kezdeti keresztmetszetet, annak h és b méreteivel és α egy szöget, amely a tengely és az emelkedő fedőlapok közre zárt szöge.
 $h_0 = 250 \text{ mm}, b_0 = 100 \text{ mm}, \alpha = 5^\circ$

A rúd adatai és az igénybevétel legyenek a következők:

$$L = 5 \text{ m}, \quad N = 500 \text{ kN}$$

Keressük az alábbi x távolságokhoz tartozó keresztmetszetek τ_{xy} és σ_y értékeit:

Mivel lineáris, illetve szimmetrikus függvényekről van szó, amelyek a súlypontban, $y=0$ esetén szintén 0 értékkel bírnak elegendő csak a szélső szálban kiszámolni az eredményt:

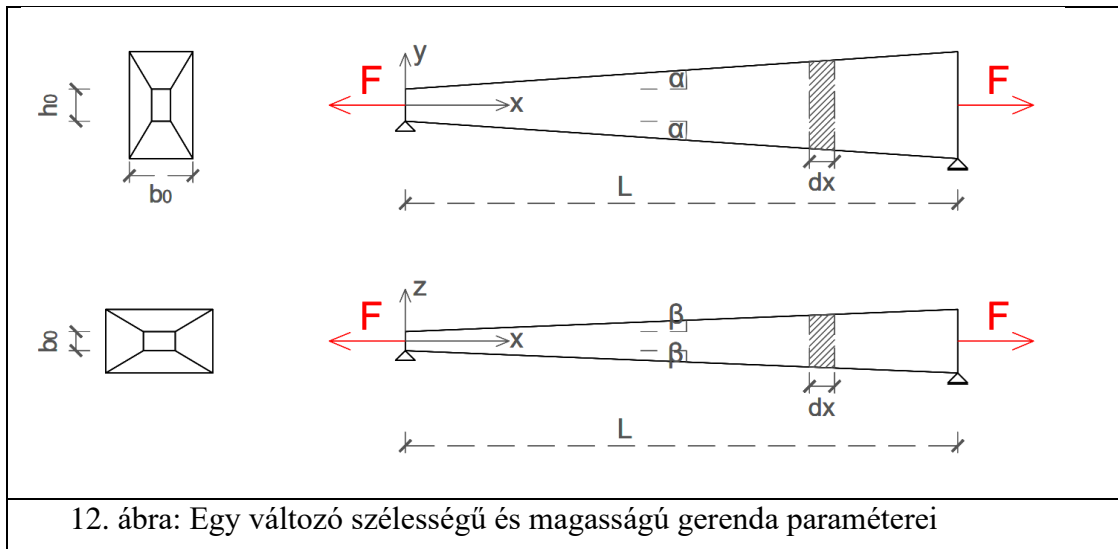
$$x_1 = 0,697 \text{ m}, x_2 = 2,291 \text{ m}, x_3 = 3,586 \text{ m}$$

Ezen számításokat az AxisVM végelem programban is elvégezve:

		AxisVM eredmények				Számítás a képlet alapján				Összehasonlítás (%)		
	y	szigma x	szigma y	tau xy	y	szigma x	szigma y	tau xy	szigma x	szigma y	tau xy	
$x=$	0,697											
	- 185,98	13,39	0,08	-1,17	185,98	13,44	0,10	-1,18	0%	-19%	0%	
	0,02	13,51	0,00	0,00	0,02	13,44	0,00	0,00	1%	-8%	0%	
	186,02	13,29	0,08	1,17	186,02	13,44	0,10	1,18	-1%	-19%	0%	
$x=$	2,291											
	- 325,44	7,65	0,06	-0,67	325,44	7,68	0,06	-0,67	0%	-5%	0%	
	- 0,44	7,71	0,00	0,00	-0,44	7,68	0,00	0,00	0%	-3%	2%	
	326,56	7,54	0,06	0,67	326,56	7,68	0,06	0,67	-2%	-6%	-1%	
$x=$	3,586											
	68,27	5,70	0,00	0,08	68,27	5,70	0,00	0,08	0%	-4%	0%	
	68,27	5,70	0,00	0,08	68,27	5,70	0,00	0,08	0%	-4%	0%	
	441,27	5,58	0,04	0,49	441,27	5,70	0,04	0,50	-2%	-5%	-2%	

Tehát az eltérések maximális értéke -19%.

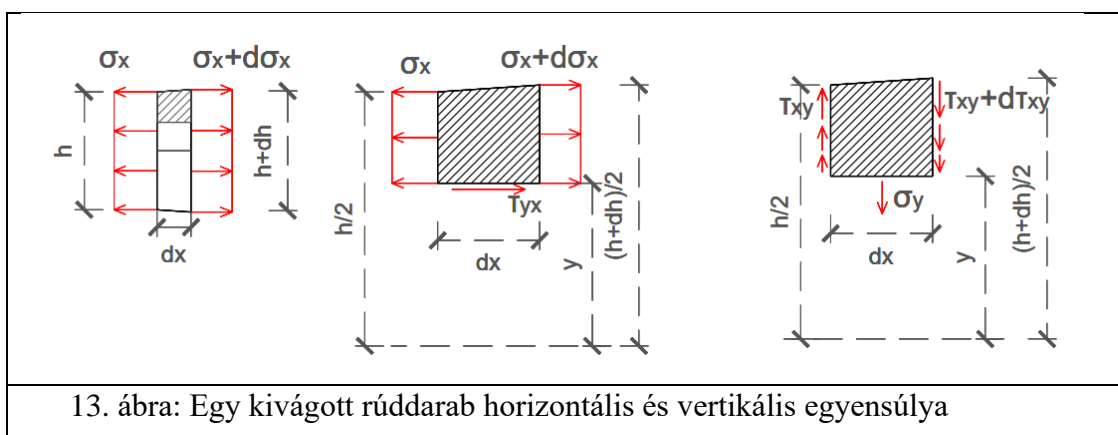
4.1.2 Egyenes tengelyű, változó szélességű, változó magasságú tartók



A változó keresztmetszetű tartók másik esete az, amikor a szélesség is változik méghozzá ugyanazon irányba és nem feltétlenül azonos az oldalfedőlap és a tengely által bezárt szög, mint a felső fedőlap esetén.

4.1.2.1 Nyírőfeszültség számítása

Az előző levezetéshez hasonlóan itt is egy elemi hosszúságú rúddarabot vágunk ki a tartóból és a vágási síkok mentén az anyagi folytonosságot normál- és nyírőfeszültségekkel helyettesítjük, pozitív irányúnak feltételezve őket, majd az egyensúlyi egyenletekbe helyettesítünk be. Ezen esetben a kiinduló egyenletünk majdnem azonos az előzővel, csak a változó szélességet a db -tag fejezi ki:



$$\int_y^{\frac{h+dh}{2}} (b + db) * (\sigma_x + d\sigma_x) dy - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \sigma_x dy + \tau_{yx} * \frac{b + b + db}{2} * dx = 0$$

Az utolsó tagban felbontás után a $\tau * \frac{db * dx}{2}$ tag kiesik, mivel másodrendűen kicsiny mennyiség, így az állandó szélességre vonatkozó felülettel kell itt is számolnunk.

Behelyettesítve és kiemelve:

$$\frac{N}{(h + dh)} \int_y^{\frac{h+dh}{2}} 1 dy - \frac{N}{h} \int_y^{\frac{h}{2}} 1 dy + \tau_{yx} * dx * b = 0$$

Ezután az integrálást elvégezve:

$$\frac{N}{h + dh} * \left(\frac{h + dh}{2} - y \right) - \frac{N}{h} * \left(\frac{h}{2} - y \right) + \tau_{yx} * dx * b = 0$$

Majd dh-t a nevezőből eltüntetve:

$$\frac{N}{h} * \left(1 - \frac{dh}{h} \right) * \left(\frac{h + dh}{2} - y \right) - \frac{N}{h} * \left(\frac{h}{2} - y \right) + \tau_{yx} * dx * b = 0$$

Ezt kifejtve:

$$\frac{N * y * \frac{dh}{h}}{h} + \tau_{yx} * dx * b = 0$$

Végül taura átrendezve:

$$\tau_{yx} = -\frac{N}{A} * \frac{y}{h} * 2 \tan(\alpha)$$

Tehát azt kaptuk, hogy b értéke változik x mentén, mégsem szerepel annak deriváltja a képletben, illetve a szélesség mentén állandó a tau feszültség. Viszont könnyen belátható, hogy ha irányfüggetlen húzó igénybevétel van a gerendán. Így a koordináta rendszert x tengely körül 90° -kal elforgathatjuk, majd a fent vázolt elemi rúddarab kivágását ismét megteesszük. Ekkor az egyensúlyi egyenleteket megoldjuk mely az elforgatás során megváltozó mennyiségeket kicserélve is végrehajtható. Így tehát az alábbi összefüggést kapjuk:

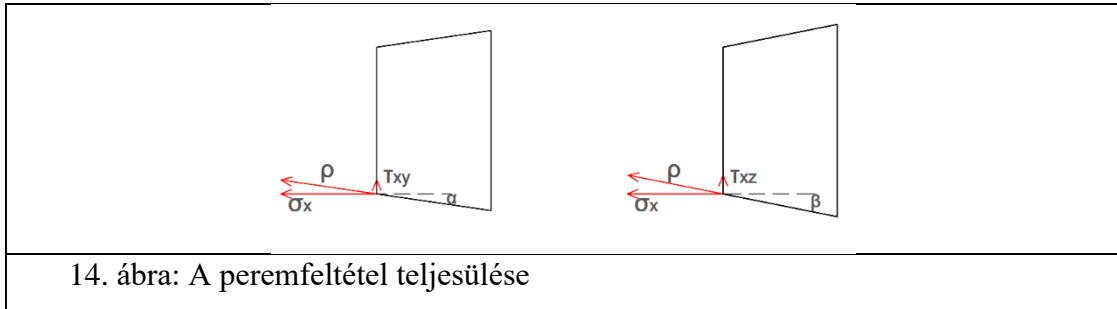
$$\int_z^{\frac{b+db}{2}} (h + dh) * (\sigma_x + d\sigma_x) dz - \int_z^{\frac{b+db}{2}} h * \sigma_x dz + \tau_{xy} * \frac{h + h + dh}{2} * dx = 0$$

Tehát:

$$\tau_{zx} = -\frac{N}{A} * \frac{z}{b} * 2 \tan(\beta)$$

ahol z lesz a súlyponti tengelytől vett távolság és β az x -tengely és a szélességi – oldalsó – fedőlapnak a közre zárt szöge.

