

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építészmérnöki Kar

Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék
Tudományos Diákköri Dolgozat

**GEODETIKUS KUPOLÁK BELSŐ-ERŐ ELOSZLÁSÁNAK VIZSGÁLATA A
FELOSZTÁS SIMASÁGÁNAK FÜGGVÉNYÉBEN**

Készítette: Kis Alexandra Éva

Témavezető: Dr. Gáspár Orsolya

TARTALOM

ABSZTRAKT:	3
1.BEVEZETÉS.....	4
1.1. A geodetikus kupola - rövid történeti áttekintés	4
1.2. Geodetikus kupolák felosztásának optimalizációja.....	5
1.3. A felosztás simasága	6
1.3.1. A η , a leghosszabb és legrövidebb élek aránya	6
1.3.2. A D -szám.....	6
1.4. A rácshéj-kontinuum megfeleltetés	6
2.PROBLÉMAFELVETÉS, MOTIVÁCIÓ.....	7
3.A VIZSGÁLAT MÓDSZERE	8
3.1. A vizsgált felosztások.....	8
3.2. A η és D -szám meghatározása.....	10
3.3. A rácshéj modell.....	11
3.4. A rácshéj-kontinuum megfeleltetés – feszültségek és normálerők közötti kapcsolat	11
4.EREDMÉNYEK	13
4.1. A D -számok eloszlásának vizsgálata.....	13
4.2. A végeleemes rácsmoდეllek.....	17
4.2.1. A Fuller-féle felosztás végeleemes modellje	17
4.2.2. Az oldalfelezéses felosztás végeleemes modellje.....	18
4.2.3. A Bauersfeld-féle felosztás végeleemes modellje	18
4.3. A rácsozatok és a héj statikai működésének összevetése	19
4.3.1. A membránhéjmodell alkalmazhatósága a vizsgált felosztások esetén.....	20
4.3.2. A globális simaságot leíró paraméterek és statikai működés közötti összefüggés	21
4.4. Az eredmények kiértékelése felosztásonként.....	22
4.4.1. Korreláció a D -szám és a héjmodell között.....	24
5.ÖSSZEGZÉS, LEHETSÉGES KUTATÁSI IRÁNYOK.....	27
Mellékletek.....	28
Köszönetnyilvánítás	47
Felhasznált irodalom	48
Ábrák forrása.....	48

ABSZTRAKT:

A dolgozatomban félgömb geodetikus kupolák különböző, ismert felosztásaival foglalkozom. Célom, hogy a felosztások ún. simasága és a rácshéj statikai működése (belső erők eloszlása) közötti összefüggést feltárjam. Különböző topológiák statikai működésének összevetésére ^[1] van példa, de jelen dolgozat azonos topológiájú felosztásokat vizsgál.

Egy ideálisan sima felosztás esetében mind az élhosszak, mind a kialakuló háromszögek azonosak lennének – a vizsgált felosztások esetében azonban ezek különböző mértékben eltérnek. A felosztás simaságát a dolgozatban, összhangban a szakirodalommal a η (leghosszabb oldalhossz/legrövidebb oldalhossz) illetve a D-számmal ^[4] (kerület/terület) írom le.

A dolgozat alapfeltevése, hogy a D-szám jobban jelzi a várható belső erő eloszlást, mint a η . Munkám során négyféle felosztást vizsgálok: Fuller-féle ^[2], oldalfelezéses ^[5], Bauersfeld-féle ^{[4][5]}, Tarnai-féle ^{[2][3]}. Mindegyikhez meghatározom (ahol nem ismert) a η és a D értékeket 8-frekvenciás felosztás esetében. A felosztások geometriáját parametrikus modellel adom meg, és a belső-erő eloszlást végeselemes programmal vizsgálom (Rhinoceros 6 és kiegészítői). A kapott belső-erő eloszlást a membránhéjként modellezett félgömb feszültségeloszlásával vetem össze.

Két kérdést vizsgálok: vajon a hálózat nagyobb simasága esetén kimutatható-e, hogy a belső-erők eloszlása jobban közelít a membránhéj-modell által jósolthoz, illetve, hogy a D és a η szám által jelzett simaság közül melyiknek van szerkezeti szempontból nagyobb jelentősége.

