



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
ÉPÍTÉSZMÉRNÖKI KAR

Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék

INHOMOGÉN POLITÓPOK MECHANIKAI KOMPLEXITÁSA

– avagy van-e egy tetraédernek lelke?

Almádi Gergő

Konzulensek:

Dr. Domokos Gábor

Regős Krisztina

MTA-BME Morfodinamika Kutatócsoport

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA 2022

ABSZTRAKT

Politópnek nevezzük a d -dimenziós Euklideszi térben $(d - k)$ dimenziós lineáris sokaságok $(k = 0, 1, \dots, (d - 1))$ által határolt alakzatokat. Poligonnak, vagy másnéven sokszögnek nevezzük a $d = 2$ dimenziós politópokat és poliédernek nevezzük a $d = 3$ dimenziós politópokat. Ebben a dolgozatban az utóbb felsorolt két esettel foglalkozunk.

Egy politóp konvex, ha két tetszőleges pontját összekötő szakasz a politóp belsejében marad. Inhomogén tömegeloszlást feltételezve egy politóp súlypontja annak belsejében bárhol lehet.

Poligonok statikai viselkedésének jellemzésére bevezetjük az *egyensúlyi osztályozó vektor* fogalmát mely egy N -szög esetén egy N dimenziós, bináris vektor, melynek k -adik eleme 1, ha létezik pontosan k darab stabil helyzettel rendelkező N -szög, egyébként az elem 0. Háromszögek és négyszögek esetében bebizonyítjuk, hogy a kombinatorikailag lehetséges 2^3 illetve 2^4 vektor közül geometriailag csak 2 illetve 5 darab realizálódhat és fel is soroljuk ezeket a vektorokat.

Poliéderek esetében bevezetjük az *egyensúlyi osztályozó mátrix* fogalmát, mely egy F lapú, V csúcsú poliéder esetén egy $F \times V$ méretű, bináris elemekből álló mátrix, melynek (i, j) eleme 1, ha létezik pontosan $S = i, U = j$ stabil illetve instabil egyensúlyi helyzettel rendelkező F lapú, V csúcsú konvex poliéder.

MATLAB programban számított eredmények alapján sejtéseket fogalmazunk meg tetraéderek egyensúlyi osztályozó mátrixaira vonatkozóan. A tetraéderek 5 dimenziós konfigurációs terére illesztett ortogonális háló csúcsaiban elhelyezkedő tetraéderek numerikus vizsgálata alapján több, mint 100 egyensúlyi mátrixot sikerült azonosítani a kombinatorikailag lehetséges $2^{16} = 65536$ mátrix közül. Jelen dolgozatban nem igazoljuk, hogy több mátrix nem létezhet, de megfogalmazunk olyan elveket, melyekkel egyes mátrixok létezését ki lehet zárni. Külön hangsúlyt fektetünk a monostabil és monoinstabil tetraéderek *egyensúlyi osztályozó mátrixaira*, és párhuzamot vonunk a homogén tetraéderek *egyensúlyi osztályozó mátrixaival* is.

TARTALOMJEGYZÉK

1.	BEVEZETÉS	3
1.1.	Poliéderek: formák és testek.....	3
1.2.	Monostatikus tetraéder-konstrukciók	3
1.3.	Az egyensúlyi osztályozó mátrix.....	4
1.3.1.	Síkbeli eredmények	5
1.3.2.	Térbeli analitikus eredmények.....	6
1.3.3.	Térbeli numerikus eredmények	7
1.4.	A dolgozat szerkezete	12
2.	SÍKBELI, KONVEX POLIGONOK EGYENSÚLYI OSZTÁLYOZÓ VEKTORAI	13
2.1.	Konvex poligonok egyensúlyai.....	13
2.2.	Síkbeli háromszögek egyensúlyi osztályozó vektorai.....	14
2.3.	Síkbeli, konvex négyszögek egyensúlyi osztályozó vektorai.....	16
2.4.	Evolúta és <i>szomszédsági elvek</i> kétdimenzióban	30
3.	TÉRBELI, KONVEX POLIÉDEREK EGYENSÚLYI OSZTÁLYOZÓ MÁTRIXAI	32
3.1.	Konvex poliéderek egyensúlyai	32
3.2.	Tetraéderek konfigurációs tere	32
3.3.	Tetraéderek csúcspontjainak koordinátái.....	35
3.4.	Tetraéderek súlypontjainak meghatározása	38
3.4.1.	Tetraéder felszíni pontjai.....	38
3.4.2.	Tetraéder belső pontjai	40
3.5.	Tetraéder egyensúlyainak vizsgálata	41
3.5.1.	Stabil egyensúly	42
3.5.2.	Instabil egyensúly	43
3.5.3.	Nyereg típusú egyensúly	45
3.6.	Inhomogén tetraéderek egyensúlyi osztályozó mátrixai	47
3.7.	Hibakeresés	49
4.	ÖSSZEFOGLALÁS ÉS KITEKINTÉS	50
5.	KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS.....	52
6.	ÁBRAJEGYZÉK	53
7.	IRODALOMJEGYZÉK.....	55

1. BEVEZETÉS

1.1. Poliéderek: formák és testek

A poliéderek (tehát a síklapokkal határolt testek) a legrégebben vizsgált geometriai objektumok közé tartoznak. Poliéderekre gondolhatunk úgy is, mint absztrakt, geometriai objektumokra, ugyanakkor elképzelhetjük őket úgy is, mint tömeggel rendelkező szilárd testeket. Az első értelmezésben beszélünk a poliéder (külső) *formájáról*, a második értelmezésben beszélhetünk a poliéder (belső) *tartalmáról*, vagy, jelen dolgozat címére utalva, *lelkéről*. A dolgozat a két megközelítés viszonyáról, az azonos formához kapcsolódó lehetséges tartalmak gazdagságáról szól.

Az első (tehát tisztán geometriai) értelmezés szempontjából a poliéderekkel kapcsolatos egyik legrégebbi és talán legismertebb eredmény annak igazolása, hogy 5 szabályos poliéder létezik [12]. Az 5 szabályos poliéder közül mindössze egyetlenre igaz, hogy kombinatorikai értelemben *önmagával duális*, vagyis lapjainak és csúcsainak száma megegyezik: az $f=4$ lappal, $v=4$ csúccsal és $e=6$ éllel rendelkező tetraédert joggal nevezhetjük a legegyszerűbb poliédernek, hiszen mindhárom mérőszámnak ez a minimuma. Nem véletlen, hogy a $d=3$ dimenziós euklideszi térben a tetraédert *szimplexnek* is nevezzük.

A második, mechanikai értelmezésben a poliéder f lapján laponként legfeljebb egy (tehát összesen $S \leq f$) darab stabil, a csúcsokon $U \leq v$ darab instabil *egyensúlyi pontot* (lásd 3. fejezet, 14. és 15. Definíció) találhatunk, melyeken a poliédert egy vízszintes síkkal megtámasztva az statikailag egyensúlyban van. Az $(S, U)^E$ számpárt a poliéder *egyensúlyi osztályának* nevezzük [1].

A fentiek szerint tetraéderek az $I \leq S, U \leq 4$ egyenlőtlenségekkel jellemzett 16 darab egyensúlyi osztályban fordulhatnak elő. Bármennyire egyszerű és régóta vizsgált testnek tűnik is azonban a tetraéder, és bármilyen természetes is a tetraéder mint tömeggel rendelkező szilárd test értelmezése, mégis, a mai napig nem ismert, hogy a jelzett 16 darab egyensúlyi osztály közül melyekben létezhetnek és melyekben nem létezhetnek tetraéderek. Jelen dolgozat elsődleges célja ezen kérdés mélyebb feltárása és a kérdés első felére adandó válaszban való előrelépés.

1.2. Monostatikus tetraéder-konstrukciók

A matematikai irodalomban vannak erre vonatkozó részeredmények, melyek közül a legelső – és talán legérdekesebb- John Horton Conway nevéhez kötődik [2], aki bebizonyította, hogy homogén anyageloszlás esetén nem létezhet monostatikus, vagyis az $(I, U)^E$ vagy az $(S, I)^E$ osztályhoz tartozó tetraéder. Ugyanő igazolta azt is, hogy inhomogén esetben létezhet monostabil (vagyis $(I, U)^E$ osztályhoz tartozó) tetraéder, U értékéről illetve az ilyen típusú tetraéder formájáról azonban közelebbit nem bizonyított. Az [1] cikk Conway eredményeit két szempontból egészítette ki: egyrészt példát adott az összes homogén, nem-monostatikus egyensúlyi osztályban (vagyis a 9 darab osztályra melyben $2 \leq S, U \leq 4$) létező tetraéderre, másrészt igazolta a mono-instabil (vagyis $(S, I)^E$ osztályú) tetraéder létezését.

Ezeket az eredményeket egészíti ki - szerény mértékben - az

1. Tétel: Létezik tetraéder az $(1,2)^E$ és a $(2,1)^E$ egyensúlyi osztályokban.

Bizonyítás (1.Tétel): Az 1. táblázat tartalmazza két olyan tetraéder adatait, melyek a jelzett osztályokban vannak és csúcsaik, valamint súlypontjuk összes koordinátája is természetes szám.

Egyensúlyi osztály		Változó csúcsok koordinátái					Súlypont koordinátái		
S	U	C_x	C_y	D_x	D_y	D_z	S_x	S_y	S_z
1	2	153600	44400	112200	7800	6400	104200	4300	100
2	1	100000	28904	112160	9679	2798	101618	23796	612

1. Táblázat: Az $(1,2)^E$ és a $(2,1)^E$ egyensúlyi osztályokban található tetraéderek csúcspontjainak és súlypontjának koordinátái. A táblázatban nem szereplő, mindkét tetraéderre közösen jellemző adatok: $A_x = A_y = A_z = B_x = B_z = C_z = 0$; $B_y = 100000$.

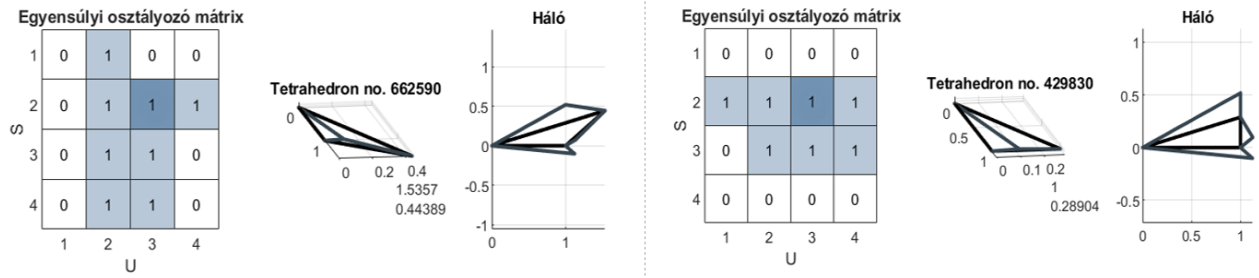
Q.e.d.

1.3. Az egyensúlyi osztályozó mátrix

Konkrét konstrukciók bemutatása mellett a dolgozat célja poliéderek és poligonok (közös néven $d=2$ és $d=3$ dimenziós politópok) geometriai és mechanikai megközelítése közötti kapcsolat mélyebb feltárása. Ennek legfontosabb eszközeként egy új fogalmat vezetünk be:

1. Definíció: Legyen P egy f lapú, v csúcsú konvex poliéder forma. Ekkor az $f \times v$ méretű M_P mátrixot a P poliéder forma (egyensúlyi) *osztályozó mátrixának* nevezzük és annak $m_p(i,j)$ elemeit az alábbiak szerint határozzuk meg: legyen $m_p(i,j)=1$ ha az $(i,j)^E$ egyensúlyi osztályban létezik P formájú poliéder és egyébként legyen $m_p(i,j)=0$. (Megjegyezzük, hogy a síkbeli esetben, egy v csúcsú konvex sokszöget $f=1$ lapú poliédernek tekintve az osztályozó mátrix egy v méretű, bináris elemekkel rendelkező vektorra egyszerűsödik.) Az osztályozó mátrix elemeinek összegét μ_P -vel jelöljük.

Az osztályozó mátrixot az 1. táblázatban bemutatott két tetraéder példáján illusztráljuk (1. ábra).



1. ábra: Az 1. Táblázatban bemutatott két tetraéder osztályozó mátrixa és rajza. A mátrixban sötétkék háttérrel jeleztük a homogén tetraéder egyensúlyi osztályát jelentő cellát.

Az osztályozó mátrixból leolvasható a P poliéder forma $C(P)$ mechanikai komplexitása [1] is: jelölje $(S_0, U_0)^E$ a homogén anyageloszláshoz tartozó egyensúlyi osztályt. (Az 1. ábrán ez mindkét esetben a $(2,3)^E$ osztály.) Ekkor az [1] cikkben közölt definíció szerint

$$(1) \quad C(P) = 2(f + v - S_0 - U_0).$$

Megjegyezzük, hogy a $d=2$ dimenziós esetben, egy v csúcsú síkbeli konvex P poligon esetén az (1) formula

$$(2) \quad C(P) = 2(v - S_0)$$

alakú lesz, ahol S_0 a P poligon stabil egyensúlyi helyzeteinek száma homogén anyageloszlás esetén. A dolgozat címének szellemében, célunk az (1)-(1a) formulák alkalmazásával a $d=2$ és $d=3$ dimenziós inhomogén politópok mechanikai komplexitásának feltárása.

Az osztályozó mátrixok bináris elemekkel rendelkeznek, ezért egy $f \times v$ méretű mátrixból kombinatorikai értelemben $2^{f \times v}$ változat létezik, nyilvánvaló azonban, hogy ezek közül nem mindegyik valósul meg geometriailag. Az ezzel kapcsolatos eredményeket az alábbiakban röviden összefoglaljuk.

1.3.1. Síkbeli eredmények

2. Tétel: Legyen H egy síkbeli háromszög. Ekkor a H síkbeli háromszög egyensúlyi osztályozó

vektoraik kizárólag $M_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, és $M_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakúak lehetnek, és mindkét vektor esetén létezik

olyan háromszög, melynek az adott vektor az egyensúlyi osztályozó vektora.

3. Tétel: Legyen Q egy síkbeli, inhomogén, konvex négyszög. Ekkor a Q síkbeli, inhomogén

konvex négyszög egyensúlyi osztályozó vektora csak $V_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $V_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $V_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $V_Q =$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vagy $V_Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú lehet, és mindegyik vektor esetén létezik olyan négyszög, aminek az

adott vektor az egyensúlyi osztályozó vektora.

A 2. és 3. Tétel bizonyítását a 2. fejezetben közöljük.

1.3.2. Térbeli analitikus eredmények

A térbeli eset a síkbelinél több szempontból is bonyolultabb, ezért itt kizárólag a tetraéderrel foglalkoztunk, amelynek formája és tartalma („lelke”) közötti kapcsolatról érdekes tényeket sikerült megállapítanunk. Az alábbi állításokat bizonyítottuk:

1. Lemma: Ha egy T tetraéder esetén $\mu_T=1$, akkor a T tetraéder egyensúlyi osztálya $(4,4)^E$.

Bizonyítás (1. Lemma):

Ha a tetraéder egyensúlyi osztálya tetszőleges súlypont esetén azonos, abból az következik, hogy a lapokra az élek mentén állított merőleges síkok nem metszhetnek bele a tetraéderbe, hiszen ha belemetszenének, akkor egy ilyen sík eltérő oldalán megjelenő súlyponthoz eltérő egyensúlyi osztály tartozna. Ha azonban a síkok nem metszhetnek bele a tetraéderbe akkor tetszőleges súlypont esetén az egyensúlyi osztály a $(4,4)^E$. Q.e.d.

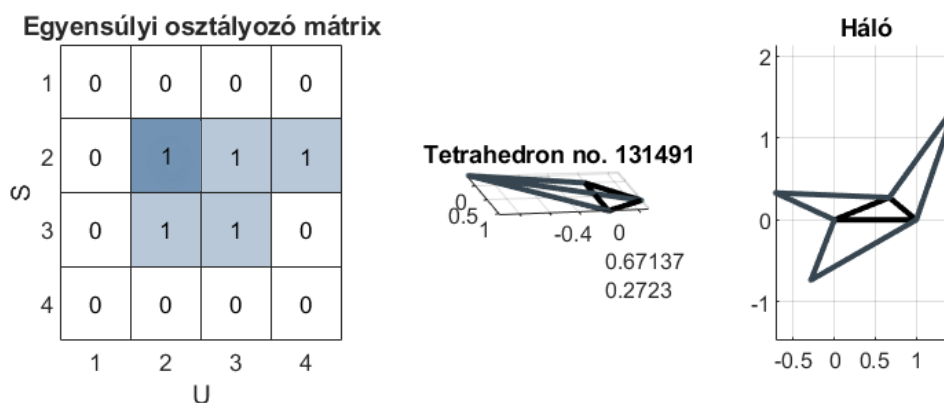
2. Lemma: Nem létezik olyan $(S,U)^E$ egyensúlyi osztály melyre tetszőleges T tetraéder forma esetén $m_T(S,U)=1$.

Bizonyítás (2. Lemma):

Az 1. Lemma alapján elegendő egy olyan T tetraédert konstruálni melyre $m_T(4,4)=0$. Ennek a tetraédernek az adatait a 2. táblázat tartalmazza, osztályozó mátrixát és rajzát pedig a 2. ábra mutatja.

Csúcsok koordinátái				
C_x	C_y	D_x	D_y	D_z
671	272	-284	-734	10

2. Táblázat: Azon T tetraéder adatai melyre $m_T(4,4)=0$. További adatok: $A_x = A_y = A_z = B_x = B_z = C_z = 0$; $B_y = 1000$



2. ábra: A 2. Táblázatban bemutatott tetraéder osztályozó mátrixa és rajza. A mátrixban sötétkék háttérrel jeleztük a homogén tetraéder egyensúlyi osztályát jelentő cellát.