A mindkét keresztmetszeti irányban fellépő nyírás egy fontos eleme a kétirányú keresztmetszet változásnak, ugyanis a peremfeltételnek xz síkkal elvágott metszeten is teljesülnie kell az alábbi módon:



14. ábra: A peremfeltétel teljesülése

4.1.2.2 Y irányú normálfeszültség számítása

Folytatva a számításokat a vertikális vetületi egyensúlyival megkapjuk az y és z irányú normálfeszültséget. (Ha elforgattuk x tengely mentén szintén 90 fokkal a koordináta rendszerünket, akkor z - tengely is vertikális állású lesz.) Az előző alfejezetben felírt egyensúlyi összefüggés alapján az egyenletek:

$$\int_y^{\frac{h+dh}{2}} (b + db) * (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dy - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \tau_{xy} dy + \sigma_y * \frac{b + b + db}{2} * dx = 0$$

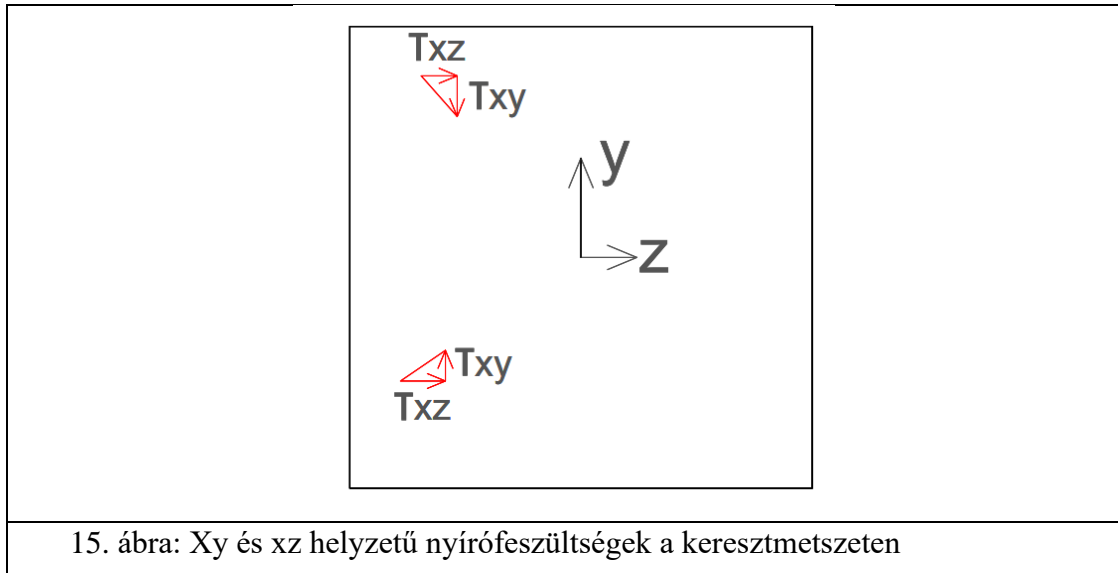
$$\int_z^{\frac{b+db}{2}} (h + dh) * (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dz - \int_z^{\frac{b}{2}} h * \tau_{xy} dz + \sigma_z * \frac{h + h + dh}{2} * dx = 0$$

Az utolsó tag kifejtés során ismételten $\sigma_z * h * dx$ marad a másodrendűen kicsiny mennyiség kiesése után.

$$\sigma_y = \sigma_x * 4 \tan^2(\alpha) \frac{y^2}{h^2}, \text{ illetve:}$$

$$\sigma_z = \sigma_x * 4 \tan^2(\beta) \frac{z^2}{b^2}$$

Ezek szintén azonosak lesznek az állandó szélességű változat megoldásával, annyi különbséggel, hogy σ_z értéke 0-tól eltérő. A keresztmetszeten együtt ábrázolva így helyezkednek el:



4.2 Hajlítással egyidejű nyírás igénybevétel

Dolgozatomban mindig statikailag határozott tartót vizsgálunk – annak statikai egyszerűsége miatt - változó méretű keresztmetszet alkalmazásával. A 10° -nál kisebb hajlásszög kikötést szintén meg kell tennünk, annak érdekében, hogy a Bernoulli-rúdmodellben meghatározott $\sigma_x = -\frac{M}{I_z} * y$ összefüggést egyenes hajlításra használhassuk.

Egy nagy hajlásszögű, ékalakú gerendán Kozmann által elvégzett hajlítás pontos számításának a képlete az alábbi:

$$\sigma_x = M * \frac{y}{\left(\frac{h}{2 \tan(\alpha)}\right)^3} * \frac{\sin^4(\varphi)}{\alpha - \frac{1}{2} \sin(2\alpha)}$$

ely erre az alakra hozható:

$$\sigma_x = M * \frac{y}{h^3} * 12 \frac{\tan^3(\alpha) * \sin^4(\varphi)}{\alpha^3}$$

ből az alábbi tag $\alpha < 10^\circ$ esetén:

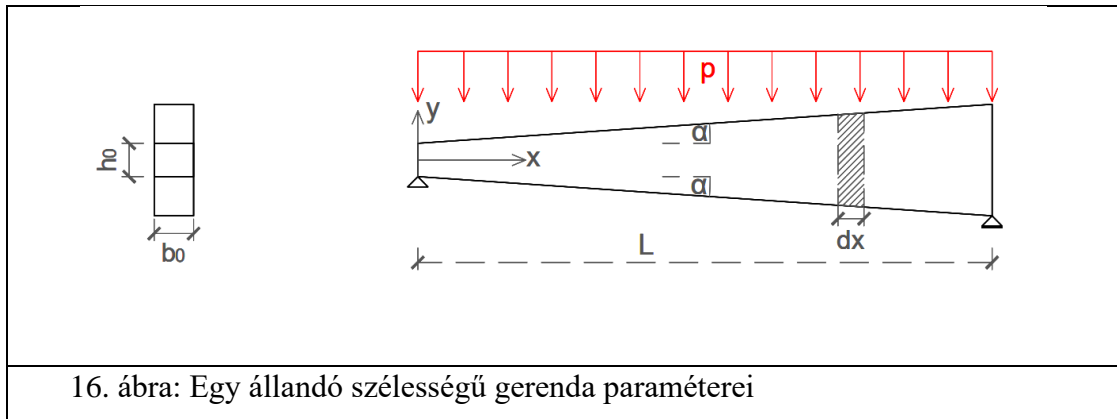
$$12 \frac{\tan^3(\alpha) * \sin^4(\varphi)}{\alpha^3} = 1$$

visszakaptuk az egyenes hajlítás képletét egységnyi szélességre.

(Kozmann: Változó keresztmetszetű rudak szilárdságtana)

A tartóra a két támasz között végig megoszló erő hat a rúdtengelyre merőleges irányban xy -síkbán.

4.2.1 Egyenes tengelyű, állandó szélességű, változó magasságú tartók

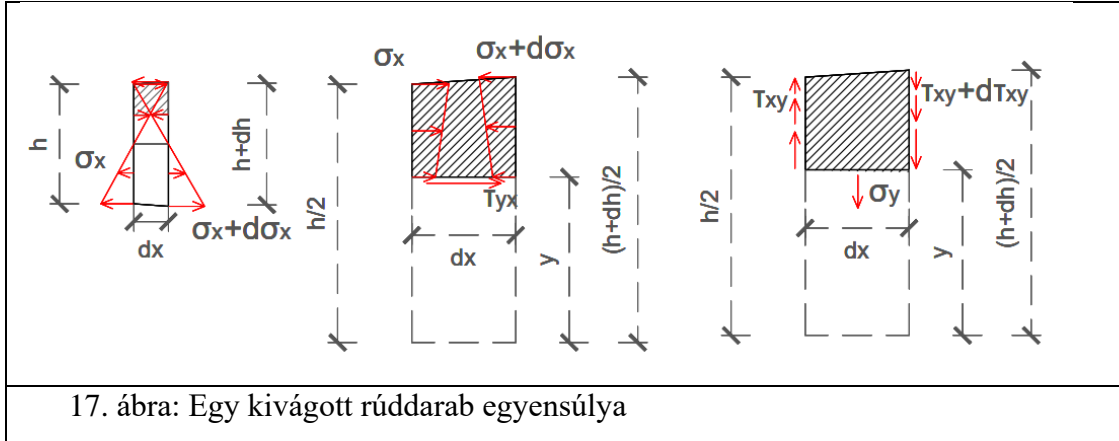


16. ábra: Egy állandó szélességű gerenda paraméterei

Hajlítási és nyírási igénybevétel esetén az egyenes tengelyű esettel összevetve több hasonlóságot mutat a tartónk, ugyanis az utóbbinál is van taufeszültség a keresztmetszettel párhuzamos irányban, méghozzá a Zsuravszkij által egyenes tengelyű tartón végrehajtott módszere alapján számolható. A különbség csupán a képlet egyszerűségében lesz. Ezesetben is számos keresztmetszeti tényező függeni fog x -től, mert a képletük tartalmazza $h_{(x)}$ -t. Ilyenek az első- és a másodrendű nyomaték is. Ezek kifejtése előtt azonban nézzük az egyensúlyi vizsgálatokat.

4.2.1.1 Nyírófeszültség számítása

A központos igénybevétel esetén alkalmazott módszert itt is használhatjuk, tehát vágjunk ki egy elemi vastagságú nem teljes keresztmetszet darabot a tartóból és vizsgáljuk meg a vízszintes vetületi egyensúlyát: Az ábrától az értékekbe behelyettesítve az alábbi egyenletet kapjuk:



17. ábra: Egy kivágott rúddarab egyensúlya

$$\int_y^{\frac{h+dh}{2}} b * (\sigma_x + d\sigma_x) dy - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \sigma_x dy + \tau_{yx} * b * dx = 0$$

Ezt átalakítva kiemelve:

$$\frac{M + dM}{I_z + dI_z} * b \int_y^{\frac{h+dh}{2}} -y dy - \frac{M}{I_z} * b \int_y^{\frac{h}{2}} -y dy + \tau_{yx} * b * dx = 0$$

Ezt kiintegrálva és rendezve, ismerve, hogy:

$$\int_y^{\frac{h}{2}} y * b dy = S_y \text{ és } \int_y^{\frac{h+dh}{2}} y * b dy = S_y + dS_y$$

$$\frac{M + dM}{I_z} \left(1 - \frac{dI_z}{I_z}\right) * -(S_y + dS_y) - \frac{M}{I_z} * (-S_y) + \tau_{yx} * b * dx = 0$$

Ezt tovább rendezve:

$$\tau_{yx} * dx = \frac{dM * S_y}{I_z * b} + \frac{M * dS_y}{I_z * b} + \frac{M * dI_z * -S_y}{I_z^2 * b}$$

Ezt dx-szel formálisan átosztva és az alábbi ismertösszefüggést behelyettesítve:

A $\frac{dM}{dx} = V$ összefüggés itt is érvényes, mert a rúdtengely egyenes

Végül:

$$\tau_{yx} = V \frac{S_y}{I_z * b} + \frac{dS_y}{dx} * \frac{M}{I_z * b} - \frac{dI_z}{dx} * \frac{M * S_y}{I_z^2 * b}$$

És a dualitási tétel értelmében:

$$\tau_{xy} = V \frac{S_y}{I_z * b} + \frac{dS_y}{dx} * \frac{M}{I_z * b} - \frac{dI_z}{dx} * \frac{M * S_y}{I_z^2 * b}$$

A derivált tagok kifejtése, magyarázata

Az eredményből világosan látszik, hogy az állandó keresztmetszet esetén alkalmazott Zsuravszkij-képlet egy bővített változatát kaptuk meg, ugyanis ebben az esetben a másodrendű nyomatéknak és a statikai nyomatéknak is van x szerinti deriváltja és nem csak a nyomatéknak. Tehát itt minden tényező szerepel minden tagban, de egyben deriváltként jelenik meg és minden tagban egy és pontosan egy tényezőt deriválunk, kivéve az állandónak választott b szélesség. A deriváltak kifejtve a következők:

$S_y = b * \left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right)$ a kivágott elem x-re merőleges területének a súlypontra vonatkoztatott statikai nyomatéka, ennek x szerinti deriváltja:

$$\frac{dS_y}{dx} = \frac{2b * h * dh}{8 * dx} = \frac{b * h * dh}{4 * dx} = \frac{b * h * \tan(\alpha)}{2}$$