1.BEVEZETÉS

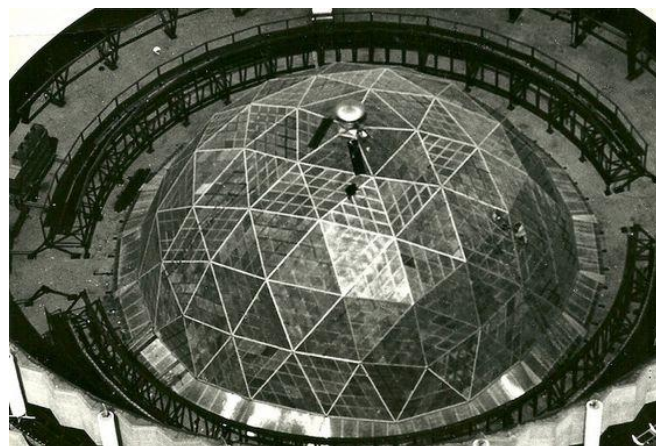
1.1.A geodetikus kupola - rövid történeti áttekintés

A geodetikus kupola a rácshéj kupolák egy speciális típusa. Szerkesztése gömbi szabályos, vagy fél-szabályos, poliéderen alapszik. Az alábbiakban csak olyan egyrétegű, csuklós kapcsolatokkal rendelkező szerkezeteket vizsgálunk, amelyek szerkesztése gömbi *ikozaéderen* alapszik. Egyrétegű csuklós térrácsok merevsége csak háromszögelt felosztás mellett biztosítható^[3], Az első - megépült - geodetikus kupola a jénai planetárium acél szerkezete, amit Walther Bauersfeld tervezett. Az ideiglenesnek szánt kupola 1924-ben nyílt meg a közönség számára, de még abban az évben be is zárták.



1. ábra: A jénai geodetikus kupola^[9]

A geodetikus kupolák nevét Richard Buckminster Fullernek köszönhetjük – először egy 1954-ben bejegyzett védjegy kérelmében tűnik fel ez az elnevezés. Fuller, jelen ismereteink szerint Bauersfeldtől függetlenül 'találta fel' a geodetikus kupolát. Ötletei nyomán a XX. század közepétől a geodetikus kupolák kialakítása és különösen felosztása, intenzíven kutatott területté vált a nyugati világban. Párhuzamosan a volt Szovjetunió területén is épültek, nagy számban, geodetikus kupolák. Az utóbbiakat megalapozó elméleti munkák még a második világháborút megelőzően születtek.



2. ábra: A Ford Látogatóközpont kupolája^[10]

1953-ban Fuller jegyezte a Ford michigani látogatóközpontjának, az ún. Rotundának a terveit. A kész szerkezet átmérője 28 m volt, 12000 rudat tartalmazott, és mindössze 1700 kg-ot nyomott. Így kerültek be a geodetikus kupolák, ezek a különleges szerkezetek az építészeti köztudatba.

Az 1967-es Montreal-i (Kanada) EXPO-n megépült a híres Biosphere, az Egyesült Államok pavilonja, amelyet szintén Fuller jegyzett. Fuller hatására 1968-ban Lloyd Kahn 17 geodetikus kupolát tervezett egy Santa Cruz-i alternatív iskola számára. Majd 1970-71-ben publikálta az általa szerkesztett, az építészek számára a mai napig meghatározó két könyvet, a Domebook 1 és Domebook 2-t. Ezek praktikus tanácsokat adnak geodetikus kupolák építéséhez, de meghívott szerzők közreműködésével bizonyos áttekintést is adnak többek között a felosztás matematikájáról, az érdeklődő olvasónak. A könyvek sikerét mutatja, hogy a másodikból 165000 példány kelt el. További jelentős geodetikus kupolák többek között az Epcot Center – Walt Disney World Resort (Florida, 1982, Wallace Floyd Dg, Simpson Gumpertz &Hegel)), illetve a közelmúltból az ún. Eden Project (2001, Anglia, Grimshaw-Hunt) A Biosphere, az Epcot Center (ez hajtogatott alumínium panelekből áll) és az Eden Project sem egyhéjú szerkezet, de a geodetikus kupolák ismertségéhez jelentősen hozzájárultak, ezért szerepelnek a dolgozatban.