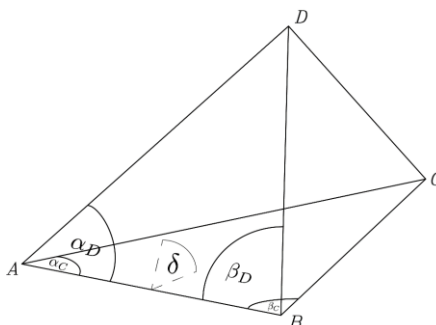
Q.e.d.

1.3.3. Térbeli numerikus eredmények

Ha hasonló tetraédereket azonosnak tekintünk akkor a geometriailag lehetséges tetraéderek halmazának leírására bevezethetünk egy célszerű fogalmat:

2. Definíció: Legyen a T tetraéder 4 csúcsa A, B, C és D . Legyen továbbá az ABC háromszög A -nál fekvő szöge α_C , az ABC háromszög B -nél fekvő szöge β_C , az ABD háromszög A -nál fekvő szöge α_D , az ABD háromszög B -nél fekvő szöge β_D valamint az ABC és az ABD háromszögek által bezárt szög δ . Ekkor a $0^\circ < \alpha_C < 90^\circ$, $0^\circ < \beta_C < 180^\circ$, $0^\circ < \alpha_D < 180^\circ$, $0^\circ < \beta_D < 180^\circ$, $0^\circ < \delta < 180^\circ$ egyenlőtlenségek által meghatározott kompakt tartományt a T tetraéder *konfigurációs terének* nevezzük.

A tetraéder konfigurációs terét kifesztítő változókat a 3. ábra illusztrálja.

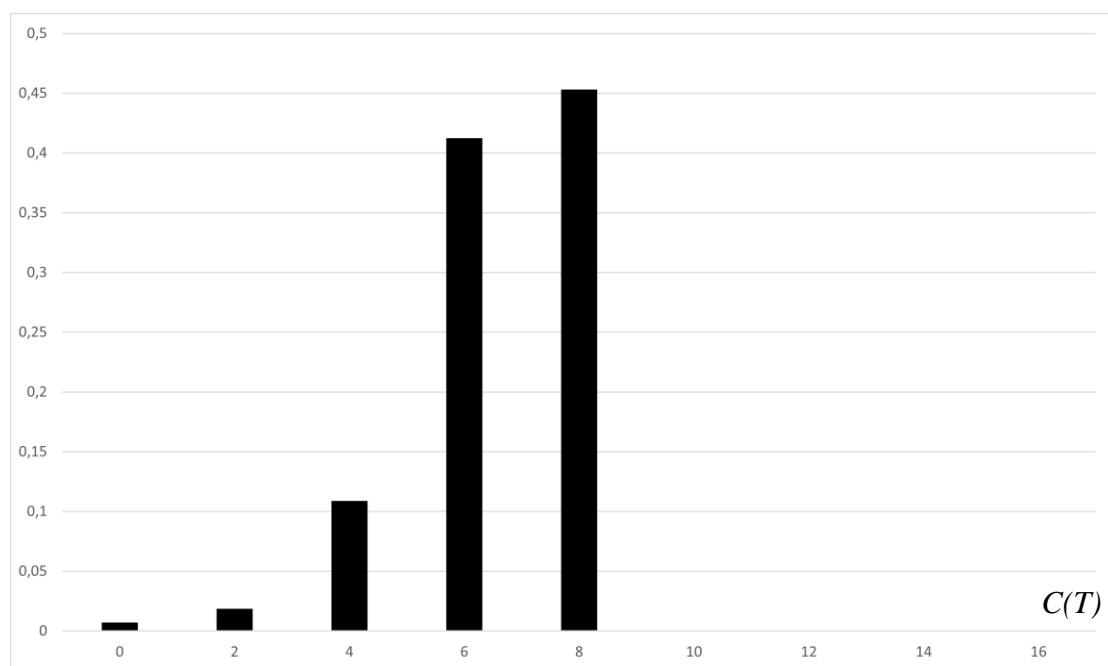


3. ábra: Tetraéder konfigurációs terét kifesztítő változók. $\alpha_C; \beta_C; \alpha_D; \beta_D$ és δ az $ABCD$ tetraéderben.

A konfigurációs térben egy nem-egyenletes ortogonális hálót definiáltunk és ezen háló 768109 csúcspontjához tartozó tetraéderek mindegyikének meghatároztuk az osztályozó mátrixát. A

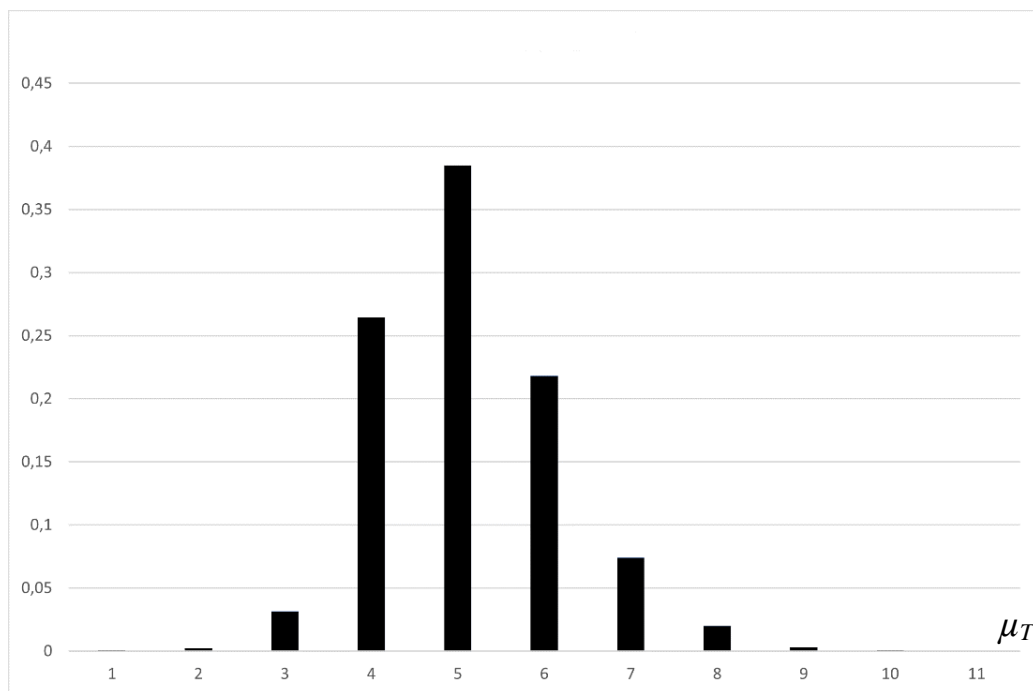
térre, valamint a tetraéderek belsejének felosztására, valamint az algoritmus részleteire és annak implementációjára vonatkozó leírást a 3. fejezet tartalmazza. A 768109 darab osztályozó mátrix statisztikus feldolgozása alapján az alábbi észrevételeket tesszük:

1. Numerikus eredmény: A kombinatorikailag lehetséges 2^{16} különböző egyensúlyi osztályozó mátrixból mindössze 291 különbözőt tudunk azonosítani (ez 0.44%-nak felel meg). Megjegyezzük, hogy bár számos, kombinatorikailag lehetséges osztályozó mátrix esetén nyilvánvaló, hogy geometriailag nem jöhet létre, ennek a nagyon érdekes kérdésnek a teljes analitikus vizsgálata meghaladja jelen dolgozat kereteit.



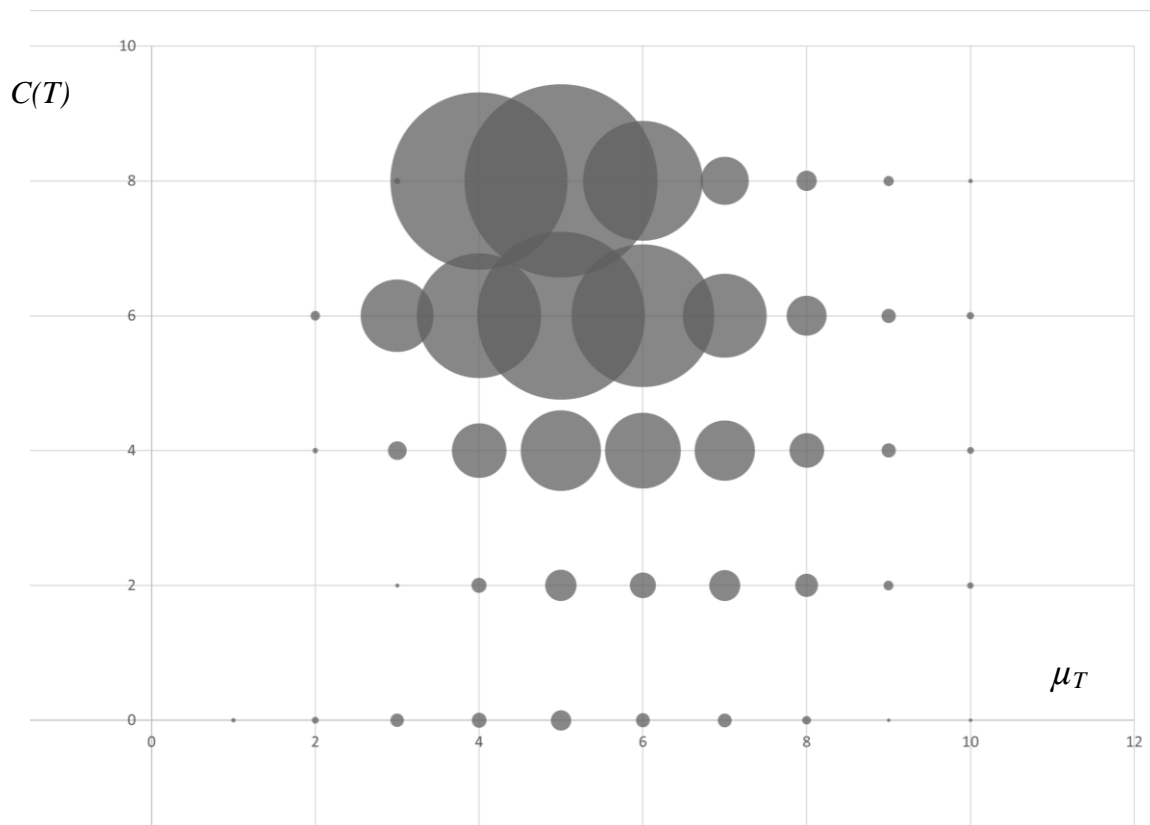
4. ábra: A vizsgált T tetraéderek relatív gyakorisága a tetraéderek $C(T)$ komplexitásának függvényében.

2. Numerikus eredmény: A vizsgált T tetraéderek relatív gyakoriságát a tetraéderek $C(T)$ komplexitásának függvényében a 4. ábrán foglaltuk össze. Tetraéderek esetén az (I) egyenlet alapján $C(T) = 16 - 2(S_0 + U_0)$, ahol a $(S_0, U_0)^E$ a T tetraéder homogén anyageloszlásához tartozó egyensúlyi osztály. Ez alapján, homogén anyageloszlás esetén a vizsgált tetraéderek 45.3%-a a $(2, 2)^E$ egyensúlyi osztályba tartozik.



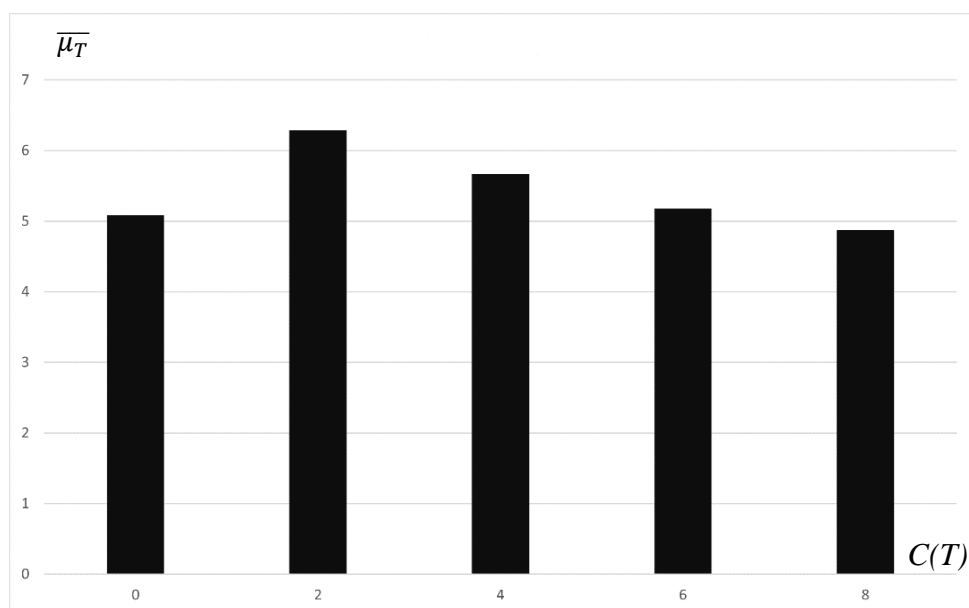
5. ábra: A vizsgált tetraéderek relatív gyakorisága az osztályozó mátrix μ_T elemösszege függvényében

3. Numerikus eredmény: A vizsgált T tetraéderek relatív gyakoriságát az osztályozó mátrix μ_T elemösszege függvényében az 5. ábrán foglaltuk össze. Az elemösszeg átlagos (várható) értéke $\mu_T=5.11$ és $1 \leq \mu_T \leq 10$.



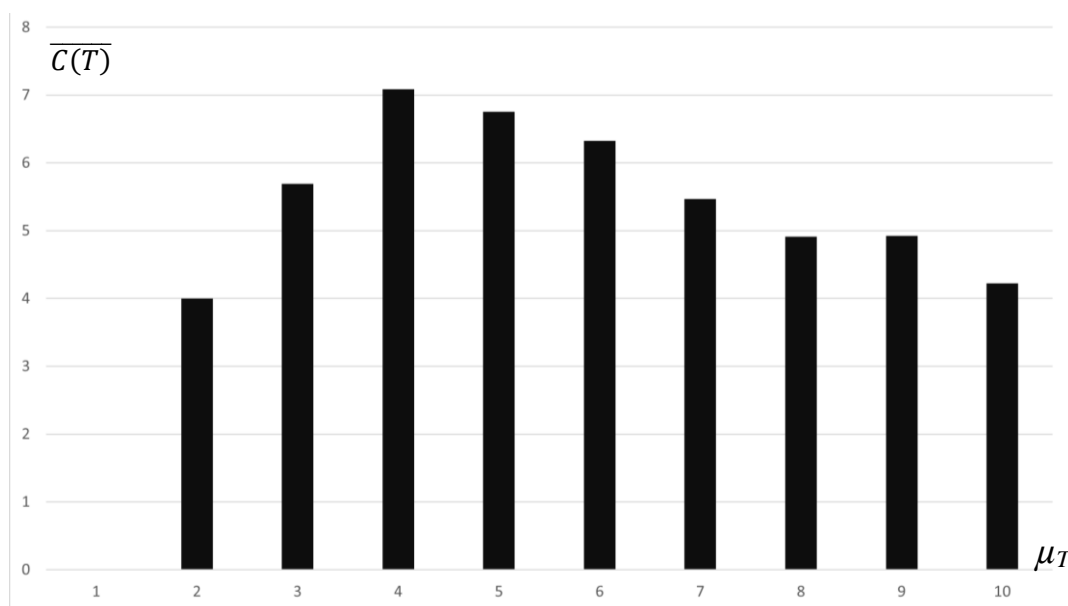
6. ábra: A vizsgált T tetraéderek $\mu_T - C(T)$ diagramja.

4. Numerikus eredmény: A vizsgált T tetraéderek $\mu_T - C(T)$ diagramját a 6. ábrán közöljük. Ez alapján a két mennyiség között nincs erős összefüggés.



7. ábra: A vizsgált T tetraéderek μ_T elemösszegének átlaga konstans $C(T)$ komplexitáshoz rendelve.

5. Numerikus eredmény: A vizsgált T tetraéderek μ_T elemösszegének átlagát ($\overline{\mu_T}$) konstans $C(T)$ komplexitáshoz a 7. ábra mutatja.



8. ábra: A vizsgált T tetraéderek $C(T)$ komplexitásának átlaga konstans μ_T elemösszeghez rendelve.

6. Numerikus eredmény: A vizsgált T tetraéderek $C(T)$ komplexitásának átlagát konstans μ_T elemösszeghez a 8. ábra mutatja.

5. Numerikus eredmény: Mindössze 84 (kb. 0.01%) tetraéder esetén volt $\mu_T=1$ és ez a $(4,4)^E$ osztály. (Utóbbi állítást bizonyítja az 1. Lemma).

6. Numerikus eredmény: Mindössze 498 (kb. 0.065 %) olyan tetraédert találtunk, amelyek lehetséges egyensúlyi osztályai pontosan megegyeznek azon egyensúlyi osztályokkal melyekben homogén tetraéder található. (Az [1] cikk alapján ezek az a $(2,2)^E$, $(3,2)^E$, $(4,2)^E$, $(2,3)^E$, $(3,3)^E$, $(4,3)^E$, $(2,4)^E$, $(3,4)^E$ és $(4,4)^E$ osztályok.)

1.4. A dolgozat szerkezete

A 2. fejezet a 2. és 3. tétel (síkbeli analitikus eredmények) bizonyítását tartalmazza, a 3. fejezetben pedig definiáljuk konvex poliéderek egyensúlyait és részletesen bemutatjuk azt az algoritmust, mellyel a tetraédereknek a 2. definícióban meghatározott konfigurációs terét letapogattuk és az így kapott 768109 darab tetraéder osztályozó mátrixait meghatároztuk. A 4. fejezet összefoglalja a dolgozat eredményeit.

2. SÍKBELI, KONVEX POLIGONOK EGYENSÚLYI OSZTÁLYOZÓ VEKTORAI

2.1. Konvex poligonok egyensúlyai

Az alapfogalmak definiálása után bebizonyítjuk inhomogén síkbeli háromszögek és inhomogén konvex négyszögek egyensúlyi osztályozó vektorairól, hogy a kombinatorikailag lehetséges 2^3 és 2^4 különböző vektor közül csak 2 illetve 5 darab létezhet, és létezik is mindegyik vektornak megfelelő háromszög, illetve konvex négyszög.