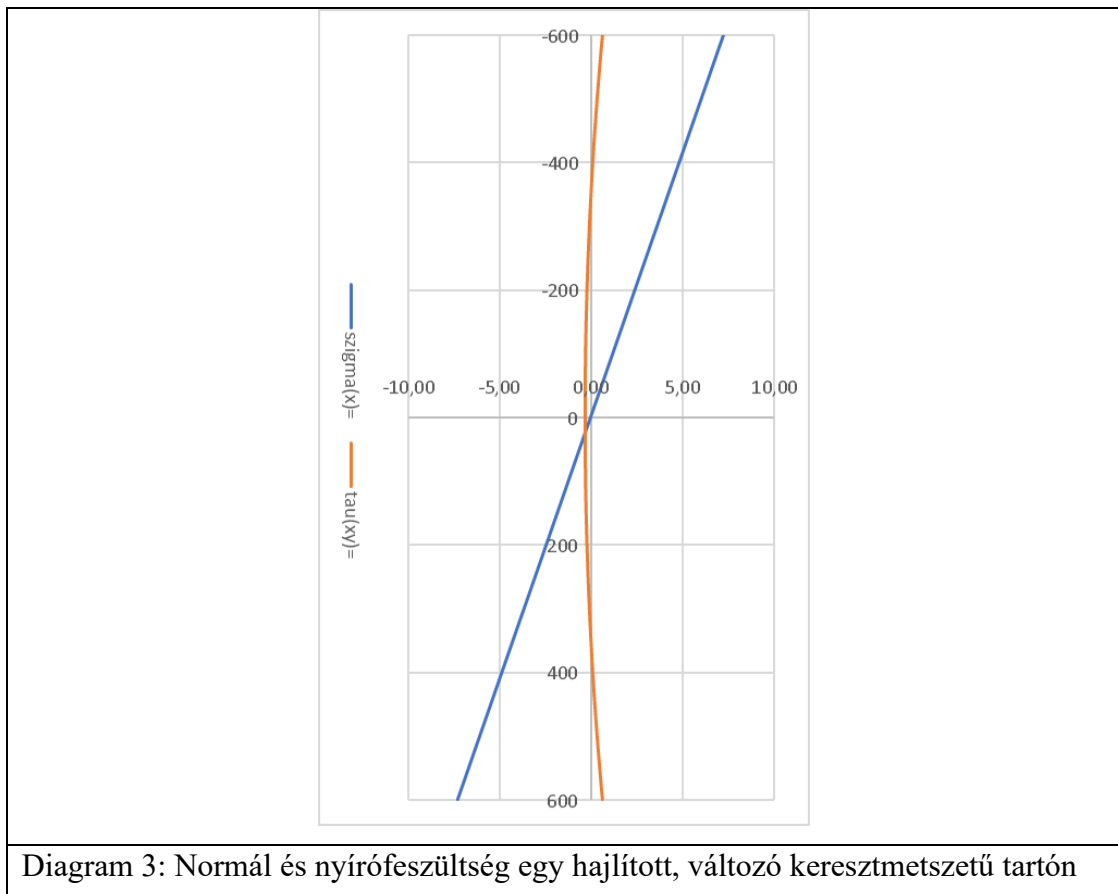
$I_z = \frac{b * h^3}{12}$ a vizsgált keresztmetszet z súlyponti tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatéka, ennek x szerinti deriváltja:

$$\frac{dI_z}{dx} = \frac{3b * h^2 * dh}{12 * dx} = \frac{b * h^2 * \tan(\alpha)}{2}$$

Mindkét esetben olyan eredményt kaptunk, amelyek továbbra is függenek $h_{(x)}$ -től, ez azt jelenti, hogy nem állandó x- mentén a deriváltak értékei, tehát a későbbi számításaink megkönnyítés érdekében érdemes őket elnevezni: $\frac{dI_z}{dx} = J_z$ és $\frac{dS_y}{dx} = U_y$. A peremfeltételnek hajlításnál is teljesülnie kell, tehát a szélső szálban normálfeszültség esetén τ_{xy} is lennie kell. A három derivált érték közül kizárólag S_y tartalmazza y-t tehát csak ez függ tőle, így a szélső szálban – ahol a statikai nyomaték 0 kizárólag $dS_y \frac{M}{I_z * b}$ adja a nyírófeszültséget. Így az ábrán látható módon az egyenlet: $\tan(\alpha) = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_x}$. Továbbá: $\tau_{xy} = -dS_y \frac{M}{I_z * b} = -\frac{M * h * \tan(\alpha)}{I_z * b}$ és $\sigma_x = \frac{M * h}{I_z * b}$, tehát $\tan(\alpha) = -(-\tan(\alpha))$ miatt a peremfeltétel teljesül.

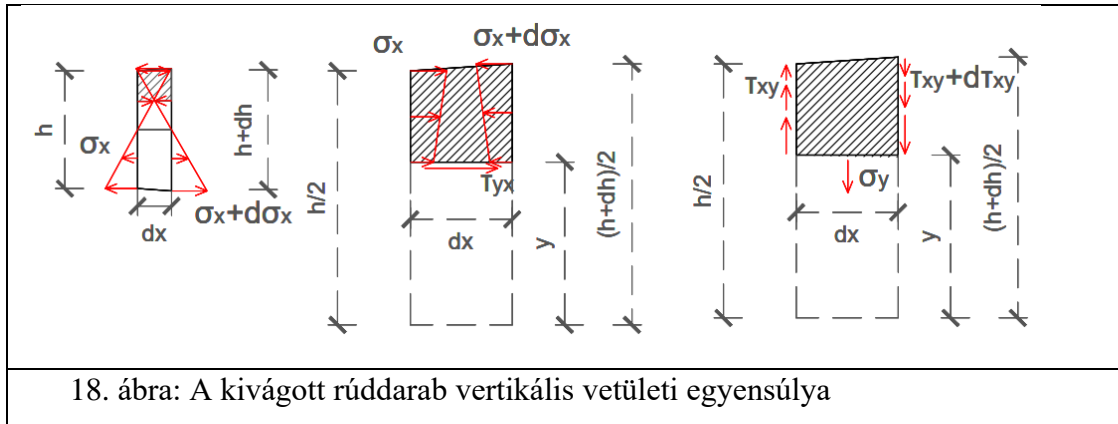
Az alábbi ábrán vizsgáljuk numerikus adatok mellett különböző keresztmetszetekben a τ_{xy} függvényt és ami látható rajta, hogy ez esetben is parabola függvényeket kapunk, viszont a peremfeltétel miatt a szélső szálban is van

nyírófeszültség, és a feszültségvektor iránya a súlyponti szál felé haladva a bemutatott metszeten x tengely irányában hasonlóan viselkedik, mint az egyenes tengelyű változat, tehát a parabola átfordul a másik irányba. De ezesetben az átfordulásnál nem $\tau_{xy} = 0$ hanem $\tau_{xy} = -dS_y \frac{M}{I_z \cdot b}$ konstans függvényt kapunk, tehát ebben a pontban van nyírófeszültség.



4.2.1.2 Y irányú normálfeszültség számítása

Hajlítással egyidejű nyírás esetén - tehát változó nyíróerő függvény esetén – ahogyan a 3.2 fejezetben is tapasztaltuk van y irányú normálfeszültség a gerendában. Ennek kiszámítása a fentebbi alfejezetekben bemutatott módon történik; a vertikális egyensúlyt írjuk fel a kivágott rúddarabra és az egyensúly fenntartása érdekében dx mentén feltételezzünk σ_y feszültséget. Az egyenlet az alábbi lesz:



18. ábra: A kivágott rúddarab vertikális vetületi egyensúlya

$$\sum F_y = 0, \int_y^{\frac{h+dh}{2}} b * (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dy - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \tau_{xy} dy + \sigma_y * b * dx = 0$$

Ebbe behelyettesítve az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} -\frac{V + dV}{I_z + dI_z} \int_y^{\frac{h+dh}{2}} (S_y + dS_y) dy + (J_z + dJ_z) * \frac{M + dM}{(I_z + dI_z)^2} \int_y^{\frac{h+dh}{2}} (S_y + dS_y) dy \\ - \frac{M + dM}{I_z + dI_z} \int_y^{\frac{h+dh}{2}} (U_y + dU_y) dy + \frac{V}{I_z} \int_y^{\frac{h}{2}} S_y dy - J_z \\ * \frac{M}{I_z^2} \int_y^{\frac{h}{2}} S_y dy + \frac{M}{I_z} \int_y^{\frac{h}{2}} U_y dy + \sigma_y * b * dx = 0 \end{aligned}$$

Amely egyenletben $\frac{dI_z}{dx} = J_z$ a másodrendű nyomaték deriváltja és $\frac{dS_y}{dx} = U_y$ a statikai nyomaték deriváltja.

Ezt az összefüggést felírtuk, de numerikus adatok nélkül zárt képletben konkrét paraméterek ismerete nélkül nagyon nehezen oldható meg.

A keresztirányú normálfeszültség numerikus integrálással meghatározható.

4.2.1.3 Számpélda, az eredmények ellenőrzése

A kapott képletek ellenőrzésére modellezzünk egy statikailag határozott kéttámaszú tartót, amelyen megoszló terhelést helyezünk a két támasz közé. Ezt a tartót modellezzük meg AxisVM-ben és hasonlítsuk össze a kapott eredményeket.

A rúd adatai és az igénybevétel legyenek a következők:

$$h_0 = 500 \text{ mm}, \quad b_0 = 300 \text{ mm}, \quad \alpha = 5^\circ, \quad L = 8 \text{ m}, \quad p = 65 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Keressük az alábbi x távolságokhoz tartozó keresztmetszetek τ_{xy} és σ_y értékeit:

$$x_1 = 2,066 \text{ m}, x_2 = 3,985 \text{ m}, x_3 = 6,051 \text{ m}$$

A keresztmetszethez tartozó feszültségi függvényeket megkaphatjuk, ha a súlyponti és a szélső szálakban kiszámoljuk a konkrét numerikus feszültségértékeket és ábrázoljuk keresztmetszeten. A nyírófeszültség képlete a Zsuravszkij-képlethez hasonlóan parabola alakú függvényt ad, tehát ilyen módon kössük össze a pontokat

Fontos a számítás szempontjából, hogy h értékei x-től függenek, tehát azt is ki kell számolni:

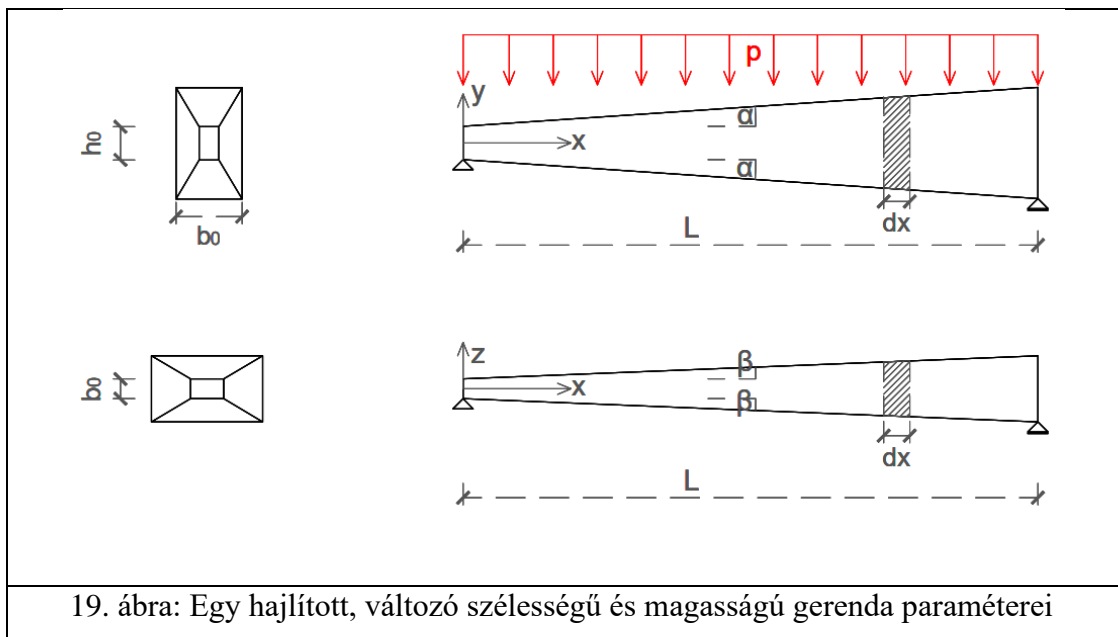
Ezen x pontok esetén $y = \frac{h}{2}$, illetve a használt képlet a következő: $\tau_{xy(1)} = V \frac{S_y}{I_z * b} +$

$$dS_y \frac{M}{I_z * b} - dI_z \frac{M * S_y}{I_z^2 * b}$$

AxisVM eredmények						Számítás a képlet alapján			Összehasonlítás (%)	
	y	szigma x	szigma y	tau xy	y	szigma x	tau xy	szigma x	tau xy	
x=	2,066									
	-									
	430,8	10,70	0,08	-0,90	-430,8	10,74	-0,94	0%	-4%	
	35,2	-0,91	-0,13	-0,25	35,2	-0,88	-0,26	3%	-5%	
	432,2	-10,70	-0,30	-0,89	432,2	-10,77	-0,94	-1%	-6%	
x=	3,985									
	-									
	598,6	7,15	0,05	-0,59	-598,6	7,25	-0,63	-1%	-7%	
	-0,6	0,00	-0,11	0,35	-0,6	0,00	0,31	-8%	11%	
	601,4	-7,16	-0,26	-0,60	601,4	-7,29	-0,64	-2%	-7%	
x=	6,051									
	-									
	779,4	3,07	0,02	-0,25	-779,4	3,15	-0,28	-3%	-8%	
	-2,39	0,00	-0,07	0,58	-2,39	0,00	0,57	-9%	3%	
	783,6	-3,04	-0,23	-0,25	783,6	-3,17	-0,29	-4%	-12%	

A kapott eredmények közül itt a legnagyobb százalékos eltérés -12%.