3. ábra: Epcot Center - Walt Disney World Resort ^[11]

1.2. Geodetikus kupolák felosztásának optimalizációja

A geodetikus kupolák felosztásának fontos paramétere a *frekvencia*. A frekvencia a hálózat sűrűségét írja le, azt fejezi ki, hogy a felosztás során a (gömbi) ikozaéder egy lapjának egy oldalára hány kis háromszög kerül (ez az értelmezés finomításra szorulna, ha az összes lehetséges felosztási osztályt ^[5] vizsgálnám, de igaz minden általam vizsgált felosztás esetén). Tehát az 1 frekvenciás eset maga az ikozaéder, 2-es frekvenciánál minden lap minden oldalára 2 háromszöget szerkesztünk, tehát 4 részre osztjuk, 4-es frekvenciánál 16 részre stb. osztjuk az eredeti háromszöget.

A kupolák felosztásának *optimalizációja* már régóta foglalkoztatja a kutatókat. Sokan próbáltak újabb, jobb felosztásokat megalkotni. A hálózat *simasága* a hálózat optimalizáció egyik fontos célja, melyhez különböző mérőszámok rendelkeznek. A következőkben ezekkel foglalkozunk.

1.3. A felosztás simasága

Szemléletesen, egy felosztást annál simábbnak nevezünk, minél egyenletesebbnek tűnik a háromszögelés, ha ránézünk a kupolára. Ezt nagyjából hasonló háromszögek kialakításával érhetjük el. Ennek egyik lehetséges *mérőszáma*, ha az egyes élek (rudak) hosszában kis eltéréseket engedünk meg. A nagyjából egyforma rúdhosszak követelményét aránylag sokféle rúd esetén teljesíthetjük. Kevesebb féle rúdhossz esetén nagyobbak a differenciák az élek között, ami ez a gyártás szempontjából sokkal kedvezőbb – ezzel a praktikus szemponttal az alábbiakban nem foglalkozunk.

1.3.1. A η , a leghosszabb és legrövidebb élek aránya

A felosztás simaságának mérésére a szakirodalom leggyakrabban a η ^[3,7] értéket használja. A η érték a felosztásban megjelenő leghosszabb oldalhossz és a legrövidebb oldalhossz hányadosával adható meg. Fontos kiemelni, hogy a η egy globális, a felosztás egészét jellemző mérőszám.

1.3.2. A D -szám

Bauersfeld kézírataiban szerepel egy bizonyos D -szám ^[4,5], amelyet vélhetően ugyancsak a felosztás simaságának jellemzésére vezetett be. A D -szám a felosztás egyes kis háromszögeinek a (fél)kerület-terület arányát írja le, ami azt jelenti, hogy a hálózat minden egyes háromszögére külön határozandó meg ez az érték, tehát ez egy lokális, a felosztás egyes háromszögeire vonatkozó mérőszám. Emiatt a dolgozatomban minden egyes vizsgált felosztáshoz meghatározom a D -számok szélsőértékeit, illetve ezek hányadosát is, amellyel a felosztás egésze jellemezhető. Így lehetőség van a két mérőszám összevetésére.

Bauersfeld kézírataiban a D -szám speciális kontextusban jelenik meg: olyan helyen vezeti be, ahol a rácshéj és a folytonos membránhéj megfeleltethetőségét vizsgálja ^[5]. Mivel a XX. Század elején kézzel számoltak, a membránhéj-modell alkalmazhatóságának igazolása a számítás megkönnyítése miatt volt fontos. Az alábbiakban röviden ismertetem a rácshéjak és membránhéjmodell megfeleltethetőségének legfontosabb szempontjait.

1.4. A rácshéj-kontinuum megfeleltetés

A megfeleltetés alapja a „membrán-szerű” működés mindkét szerkezet esetében: a csuklós kapcsolatokkal rendelkező háromszögeléssel szerkesztett egyhéjú rácshéjak egyszerűsített szerkezeti modellje szerint (rácstartó modell) a rudakban csak normálerők ébrednek. Ezeket tekinthetjük a megfeleltetés esetén analógnak a folytonos membránhéjban, a felület érintősíkjában ébredő erőkkel. Megfelelő megtámasztás esetén logikusnak tűnik, hogy a két szerkezet közötti ekvivalencia (a rácsmódel, mint a héj diszkrét modellje) fennáll. Ezt a problémát részletesen vizsgálta Kollár Lajos és Hegedűs István ^[6]. Az alábbi, a dolgozat szempontjából fontos megállapításokra jutnak:

- Izotróp héj modellezése csak szabályos háromszögekből álló rácshéjjal lehetséges: ez az általunk vizsgált egyik felosztásra sem áll, így bizonyos mértékű eltérés mindenképpen várható.