3. Definíció: [4] Legyen K egy síkbeli konvex test, és X a test egy belső pontja. Azt mondjuk, hogy a test egy Y határpontja K egy egyensúlyi pontja X -re nézve, ha az Y -on átmenő, XY szakaszra merőleges egyenes nem metszi a K test belsejét.

4. Definíció: [4] Legyen P egy konvex poligon, X a P tömegközéppontja és Y a P egyensúlyi pontja X -re nézve.

- Ha Y a P egy élének belső pontja, akkor azt mondjuk, hogy Y egy stabil egyensúlyi pont.
- Ha Y a P egy csúcsa, és az XY szakaszra merőleges, Y -on átmenő egyenes P -t csak ebben a csúcsban metszi, azt mondjuk, hogy Y egy instabil egyensúlyi pont.
- Ha Y -ra a fenti két feltétel egyike sem teljesül, azt mondjuk, hogy Y egy degenerált egyensúly.

Inhomogén testsűrűséget feltételezve K tetszőleges belső pontja lehet K tömegközéppontja.

5. Definíció: Legyen XY egy szakasz a síkon. Ekkor az X pontban az XY szakaszra állított merőleges félegyenest f_{xy} -nal jelöljük. Továbbá az Y pontban, az XY szakaszra állított merőleges félegyenest f_{yx} -szel jelöljük.

6. Definíció: Legyen XY egy szakasz a síkon. Ekkor az XY szakaszra állított f_{xy} és f_{yx} félegyenések közötti végtelen sávot S_{xy} -nal jelöljük, és az XY szakasz sávjának nevezzük.

7. Definíció: Legyen XY egy szakasz a síkon. P ponthoz akkor tartozik egyensúlyi pont az XY szakaszon, amennyiben a P pontot az XY szakasz sávja tartalmazza. Ekkor azt mondjuk, hogy a P pontból az XY szakasz, mint egyensúly látszik.

8. Definíció: Legyen K egy konvex poligon, és annak tömegközéppontja P . Amennyiben a P pontból n oldal, mint egyensúly látszik, akkor azt mondjuk, hogy a P pontból n egyensúly látszik, tehát a P ponthoz a K poligonnak n különböző oldalán tartozik egyensúlyi pont.

1. Megjegyzés: Inhomogén testsűrűséget feltételezve K egy tetszőleges belső pontja lehet K tömegközéppontja.

2.2. Síkbeli háromszögek egyensúlyi osztályozó vektorai

2. Megjegyzés: Az 1. Definíció alapján egy H síkbeli háromszög egyensúlyi viszonyait egy $v = 3$ elemű bináris M_H vektor határozza meg.

Ezután a Bevezetésben kimondott 2. Tétel bizonyítása következik:

Bizonyítás (2. Tétel):

3. Megjegyzés: A 90° -nál nagyobb szöget – konvencionális módon - *tompas-*, a kisebbet *hegyes-*, és a pontosan 90° -os szöget *derékszögnek* nevezzük. Továbbá a csak hegyesszöggel rendelkező háromszögeket *hegyesszögű*, a tompaszöggel rendelkező háromszögeket *tompaszögű*, a derékszöggel rendelkező háromszögeket *derékszögű* háromszögeknek nevezzük.

Az előbbi tételt két lemmán keresztül bizonyítjuk:

3. Lemma: Legyen A , B és C egy H inhomogén hegyesszögű háromszög 3 csúcsa. Ekkor a

H háromszög egyensúlyi osztályozó vektora csak $M_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú lehet.

Bizonyítás (3. Lemma):

4. Megjegyzés: Egy háromszögben egy oldal és egy csúcs helyzetét jellemezhetjük az adott csúcs adott oldal sávjához viszonyított helyzetével. A tárgyalás megkönnyítése érdekében, de az általánosság megszorítása nélkül most az AB oldal és a C pont egymáshoz viszonyított helyzetét fogjuk vizsgálni. Ilyenkor 2 kombinatorikailag különböző eset fordulhat elő:

- 1) a C csúcs az S_{AB} sávon belül van, amennyiben az AB oldalon csak hegyesszög vagy derékszög van
- 2) a C csúcs az S_{AB} sávon kívül van, amennyiben az AB oldalon 1 hegyes- és egy tompaszög van

Az 1)-es esetben a háromszög minden pontja az S_{AB} sávon belül van, tehát a 8. Definíció szerint a T háromszög minden pontjáról látszik az AB oldal, mint egyensúly.

A 2)-es esetben a háromszögnek van olyan pontja, amely az S_{AB} sávon kívül van, tehát az 6. Definíció szerint a háromszögnek van olyan pontja, ahonnan az AB oldal nem látszik, mint egyensúly.

Mivel a H háromszögben az A és a B csúcsonál is hegyesszög van, Ezért a 4. Megjegyzés szerint a C csúcs az S_{AB} sáv belsejébe esik, tehát a H háromszög bármely belső pontjáról az AB oldal, mint egyensúly látszik. Ez analóg módon elmondható az AC és a BC oldalakról is.

Ebből következik, hogy a H háromszög bármely belső pontjáról annak minden oldala, mint egyensúly látszik.

A 1. Definíció szerint ilyenkor a H háromszöghöz tartozó M_H egyensúlyi osztályozó vektorra

igaz, hogy: $m_H(1) = 0$; $m_H(2) = 0$ és $m_H(3) = 1$, tehát $M_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Megjegyzés: Legyen AB és BC két egymással szöget bezáró szakasz. Azon pontok halmaza, ahonnan mindkét szakasz, mint egyensúly látszik, az S_{AB} és az S_{BC} sávok metszete.

6. Megjegyzés: Legyen AB és BC egy H inhomogén háromszög két oldala. Mivel egy háromszögben bármely két oldal által bezárt szög mindig kisebb, mint 180 fok, ezért az S_{AB} és az S_{BC} sávok metszete sosem üres. Az 5. Megjegyzésből következik, hogy mindig van olyan belső pontja H -nak, ahonnan az AB és a BC oldalak közül mindkettőre rálátunk, mint egyensúly. Továbbá mindig létezik olyan pontja H -nak ahonnan az AB és a BC oldalak közül rálátunk pontosan az egyikre.

7. Megjegyzés: A 6. Megjegyzés szerint nincs olyan belső pontja egy háromszögnek, ahonnan csak egyetlen oldal látszik, mint egyensúly. Tehát egy háromszög egyensúlyi osztályozó vektorára mindig igaz, hogy: $M_H(1) = 0$.

4. Lemma: Legyen A , B és C a T inhomogén tompaszögű háromszög három csúcsa. Ekkor a

H háromszög egyensúlyi osztályozó vektora csak $M_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú lehet.

Bizonyítás (4. Lemma):

A tárgyalás megkönnyítése érdekében, de az általánosság megszorítása nélkül, fel fogjuk tételezni, hogy a H háromszögben a tompaszög a B csúcsnál fekszik.

A 6. Megjegyzés alapján van olyan belső pontja a H háromszögnek, ahonnan az AB és a BC oldal is, mint egyensúly látszik.

Mivel a T háromszögben az AC oldalon az A és a C csúcsnál is hegyesszög van, ezért a B csúcs a 4. Megjegyzés szerint az S_{AC} sáv belsejében helyezkedik el, és ilyenkor a H háromszög teljes területéről az AC oldal, mint egyensúly látszik.

Tehát ezekből és a 6. Megjegyzésből következik, hogy a H háromszög egy pontjáról vagy pontosan kettő, vagy pontosan három oldal látszik, mint egyensúly.

Az 1. Definíció szerint ilyenkor a H háromszöghöz tartozó M egyensúlyi osztályozó vektorra igaz, hogy: $m_H(1) = 0$; $m_H(2) = 1$ és $m_H(3) = 1$, tehát $M_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Q.e.d.

Ezzel a 2. Tétel bizonyítását befejeztük.

2.3. Síkbeli, konvex négyszögek egyensúlyi osztályozó vektorai

Az 1. Definíció alapján egy síkbeli Q négyszög egyensúlyi viszonyait egy $v=4$ elemű bináris V_Q vektor határozza meg.

Ezután a Bevezetésben kimondott 3. Tétel bizonyítása következik:

Bizonyítás (3. Tétel):

8. Megjegyzés: A tétel bizonyításához a konvex négyszögeket belső szögeik viszonylatában csoportosítjuk. Egy konvex négyszög belső szögei között 0, 1, 2 vagy 3 tompaszög lehet.

9. Definíció: A konvex négyszögeket, annak függvényében, hogy hány darab tompaszöggel rendelkeznek, a következőképpen kategorizáljuk:

0. eset: amikor egy négyszög nem rendelkezik tompaszöggel

1. eset: amikor egy négyszög 1 darab tompaszöggel rendelkezik

II. eset: amikor egy négyszög 2 darab tompaszöggel rendelkezik

III. eset: amikor egy négyszög 3 darab tompaszöggel rendelkezik

9. Megjegyzés: Egy négyszögben egy oldal és a vele szemközti oldal helyzetét jellemezhetjük a szemközti oldalnak az adott oldal sávjához viszonyított helyzetével. A tárgyalás megkönnyítése érdekében, de az általánosság megszorítása nélkül most a CD oldal és a vele szemközti AB oldal egymáshoz viszonyított helyzetét fogjuk vizsgálni. Ilyenkor 3 kombinatorikailag különböző eset fordulhat elő:

- 1) az A és a B csúcs is (tehát az AB oldal teljes egészében) az S_{CD} sávon belül van, amennyiben a C és a D csúcson is hegyesszög és/vagy derékszög van
- 2) az A és a B csúcs közül az egyik az S_{CD} sávon belül van, míg a másik kívül, amennyiben a C és D csúcsok közül az egyik tompaszög van
- 3) az A és a B csúcs is az S_{CD} sávon kívül van, amennyiben a C és a D csúcson is tompaszög van

Az 1)-es esetben a teljes négyszög az S_{CD} sávon belül van, tehát az 7. Definíció szerint a CD szakasz a négyszög teljes területéről, mint egyensúly látszik.

A 2)-es és 3)-as esetben vannak olyan pontjai a négyszögnek, amik az S_{CD} sávon kívül vannak, tehát az 7. Definíció szerint vannak olyan pontjai a négyszögnek, ahonnan a CD oldal nem látszik, mint egyensúly.

10. Megjegyzés: Legyen AB és BD egy Q inhomogén konvex négyszög két oldala. Mivel egy konvex négyszögben bármely két oldal által bezárt szög mindig kisebb, mint 180 fok, ezért az S_{AB} és az S_{BD} sávok metszete sosem üres. Az 5. megjegyzésből következik, hogy mindig van olyan belső pontja Q -nak, ahonnan az AB és a BD oldalak közül mindkettőre rálátunk, mint egyensúly. Továbbá mindig létezik olyan pontja Q -nak ahonnan az AB és a BD oldalak közül rálátunk pontosan az egyikre.

0. eset (9. Definíció):

5. Lemma: Legyen Q egy inhomogén, konvex négyszög, melynek 0 darab tompaszöge van.

Ekkor a Q négyszög egyensúlyi osztályozó vektora csak $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú lehet.

Bizonyítás (5. Lemma):

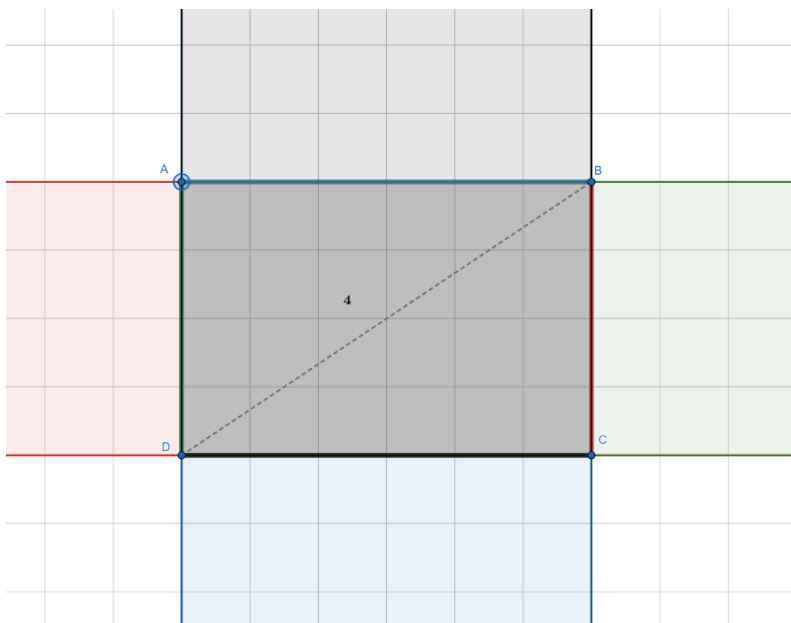
11. Megjegyzés: Amennyiben egy konvex négyszögnek nincsen tompaszöge, akkor 4 darab hegyesszöge van (9. ábra). Az ilyen konvex négyszögeket hívjuk téglalapoknak.

A 9. megjegyzés alapján egy téglalap bármely oldala mint egyensúly látszik a téglalap bármely belső pontjáról.

Az 1. Definíció szerint ilyenkor a Q négyszöghöz tartozó M_Q egyensúlyi osztályozó vektorra

igaz, hogy: $m_Q(1) = 0$; $m_Q(2) = 0$; $m_Q(3) = 0$ és $m_Q(4) = 1$, tehát $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

12. Megjegyzés: Egyensúlyi szempontból a téglalapok a négyszögek egyetlen olyan osztálya, amely nem generikus.



9. ábra: A 4 derékszöggel rendelkező konvex négyszögeket téglalapoknak nevezzük. Egy téglalapnak mindig van egyensúlyi pontja mind a 4 oldalán, bárhol is helyezkedik el a súlypont.

I. eset (9. Definíció):

6. Lemma: Legyen Q egy inhomogén, konvex négyszög, melynek 1 darab tompaszöge van.

Ekkor a Q négyszög egyensúlyi osztályozó vektora csak $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú lehet.

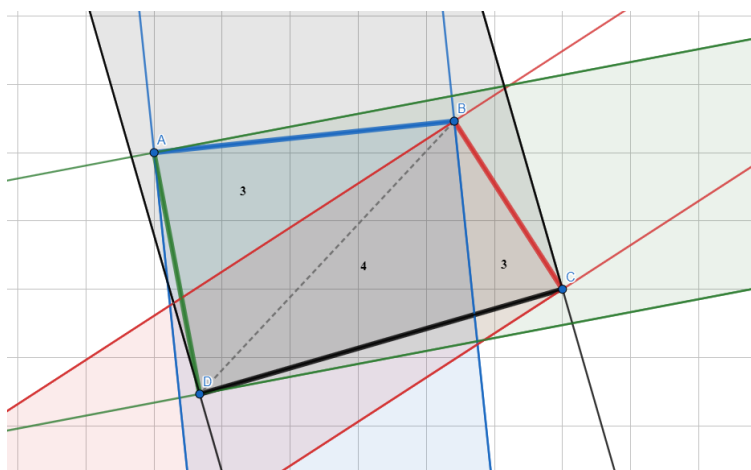
Bizonyítás (6. Lemma):

A bizonyítást a tárgyalás megkönnyítése érdekében, de az általánosság megszorítása nélkül egy olyan Q négyszögön végezzük, melynek egyetlen tompaszöge a B csúcson helyezkedik el.

Mivel ilyenkor az AD és a CD oldalon csak hegyesszögek vannak, ezért a 9. Megjegyzés szerint azokat a négyszög teljes területéről látni, mint egyensúly. Mivel a B csúcson tompaszög van, ezért a 9. Megjegyzés szerint vannak olyan belső pontjai a négyszögnek, ahonnan az AB és a BC oldalak közül mindkettő látszik, és vannak olyanok, ahonnan csak az egyik látszik, mint egyensúly (10. ábra).

Az 1. Definíció szerint ilyenkor a Q négyszöghöz tartozó M_Q egyensúlyi osztályozó vektorra

igaz, hogy: $m_Q(1) = 0$; $m_Q(2) = 0$; $m_Q(3) = 1$ és $m_Q(4) = 1$, tehát $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



10. ábra: A Q négyszögben AD és a CD oldalon csak hegyesszögek vannak, ezért azokat a négyszög teljes területéről, mint egyensúly látni. Mivel a B csúcson tompaszög van, ezért a vannak olyan belső pontjai a négyszögnek, ahonnan az AB és a BC oldalak közül mindkettő látszik, és vannak olyanok, ahonnan csak az egyik látszik, mint egyensúly. A számok azt jelzik, hogy egy adott területről hány oldal látszik, mint egyensúly.

II. eset (9. Definíció):

13. Megjegyzés: A két darab tompaszöggel rendelkező konvex négyszögek között ahhoz, hogy egyensúlyi eseteiket vizsgáljuk további eseteket kell megkülönböztetni. A 7. Lemma bizonyításában mindig az egyes oldalak által bezárt szögeket, és az általánosság megszorítása nélkül a BD átló szomszédos oldalakkal bezárt szögeit fogjuk vizsgálni.

14. Megjegyzés: A szögek jelölésére a következő rendszert vezetjük be: a konvex négyszög egy csúcsnál fekvő belső szögét egyszerűen a csúcs betűjelével jelöljük, pl.: a B csúcsnál fekvő szög jelölése $\angle B$. Egy átló és egy oldal által bezárt szöget az alapján jelölünk, hogy melyik csúcsból indul az átló, és alsó indexbe írjuk, hogy melyik szomszédos csúcs felőli szögről van szó, így pl.: a BD átló és az AB oldal által bezárt szöget $\angle B_A$ -val jelöljük. Ezzel a jelöléssel igaz, hogy:

$$\angle B = \angle B_A + \angle B_C$$

15. Megjegyzés: A II . esetben a Q négyszögben a 2 tompaszög két kombinatorikailag különböző módon helyezkedhet el:

- 1) egymással szemben
- 2) egymás mellett

10. Definíció: A továbbiakban a 15. Megjegyzés 1)-es esetébe tartozó konvex négyszögeket II/sz típusú konvex négyszögeknek nevezzük, míg a 15. Megjegyzés 2)-es esetébe tartozó konvex négyszögeket II/m típusú konvex négyszögeknek nevezzük.