4.2.2 Egyenes tengelyű, változó szélességű, változó magasságú tartók

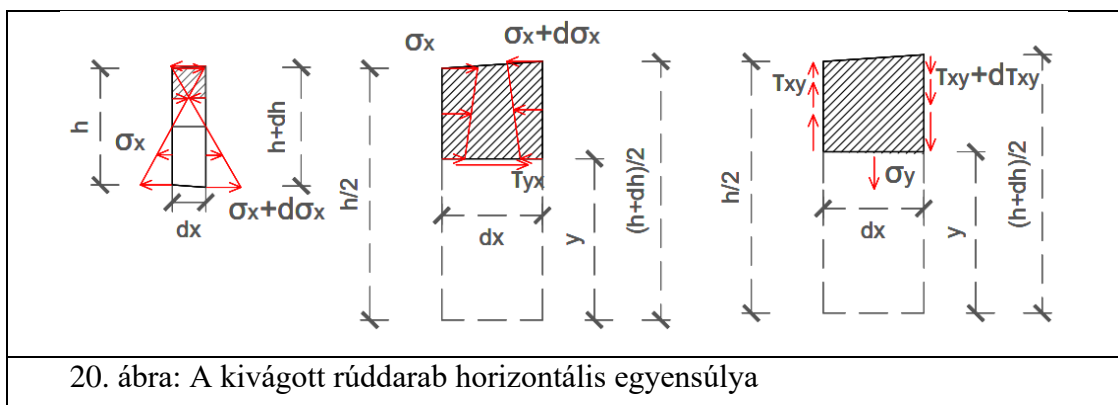


19. ábra: Egy hajlított, változó szélességű és magasságú gerenda paramétere

Mint az előző pontban is mutattuk, a Bernoulli-Navier hipotézisből kapott $\sigma_x = -\frac{M}{I_z} * y$ képlet megfelelően közelíti a valóságot a tengelyirányú normál feszültségek kiszámításakor.

4.2.2.1 Nyírófeszültség számítása

Állandó szélesség esetén alkalmazott egyenletrendszert használjuk azzal a módosítással, hogy az egyenletben megjelenik db-tag is:



20. ábra: A kivágott rúddarab horizontális egyensúlya

Az ábrától az értékekbe behelyettesítve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\int_y^{\frac{h+dh}{2}} (b + db) * (\sigma_x + d\sigma_x) dy - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \sigma_x dy + \tau_{yx} * \frac{b + b + db}{2} * dx = 0$$

Ezt átalakítva kiemelve:

$$\frac{M + dM}{I_z + dI_z} * (b + db) \int_y^{\frac{h+dh}{2}} -y dy - \frac{M}{I_z} * b \int_y^{\frac{h}{2}} -y dy + \tau_{yx} * b * dx = 0$$

Ezt kiintegálva és rendezve:

$$\frac{M + dM}{I_z} * (b + db) * \left(1 - \frac{dI_z}{I_z}\right) \left(-\frac{h^2}{8} - \frac{2h * dh}{4} + \frac{y^2}{2}\right) - \frac{M}{I_z} * b \left(-\frac{h^2}{8} + \frac{y^2}{2}\right) + \tau_{yx} * b * dx = 0$$

Ezt tovább rendezve:

$$\tau_{yx} * dx = -\frac{dM \left(-\frac{h^2}{8} + \frac{y^2}{2}\right)}{I_z} + \frac{M * h * dh}{4I_z} + \frac{M * dI_z \left(-\frac{h^2}{8} + \frac{y^2}{2}\right)}{I_z^2} - \frac{db * M \left(-\frac{h^2}{8} + \frac{y^2}{2}\right)}{b * I_z}$$

Az előző fejezetben tárgyalt összefüggéseket behelyettesítve:

$$\tau_{xy} = V \frac{S_y}{I_z * b} + U_y \frac{M}{I_z * b} - J_z \frac{M * S_y}{I_z^2 * b} + \frac{db}{dx} * \frac{M * S_y}{b^2 * I_z}$$

Amely egyenletben $\frac{dI_z}{dx} = J_z$ a másodrendű nyomaték deriváltja és $\frac{dS_y}{dx} = U_y$ a statikai nyomaték deriváltja.

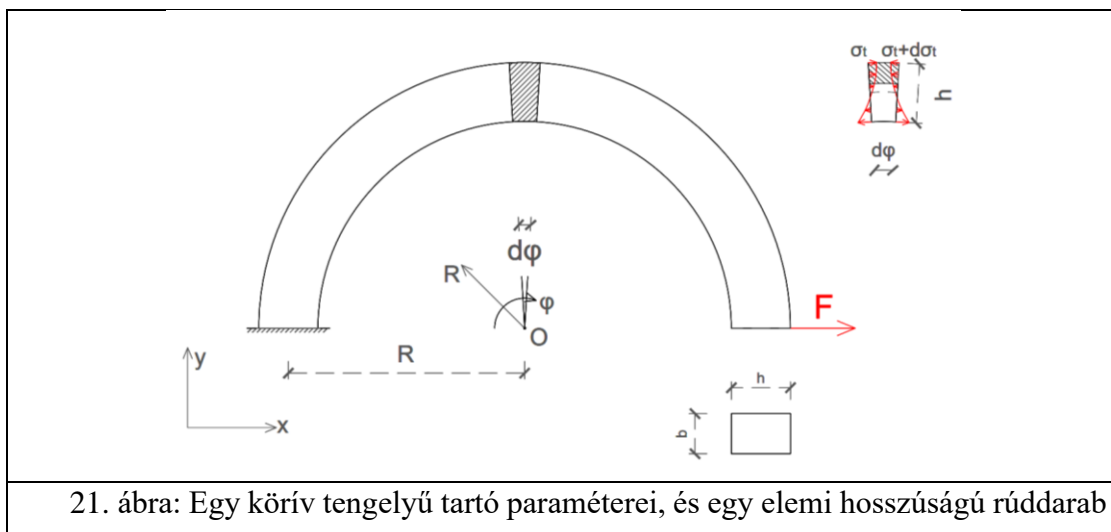
Itt világosan látszik a db- tag megjelenésével, hogy minden x mentén nem állandó tényezőnek van egy saját derivált tagja. Kifejtve b-t:

$$b_{(x)} = b_0 + 2 * \tan(\beta) * x$$

Így a képletben használt derivált:

$$\frac{db}{dx} = 2 * \tan(\beta)$$

5. Körív tengelyű, állandókeresztmetszetű tartók

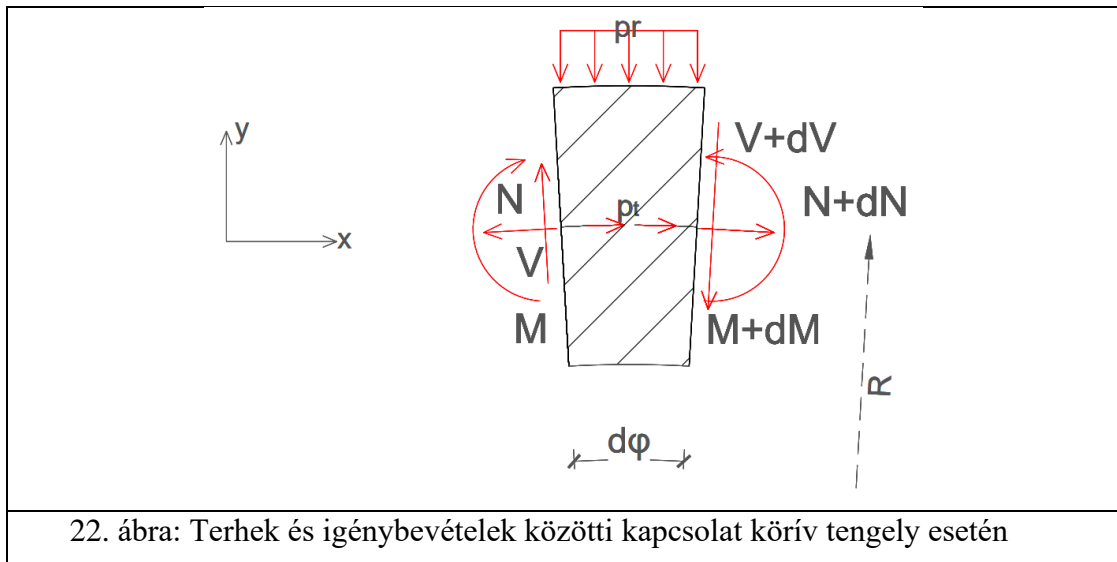


Amikor körív tengelyű rudakról beszélünk, mindig olyan síkgörbe ívről beszélünk, amelynek a sugara állandó a teljes szögtartomány mentén. Körív tengely esetén célszerű poláris koordináta rendszerben elhelyezni a tartót, ugyanis magukat a keresztmetszeteket is úgy lehet meghatározni, hogy a metszetsíkok mindig tartalmazzák az origó pontot és merőlegesek $R\varphi$ síkra. Az így kapott radiális, tangenciális, illetve z tengelyek lesznek az új indexek a feszültségértékek irányának meghatározásakor.

A számításainkkor a Bernoulli-rúdmodellt érvényesnek tartjuk, azaz a keresztmetszetek merev lapok, amelyek terhelés hatására történő elmozduláskor vagy elforduláskor is merőlegesek maradnak a rúdtengelyre. Az ismert egyenletek közül a már poláris koordináta rendszerbe átírt egyensúlyi egyenlet és az anyagegyenlet továbbra is érvényes, viszont a geometria egyenletét meg kell változtatnunk, ugyanis a relatív megnyúlásnál használt teljes szálhossz mérete függeni fog annak az origó ponttól vett távolságától.