- A megfeleltetésnél nagyon fontos a megfelelő referenciapontok megtalálása: ezekben a pontokban meghatározott héjereket transzformáljuk rúderökké. A referenciapont kiválasztása azért nem egyértelmű, mert a rudak nem érintői a gömbfelületnek.
- Statikailag határozott megtámasztás esetén, ha a héj és a rácsmodell között jelentős az eltérés a felület egy adott régiójában, az a teljes felületre kiterjed, míg statikailag határozatlan megtámasztás mellett az eltérés a peremektől befelé tipikusan csökken.

A dolgozatban az általuk javasolt eljárással határoztam meg a héjmodellből számított rúderöket, ezt részletesen a 4.4-es alfejezetben ismertetem.

2.PROBLÉMAFELVETÉS, MOTIVÁCIÓ

Geodetikus kupolák felosztásának vizsgálatakor a szakirodalom azok geometriai tulajdonságaival foglalkozik. Miközben a geometria jelentőségének hangsúlyozása a szerkezeti működés szempontjából visszatérő elem a témával foglalkozó cikkekben pl. ^[3], az egyes felosztások szerkezeti működését elemző, azokat szisztematikusan összevető tanulmányt nem ismerek.

Különböző *topológiájú* rácshéjkupolák belső-erő eloszlásának, kihasználtságának: (pl. Schwedler kupola, Kiewitt kupola és a geodetikus kupola ^[1]) összehasonlítására van példa a szakirodalomban. Eszerint, ha minden elemet azonosnak választunk egy felosztáson belül, akkor a geodetikus kupola, belső-erő eloszlása a legegyszerűsebb, azonban, ha felosztásonként minden elem más és más lehet, a Schwedler kupola jobban teljesít, mivel ott az erőátadás szempontjából kedvezőbbek a rúdirányok.

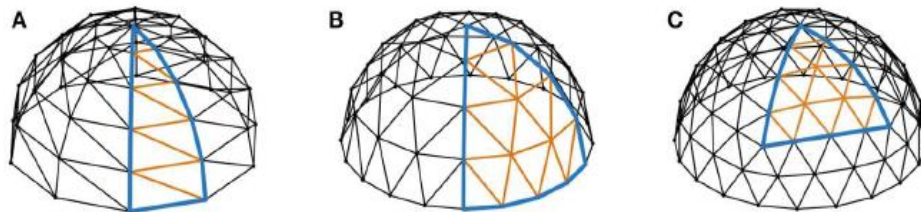


FIGURE 1 | Three commonly built dome types are compared in this paper: (A) the Schwedler dome, (B) the Kiewitt dome, (C) the geodesic dome.

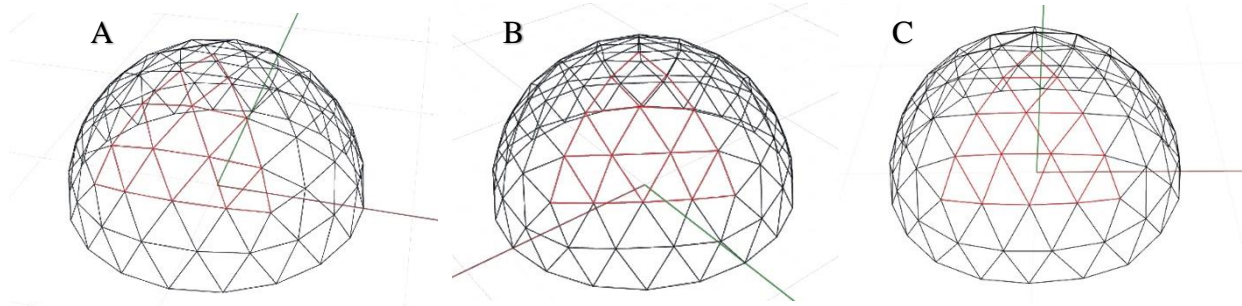
4. ábra: Különböző topológiájú rácshéj kupolák ^[9]

Richard Buckminster Fuller a US 2,682,235A szabadalmában azt állította, hogy geodetikus felosztás esetén egyenletesebb feszültségeloszláshoz jutunk, mint bármilyen más topológia alkalmazásakor. Emiatt különösen érdekes egy általa javasolt felosztás összevetése két másikkal (a topológia ez esetben egyező!), hogy lássuk, vajon a geodetikus felosztások körén belül mekkora eltérések tapasztalhatóak.