16. Megjegyzés: Legyen Q egy inhomogén, konvex négyszög, mely a 10. Definíció szerinti II/sz esetben tartozik. A továbbiakban a tárgyalás megkönnyítése érdekében, de az általánosság megszorítása nélkül tételezzük fel, hogy a 2 tompaszög a B és a D csúcsokon helyezkedik el. Ilyenkor 3 különböző esetet különböztethetünk meg a $\angle B_A$ és a $\angle D_C$ szögek derékszöghöz képesti viszonylatában:

- 1) $\angle B_A < 90^\circ$ & $\angle B_C < 90^\circ$ & $\angle D_A < 90^\circ$ & $\angle D_C < 90^\circ$
- 2) $\angle B_A > 90^\circ$ & $\angle B_C < 90^\circ$ & $\angle D_A < 90^\circ$ & $\angle D_C > 90^\circ$
- 3) $\angle B_A > 90^\circ$ & $\angle B_C < 90^\circ$ & $\angle D_A < 90^\circ$ & $\angle D_C < 90^\circ$

17. Megjegyzés: A 16. Megjegyzés megfelelő megjegyzéseivel ekvivalens, hogy:

A BD átló

- 1) két hegyesszögű háromszögre
- 2) két tompaszögű háromszögre
- 3) egy tompa- és egy hegyesszögű háromszögre

bontja a Q négyszöget.

11. Definíció: A továbbiakban a 17. Megjegyzés 1)-es esetébe tartozó konvex négyszögeket $II/sz/2h$ típusú, a 17. Megjegyzés 2)-es esetébe tartozó konvex négyszögeket $II/sz/2t$ típusú, míg a 17. Megjegyzés 3)-as esetébe tartozó konvex négyszögeket $II/sz/t-h$ típusú konvex négyszögeknek nevezzük.

18. Megjegyzés: Legyen Q egy inhomogén, konvex négyszög, mely a 10. Definíció szerinti II/m esetbe tartozik. A továbbiakban a tárgyalás megkönnyítése érdekében, de az általánosság megszorítása nélkül tételezzük fel, hogy a 2 tompaszög az A és a B csúcsokon helyezkedik el.

Ilyenkor 2 esetet különböztethetünk meg a $\angle B_C$ szög derékszöghöz képesti viszonylatában:

1. $\angle B_A < 90^\circ$ & $\angle B_C < 90^\circ$ & $\angle D_A < 90^\circ$ & $D_C < 90^\circ$
2. $\angle B_A < 90^\circ$ & $\angle B_C > 90^\circ$ & $\angle D_A < 90^\circ$ & $D_C < 90^\circ$

19. Megjegyzés: A 18. Megjegyzés megfelelő megjegyzéseivel ekvivalens, hogy

A BD átló

- 1) egy tompa- és egy hegyesszögű háromszögre
- 2) két tompaszögű háromszögre

bontja a Q négyszöget.

12. Definíció: A továbbiakban a 19. Megjegyzés 1)-es esetébe tartozó konvex négyszögeket $II/m/t-h$, míg a 19. Megjegyzés 2)-es esetébe tartozó konvex négyszögeket $II/m/2t$ típusú konvex négyszögeknek nevezzük.

Térjünk át II . eset egyensúlyi helyzeteinek vizsgálatára:

7. Lemma: Legyen Q egy inhomogén, konvex négyszög, melynek 2 darab tompaszöge van.

Ekkor a Q négyszöghöz tartozó egyensúlyi osztályozó vektor csak $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vagy $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

alakú lehet.

Bizonyítás (7. Lemma):

A bizonyításhoz fel fogjuk használni az 1. Tétel bizonyításához használt lemmákat.

1. Szublemma: Legyen Q egy inhomogén, a 11. Definíció szerinti $II/sz/2h$ típusú konvex

négyszög. Ekkor a Q négyszöget leíró egyensúlyi osztályozó vektor csak $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú lehet.

Bizonyítás (1. Szublemma):

Mivel az ABD háromszög hegyesszögű, ezért a 3. Lemma alapján az ABD háromszög bármely belső pontjáról, mint egyensúly látszik az AB és az AD oldal is.

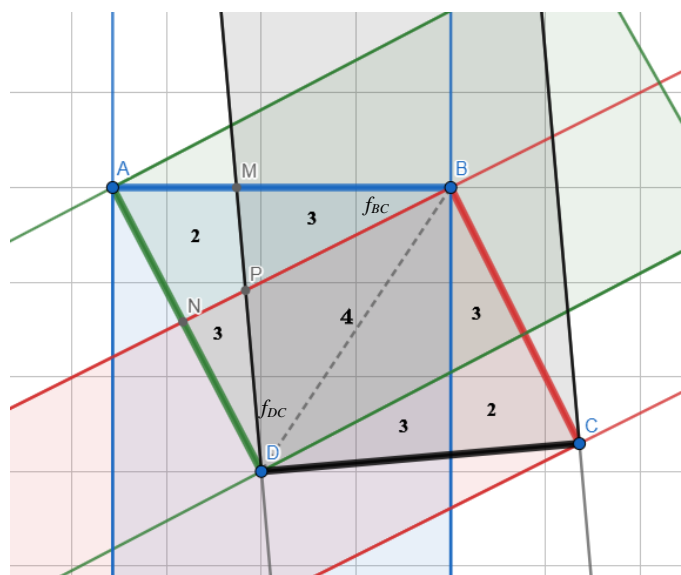
Mivel a $\angle B$ és a $\angle D$ szög is tompaszög, ezért belátható, hogy az f_{BC} félegyenes és az f_{DC} félegyenes egymást az ABD háromszögön belül metszi (11. ábra). Ebből következik, hogy vannak olyan pontjai is az ABD háromszögnek, ahonnan a BC és CD oldalak közül egy sem, pontosan 1, vagy pontosan 2 látszik, mint egyensúly.

Ezekből következik, hogy vannak olyan pontok az ABD háromszögön belül, ahonnan pontosan 2, 3 vagy 4 oldal látszik, mint egyensúly.

A BCD háromszögről analóg módon ugyanezeket az állításokat lehet belátni.

Az 1. Definíció szerint ilyenkor a Q négyszöghöz tartozó V egyensúlyi osztályozó vektorra

igaz, hogy: $m_Q(1) = 0$; $m_Q(2) = 1$; $m_Q(3) = 1$ és $m_Q(4) = 1$, tehát $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



11. ábra: Az ABD háromszög bármely belső pontjáról, mint egyensúly látszik az AB és az AD oldal is. Az f_{BC} félegyenes (piros) és az f_{DC} félegyenes (fekete) egymást az ABD háromszögön belül metszi (P). Ebből következik, hogy vannak olyan pontjai is az ABD háromszögnek, ahonnan a BC és CD oldalak közül egy sem, pontosan 1, vagy pontosan 2 látszik, mint egyensúly. A számok azt jelzik, hogy egy adott területről hány oldal látszik, mint egyensúly.

2. Szublemma: Legyen Q egy inhomogén, a 11. Definíció szerinti $II/sz/2t$ típusú konvex

négyszög. Ekkor a Q négyszöget leíró egyensúlyi osztályozó vektor csak $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alakú lehet.

Bizonyítás (2. Szublemma):

Mivel az ABD tompaszögű háromszögben az AD szakaszon két hegyesszög fekszik, ezért az AD szakasz a 4. Megjegyzés alapján az ABD háromszög teljes területéről, mint egyensúly látszik.

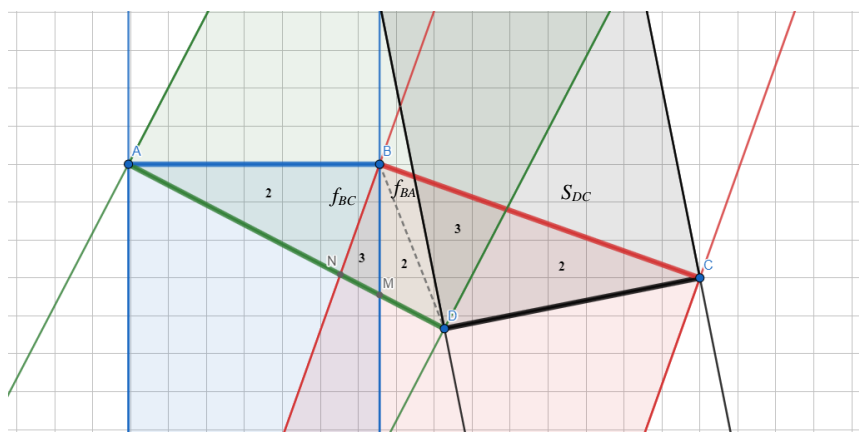
Mivel $\angle B$ tompaszög, ezért az f_{BA} félegyenes az AD szakaszt egy harmadik pontban metszi. Mivel $\angle B$ tompaszög, ezért az f_{BC} félegyenes az AD szakaszt egy harmadik pontban metszi (12. ábra). Ez azt jelenti, hogy van olyan belső pontja az ABD háromszögnek, ahonnan az AB és a BC szakaszok közül mindkettő, és olyan is, ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly.

Mivel $\angle D_C$ tompaszög, ezért az S_{DC} sáv nem metsz bele az ABD háromszögbe, tehát a DC szakasz az ABD háromszög egyik belső pontjáról sem látszik, mint egyensúly.

A BCD háromszögről analóg módon ugyanezeket az állításokat lehet belátni.

Az 1. Definíció szerint ilyenkor a Q négyszöghöz tartozó M_Q egyensúlyi osztályozó vektorra

igaz, hogy: $m_Q(1) = 0$; $m_Q(2) = 1$; $m_Q(3) = 1$ és $m_Q(4) = 0$, tehát $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.



12. ábra: Az ABD tompaszögű háromszögben az AD szakaszon két hegyesszög fekszik, ezért az AD szakasz az ABD háromszög teljes területéről, mint egyensúly látszik. Az f_{BA} félegyenes (kék) és az f_{BC} (piros) félegyenes az AD szakaszt egy-egy harmadik pontban metszik (M és N). Az S_{DC} sáv (fekete) nem metsz bele az ABD háromszögbe, tehát a DC szakasz az ABD háromszög egyik belső pontjáról sem látszik, mint egyensúly. A BCD háromszögről analóg módon ugyanezeket az állításokat lehet belátni. A számok azt jelzik, hogy egy adott területről hány oldal látszik, mint egyensúly.

3. Szublemma: Legyen Q egy inhomogén, a 11. Definíció szerinti $II/sz/t-h$ típusú konvex

négyszög. Ekkor a Q négyszöget leíró egyensúlyi osztályozó vektor csak $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú lehet.

Bizonyítás (3. Szublemma):

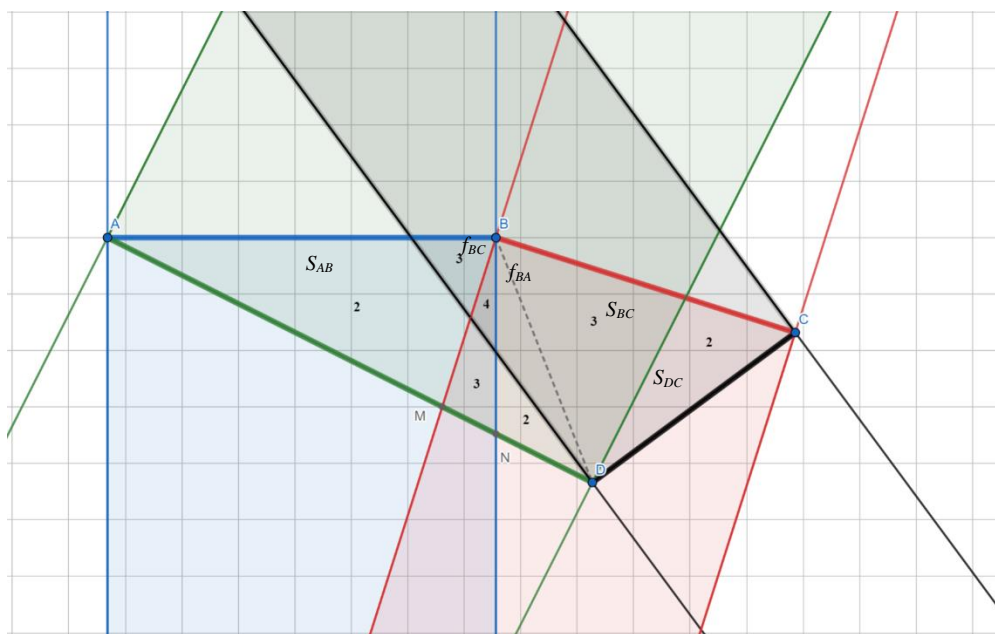
Mivel az ABD tompaszögű háromszögben az AD szakaszon két hegyesszög fekszik, ezért az AD szakasz a 4. Megjegyzés alapján az ABD háromszög teljes területéről, mint egyensúly látszik.

Mivel $\angle B$ tompaszög, ezért az f_{BA} félegyenes az AD szakaszt egy harmadik pontban metszi. Mivel $\angle B$ tompaszög, ezért az f_{BC} félegyenes az AD szakaszt egy harmadik pontban metszi (13. ábra). Ez azt jelenti, hogy van olyan belső pontja az ABD háromszögnek, ahonnan az AB és a BC szakaszok közül mindkettő, és olyan is, ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly.

Mivel $\angle D_C$ hegyesszög, ezért az f_{DC} félegyenes az ABD háromszög belsejében halad, tehát az S_{DC} sáv belemetsz az S_{AB} és az S_{BC} sávok közül mindkettőbe, és azok metszetébe is (13. ábra). Ebből az következik, hogy van olyan belső pontja az ABD háromszögnek ahonnan az AB , BC és DC oldalak közül mindhárom, olyan is ahonnan pontosan 2, és olyan is ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly.

Az 1. Definíció szerint ilyenkor a Q négyszöghöz tartozó M_Q egyensúlyi osztályozó

vektorra igaz, hogy: $m_Q(1) = 0$; $m_Q(2) = 1$; $m_Q(3) = 1$ és $m_Q(4) = 1$, tehát $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



13. ábra: Az ABD tompaszögű háromszögben az AD szakaszon két hegyesszög fekszik, ezért az AD szakasz az ABD háromszög teljes területéről, mint egyensúly látszik. Az f_{BA} félegyenes (kék) és az f_{BC} félegyenes (piros) az AD szakaszt egy harmadik pontban metszi (N és M). Az S_{DC} sáv (fekete) belemetsz az S_{AB} (kék) és az S_{BC} (piros) sávok közül mindkettőbe, és azok metszetébe is. Ebből az következik, hogy van olyan belső pontja az ABD háromszögnek ahonnan az AB , BC és DC oldalak közül mindhárom, olyan is ahonnan pontosan 2, és olyan is ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly. A számok azt jelzik, hogy egy adott területről hány oldal látszik, mint egyensúly.

4. Szublemma: Legyen Q egy inhomogén, a 12. Definíció szerinti $II/m/t-h$ típusú konvex

négyszög. Ekkor a Q négyszöget leíró egyensúlyi osztályozó vektor csak $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú lehet.

Bizonyítás (4. Szublemma):

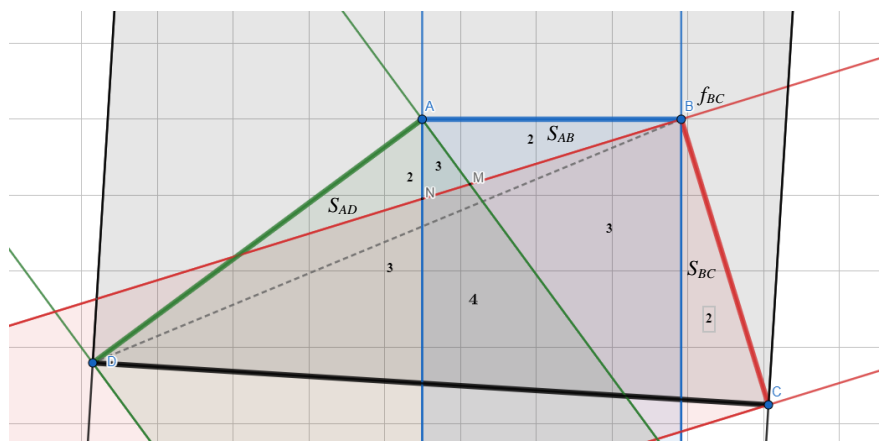
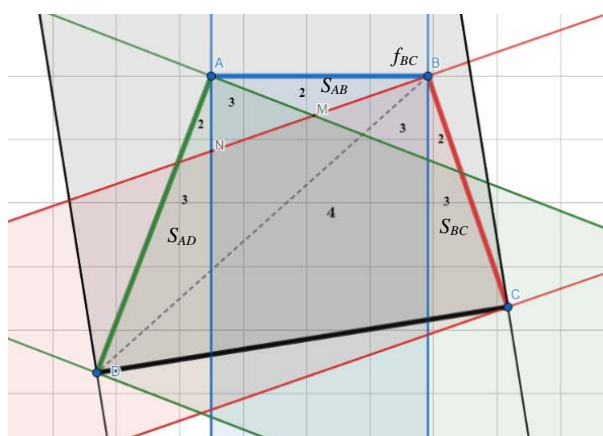
A 9. Megjegyzés alapján a CD oldal a négyszög teljes területéről, mint egyensúly látszik, tehát az ABD háromszög teljes területéről is.

Mivel $\angle A$ tompaszög, ezért a 6. megjegyzés szerint az ABD háromszögnek vannak olyan pontjai, ahonnan az AB és az AD oldalak közül mindkettő, és olyan pontjai is, ahonnan pontosan csak az egyik látszik, mint egyensúly.