5.1 A teher és az igénybevételek közötti kapcsolat körív tengelyű tartók esetében

A síkgörbe tengelyű tartók elég különlegesek, ugyanis a görbület miatt a rúd szálai nem egyforma hosszúak. Emiatt az egyenes tengelyű rudak összefüggései közül egyik sem lesz igaz rá abban a formában kifejezve. A körív tengely megváltoztatja a terhek és igénybevételek közötti eddig ismert kapcsolatokat és az igénybevételeket:



$$\sum F_x = 0$$

$$(N + dN) * \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - N * \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + p_t * R * d\varphi - (V + dV) \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - V * \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$$

Ismerve az alábbi közelítést $d\varphi$ esetén: $\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx 1$ és $\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx \frac{d\varphi}{2}$

$$dN + p_t * R * d\varphi - 2 * V * \frac{d\varphi}{2} = 0$$

Ezután p_t -re rendezve:

$$p_t = -\frac{dN}{R * d\varphi} + \frac{V}{R}$$

$\sum F_y = 0$ esetén a következő egyensúly áll fenn:

$$-(V + dV) * \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + V * \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - p_r * R * d\varphi - (N + dN) \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - N * \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0$$

Majd:

$$-dV - p_r * R * d\varphi - 2 * N * \frac{d\varphi}{2} = 0$$

Végül:

$$p_r = -\frac{dV}{R * d\varphi} - \frac{N}{R}$$

A körív középpontjára felírt nyomatéki egyensúlynál pedig:

$$\begin{aligned} \Sigma M_0 &= 0 \\ dM - p_t * R^2 * d\varphi - dN * R &= 0 \end{aligned}$$

dN-re a már ismert összefüggést p_t -vel behelyettesítve ezt kapjuk:

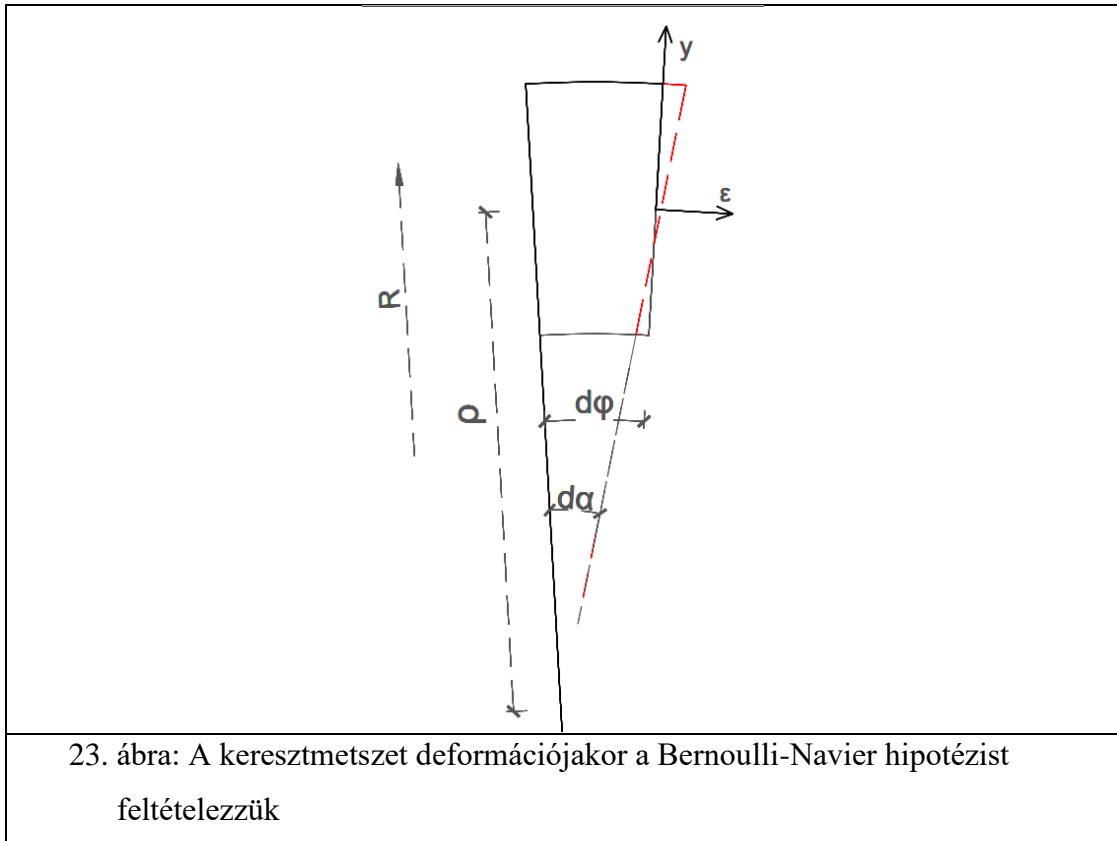
$$\frac{dM}{R * d\varphi} = V$$

A nyomaték deriváltja változik, azonban vegyük észre, hogy ha ívhossz mentén deriválunk, akkor $ds = R * d\varphi$, ami egyenes tengely esetén $ds = dx$, tehát valójában nem módosul annak tartalma.

De az vetületi egyenleteknél azt kaptuk eredményül, hogy az eddig szigorúan csak a nyíróerőt változtató - a tengelyre merőleges irányú - p_r a normálerőre is hatással van és fordítva is igaz, hogy - a tengellyel párhuzamos irányú - p_t is befolyásolja a nyíróerőt.

5.2 Az érintőirányú normálfeszültség számítása

Amikor egy infinitezimálisan kicsi, $R * d\varphi$ vastagságú keresztmetszeti elemet vizsgálunk és a hajlítás okozta elfordulásból következő tangenciális irányú relatív megnyúlást vizsgáljuk a keresztmetszet szálaiban, az ábra alapján az alábbi összefüggés áll fenn:



23. ábra: A keresztmetszet deformációjaker a Bernoulli-Navier hipotézist feltételezzük

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{u} = \frac{(\rho + y)d\alpha - (R + y) * d\varphi}{(R + y) * d\varphi}$$

Ebből a képletből látszik, hogy a súlyponti szálban ($y=0$ esetén) is van megnyúlás, annak ellenére, hogy normálerő nem is működik a keresztmetszeten. $\sigma_{t0} = E * m \frac{\rho}{R} - E$
A Grashof féle levezetés alapján a normál feszültség képlete az alábbi, a Muttynyánszky tankönyv is tartalmazza:

$$\sigma_t = \frac{N}{A} - \frac{M}{R * A} - \frac{M * y}{I_0} * \frac{R}{R + y}$$

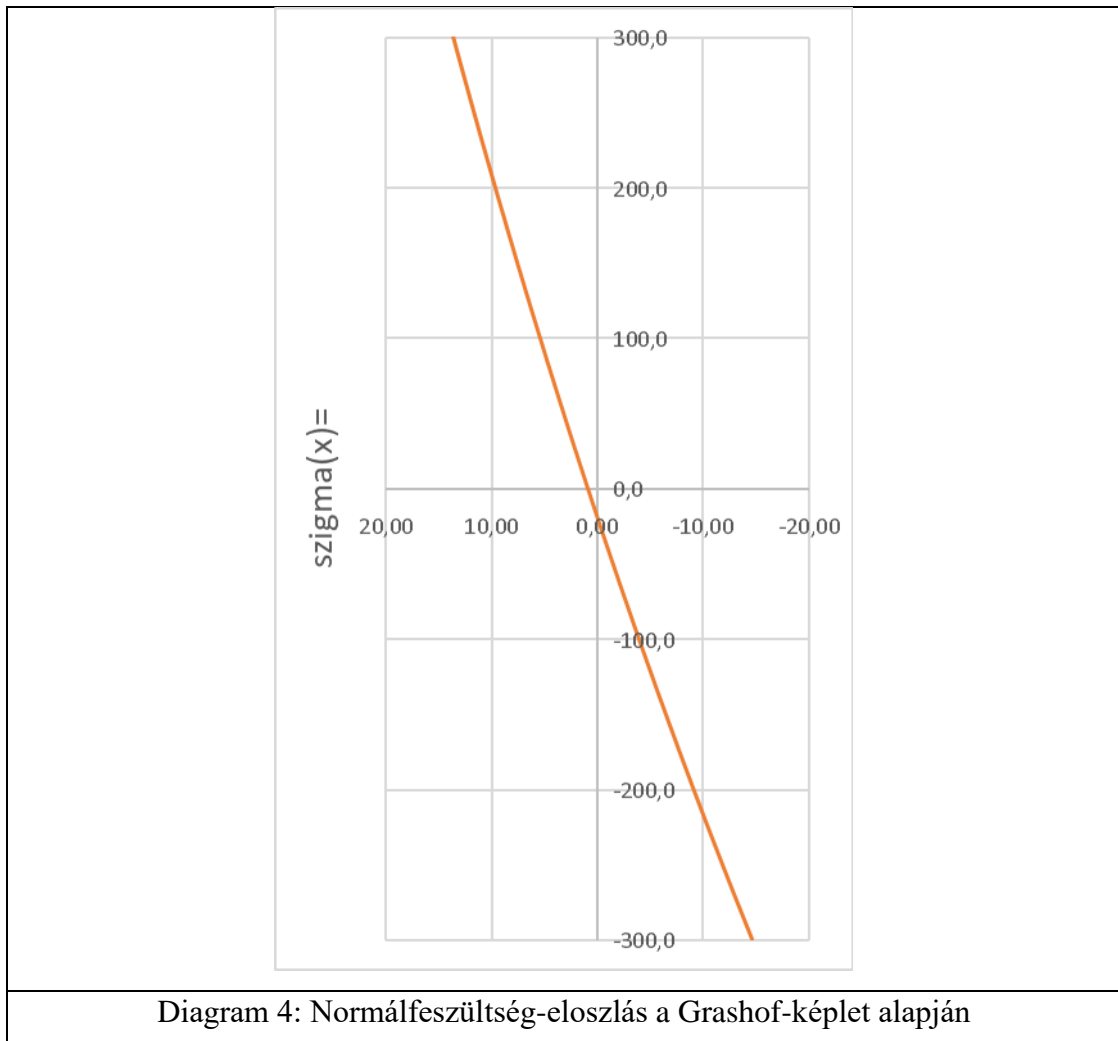
amely tagok közül R a körív tengely sugara, I_0 pedig a keresztmetszet úgynevezett redukált másodrendű nyomatéka. Ennek képlete analóg az egyenes tengely

esetén alkalmazott másodrendű nyomaték képletével: $I_0 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \frac{R}{R+y} dy$, ami

átalakítással a következő alakra hozható: $I_0 = -R^2 b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y}{R+y} dy$

A tagok közül az $\frac{N}{A}$ ugyanúgy megtalálható az egyenes tengelyű σ_x feszültség képletében, viszont az egyenlet $-\frac{M}{R * A} - \frac{M * y}{I_0} * \frac{R}{R+y}$ része igényel némi magyarázatot.

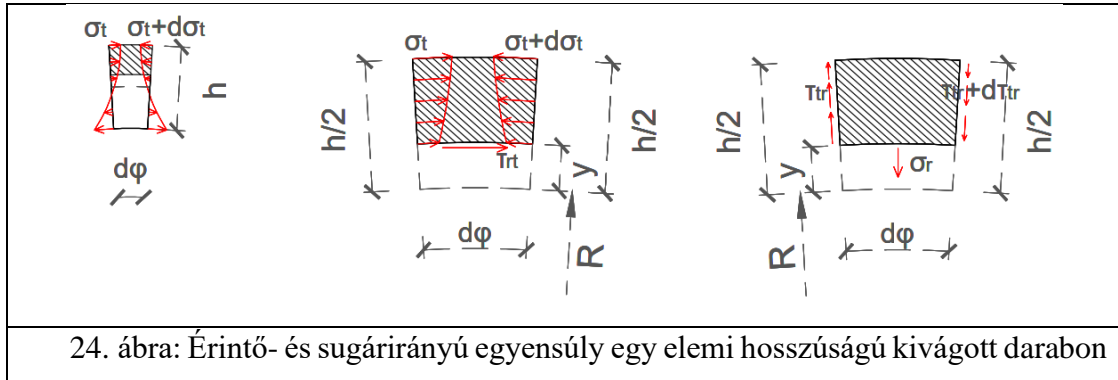
Ahogy az előzőekben láthattuk, hogy csak nyomatéki igénybevétel esetén is van megnyúlás a súlyponti szálban, ennek értéke $-\frac{M}{R \cdot A}$, továbbá észrevehető, hogy a $-\frac{M \cdot y}{I_0} \cdot \frac{R}{R+y}$ függvény y- változása esetén hiperbolikus és nem lineáris, vagyis a legfontosabb megállapításához érkeztünk: Körív tengelyű tartók esetén a keresztmetszeten a σ_t - normálfeszültség eloszlása nem egyenletes.



5.3 Nyírófeszültség számítása

A körív alakú rúdon egy elemi hosszúságú darabot véve és az ábrán mutatott módon egy hengerpalásttal kivágott darabot veszünk és vizsgáljuk az egyensúlyát. Ugyanazon módon felírt egyensúlyi számításból az alábbi egyenletet kapjuk.