A fentiek alapján, jelen dolgozatban *azonos topológiájú* (geodetikus), de különböző felosztású kupolákkal - Fuller-féle (A), oldalfelezéses (B), Bauersfeld-féle (C) – foglalkozom. Először a felosztások simaságát vizsgálom:

- Ezeknél a felosztásoknál nyolcas frekvenciára meghatározom a η és D értékeket, ahol azok nem ismertek.

- Vizsgálom a η , és a hálózat legkisebb és legnagyobb D -száma (mint globális paraméter) közötti összefüggést.
- Meghatározom a D -szám eloszlását is a gömbi ikozaéder egy lapján, és a hálózatokon egy-egy relatív, és egy abszolút skálán megfigyelem, hogy hol alakulnak ki szélsőséges értékek.



5. ábra: Geodetikus kupolák: frekvencia=4, A: Fuller-féle, B: Oldalfelezéses, C: Bauersfeld-féle

Ezt követően az egyes felosztások szerkezeti elemzését végzem el:

- Bemutatom az egyes rácshéjak rácsmódel alapján, vége-sele-mes program-mal meghatározott belső erőit.
- Meghatározom a rúderőket a Kollár-Hegedűs által javasolt helyettesítő héjmodellből.

Végül összevetem a geometriai és a szerkezeti elemzés eredményeit. A dolgozat fontos kiinduló hipotézise a D -számhoz kötődik: nevezetesen, vajon igazolható-e a D -szám kidolgozásának vélt célja, vagyis, hogy a rácshéjak és a membránhéj megfeleltethetőségének mérőszáma legyen. Elvi síkon erre van esély: ha a rudak hossza nem jelentősen tér el egymástól a hálózatban, akkor a kisebb D -szám szabályosabb háromszöget jelent (adott kerületnél a maximális terület szabályos háromszög esetén alakul ki).

- Az egyik vizsgált kérdés, hogy ha egy felosztás simább a η és a D -szám szerint, akkor az erőjátéka is közelebb áll-e a membránhéjéhoz
- 'Jobb'-e ennek előrejelzésében valamelyik mérőszám?
- Illetve, hogy a D értékek eloszlása és a rácsmembrán lokális megfeleltetés (adott héjrészen) között van-e kapcsolat?

3.A VIZSGÁLAT MÓDSZERE

3.1. A vizsgált felosztások

A geodetikus kupolák három különböző ismert szerkesztésű változatát vizsgálom. Ezek mindegyike egy ikozaéderből indul ki.

A Fuller-féle szerkesztés esetében a gömbbe írt ikozaéder minden síklapját egybevágó egyenlő oldalú háromszögekre bontjuk, a kívánt frekvenciának megfelelően (minden élt annyi egyenlő részre osztunk, amennyi a frekvencia értéke). Az így kapott csomópontokat sugár irányban vetítjük ki az ikozaéder köré írható gömb felszínére.

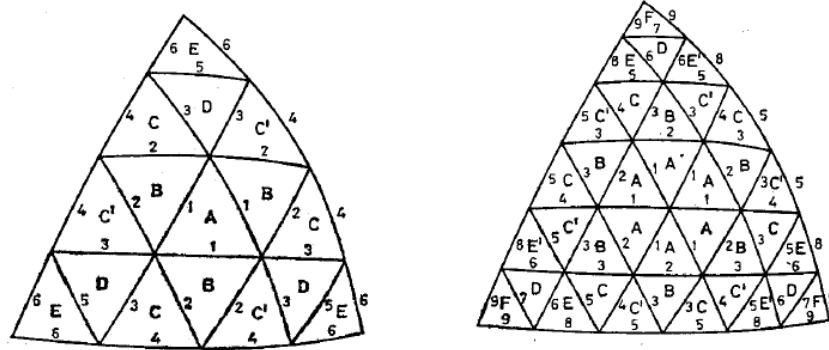


Fig. 24. Fuller's method of division of a triangle of the spherical icosahedron

6. ábra: Fuller-féle felosztás [2]

Az *oldalfelezéses szerkesztés* a gömbi ikozaéderen történik (vagyis az ikozaéder éleit először a gömb felületére vetítjük). Minden oldalon egy-egy rekurzív szerkesztést hajtunk végre, miszerint az oldalívek felezőpontjait összekötve négy háromszögre bontjuk az eredeti háromszöget. Majd ezt ismétéljük amíg el nem érjük a kívánt frekvenciát.