Mivel $\angle B$ tompaszög, ezért az f_{BC} félegyenes az ABD háromszög belsejében halad, tehát az S_{BC} sáv belemetsz az S_{AB} és az S_{AD} sávok közül mindkettőbe, és azok metszetébe is (14. ábra). Ebből az következik, hogy van olyan belső pontja az ABD háromszögnek ahonnan az AB , AD és BC oldalak közül mindhárom, olyan is ahonnan pontosan 2, és olyan is ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly.

Az 1. Definíció szerint ilyenkor a Q négyszöghöz tartozó V egyensúlyi osztályozó vektorra

igaz, hogy: $m_Q(1) = 0$; $m_Q(2) = 1$; $m_Q(3) = 1$ és $m_Q(4) = 1$, tehát $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



14. ábra: A CD oldal a négyszög teljes területéről, mint egyensúly látszik. az ABD háromszögnek vannak olyan pontjai, ahonnan az AB és az AD oldalak közül mindkettő, és olyan pontjai is, ahonnan pontosan csak az egyik látszik. Az f_{BC} félegyenes (piros) az ABD háromszög belsejében halad, tehát az S_{BC} sáv (piros) belemetsz az S_{AB} (kék) és az S_{AD} (zöld) sávok közül mindkettőbe, és azok metszetébe is. Tehát van olyan belső pontja az ABD háromszögnek ahonnan az AB , AD és BC oldalak közül mindhárom, olyan is ahonnan pontosan 2, és olyan is ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly. A számok azt jelzik, hogy egy adott területről hány oldal látszik, mint egyensúly.

5. Szublemma: Legyen Q egy inhomogén, a 12. Definíció szerinti $II/m/2t$ típusú konvex

négyszög. Ekkor a Q négyszöget leíró egyensúlyi osztályozó vektor csak $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vagy $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

alakú lehet.

Bizonyítás (5. Szublemma):

Mivel a $\angle C$ és $\angle D$ tompaszög, ezért a 9. Megjegyzés alapján a CD oldal a négyszög teljes területéről látszik.

Mivel $\angle A$ tompaszög, ezért az f_{AB} félegyenes a négyszögön belül halad, és az S_{AD} sáv belemetsz az S_{AB} sávba (15. ábra). Ebből következik, hogy vannak olyan pontjai a négyszögnek, ahonnan az AD és az AB oldalak közül mindkettő, és olyanok is ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly.

Mivel $\angle B$ csúcs tompaszög, ezért az f_{BC} félegyenes a négyszögön belül halad, és az S_{BC} sáv belemetsz az S_{AB} sávba (15. ábra). Ebből következik, hogy vannak olyan pontjai a négyszögnek,

ahonnan a BC és az AB oldalak közül mindkettő, és olyanok is ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly.

Viszont azt, hogy az S_{AD} és az S_{BC} sávok a négyszögön belül vagy kívül metszik egymást a kezdeti feltételeink nem határozzák meg.

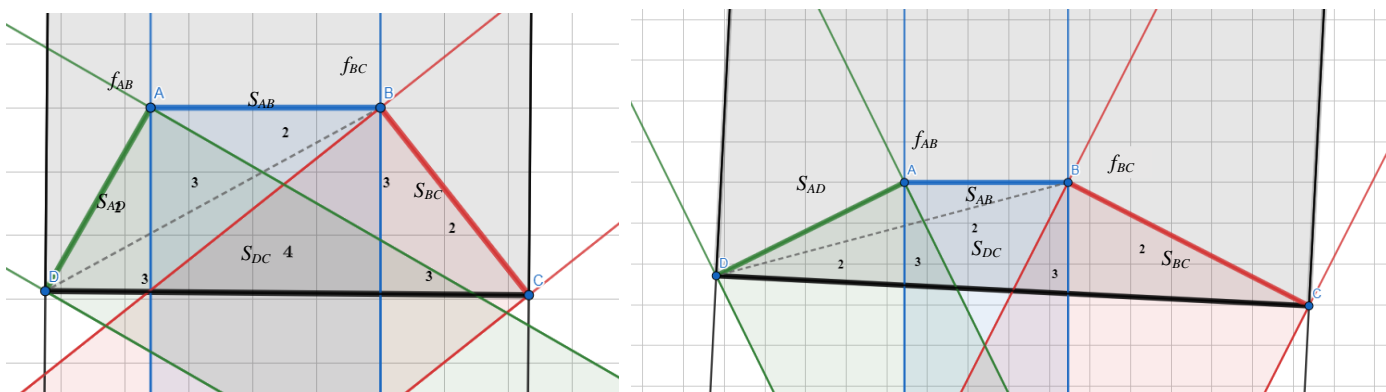
Ha az S_{AD} és az S_{BC} sávok belül metszik egymást, akkor van olyan belső pontja a négyszögnek, ahonnan mind a négy oldal, mint egyensúly látszik, ha kívül, akkor nincs ilyen belső pont.

Az 1. Definíció szerint ilyenkor a Q négyszöghöz tartozó V egyensúlyi osztályozó vektorra

igaz, hogy: $m_Q(1) = 0$; $m_Q(2) = 1$; $m_Q(3) = 1$ és $m_Q(4) = 1$, tehát $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vagy $m_Q(1) = 0$;

$m_Q(2) = 1$; $m_Q(3) = 1$ és $m_Q(4) = 0$, tehát $M_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ezzel a 2. Lemmát bizonyítottuk.



15. ábra: A CD oldal a négyszög teljes területéről látszik. Az f_{AB} félegyenes (kék) a négyszögön belül halad, és az S_{AD} sáv (zöld) belemetsz az S_{AB} sávba (kék). Vannak olyan pontjai négyszögnek, ahonnan az AD és az AB oldalak közül mindkettő, és olyanok is ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly. Az f_{BC} félegyenes (piros) a négyszögön belül halad, és az S_{BC} sáv belemetsz az S_{AB} sávba. Így vannak olyan pontjai a négyszögnek, ahonnan a BC és az AB oldalak közül mindkettő, és olyanok is ahonnan pontosan 1 látszik, mint egyensúly. Azt, hogy az S_{AD} (zöld) és az S_{BC} (piros) sávok a négyszögön belül vagy kívül metszik egymást a kezdeti feltételeink nem határozzák meg. Ha belül, akkor van olyan belső pontja a négyszögnek, ahonnan mind a négy oldal, mint egyensúly látszik, ha kívül, akkor nincs ilyen belső pont. A számok azt jelzik, hogy egy adott területről hány oldal látszik, mint egyensúly.

III. eset (9. Definíció):

8. Lemma: Legyen Q egy inhomogén, konvex négyszög, melynek 3 darab tompaszöge van.

Ekkor a Q négyszög egyensúlyi osztályozó vektora csak $M_Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alakú lehet.

Bizonyítás (8. Lemma):

A bizonyításban a tárgyalás megkönnyítése érdekében, de az általánosság megszorítása nélkül feltételezzük, hogy a 3 tompaszög az A , B és D csúcsoknál helyezkedik el.

Mivel az $\angle A$ tompaszög, ezért a 6. Megjegyzés szerint vannak olyan pontok az ABD háromszögben, ahonnan az AB és az AD oldalak közül mindkettő, és olyan pontok is ahonnan pontosan csak 1 oldal látszik, mint egyensúly.

Mivel $\angle B$ és a $\angle D$ is tompaszög, ezért az S_{AB} és az S_{AD} sávok közül egyik sem, és az uniójuk sem fedheti le teljes egészében az ABD háromszöget, de a két sáv közül valamelyik biztosan az ABD háromszögön belül halad (16. ábra). Tehát vannak olyan belső pontjai az ABD háromszögnek ahonnan a négyszög oldalai közül pontosan 1, olyan pontok is, ahonnan pontosan 2, és olyan pontok is, ahonnan pontosan 3 oldal látszik, mint egyensúly.

20. Megjegyzés: Mivel a $\angle D_C$ és a $\angle B_C$ szögek az ABC háromszög szögei, és a $\angle C$ szög biztosan hegyesszög, ezért a $\angle D_C$ és a $\angle B_C$ szögek közül valamelyik biztosan hegyesszög. A továbbiakban tételezzük fel, az általánosság megszorítása nélkül, hogy a $\angle D_C$ szög hegyesszög.

A 20. Megjegyzés szerint a DC szakaszon csak hegyesszög van, ezért a 4. Megjegyzés miatt a DC oldal a BCD háromszög minden pontjáról, mint egyensúly látszik.

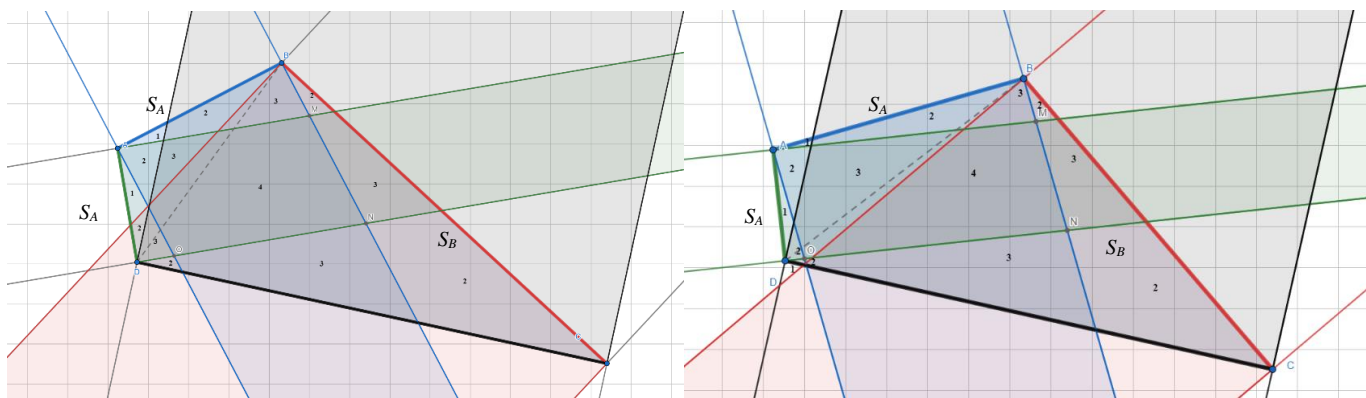
Mivel Q egy konvex négyszög, ezért az S_{AB} és az S_{AD} sávok metszetének egy részhalmaza mindig a BCD háromszögön belül van, és az S_{BC} sáv ebbe a részhalmazba biztosan belemetsz (16. ábra), ezért a BCD háromszögnek biztosan van olyan pontja, ahonnan a négyszög minden oldala, mint egyensúly látszik.

21. Megjegyzés: Az ABD háromszögnek akkor van olyan belső pontja, ahonnan a négyszögnek minden oldala, mint egyensúly látszik, amennyiben az f_{BC} félegyenes az ABC háromszögön belül halad, tehát az S_{BC} szakasz belemetsz az ABC háromszögbe. Ennek a feltétele, hogy a $\angle B_D$ tompaszög.

Az 1. Definíció szerint ilyenkor a Q négyszöghöz tartozó M_Q egyensúlyi osztályozó

$$\text{vektorra igaz, hogy: } m_Q(1) = 1; m_Q(2) = 1; m_Q(3) = 1 \text{ és } m_Q(4) = 1, \text{ tehát } M_Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Q.e.d.}$$

Ezzel a 3. Tétel bizonyítását befejeztük.



16. ábra: Vannak olyan pontok az ABD háromszögben, ahonnan az AB és az AD oldalak közül mindkettő, és olyan pontok is ahonnan pontosan csak 1 oldal látszik, mint egyensúly. Az S_{AB} (kék) és az S_{AD} (zöld) sávok közül egyik sem, és az uniójuk sem fedheti le teljes egészében az ABD háromszöget, de a két sáv közül valamelyik biztosan az ABD háromszögön belül halad. Tehát vannak olyan belső pontjai az ABD háromszögnek ahonnan a négyszög oldalai közül pontosan 1, olyan pontok is, ahonnan pontosan 2, és olyan pontok is, ahonnan pontosan 3 oldal látszik, mint egyensúly. Az S_{AB} (kék) és az S_{AD} (zöld) sávok metszetének egy részhalmaza mindig a BCD háromszögön belül van, és az S_{BC} sáv ebbe a részhalmazba biztosan belemetsz, ezért a BCD háromszögnek biztosan van olyan pontja, ahonnan a négyszög minden oldala, mint egyensúly látszik. A számok azt jelzik, hogy egy adott területről hány oldal látszik, mint egyensúly.

2.4. Evolúta és szomszédsági elvek kétdimenzióban

13. Definíció: Az evolúta valamely sima görbe összes pontjához tartozó görbületi középpontok mértani helye.

22. Megjegyzés: A 7. Definíció szerinti XY szakaszhoz tartozó S_{XY} sáv tulajdonképpen az XY szakaszhoz tartozó elfajult evolúta. Egy poligon oldalaihoz tartozó evolúták a teret poligonális cellákra osztják.

Képzeljük el, hogy egy inhomogén poligon súlypontját tetszőlegesen *tologathatjuk* a poligonon belül! Tudott, [3] hogy amikor egy poligon oldalaihoz tartozó evolúták által cellákra osztott tér egyik cellájából egy élszomszédos cellába *átoljuk* a súlypontot, akkor két eset lehetséges: vagy a stabil és az instabil egyensúlyok száma is eggyel növekszik, vagy mindkét mennyiség eggyel csökken. Ezt a szabályt ebben a dolgozatban *szomszédsági elvnek* nevezzük.

23. Megjegyzés: Ez alól csak szimmetrikus, vagy nem generikus esetekben lehet kivétel.

A szomszédsági elv alapján általános konvex négyszögek esetében előre kizárhattunk volna bizonyos egyensúlyi osztályozó vektorokat:

$$M_Q \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ezzel azonban nem tudtuk kizárni a $V_Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és a $V_Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ egyensúlyi osztályozó

vektorokat, melyeket a bizonyításunkban viszont kizártunk. A $V_Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ egyensúlyi vektort

kizárólag téglalapoknál, 3-szorosan szimmetrikus esetben találtuk meg, ami alátámasztja a 23. Megjegyzés állítását.

3. TÉRBELI, KONVEX POLIÉDEREK EGYENSÚLYI OSZTÁLYOZÓ MÁTRIXAI

Ebben a fejezetben definiáljuk konvex poliéderek egyensúlyait és részletesen bemutatjuk azt az algoritmust, mellyel a tetraédereknek a 2. definícióban meghatározott konfigurációs terét letapogattuk és az így kapott 768109 darab tetraéder osztályozó mátrixait meghatároztuk.

3.1. Konvex poliéderek egyensúlyai

14. Definíció: [4] Legyen K egy konvex test, és X a test egy belső pontja. Azt mondjuk, hogy a test egy Y határpontja K egy egyensúlyi pontja X -re nézve, ha az Y -on átmenő, XY szakaszra merőleges sík nem metszi a K test belsejét.

15. Definíció: [4] Legyen P egy konvex poliéder, X a P tömegközéppontja és Y a P egyensúlyi pontja X -re nézve.

- Ha Y a P egy lapjának belső pontja, akkor azt mondjuk, hogy Y egy stabil egyensúlyi pont.
- Ha Y a P egy élének belső pontja, és az XY szakaszra merőleges, Y -on átmenő sík P -t csak ebben az élben metszi, azt mondjuk, hogy Y egy nyereg típusú egyensúlyi pont.
- Ha Y a P egy csúcsa, és az XY szakaszra merőleges, Y -on átmenő sík P -t csak ebben a csúcsban metszi, azt mondjuk, hogy Y egy instabil egyensúlyi pont.
- Ha Y -ra a fenti három feltétel egyike sem teljesül, azt mondjuk, hogy Y egy degenerált egyensúly.

Inhomogén testsűrűséget feltételezve K tetszőleges belső pontja lehet K tömegközéppontja.

16. Definíció: Politópnak nevezzük a d -dimenziós Euklideszi térben $(d - k)$ dimenziós lineáris sokaságok $(k = 0, 1, \dots, (d - 1))$ által határolt alakzatokat.

17. Definíció: Poliédernek nevezzük a $d = 3$ dimenziós politópokat. A poliédereket jellemezhetjük csúcsaik, lapjaik és éleik számával, melyeket rendre v , f és e betűkkel jelölünk.

3.2. Tetraéderek konfigurációs tere

A 2. definíció meghatározza a tetraéder egy lehetséges konfigurációs terét. Nyilvánvaló azonban, hogy több alternatív tér is lehetséges. Az alábbiakban részletesen indokoljuk hogy miért a 2. Definícióban jelzett változatra esett a választás.

18. Definíció: Poliéderek esetében *szabadsági foknak* nevezzük azon egymástól független skalár paraméterek számát, melyek egy poliéder alakját a hasonlóság erejéig egyértelműen meghatározzák. A szabadsági fokok számát n -nel jelöljük.

24. Megjegyzés: [5] Az Euler-tétel alapján levezethető, hogy bármely 3-dimenziós poliéder esetén a szabadsági fokok száma:

$$(3) \quad n = e - 1$$

A tetraéderek olyan poliéderek (17. Definíció), melyekre igaz, hogy $v \neq 4$ csúcsuk és lapjuk, illetve $e = 6$ élük van. A 24. Megjegyzésből következik, hogy tetraéderek szabadsági fokainak száma a (2)-es egyenlet alapján $n = 6 - 1 = 5$. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a tetraéderek 2. Definícióban szereplő konfigurációs tere $n = 5$ dimenziós.