$\sum F_x = 0$, és a kicsiny szögek esetén alkalmazott egyszerűsítéseket is figyelembe véve:



$$\int_{-h/2}^{h/2} b * (\sigma_t + d\sigma_t) dy - \int_{-h/2}^{h/2} b * \sigma_t dy - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{tr} * b dy * d\phi + \tau_{rt} * b * (R + y) * d\phi = 0$$

Az alábbi összefüggésből az látszik, hogy ha a keresztmetszetek nem párhuzamosak egymással, akkor a szög miatt z érintő irányú vetületi egyenletben a dualitási tétel miatt ábrázolt keresztmetszeti síkokban működő nyírófeszültségek és a tengellyel párhuzamos irányban működő nyírófeszültségek is szerepelnek, ráadásul az előbbieknél az felület szerinti integráljukkal kell számolni.

Integrálegyenlet

Az egyenletből jól látszik, hogy τ_{rt} mellet a dualitási tételből ismert τ_{tr} is megjelenik, de annak felületszerinti integrálja $\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{tr} * b dy$ szerepel ott. Ezt a példát egy integrálegyenlettel lehet megoldani, ráadásul egy Volterrai típusúval, mert az egyik integrálási határ változó.

Megoldás nyomatéki egyensúlyra

Erre a nehézségre a megoldás az, ha nem vetületi erők egyensúlyát, hanem a nyomatéki egyensúlyt vizsgáljuk. A körív tengely középpontjára (O-pontra) felírt nyomatéki egyenletből – mivel a hatásvonaluk átmegy a középponton – kiesnek a keresztmetszettel párhuzamos irányú nyírófeszültségek eredőjeként meghatározott T és T+dT erők, továbbá a szintén feltételezett σ_r is. Ekkor az egyensúly megtartása érdekében kizárólag a tengelyirányú normálfeszültségek eredői és a tengellyel párhuzamos irányú nyírófeszültség eredője. Az egyenlet tehát a következő:

$$\begin{aligned} \Sigma M_0 &= 0 \\ \int_y^{\frac{h}{2}} b * (\sigma_t + d\sigma_t) * (R + y) dy - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \sigma_t * (R + y) dy + \tau_{rt} * b * (R + y)^2 * d\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ezt kifejtve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \left(\frac{N + dN}{A} - \frac{M + dM}{R * A} \right) \int_y^{\frac{h}{2}} (R + y) dy - \frac{(M + dM) * R}{I_0} \int_y^{\frac{h}{2}} y dy - \left(\frac{N}{A} \right. \\ \left. - \frac{M}{R * A} \right) \int_y^{\frac{h}{2}} (R + y) dy + \frac{M * R}{I_0} \int_y^{\frac{h}{2}} y dy + \tau_{rt} * (R + y)^2 * d\varphi = 0 \end{aligned}$$

Az integrálás után az alábbi kapjuk:

$$\begin{aligned} \left(\frac{N + dN}{A} - \frac{M + dM}{R * A} \right) * \frac{R * \bar{A} + S_y}{b} - \frac{(M + dM) * R}{I_0 * b} * S_y - \left(\frac{N}{A} - \frac{M}{R * A} \right) \\ * \frac{R * \bar{A} + S_y}{b} + \frac{M * R}{I_0 * b} * S_y + \tau_{rt} * (R + y)^2 * d\varphi = 0 \end{aligned}$$

A fentebb említett teher-igénybevétel összefüggéseket alkalmazva:

$$\tau_{rt} = p_t * \frac{R * \bar{A} + S_y}{A * b} * \frac{R}{(R + y)^2} + \frac{V * S_y}{I_0 * b} * \frac{R^2}{(R + y)^2}$$

amely egyenletben $\bar{A} = b * \left(\frac{h}{2} - y \right)$ az elcsúszni akaró keresztmetszetrész területe. Az $R * \bar{A} + S_y$ összefüggés megadja S_0 -t, az elcsúszni akaró keresztmetszetrész statikai nyomatékát a körív tengely középpontjára. Ami ezenkívül észrevehető, hogy az első tag minden olyan esetben 0, ha a tartóra nem hat megoszló terhelés.

A képletet Franz Grashof a Theorie Der Elasticitat Und Festigkeitei könyvében más módszerrel – differenciálegyenletekkel - szintén megkapta.

A horizontális egyensúly igazolása

Ha nyomatéki egyenletből kapjuk meg a keresett feszültségképletet, minden esetben ellenőrizzük az így kapott értékeket behelyettesítve az érintőirányú vetületi egyensúlyt. Az ismert nyírófeszültség értéket az $\Sigma F_x = 0$ egyenletbe beírva így néz ki:

$$\begin{aligned}
& - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \left(\frac{N + dN}{A} - \frac{M + dM}{R * A} - \frac{(M + dM) * R}{I_0} * \frac{y}{R + y} \right) dy \\
& + \int_y^{\frac{h}{2}} b * \left(\frac{N}{A} - \frac{M}{R * A} - \frac{M * R}{I_0} * \frac{y}{R + y} \right) dy \\
& - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \left(p_t * \frac{R * \bar{A} + S_y}{A * b} * \frac{R}{(R + y)^2} + \frac{V * S_y}{I_0 * b} * \frac{R^2}{(R + y)^2} \right) dy * d\varphi \\
& - \left(p_t * \frac{R * \bar{A} + S_y}{A * b} * \frac{R}{(R + y)^2} + \frac{V * S_y}{I_0 * b} * \frac{R^2}{(R + y)^2} \right) * b * (R + y) * d\varphi \\
& = 0
\end{aligned}$$

Ismerve az alábbi összefüggéseket integráláskor megkapjuk az érintőirányú vetületi egyensúlyt:

$$\int_y^{\frac{h}{2}} \frac{\bar{A}}{(R + y)^2} dy = \frac{S_y}{R} - \frac{\bar{A} * y}{R * (R + y)}$$

$$\int_y^{\frac{h}{2}} \frac{S_y}{(R + y)^2} dy = \frac{S_y}{R + y} - \frac{S_y'}{R}$$

A kifejezésben található S_y' az elcsúszni akaró keresztmetszetrész redukált

statikai nyomatéka a súlypontra számítva. Ennek értéke: $S_y' = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \frac{R}{R + y} dy$

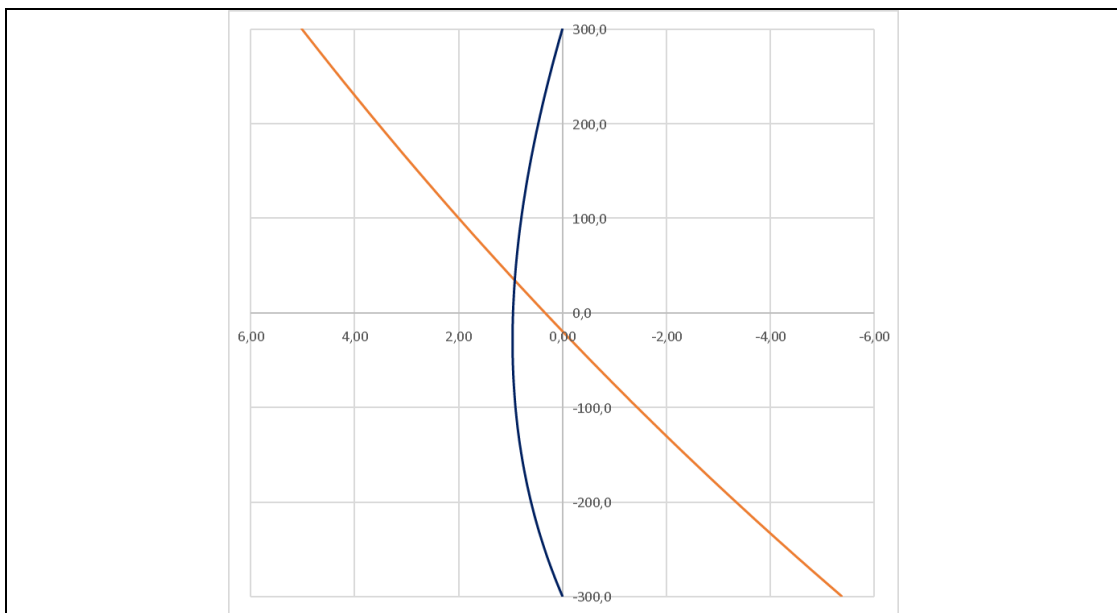
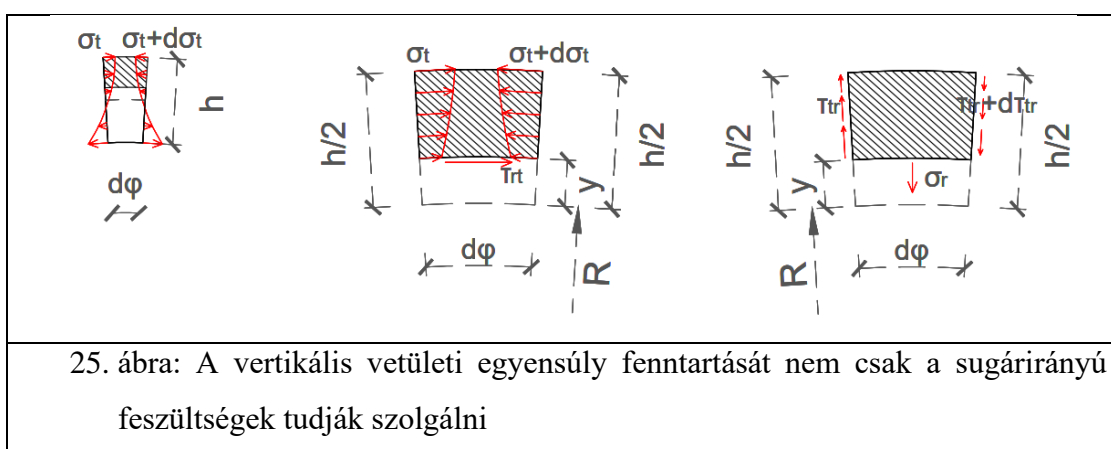


Diagram 5: A nyírófeszültség függvényén látható, hogy a maximális értéke nem a súlypontban található

5.3 Y irányú normálfeszültség számítása a felhasznált összefüggésekkel

A nyírófeszültség képletének ismeretében már felírható egy vertikális vetületi egyenlet a rúddarabra, amelyben csak a radiális irányú szigmának nem ismert a képlete. Mivel a keresztmetszetek nem párhuzamosak egymással, ezért a tengelyirányú normálfeszültségnek is van vertikális irányú komponense. Az egyenletet az alábbi módon írjuk fel:



$$\begin{aligned} & \sigma_r * (R + y) * d\varphi * b + \int_y^{\frac{h}{2}} b * (\tau_{tr} + d\tau_{tr}) dy * \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \\ & - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \tau_{tr} dy * \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + \int_y^{\frac{h}{2}} b(\sigma_r + d\sigma_r) dy * \frac{d\varphi}{2} \\ & + \int_y^{\frac{h}{2}} b * \sigma_r dy * \frac{d\varphi}{2} = 0 \end{aligned}$$

Ebből a következőre jutunk:

$$\begin{aligned} & \sigma_r * (R + y) * d\varphi + \int_y^{\frac{h}{2}} dp_t \frac{R * (R * \bar{A} + S_y)}{A * (R + y)^2} dy + \int_y^{\frac{h}{2}} \frac{dV * S_y * R^2}{I_0 * (R + y)^2} dy \\ & + \int_y^{\frac{h}{2}} \left(\frac{N}{A} - \frac{M}{R * A} - \frac{M * R}{I_0} * \frac{y}{R + y} \right) dy * d\varphi = 0 \end{aligned}$$

Ismét az alábbi összefüggéseket használva integráláskor:

$$\int_y^{\frac{h}{2}} \frac{\overline{A}}{(R+y)^2} dy = \frac{S_y}{R} - \frac{\overline{A} * y}{R * (R+y)}$$

$$\int_y^{\frac{h}{2}} \frac{S_y}{(R+y)^2} dy = \frac{S_y}{R+y} - \frac{S_y'}{R}$$

A keresett ismeretlenre rendezett egyenlet az alábbi:

$$\sigma_r = -\frac{dp_t}{d\varphi} * \frac{1}{A * b * (R+y)} * \left(S_y - \frac{A * y * R}{R+y} + \frac{R * S_y}{R+y} - S_y' \right) + (N + p_r)$$