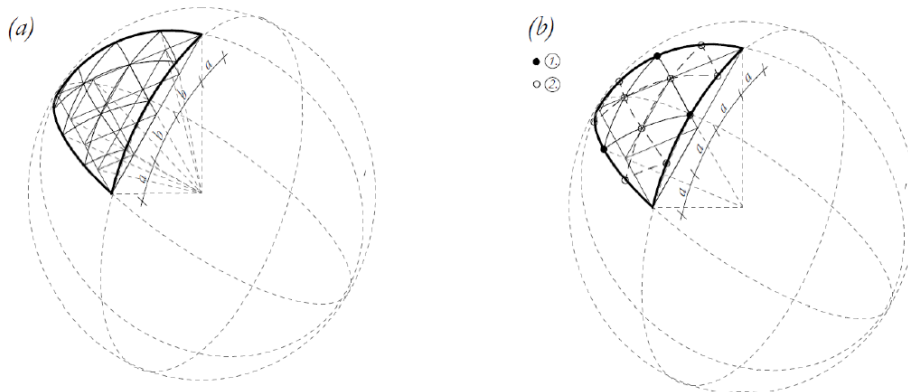


Figure 6. Fuller's icosahedral subdivision (4-frequency) (a), side bisection (4-frequency) (b)

7. ábra: Fuller-féle (a) és oldalfelezéses (b) felosztás [5]

A *Bauersfeld-féle szerkesztés* elve, hogy azonos területű gömbi háromszögeket hozzon létre, ahol szintén a gömbi ikozaéder a kiindulópont. Ebben az esetben a 8. ábra szerinti osztópontok határozzák meg a felosztás csúcsait: az alapegység a szimmetria szabályait kihasználva az ikozaéder lapjának hatoda (ún. Schwartz-háromszög). Az első lépésben ennek a területét osztjuk C csúcsból kiinduló főkörrel 1:3 arányban, majd minden következő lépésben az előző háromszög területét felezzük.

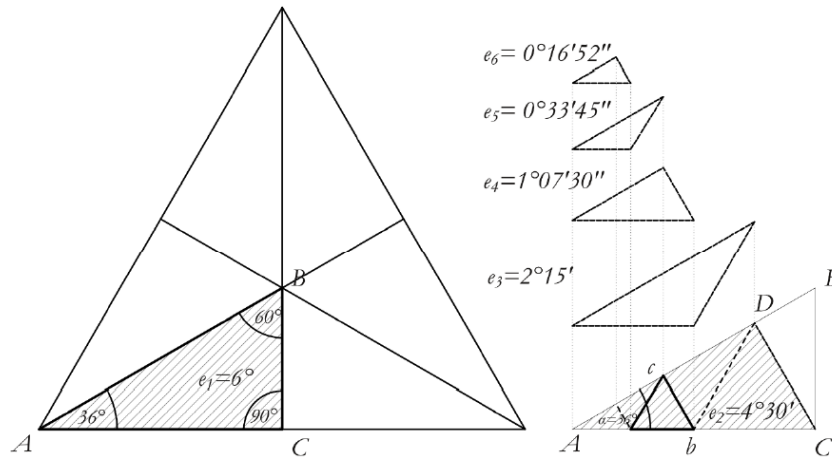
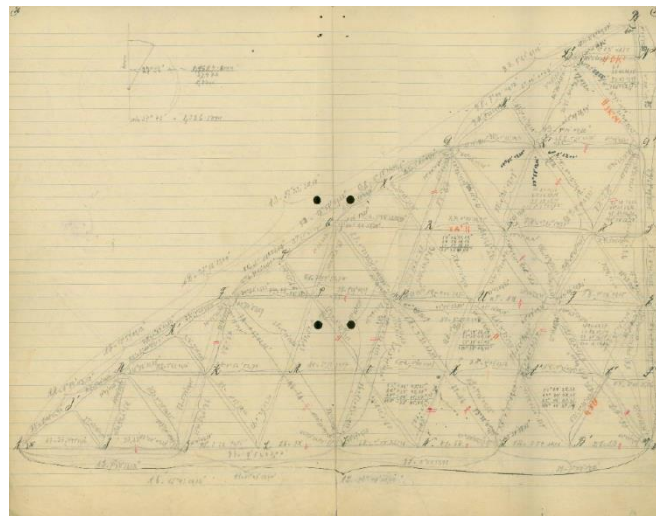


Figure 5. Explanatory drawing of the Bauersfeld-type subdivision

8. ábra: Bauersfeld-féle felosztás [5]

3.2. A η és D -szám meghatározása

Az imént ismertett felosztások csomópontjainak helyét a térben egy általam írt kóddal számoltam ki a csomópontok nagy száma miatt. A kódot *Python* programozási nyelven írtam, amihez először szükségem volt az ikozaéder csúcsainak koordinátáira, amelyet [8] alapján írtam fel. Ezután az ikozaéder egy oldallapjára határoztam meg a felosztás csúcsainak helyét, a pontok koordinátáival. A feladat parametrizálhatósága érdekében a frekvencia szabadon változtatható.