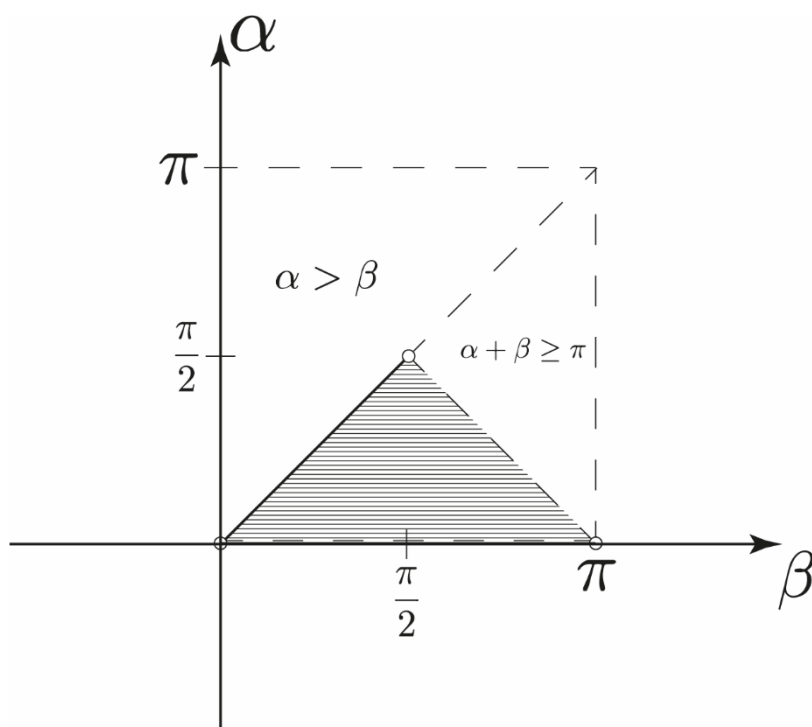
Ahhoz, hogy MATLAB program segítségével tetraéderek egyensúlyai osztályait vizsgálni tudjuk, előbb a kompakt konfigurációs terükre illeszteniük kell egy ortogonális hálót, melynek a csúcsaiban helyezkednek el a vizsgálandó testek.

Azonban nem egyértelmű, hogy melyik 5 paraméter az, amivel egyértelműen meg tudunk határozni egy tetraédert, és hogy ezek milyen típusú adatok. A feladatunk szempontjából kulcsfontosságú, hogy a tetraédereink 5-dimenziós konfigurációs tere *kompakt* tartomány legyen. Jelen esetben ezt úgy tudjuk kivitelezni, hogy az 5 darab változónk mindegyike véges tartományok között mozog.

25. Megjegyzés: Egy háromszög 2 szögéről tudjuk, hogy:

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ ; 0 < \beta < 180^\circ ; \alpha + \beta < 180^\circ .$$

Az ABC háromszög esetében a szimmetrikus duplikációk kiszűrése érdekében elegendő az $\alpha_c - \beta_c$ párok szimmetrikus esetei közül az egyiket vizsgálni. Ezt megoldja, ha α_c tartományát a következőképpen módosítjuk: $0^\circ < \alpha_c < 90^\circ$ (17. ábra).



17. ábra: Az ABC háromszög konfigurációs tere a szimmetria miatt duplikált tetraéderek kiszűréséhez

Az ABD háromszög esetében meghagyhatjuk a szimmetrikus háromszögeket, mert azonos α_C, β_C és δ esetén a szimmetrikus $\alpha_D - \beta_D$ párok különböző tetraédereket eredményeznek.

Mivel előzetesen arra számítottunk, hogy az egyensúlyi szempontból érdekes tetraéderek a konfigurációs térünk szélein helyezkednek el, ezért a hálót a kompakt konfigurációs térre nem egyenletesen helyezzük rá.

A MATLAB program segítségével a $0^\circ < \varepsilon < 180^\circ$ tartományt 23 részre osztottuk fel a *nonLinspace* parancs használatával úgy, hogy a tartomány szélein a választott szögek közötti távolság kisebb, mint a tartomány közepén.

Így $\beta_C, \alpha_C, \beta_D$ és δ szögeket 23 különböző értékkel, míg az α_C szöveget 11 különböző értékkel határoztuk meg.

Azt nem tudjuk garantálni, hogy nem keletkeznek egybevágó tetraéderek, azt viszont igen, hogy a tetraéderek 5-dimenziós kompakt konfigurációs terének teljes tartományára hálót terítettünk.

3.3. Tetraéderek csúcspontjainak koordinátái

A MATLAB programban a tetraéder csúcsait a 3-dimenziós Descartes-féle koordinátarendszerbeli $(x; y; z)$ koordinátákkal kell megadnunk.

19. Definíció: A nagyítások és forgatások kiküszöbölésére rögzítjük az AB élt úgy, hogy az A pontot a $(0; 0; 0)$ koordinátájú pontba, a B pontot az $(1; 0; 0)$ koordinátájú pontba helyezzük.

26. Megjegyzés: A 19. Definíció alapján tehát minden tetraéderünkre igaz lesz, hogy $A = (0; 0; 0)$ és $B = (1; 0; 0)$

20. Definíció: A C pontot rögzítjük az XY síkban.

27. Megjegyzés: A 20. Definíció alapján tehát minden tetraéderünkre igaz lesz, hogy $C = (C_x; C_y; 0)$.

A C_x koordinátákat minden esetben így számolhatjuk:

$$\tan \alpha_C = \frac{C_y}{C_x}$$

$$(4) \quad C_x = \frac{C_y}{\tan \alpha_C}$$

A C_y koordinátákat, amennyiben $0 < \beta_C < \frac{\pi}{2}$ így számoljuk (18. ábra):

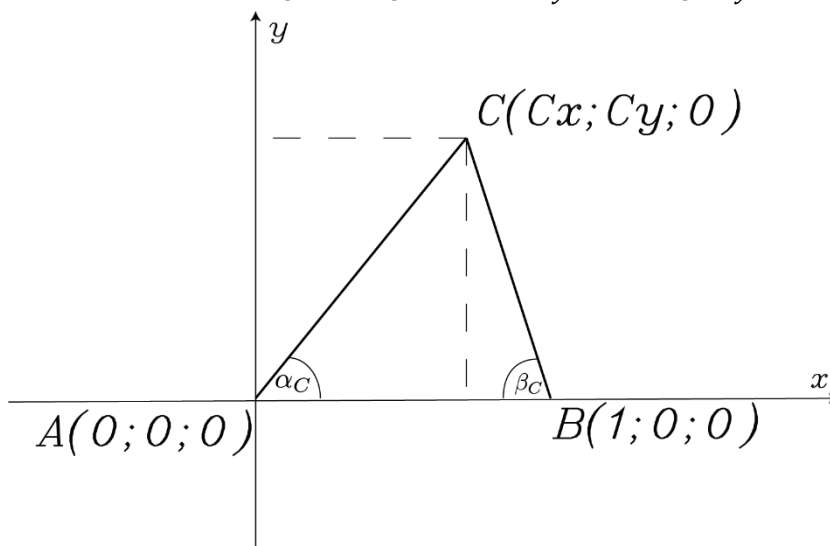
$$(5) \quad \tan \beta_C = \frac{C_y}{1 - C_x}$$

Az (3)-as egyenletet a (4)-esbe helyettesítve:

$$\tan \beta_C = \frac{C_y}{1 - \frac{C_y}{\tan \alpha_C}}$$

$$\tan \beta_C - \frac{\tan \beta_C}{\tan \alpha_C} \cdot C_y = \tan \alpha_C \cdot C_y$$

$$\tan \beta_C \cdot \tan \alpha_C - \tan \beta_C \cdot C_y = \tan \alpha_C \cdot C_y$$



18. ábra: $\tan \beta_C = \frac{C_y}{1 - C_x}$, ha $0 < \beta_C < \frac{\pi}{2}$

A C_y koordinátákat, amennyiben $\frac{\pi}{2} \leq \beta_C < \pi$, így számolhatjuk (19. ábra):

$$(6) \quad \tan\left(\beta_C - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{C_x - 1}{C_y}$$

A (3)-as egyenletet az (5)-ösbe behelyettesítve:

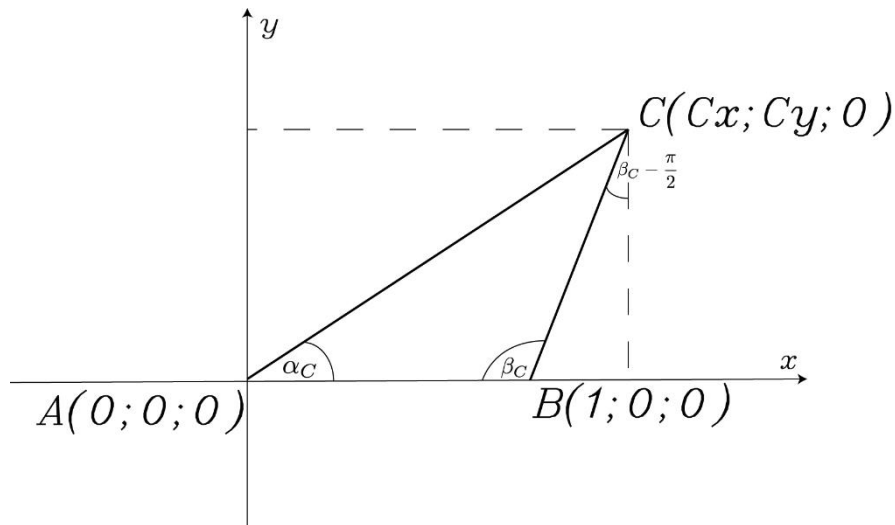
$$\tan\left(\beta_C - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{C_y}{\tan \alpha_C} - 1}{C_y}$$

$$\tan\left(\beta_C - \frac{\pi}{2}\right) \cdot C_y = \frac{C_y}{\tan \alpha_C} - 1$$

$$\tan \alpha_c \cdot \tan \left(\beta_c - \frac{\pi}{2} \right) \cdot C_y = C_y - \tan \alpha_c$$

$$\tan \alpha_c = C_y \cdot \left(1 - \tan \left(\beta_c - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \tan \alpha_c \right)$$

$$C_y = \frac{\tan \alpha_c}{1 - \tan \left(\beta_c - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \tan \alpha_c}$$



19. ábra: $\tan(\beta_c - \frac{\pi}{2}) = \frac{c_x - 1}{c_y}$, ha $\frac{\pi}{2} \leq \beta_c < \pi$

A D pont koordinátáit úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk egy XY síkbeli ABE háromszög E koordinátáit, a fent szereplő képletek segítségével, azonban α_D és β_D tartományokon, majd a kapott $E(E_x, E_y, 0)$ pontot X tengely körül δ -val elforgatjuk:

Az E pont oszlopvektor alakban: $E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix}$.

Az X tengely körüli forgatás transzformációjának mátrixa: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix}$.

Így egy mátrixszorzással kiszámolhatóak a D pont koordinátái:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \cdot \cos \delta \\ E_y \cdot \sin \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}.$$

3.4. Tetraéderek súlypontjainak meghatározása

Inhomogén testsűrűséget feltételezve egy tetraéder súlypontja a tetraéderen belül bárhol lehet. Ahhoz, hogy egy tetraéder egyensúlyi osztályozó vektorát elő tudjuk állítani meg kell vizsgálni elegendően sok pontját, azt a tetraéder súlypontjának tekintve. Ehhez a MATLAB program segítségével létre kell hoznunk az egyes tetraéderekhez a tetraéderek belsejében és felszínén található pontokat.

3.4.1. Tetraéder felszíni pontjai

Egy tetraéder felszíni pontjainak meghatározásának első lépése, hogy egy oldal – legyen ez most az ABC oldal – élein pontokat veszünk fel. Ehhez kiszámoljuk az \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} és \overrightarrow{CA} vektorokat, majd ezeket egy p_1 kezdeti skalár paraméterrel elosztva:

$$\overrightarrow{v_{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{p_1}$$

$$\overrightarrow{v_{BC}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{p_1}$$

$$\overrightarrow{v_{CA}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{p_1}$$

vektorokat kapjuk.

A p_1 értékét a vizsgálatban 11-nek vettük.

Az élek egyenletes felosztását úgy végezzük, hogy minden csúcs koordinátáihoz hozzáadjuk a megfelelő vektort 1,2 ... $(p_1 - 1)$ -szer. Tehát például az AB szakaszon létrejövő pontok koordinátái:

$$AB_1 = A + \overrightarrow{v_{AB}} ; AB_2 = A + 2 \cdot \overrightarrow{v_{AB}} \dots AB_{p_1-1} = A + (p_1 - 1) \cdot \overrightarrow{v_{AB}}$$

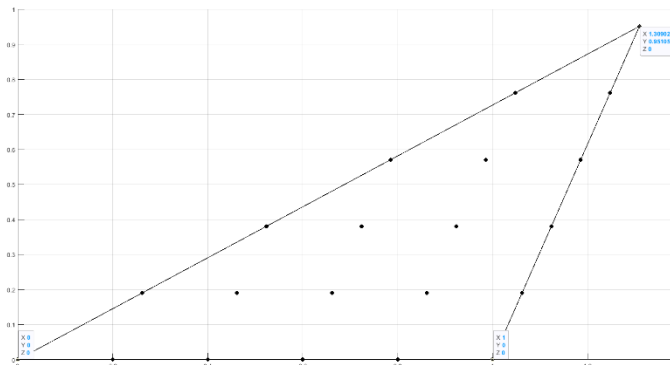
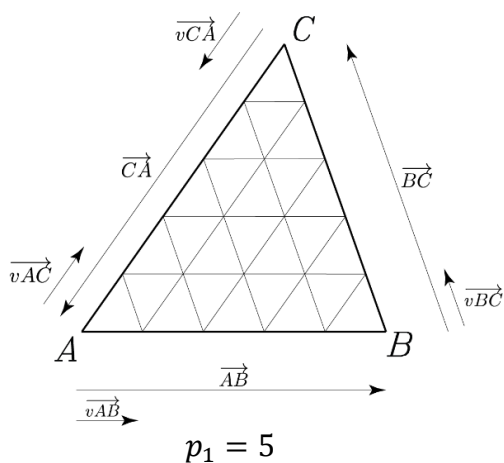
Ezt a módszert ABC oldal minden élén megcsináljuk.

A tetraéder egy lapjának egyenletes felosztásához kitüntetünk egy élt – legyen ez most az AB él – melynek az előbbieken kiszámolt belső pontjaihoz hozzáadjuk a

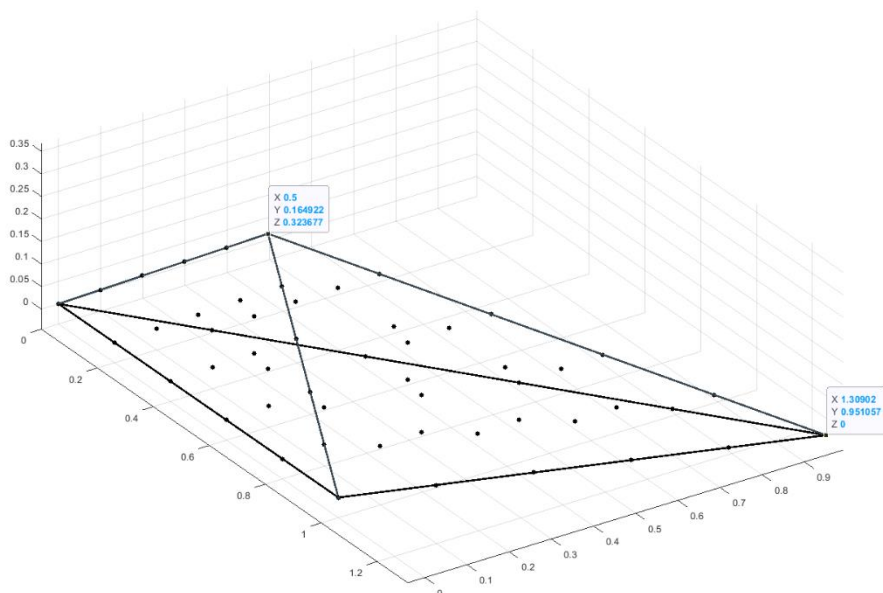
$$\vec{v}_{AC} = \frac{\vec{AC}}{p_1}$$

vektort, mindannyiszor, amíg el nem érünk a BC élig. Ezzel tulajdonképpen hasonló háromszögek hálóját helyezük a tetraéder lapjára (20. ábra).

Ezt az eljárást a tetraéder minden oldalán elvégezzük (21. ábra), és a koordinátákat eltároljuk.



20. ábra: Egy oldalon fekvő felszíni pontok $p_1 = 5$ esetén.

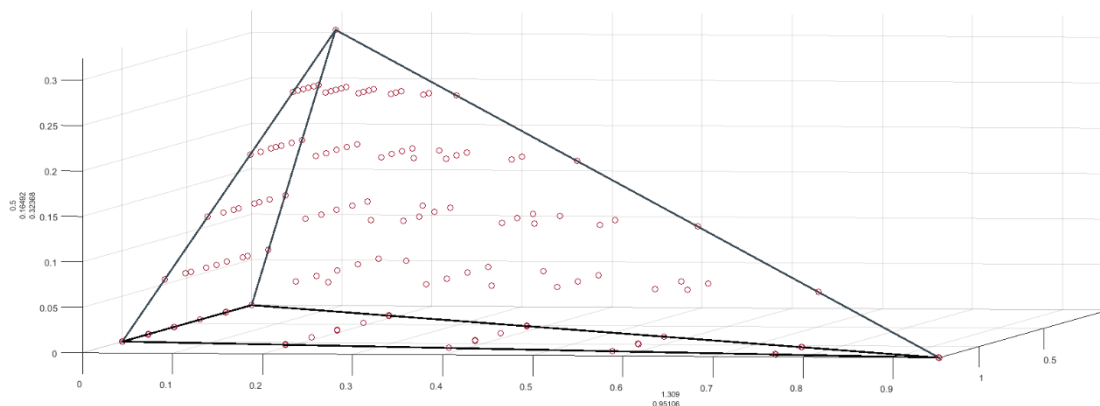


21. ábra: Egy tetraéder felületi pontjai $p_1 = 5$ esetén.

3.4.2. Tetraéder belső pontjai

Egy tetraéder belső pontjainak meghatározásához először kiválasztunk egy oldalt – legyen ez most az ABC oldal – melynek vesszük az előbbi módon kiszámolt felszíni pontjait. Ezeket a felszíni pontokat összekötjük a szemközti csúccsal – jelen esetben a D csúccsal – és felosztjuk ezt a szakaszt p_2 egyenlő részre (22. ábra). Ezt ugyanúgy végezzük, ahogy az élek felosztását végeztük.