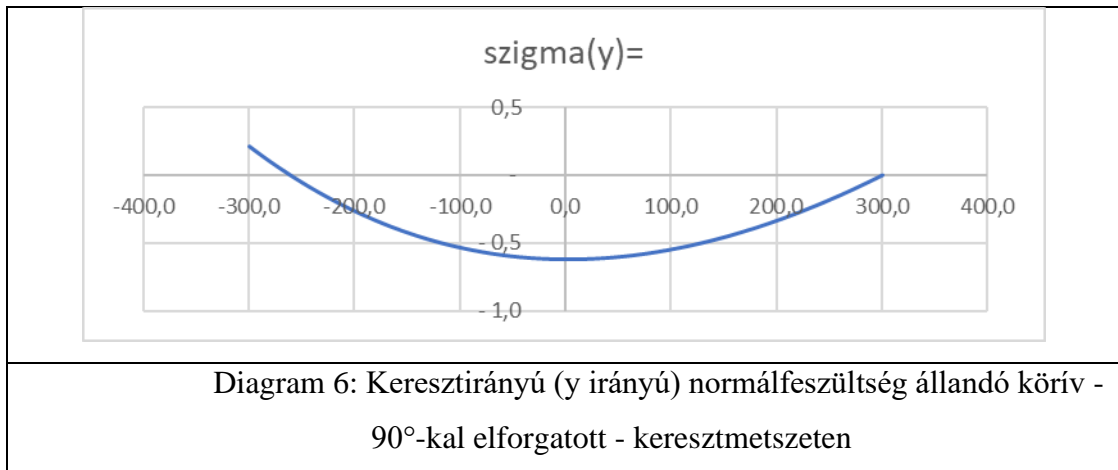
$$* \left(\frac{S_y}{I_0 * b} * \frac{R^2}{(R+y)^2} - \frac{S_y'}{I_0 * b} * \frac{R}{R+y} \right) - \left(N - \frac{M}{R} \right) * \frac{\overline{A}}{A * b * (R+y)}$$

$$+ \frac{M * S_y'}{I_0 * b} * \frac{1}{R+y}$$

másolni: A $\frac{dp_t}{d\varphi}$ kifejezést úgy kapjuk, hogy a tangenciális megoszló terhet $d\varphi$ -vel formálisan leosztjuk és deiváltként értelmezzük. Ezesetben: $\frac{dp_t}{d\varphi} = -p * \cos(2\varphi)$

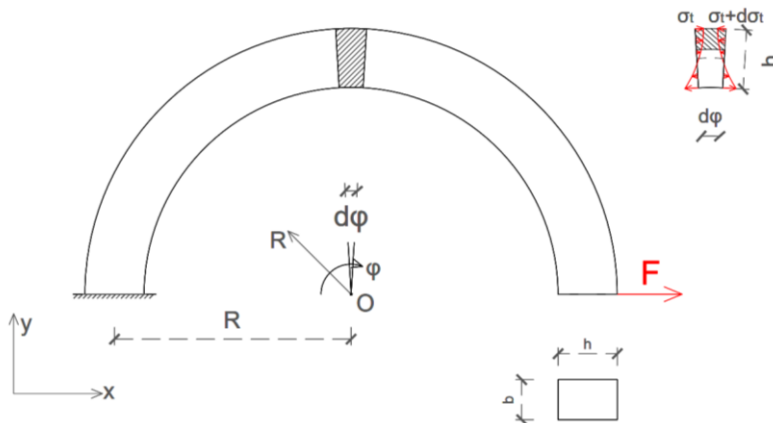
A kifejezésben található S_y' az elcsúszni akaró keresztmetszetrész redukált statikai nyomatéka a súlypontra számítva. Ennek értéke: $S_y' = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \frac{R}{R+y} dy$.

A hasonlósága a redukált másodrendű nyomatékkal könnyen észrevehető, mindkettőt a keresztmetszet paramétereivel kifejtve, integrálva logaritmusos értékeket kapunk. Az alábbi mennyiségek az általános statikai és másodrendű nyomatéktok közötti különbséget a következő módon lehet elmagyarázni: Ha elképzeljük, hogy a keresztmetszet nem állandó b szélességgel rendelkezik a keresztmetszetben, hanem a b értékű szélességet az adott magassághoz tartozó y -ből kapott $\frac{R}{R+y}$ szorzótényezővel megszorozva létrehozunk egy szélességi méretet és ezen az új felületen integráljuk az y vagy y^2 függvényt, akkor a keresztmetszet nyomatékai közül mindegyik redukált értékét kapjuk.



5.4 Számpélda, az eredmények ellenőrzése

A numerikus ellenőrzés előtt a peremfeltételt vizsgálva a szélső szálon a keresztmetszet állandósága miatt nem ébredhet nyírófeszültség. A nyírófeszültség képletét megvizsgálva azt lehet észrevenni, hogy $y = \frac{h}{2}$ vagy $-\frac{h}{2}$ esetén a képletek $R * \bar{A} + S_y$ és S_y tényezői zérusok, így állandó keresztmetszetű körív tartón a szélső szálaban soha nem ébred nyírófeszültség. Ellenőrizzük a képleteinket néhány keresztmetszetben az AxisVM programmal: A rúd adatai és az igénybevétel legyenek a következők ábra hivatkozás:



$$h_0 = 600 \text{ mm}, \quad b_0 = 300 \text{ mm}, \quad R = 6 \text{ m}, \quad \gamma = 180^\circ \quad F = -120 \text{ kN}$$

γ a teljes tartó szög tartománya

Keressük az alábbi φ középponti szögekhez tartozó keresztmetszetek τ_{xy} értékeit:

$$\varphi_1 = 45^\circ, \varphi_2 = 90^\circ, \varphi_3 = 120^\circ$$

Mivel megoszló terhelést nem raktunk a tartóra, így a nyírófeszültségi képlet az alábbi formára redukálódik:

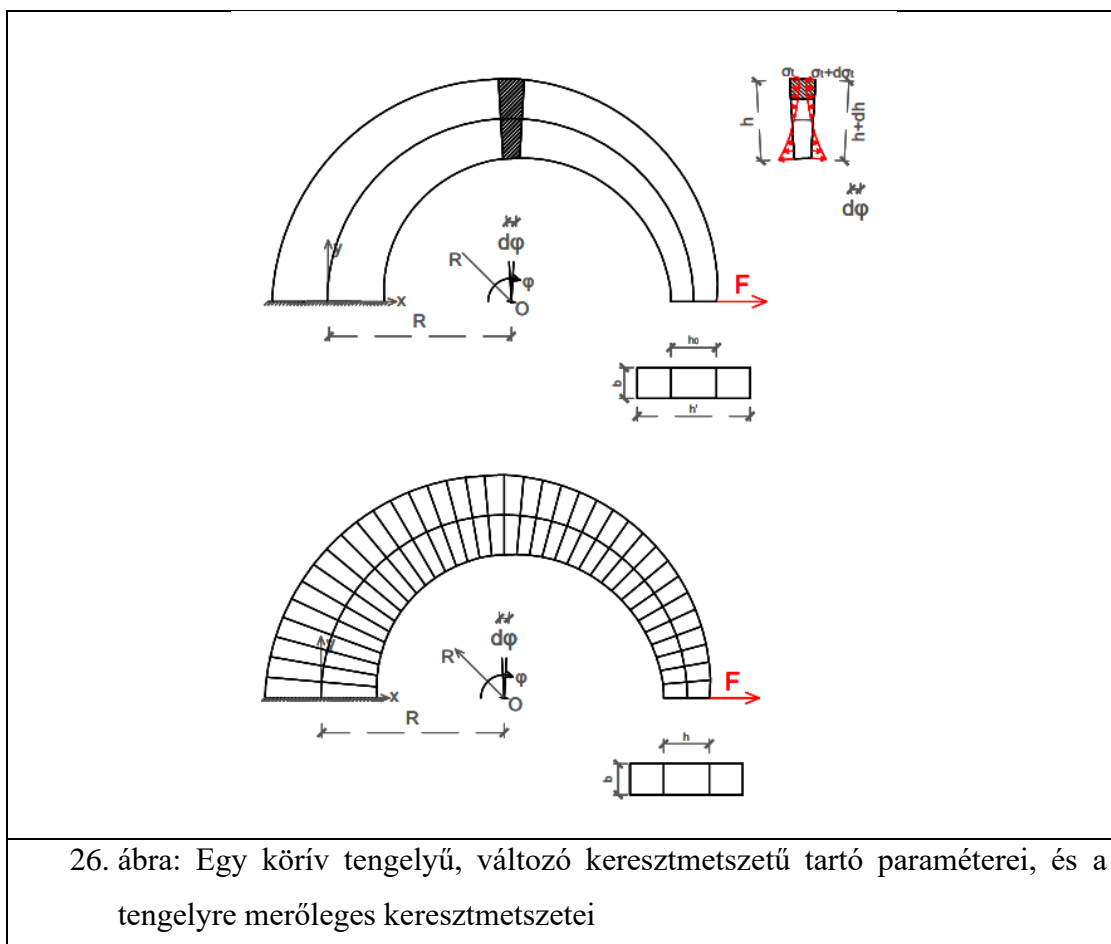
$$\tau = \frac{V * S_y}{I_0 * b} * \frac{R^2}{(R + y)^2}$$

AxisVM eredmények					Számítás a képlet alapján				Összehasonlítás (%)		
fí=	y	szigma x	szigma y	tau xy	y	szigma x	szigma y	tau xy	szigma x	szigma y	tau xy
45	-300	-31,02	-0,31	0,00	300,00	-28,79		0,00	8%		0%
	-11	-0,11	-0,94	0,74	-11,00	-0,09		0,71	11%		4%
	300	25,86	-0,21	0,00	300,00	27,84		0,00	-7%		0%
90	-300	-43,74	-0,42	0,00	300,00	-40,71		0,00	7%		0%
	-11	-0,12	-1,30	0,00	-11,00	-0,13		0,00	-10%		0%
	300	36,55	-0,29	0,00	300,00	39,37		0,00	-7%		0%
120	-300	-37,79	-0,36	0,00		-35,25		0,00	7%		0%
	-11	-0,13	-1,11	-0,53		-0,12		-0,50	10%		6%
	300	31,65	-0,25	0,00		34,10		0,00	-7%		0%

Itt a legnagyobb eltérés 8%, illetve a nyírófeszültség értékek közül minden érték 0 a peremfeltétel miatt, így hányadosuk nem értelmezhető.

6. Körív tengelyű, változó keresztmetszetű tartók

A hagyományostól kissé eltérő geometriájú gerendák eddig két típusát tekintettük át – a körív tengelyűt és a változó keresztmetszetűt -, ám lehetséges a fent említettek együttes alkalmazása egy gerendán. Ilyen esetben a rúdtengely és a keresztmetszetek helyzetét az alábbi módon, az ábra alapján mutatjuk be:



Jelen esetben a szélességet állandónak vesszük, tehát $db=0$ miatt b nem fog függeni φ -től. Ez a Végeselem tárcsamoddellel való ellenőrizhetőség miatt történt.