9. ábra: Bauersfeld jegyzete [4]

A pontok térbeli helyének meghatározása után a koordinátáik segítségével ki tudtam számolni a szomszédos pontok távolságait, majd ezeket egy *Excel* táblába átvezetve meghatároztam az egyes háromszögekhez tartozó kerületeket és területeket. A felosztásban szereplő pontok távolságai kerülnek kiszámításra (egyenes szakaszként), így a területek az egyes háromszögek síkjában értendők, nem a gömbi háromszögek felületén. Ezekből már könnyen előállíthatóak voltak a felosztásokhoz tartozó η és D értékek a

- η =leghosszabb oldalhossz/ legrövidebb oldalhossz, és a
- $D'=K/(2*T)$ összefüggést használva.

Ahhoz, hogy az adott hálózathoz releváns D értéket kapjam, az előző képlet szerint kiszámolt D' értékeket a felosztás frekvenciájával, és a geodetikus kupola gömbjének sugarával fajlagosítottam, ezt jelölöm D -vel a továbbiakban.

- Meghatároztam a D_{max}/D_{min} értékeket is minden felosztáshoz, ezt d -vel jelölöm a továbbiakban.

A kapott D -számok eloszlását színezett ábrákkal szemléltetem, ezek a 4.1. fejezet ábráin láthatóak. A 11.-13. ábránál lokális színskálát alkalmaztam, míg a 14. ábrán az összes ábra egy abszolút skálát követ. Az előbbin jobban megfigyelhető a D - számok eloszlása egy-egy felosztáson belül, míg az utóbbi az egyes felosztások összevetését könnyíti meg.

A parametrikus modellek elkészítéséhez a *Rhinoceros 6* programot és annak *Grasshopper* kiegészítőjét használtam. A *Grasshopper*-be beilleszthetőek voltak az általam már korábban megírt *Python* scriptek, így itt már csak azt kellett megoldanom, hogy az ikozaéder minden oldalára lefuttassam a programot, hogy megkapjam a felosztást a teljes gömbre. A geodetikus kupolák elkészítéséhez félbe kellett vágnom a gömböket az 'egyenlítőjük' mentén – ahol ez létezett (Fuller-féle, oldalfelezéses). A Bauersfeld-féle felosztásnál egy „hullámos egyenlítő” alakult ki (ld. 16-18. ábra).

3.3. A rácshéj modell

A belső-erők számításához a *Karamba 3D* végelelemes kiegészítőt használtam. A rácsrudakat a parametrikus modellben már meglévő vonalak adták, a rudak azonos keresztmetszetűek. Minden esetben kör alakú S235-ös acélból készülő zártszelvényeket alkalmaztam, amelyek átmérője 4 cm , lemezvastagsága pedig 2 mm volt. A támaszokat az egyenlítőre illeszkedő csomópontokba helyeztem, és önsúlyteherrel terheltem a kupolákat.

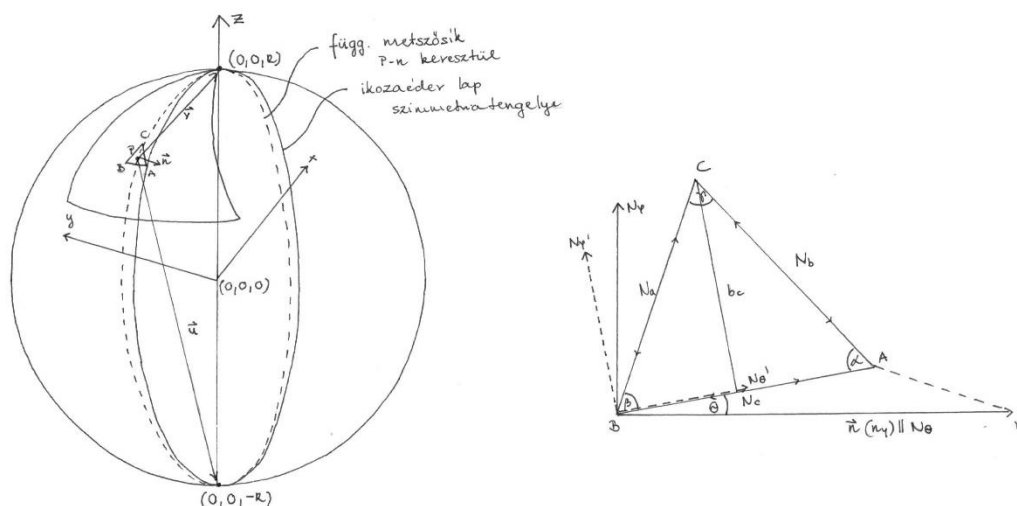
Mivel a dolgozat fő célja, hogy a rácshéjakat és a félgömb membránhéjat összevessük, így első lépésben membrán megtámasztást alkalmaztam, vagyis függőleges síkú érintője mentén támasztottam meg a kupolát. A csomópontokat elég ebben az irányban megtámasztani egy kivételével, azt vízszintes irányban is meg kell támasztani ahhoz, hogy statikailag határozott szerkezetet kapjunk.