A p_2 értéket a vizsgálatban 11-nek vettük.



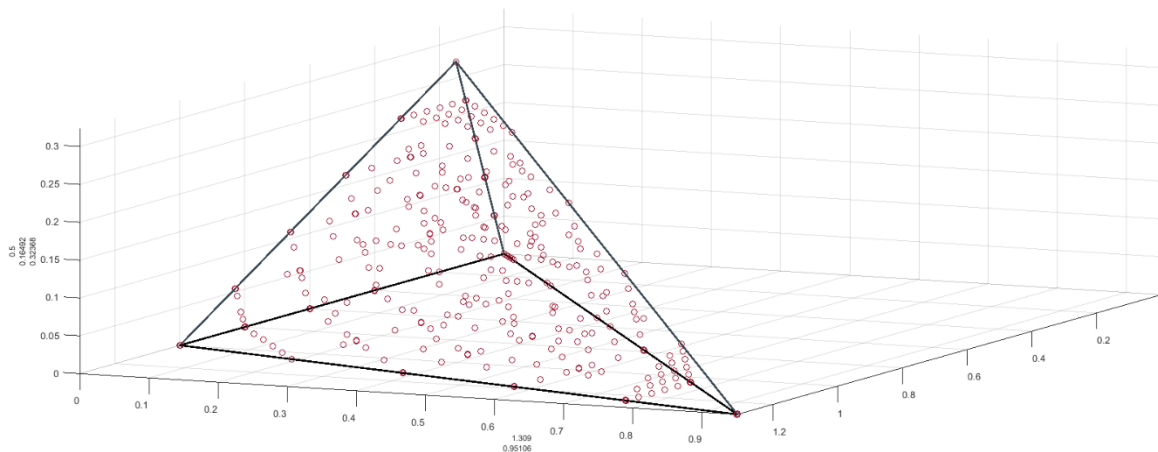
22. ábra: Az ABC oldal pontjainak segítségével készített belső pontok $p_1 = p_2 = 5$ esetén.

Az egyensúlyi vizsgálat során azonban fontos megvizsgálunk olyan belső pontokat, melyek a felszínhez relatíve közel helyezkednek el. Ezeket a pontokat úgy hozzuk létre - a p_2 paramétertől függetlenül - hogy felvesszük az összes felszíni pont és a szemközti csúcs közötti szakasz első ezredelő pontját.

Egy tetszőleges ABC oldalon fekvő felszíni pontra ez a művelet így néz ki:

$$P_{\text{felszínhez közeli}} = P_{\text{felszíni}} + \frac{\overrightarrow{P_{\text{felszíni}}D}}{1000}$$

Ezt az eljárást a tetraéder minden oldalán elvégezzük, és a koordinátákat eltároljuk (23. ábra).



23. ábra: Egy tetraéder összes vizsgált pontja $p_1 = p_2 = 5$ esetén.

3.5. Tetraéder egyensúlyainak vizsgálata

Ahhoz, hogy egy inhomogén tetraéder egyensúlyi osztályozó vektorát elő tudjuk állítani meg kell vizsgálni elegendően sok pontját, úgy, hogy azt a tetraéder súlypontjának tekintjük.

28. Megjegyzés: Legyen P egy konvex poliéder. Jelölje ennek tömegközéppontját S . Egyensúlyi pontoknak nevezzük azokat a pontokat, amelyeken a poliédert egy vízszintes síkkal megtámasztva a poliéder egyensúlyban van. Konvex, generikus poliéderek esetében három különböző egyensúlyt különböztetünk meg: stabil, instabil és nyereg típusú egyensúlyt.

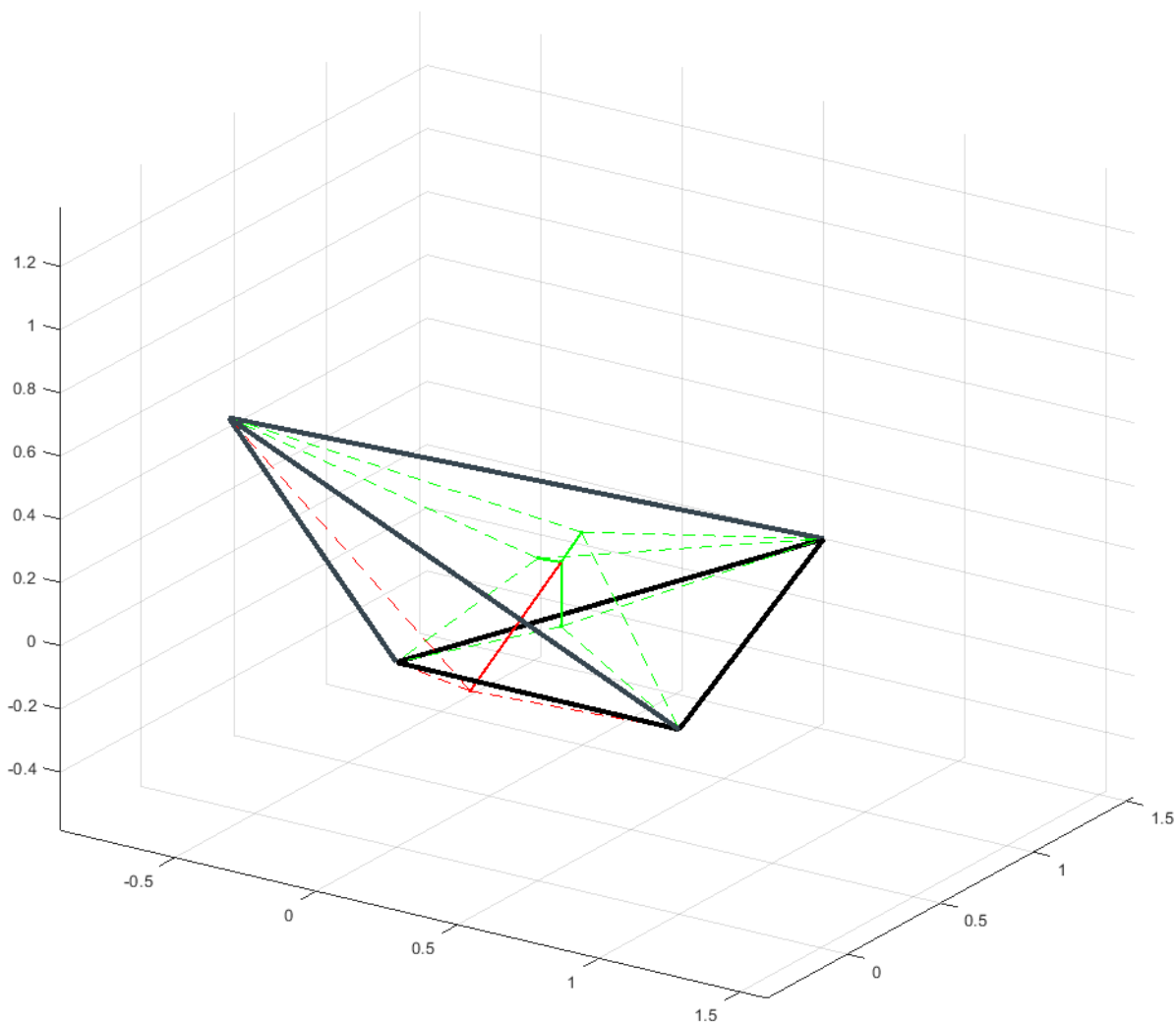
Az alábbiakban a 15. Definícióban szereplő meghatározásokkal ekvivalens módon leírjuk a poliéderek esetén előforduló egyensúlyok definícióját úgy, ahogy az a MATLAB programozási nyelv logikájához legközelebb áll, és azokkal a jelölésekkel, amelyekkel a programban dolgoztunk. Továbbá a különböző egyensúlyi típusokhoz tartozó vizsgálathoz leírjuk a program működésének elvét.

3.5.1. Stabil egyensúly

29. Megjegyzés: Stabil egyensúlyi pontok poliéderek lapján helyezkedhetnek el. A stabil egyensúlyok számát S -el jelöljük. S tömegközépponthez P egy oldalán akkor tartozik egyensúlyi pont, ha S -nek az oldal síkjára eső merőleges vetülete az oldalon belül van.

A program egy tetraédernél a *createPlane* parancs segítségével létrehozza mind a 4 oldal síkját, a tetraéder csúcsainak segítségével. A parancs bemeneti adatai mindig a tetraéder egy lapjához tartozó 3 csúcs koordinátái. Ezután egy választott S súlypontnak a *projPointOnPlane* parancs használatával létrehozza az egyes síkokra vetített képeit, majd az *isPointInTriangleBary* parancs segítségével az egyes síkokra vetített pontok baricentrikus koordinátáinak [6] kiszámolásával ellenőrzi, hogy egy pont a megfelelő háromszög belsejében van-e. Végül a program összeszámolja, hogy hány esetben talált stabil egyensúlyt, ez a szám lesz az adott tetraéder adott súlypontjához tartozó S érték (24. ábra).

A program az összes tetraéderhez tartozó összes ponton végigfut, és az adatokat eltárolja.



24. ábra: Egy tetraéder egy súlyponthoz tartozó stabil egyensúlyainak vizsgálata: $S = 3$

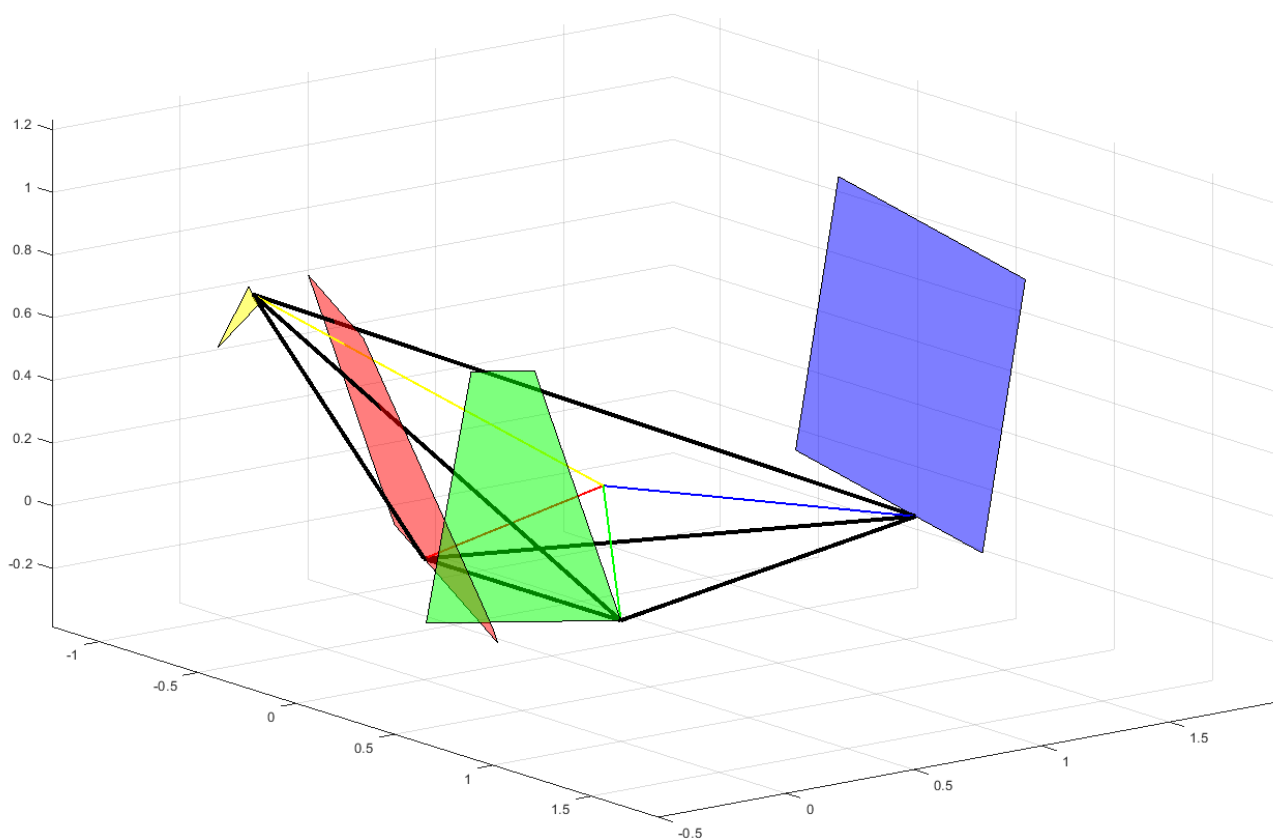
3.5.2. Instabil egyensúly

30. Megjegyzés: Instabil egyensúlyi pontok poliéderek csúcsain helyezkedhetnek el. Az instabil egyensúlyok számát U -val jelöljük. S tömegközépponthoz P egy V csúcsa akkor egyensúlyi pont, ha a V -t tartalmazó \overrightarrow{VS} normálvektorú sík nem metsz bele P -be.

A program egy S súlypont kiválasztása után a *createPlane* parancs segítségével, létrehozza mindegyik csúcshoz a megfelelő normálvektorú síkot. A parancs bemeneti adatai mindig a sík egy pontja, jelen esetben egy csúcs koordinátái, és az adott csúcsot a súlyponttal összekötő normálvektor koordinátái. Ezután az *isBelowPlane* parancsot lefuttatjuk az egyik síkkal és a

három másik, nem ezen a síkon lévő csúccsal. A parancs bemeneti adatai mindig egy sík és egy pont. Ez a parancs azt ellenőrzi egy pontra, hogy az egy adott sík felett vagy alatt helyezkedik-e el. Mivel a tetraédereink konvexek, ezért ahhoz, hogy eldöntsük, hogy egy sík belemetsz-e vagy sem a tetraéderbe, elegendő azt ellenőrizni, hogy minden csúcsa az adott sík ugyanazon oldalán helyezkedik-e el. Tehát ha a parancs azt eredményezi, hogy a kérdéses sík felett van minden csúcs, vagy azt, hogy a kérdéses sík alatt van minden csúcs, akkor a vizsgált csúcs instabil egyensúlyi pont, mivel a sík nem metsz bele a tetraéderbe. Az *isBelowPlane* parancs ezt mind a 4 csúcsra elvégzi, majd összeszámolja, hogy hány esetben talált instabil egyensúlyt. Ez a szám lesz az adott tetraéder adott súlypontjához tartozó U érték (25. ábra).

A program az összes tetraéderhez tartozó összes ponton végigfut, és az adatokat eltárolja.



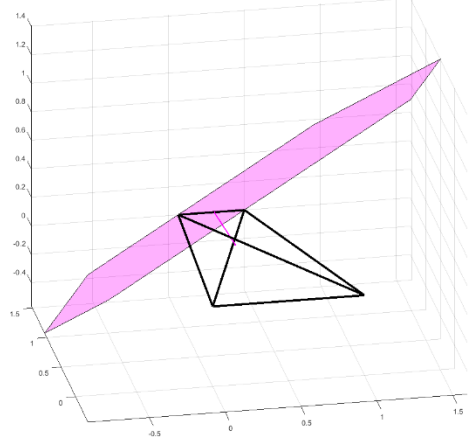
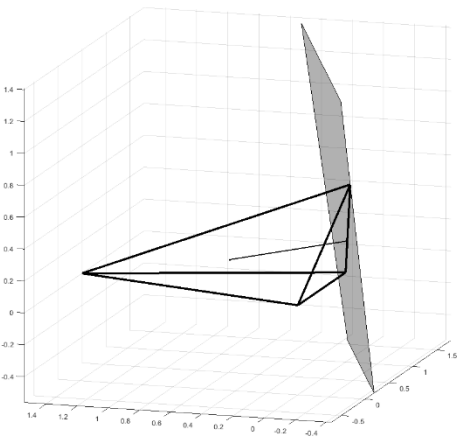
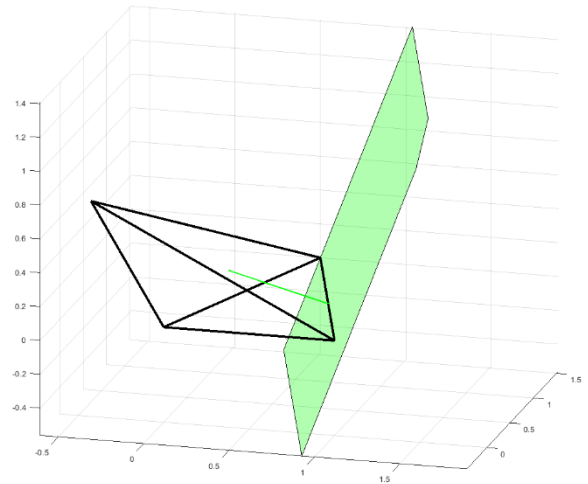
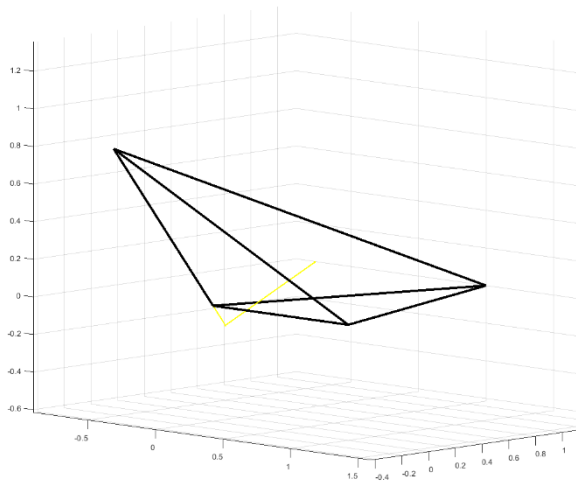
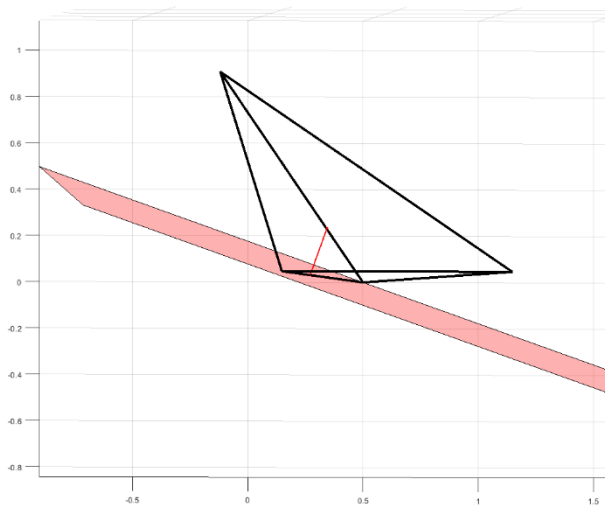
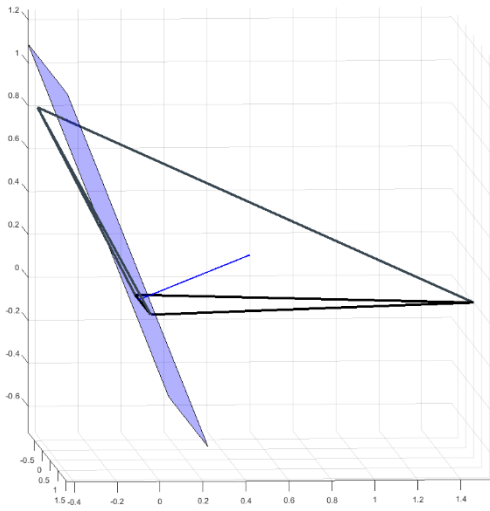
25. ábra: Egy tetraéder egy súlyponthoz tartozó instabil egyensúlyainak vizsgálata: $U = 3$

3.5.3. Nyereg típusú egyensúly

31. Megjegyzés: Nyereg típusú egyensúlyi pontok poliéderek élein helyezkedhetnek el. A nyereg típusú egyensúlyok számát H -val jelöljük. S tömegközépponthez akkor tartozik P egy élén E egyensúlyi pont, ha E , S -nek az él egyenesére vett merőleges vetülete, az adott élen belül van, és az adott élt tartalmazó \overrightarrow{ES} normálvektorú sík nem metsz bele P -be.