A két eset összehangolása, kiindulási feltételek

Ilyenkor a keresztmetszet magassága φ mentén lineárisan növekszik, és a növekedés függvénye hasonló az egyenes tengelyű magasságnövekedéssel:

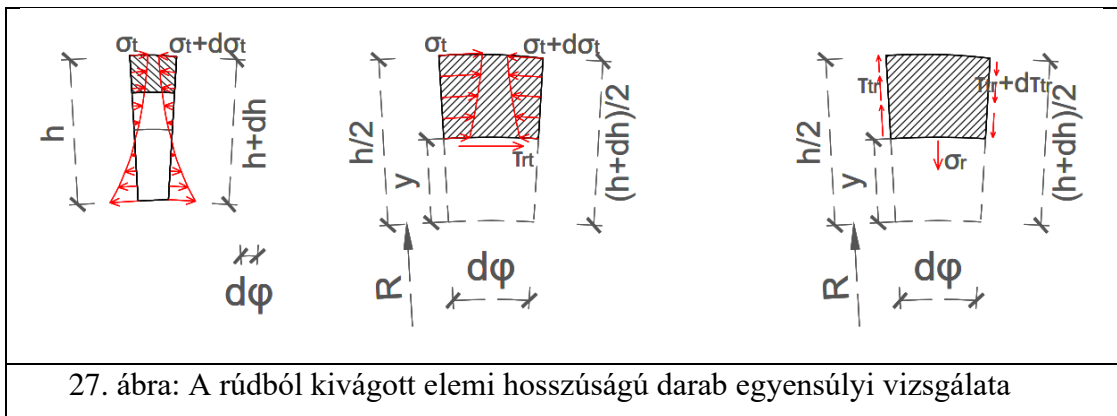
$$h_{\varphi} = h_0 + 2 \cdot \tan(\alpha) \cdot R \cdot \varphi$$

Továbbá fontos megjegyezni, hogy xy síkban nézve a gerenda tengelyétől - amelyet ilyen esetben mindig körívnek határozzuk meg- a keresztmetszet téglalap. Ezt fontos kikötésnek tekintjük számításaink során, annak érdekében, hogy az eredményeinket az egyenes tengelyű, változó magasságú gerenda összefüggéseivel össze tudjuk hasonlítani.

A tengelyirányú normálfeszültség számítására minden eddigi gerendatípus esetén érvényesnek tekintettük a Bernoulli-Navier hipotézist. Jelen esetben is így teszünk, azzal a kikötéssel, hogy a magasságváltozást kifejező α szög nem lehet nagyobb, mint 10° . Ezt egyenes tengely esetén is megtettük. A fentiek miatt a tengelyirányú normálfeszültség értéke:

$$\sigma_t = \frac{N}{A} - \frac{M}{R * A} - \frac{M * y}{I_0} * \frac{R}{R + y}$$

6.1 Nyírófeszültség számítása



27. ábra: A rúdból kivágott elemi hosszúságú darab egyensúlyi vizsgálata

Vágjunk el egy $R * d\phi$ vastagságú keresztmetszeti elemet tengellyel párhuzamos síkban az alábbi ábrán látható módon. A felületeken ható feszültségek egyensúlyát vizsgálva az előző fejezet egyik problémájához értünk. A vízszintes vetületi egyenlet felírása ismételten egy Volterra-féle integrálegyenlethez vezet. Az előző esethez képest az elemi rúddarab geometriája némiképpen megváltozott, de ez csupán az integrálási felületet növeli meg a rúddarab egyik oldalán, maguk a feszültség komponensek irányai ugyanazok, így most is megtehetjük, hogy az origóra felírt nyomatéki egyensúly egyenleteiből számítsuk ki a nyírófeszültséget. Az egyetlen ismeretlen kifejezés ez utóbbi, amit az alábbi módon tudunk felírni:

$$\sum M_0 = 0$$

$$\int_y^{\frac{h+dh}{2}} b * (\sigma_t + d\sigma_t) * (R + y) dy - \int_y^{\frac{h}{2}} b * \sigma_t * (R + y) dy + \tau_{rt} * (R + y)^2 * d\varphi = 0$$

Ezt kifejtve a következőt kapjuk:

$$\left(\frac{N + dN}{A + dA} - \frac{M + dM}{R * (A + dA)} \right) \int_y^{\frac{h+dh}{2}} (R + y) dy - \frac{(M + dM) * R}{I_0 + dI_0} \int_y^{\frac{h+dh}{2}} y dy - \left(\frac{N}{A} - \frac{M}{R * A} \right) \int_y^{\frac{h}{2}} (R + y) dy + \frac{M * R}{I_0} \int_y^{\frac{h}{2}} y dy + \tau_{rt} * (R + y)^2 * d\varphi = 0$$

Majd integrálás után:

$$\left(\frac{N + dN}{A + dA} + \frac{(M + dM)}{R * (A + dA)} \right) * \frac{R * (\bar{A} + d\bar{A}) + S_y + dS_y}{b} - \frac{(M + dM) * R}{I_0 + dI_0} * (S_y + dS_y) - \left(\frac{N}{A} - \frac{M}{R * A} \right) * \frac{R * \bar{A} + S_y}{b} + \frac{M * R}{I_0} * S_y + \tau_{rt} * (R + y)^2 * d\varphi = 0$$

I_0 és A rendezésével a következő a képlet:

$$\left(\frac{dN}{A} - \frac{dM}{R * A} \right) * \frac{R * \bar{A} + S_y}{b} + \left(\frac{N}{A} - \frac{M}{R * A} \right) * \frac{R * d\bar{A} + dS_y}{b} - \frac{dA}{A} * \left(\frac{N}{A} - \frac{M}{R * A} \right) * \frac{R * \bar{A} + S_y}{b} - \frac{dM * R}{I_0 * b} * S_y - dS_y * \frac{M * R}{I_0 * b} + \frac{dI_0}{I_0} * \frac{M * R}{I_0 * b} * S_y + \tau_{rt} * (R + y)^2 * d\varphi = 0$$

A fentebb említett teher-igénybevétel összefüggéseket alkalmazva és $d\varphi$ -vel formálisan átosztva, majd a kapott eredményeket deriváltként értelmezni:

$$\tau_{rt} = p_t \frac{R * \bar{A} + S_y}{A * b} * \frac{R}{(R + y)^2} - \left(N - \frac{M}{R} \right) \frac{R * \frac{d\bar{A}}{d\varphi} + \frac{dS_y}{d\varphi}}{A * b} * \frac{1}{(R + y)^2} + \frac{dA}{d\varphi} \left(N - \frac{M}{R} \right) * \frac{R * \bar{A} + S_y}{A^2 * b} * \frac{1}{(R + y)^2} + \frac{V * S_y}{I_0 * b} * \frac{R^2}{(R + y)^2} + \frac{dS_y}{d\varphi} * \frac{M}{I_0 * b} * \frac{R}{(R + y)^2} - \frac{dI_0}{d\varphi} * \frac{M * S_y}{I_0^2 * b} * \frac{R}{(R + y)^2}$$

Összehasonlítva a kapott képletet a korábbi fejezetekben kapott képletekkel egy fontos észrevételt azonnal le lehet vonni. Egyenes tengelyű, változó keresztmetszetű – de állandó szélességű - esetben három tagot kaptunk, körív tengelyű

állandó keresztmetszetű tartó esetén két tag volt. Ezek egymással való kombinálása az integrálás és a $d\varphi$ -vel való formális átosztás során tehát hat tagot eredményez a képletben.

A derivált tagok kifejtése, magyarázata

Ezesetben a deriválás $d\varphi$ mentén történik, így a derivált tagokat szükséges újra kifejtenuünk.

$$I_0 = -R^2 b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y}{R+y} dy, \text{ tehát } \frac{dI_0}{d\varphi} = 2 * R^3 * b * \tan(\alpha) * \left(\frac{4 * R^2}{(2 * R + h) * (2 * R - h)} \right)$$

$$S_y = R * b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y dy, \text{ tehát } \frac{dS_y}{d\varphi} = \frac{1}{2} \tan(\alpha) * R * A$$

Új mennyiség a teljes keresztmetszet terület deriváltja és az elcsúszni akaró keresztmetszetrész

területének deriváltja:

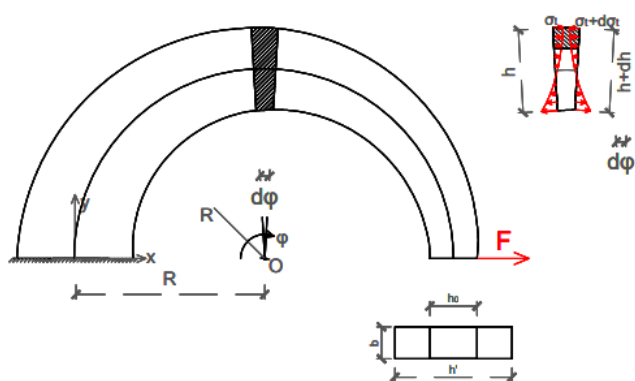
$$A = b * (h_0 + 2 * \tan(\alpha) * R * \varphi) \quad , \quad \text{így} \quad \frac{dA}{d\varphi} = 2 * b * \tan(\alpha) * R$$

$$\bar{A} = b * \left(\frac{h_0 + 2 * \tan(\alpha) * R * \varphi}{2} - y \right) \quad \text{így} \quad \frac{d\bar{A}}{d\varphi} = b * \tan(\alpha) * R$$

Észrevehető, hogy $\frac{d\bar{A}}{d\varphi}$ a fele $\frac{dA}{d\varphi}$ értékének, aminek az az oka, hogy az elcsúszni akaró keresztmetszetrésznek csak az egyik szélső peremének van rúdtengellyel bezárt α szöge.

6.2 Számpélda, az eredmények ellenőrzése

A vizsgált tartón ez esetben az adatok a következők:



$$h_0 = 600 \text{ mm}, \quad b_0 = 300 \text{ mm}, \quad \alpha = 5^\circ, \quad R = 6 \text{ m},$$

$$\gamma = 180^\circ \quad F = -150 \text{ kN}$$

γ a teljes tartó szögtartománya

Keressük az alábbi φ középponti szögekhez tartozó keresztmetszetek τ_{xy} értékeit: $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_3 = 135^\circ$

fi:	y	AxisVM eredmények			Számítás a képlet alapján			Összehasonlítás (%)		
		szigma x	szigma y	tau xy	szigma x	szigma y	tau xy	szigma x	szigma y	tau xy
45										
	-1537	-1,68	-0,03	-0,18	-1,74		-0,20	-4%		-11%
	-37,84	-0,04	-0,16	0,15	-0,03		0,13	9%		18%
90	1536,2	1,00	0,00	-0,07	1,03		-0,07	-3%		-2%
	1124,6	2,85	0,00	-0,21	2,93		-0,22	-3%		-3%
	-134,4	-0,41	-0,34	0,19	-0,43		0,21	-3%		-14%
135	-1125	-4,20	-0,07	-0,43	-4,29		-0,46	-2%		-8%
	-712,3	-6,95	-0,12	-0,63	-7,06		-0,70	-2%		-10%
	10,72	0,10	-0,38	-0,57	0,09		-0,71	12%		-19%
	711,72	5,47	0,00	-0,42	5,55		-0,44	-2%		-4%

A maximális eltérés értéke -19%- tehát a képletek közelítik a valóságot.

7. Összefoglalás

A dolgozatban vizsgált szerkezetek feszültségi állapotát kutatták korábban is tudósok, mérnökök, azonos vagy különböző módszerekkel jutottak azonos vagy kissé eltérő eredményre.

Az egyenes tengelyű változó keresztmetszetű központos igénybevétel nyírófeszültség és y irányú normálfeszültség képlete más szakmérnöki könyvekben is szerepel. Szintén változó keresztmetszetű, egyenes tengelyű hajlított igénybevételű tartók elemzésének is van szakirodalma, de ez esetben más szemléletmóddal, minden típusú változó keresztmetszet esetén konkrét geometriát modelleznek. Grashof munkássága során nagyon sokat foglalkozott a körív tengelyű rudak szilárdságtanával, a nyírófeszültség képletét maga is levezette differenciálegyenletekből.

Körív tengelyű, változó keresztmetszetű tartók hasonló jellegű vizsgálata a hazai szakirodalomban nem ismert, így ellenőrzése egyelőre nem lehetséges más forrásból.

8. Irodalom

Az alábbi művek segítették a dolgozat megírását:

Muttynyánszky Ádám: Szilárdságtan, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1981

Grashof: Theorie Der Elasticitat Und Festigkeit, Verlag von Rudolf Gartner, Berlin, 1878

Pap Zsuzsa Borbála-Bojtár Imre: Egyenes és görbe gerendák feszültségeinek vizsgálata, Építés – Építészettudomány 40, 2012, (3–4) 241–292

Kozmann: Változó keresztmetszetű rudak szilárdságtana, BME Mérnöktovábbképző Intézet előadássorozatából, Budapest, 1954