A program először létrehoz a *createLine3d* parancs segítségével egy 2 csúcs által meghatározott egyenest, majd a *projPointOnLine3d* parancs futtatásával kiszámolja a választott súlypont adott egyenesre vetett merőleges vetületét. Ekkor az *isPointOnSegment* parancs leellenőrzi, hogy a vetület a 2 csúcs által meghatározott szakaszon belül helyezkedik-e el. Amennyiben nem, akkor itt megáll, nem lehet egyensúly. Ha igen, akkor a *createPlane* parancs generál egy síkot, ami E -t tartalmazza és a normálvektora az \overrightarrow{ES} vektor, majd az *isBelowPlane* parancs a már ismertetett módon ellenőrzi, hogy a sík belemetsz e a tetraéderbe. A program ezt elvégzi az összes élre, majd végül összeszámolja, hogy hány esetben talált nyereg típusú egyensúlyt, ez a szám lesz az adott tetraéder adott súlypontjához tartozó H érték (26. ábra).

A program az összes tetraéderhez tartozó összes ponton végigfut, és az adatokat eltárolja.



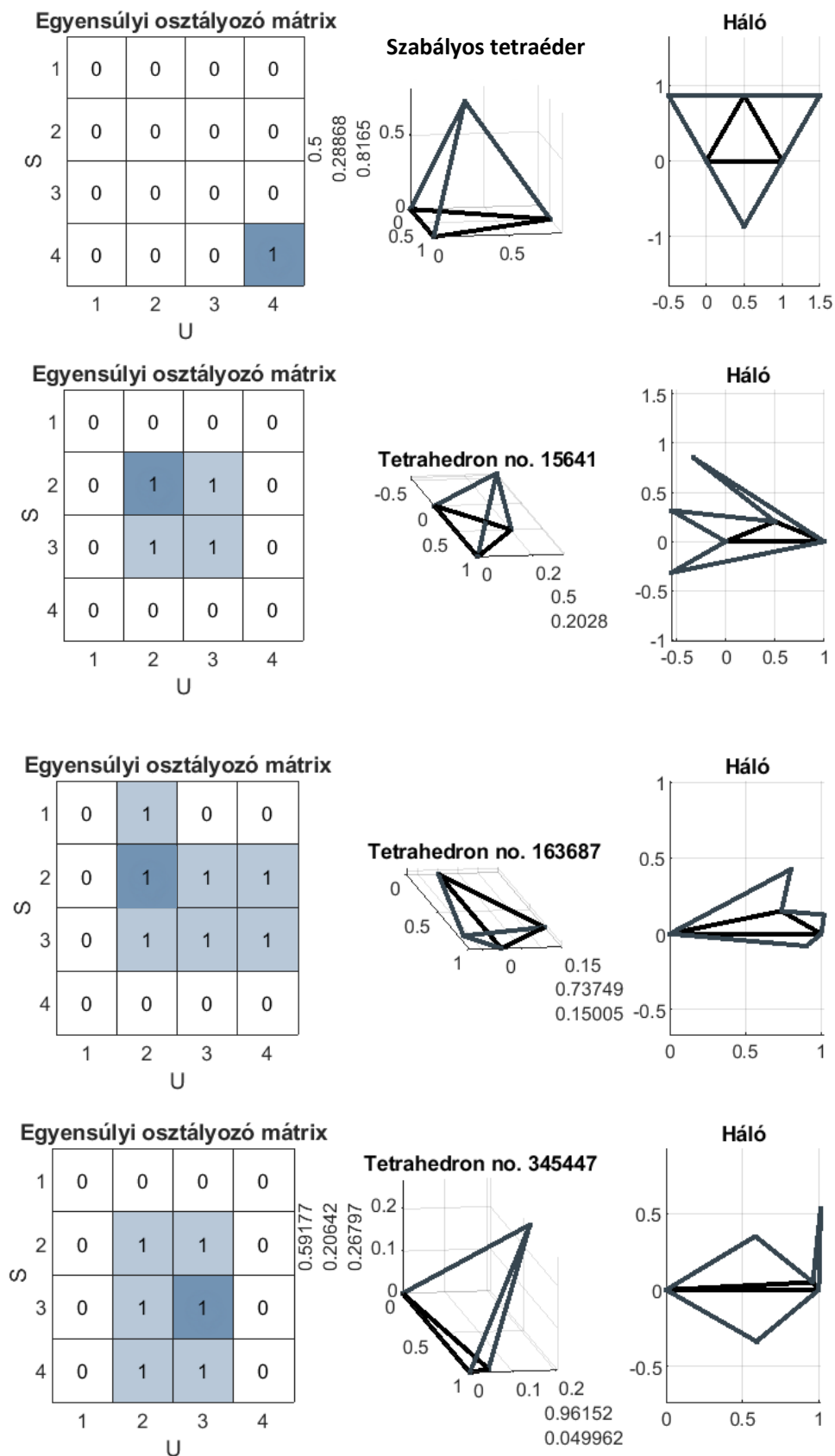
26. ábra: Egy tetraéder egy súlypontjához tartozó nyereg típusú egyensúlyainak vizsgálata: $H = 4$

3.6. Inhomogén tetraéderek egyensúlyi osztályozó mátrixai

Miután egy tetraéder minden pontjához tartozik egy megfelelő (S,U) számpár, annak egyensúlyi osztályozó mátrixa létrehozható. A MATLAB programban egy tetraéder összes pontjához tartozó (S,U) számpárok listája redukálható úgy, hogy abban minden különböző elem csak egyszer szerepeljen. Ekkor az osztályozó mátrix előállíthatóvá válik az 1. Definíció alapján. A program végigmegy a redukált lista minden (S,U) számpárján és minden egyes elemnél a mátrix S -edik sorába és U -edik oszlopába egy 1-est ír. A mátrix kitöltetlen részeibe 0-kat írunk.

32. Megjegyzés: Egy tetraéder egyensúlyozó mátrixának információ tartalma bővíthető annak reprezentálásával, hogy az adott tetraédert homogénnek tekintve az milyen egyensúlyi osztályba esik.

A 27. ábrán illusztráljuk többek között a szabályos tetraéder osztályozó mátrixát és rajzát. A mátrixban sötétkék háttérrel jeleztük a homogén tetraéder egyensúlyi osztályát jelentő cellát.



27. ábra: A szabályos tetraéder, és egyéb tetraéderek osztályozó mátrixa és rajza. A mátrixban sötétkék háttérrel jeleztük a homogén tetraéder egyensúlyi osztályát jelentő cellát.

3.7. Hibakeresés

33. Megjegyzés: Az egyensúlyi osztályokba soroláshoz nem lenne szükségünk a nyereg típusú egyensúlyok számára, de a program ellenőrzésére, és a hibás számítások kiszűrésére felhasználhatjuk, hogy az S , U és H mennyiségek egymástól nem függetlenek. Közöttük a Poincaré-Hopf tétel [7] teremt kapcsolatot mely szerint konvex poliédereken:

$$(7) \quad S + U - H = 2.$$

Sajnos a programot nem tudjuk úgy megírni, hogy az teljességgel hibamentes legyen. Ennek fő oka, hogy egy súlyponthoz tartozó stabil és nyeregtípusú egyensúlyok vizsgálata bizonytalanabb, mint az instabil egyensúlyok vizsgálata. Ez abból adódik, hogy instabil egyensúly esetén az egyensúlyi pont ismert, az a tetraédernek egy csúcsa, míg a stabil és nyeregtípusú egyensúlyoknál az egyensúlyi pontot egy síkra, illetve élre vetítés által kapjuk meg. Ez önmagában pontatlanságokra adhat okot.

Továbbá az előbb említett stabil és nyeregtípusú egyensúlyok bizonytalansága összefügg, hajlamos a program olyan esetekben rosszul számolni az S értékeket, amikor a H értékeket is. A probléma az, hogy a 33. Megjegyzésben szereplő módon az előbb említett kettős hibákat nem tudjuk kiszűrni, hiszen ha a program egy súlyponthoz a valós S és H értékekhez képest azonos irányban ugyanakkora mértékben téved, attól az (6)-os egyenletben még egyezést kapunk.

4. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS KITEKINTÉS

Bár a politópok mechanikai tulajdonságainak vizsgálata komoly múltra tekint vissza [1,2,4,5,8,9,10,11], az irodalom szinte kizárólag a (valamilyen értelemben) homogén anyageloszlás esetével foglalkozott. A legegyszerűbb esetben a politóp anyageloszlását globálisan homogénnek tekintették [1,2,4,5,8,9], de vizsgáltak olyan “alternatív” homogén szerkezeteket melyeknél a politóp csúcaiban egységnyi tömegeket helyezünk el [10,11]. Bizonyos szempontból ez természetes törekvés, hiszen matematikai szempontból a homogén anyageloszlás (és annak egyes változatai) nyilván kitüntetett figyelmet érdemelnek, ugyanakkor az erre az esetre szorítkozó eredmények fizikai relevanciája kissé korlátozott. Nyilvánvaló ugyanis, hogy tökéletesen homogén politóp (akár az általános, akár a tömegpontos változatban) fizikailag nem építhető, így az ilyenekre vonatkozó állítások fizikai kísérletekkel közvetlenül nehezen támaszthatóak alá vagy cáfolhatóak.

Lehet, hogy éppen ezt a problémát ismerte fel John H. Conway amikor az első, *inhomogén* politópra vonatkozó tételt (nevezetesen a monostabil tetraéder létezését) igazolta [2]. Egy ilyen típusú állítás ugyanis –elvben– már fizikai kísérlettel is alátámasztható volna. Az [1] cikk általánosította Conway eredményét (igazolva az inhomogén, mono-instabil tetraéder létezését és talán ennél is tovább ment a [11] dolgozat melyben egy inhomogén, mono-monostatikus (tehát az $(1,1)^E$ osztályba tartozó), 7 lapú, 7 csúcú poliéder konstrukcióját adták meg. Ezen eredmények abba az irányba mutattak, hogy az inhomogén eset vizsgálata érdekes kérdés, ugyanakkor hiányzott az az eszköztár, amivel ezt a feladatot kellő általánosságban és mélységben vizsgálni lehetett.

Dolgozatunk célja ezen hiány pótlása, vagyis az inhomogén politópok mechanikai vizsgálatára szolgáló eszköztár bevezetése, és ezen eszköztár erejének bemutatása volt.

A dolgozat legfontosabb fogalmi újítása, hogy különválasztotta a poliéder formát annak (anyagi) tartalmától és a két fogalom kapcsolatának leírására bevezetett egy új eszközt, az egyensúlyi osztályozó mátrixot (1. Definíció).

Bár nyilvánvaló, hogy a dolgozat címében a tetraéderek lelkére vonatkozó kérdés költői, mégis, az osztályozó mátrixok még a legegyszerűbb poliéder, a tetraéder esetén is igen összetett és érzékelhetően titokzatos világának bemutatása talán érzékeltette, mi is motiválta a kérdést.

Jelen munka folytatásának célja az osztályozó mátrixok belső törvényszerűségeinek feltárása, többek között annak magyarázata, hogy a tetraéder esetében a kombinatorikailag lehetséges mátrixoknak miért mindössze a 0.44%-a valósul meg geometriailag (1. Numerikus eredmény). Vélelmezhető, hogy nagyobb (több lappal, csúccsal, éllel rendelkező) poliéderek esetén ez az arány még ennél is kisebb.

A dolgozatban bemutattuk, hogy az osztályozó mátrix segítségével számos érdekes, új állítást lehet megfogalmazni (2. Tétel, 3. Tétel, 1. Lemma, 2. Lemma, 1-8. Numerikus eredmény) és ezek közül némelyiket bizonyítottuk, másokat numerikus eredményekkel támasztottuk alá. (Azt is megjegyezzük, hogy bár az 1. Tétel kimondásában nem szerepel az osztályozó mátrix, a tétel bizonyítását jelentő konstrukcióhoz mégis ezen keresztül vezetett el az út.) A dolgozat lezárásakor ismét az osztályozó mátrix fogalmát hívjuk segítségül, hogy egy hipotézist fogalmazzunk meg, melyet ugyan a munka keretében vizsgált 768109 darab tetraéder mindegyikén tesztelve igaznak találtunk, de mindeddig nem sikerült igazolnunk:

1. **Sejtés:** Nem létezik olyan T tetraéder, melynek egyensúlyi mátrixában $m_T(1,2) = m_T(2,1) = 1$.

5. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönöm a dolgozat elkészítéséhez nyújtott támogatást és segítséget konzulenseimnek dr. Domokos Gábornak és Regős Krisztinának! Szintén köszönöm az NKFIH 134199-es kutatási témájából befolyó anyagi támogatást!

6. ÁBRAJEGYZÉK

Ábra sorszáma:	Forrás:
1.	MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
2.	MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
3.	Adobe Illustrator – saját készítésű ábra
4.	MS Excel – saját készítésű ábra
5.	MS Excel – saját készítésű ábra
6.	MS Excel – saját készítésű ábra
7.	MS Excel – saját készítésű ábra
8.	MS Excel – saját készítésű ábra
9.	GeoGebra – saját készítésű ábra
10.	GeoGebra – saját készítésű ábra
11.	GeoGebra – saját készítésű ábra
12.	GeoGebra – saját készítésű ábra
13.	GeoGebra – saját készítésű ábra
14.	GeoGebra – saját készítésű ábra
15.	GeoGebra – saját készítésű ábra
16.	GeoGebra – saját készítésű ábra
17.	MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
18.	MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
19.	MATLAB R2022a – saját készítésű ábra

20. MATLAB R2022a & Adobe Illustrator 2021– saját készítésű ábra
21. MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
22. MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
23. MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
24. MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
25. MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
26. MATLAB R2022a – saját készítésű ábra
27. MATLAB R2022a – saját készítésű ábra

7. IRODALOMJEGYZÉK

- [1] G. Domokos, F. Kovács, Z. Lángi, K. Regős and P.T. Varga: Balancing polyhedra. *Ars Mathematica Contemporanea* Vol 19 No 1. <https://doi.org/10.26493/1855-3974.2120.085>
- [2] R. J. Mac, G. Dawson, Monostatic simplexes, *Amer. Math. Monthly* 92 (1985), 541–546, doi: 10.2307/2323158.
- [3] Tim Poston – Ian Stewart: *Catastrophe Theory and Its Applications*. Dover Publications; 1st edition (February 29, 2012) ISBN-13:978-0486692715
- [4] Középiskolai matematikai és fizikai lapok, 70. évfolyam 5. szám, Domokos Gábor, Kovács Flórián, Lángi Zsolt, Regős Krisztina, Varga Péter Tamás: Konvex poliéderek egyensúlyai
- [5] Regős Krisztina: Piramisok geometriája. Tudományos Diákköri Konferencia 2018 – Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építészmérnöki Kar
- [6] Marschner, S. and Shirley, P. (2018) *Fundamentals of Computer Graphics*. 4th edn. CRC Press, Chapter 2, Section 7.
- [7] J. W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, Virginia, 1965.
- [8] J. H. Conway and R. K. Guy, Stability of polyhedra, *SIAM Rev.* 8 (1966), 381–381, doi:10.1137/1008075.
- [9] M. Goldberg and R. K. Guy, Problem 66-12, Stability of polyhedra (by J. H. Conway and R. K. Guy), *SIAM Rev.* 11 (1969), 78–82, doi:10.1137/1011014.
- [10] S. Bozóki, G. Domokos, F. Kovács, K. Regős: Mono-unstable polyhedra with point masses have at least 8 vertices. *Int. J. Solids and Structures* Volumes 234–235, January 2022, 111276 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111276>
- [11] G. Domokos and F. Kovács: Conway’s spiral and discrete Gömböc with 21 point masses. ArXiv preprint <https://arxiv.org/abs/2103.13727>
- [12] Euklidész: *Elemek*, XIII. Kötet. Gondolat. Budapest 1983. ISBN: 9632812670