A kapott eredményeket látva egy esetben megvizsgáltam a statikailag határozatlan megtámasztás hatását, ekkor minden egyenlítő menti csomópontot x,y,z irányban is megtámasztottam. Az eredményeket a 4-es fejezetben ismertetem.

3.4. A rácshéj-kontinuum megfeleltetés – feszültségek és normálerők közötti kapcsolat

A membránhéj modellben ébredő feszültségeket egy állandó, 6 cm vastagságú, 25 kN/m^2 súlyú vasbeton héj önsúlyát és a gömb felületét, mint a héj középfelületét (membránfelületet) figyelembe véve határoztam meg. Kollár-Hegedűs ^[6] javaslata alapján a membránhéjból számított erőket az egyes kis háromszögekkel párhuzamos érintősíkok által megadott érintési pontokon határoztam meg. Először kiszámoltam a szükséges érintési pontok helyét, majd ezekben a pontokban analitikusan meghatároztam a meridián és gyűrűirányú erők nagyságát, az önsúlyával terhelt membrán gömbkupola egyenleteiből. Ahhoz, hogy ezekből a

feszültségekből a hozzájuk tartozó háromszögek oldalain ébredő normálerőt megkapjam, nem csak a feszültségek nagyságára, hanem az irányára is szükségem volt. Az ennek meghatározásánál használt nevezéktant a 10. ábrán mutatom be. A gyűrűirányú erő (N_θ) egy, a P ponton átmenő vízszintes érintő, így az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektoriális szorzatából egy ezzel párhuzamos irányú vektort kapunk, ezt ábrán \mathbf{n} -nel jelölöm.



10. ábra: A vektorforgatáshoz szükséges szög meghatározása

A következő lépésben a kapott \mathbf{n} vektort a 10. ábrán bemutatott módon a vizsgált háromszög egy csúcsába toljuk, ekkor \mathbf{n} a K pontba mutat. Ezek után egy cos-tételt felírva a KCA , vagy a másik esetben KBC háromszögre, megkapjuk a forgatás szögét (θ).

Ezzel a θ szöggel kell elforgatnunk a P pontban kapott főfeszültségeket, az elforgatott koordináta-rendszerben mért feszültségeket az alábbi képletekből számíthatjuk ki (mivel az N_φ /a meridián irányú erő/ és N_θ főfeszültségek, így a forgatás előtti nyírófeszültség értéke 0, ' jelen esetben az elforgatott koordináta-rendszerben számított feszültségkomponenseket jelöli).

$$N_{\theta'} = \frac{N_\theta + N_\varphi}{2} + \frac{N_\theta - N_\varphi}{2} \cos 2\theta \quad (4.4.1.a)$$

$$N_{\varphi'} = \frac{N_\varphi + N_\theta}{2} - \frac{N_\theta - N_\varphi}{2} \cos 2\theta \quad (4.4.1.b)$$

$$N_{\theta\varphi'} = -\frac{N_\theta - N_\varphi}{2} \sin 2\theta \quad (4.4.1.c)$$

Ezekből az értékekből, ugyancsak Kollár-Hegedűs ^[6] eljárását követve az alábbi képletek segítségével számolhatók ki a háromszögek oldalain ébredő normálerők.

$$N_c = b_c \left(N_{\theta'} - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} N_{\varphi'} - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} N_{\theta\varphi'} \right) \quad (4.4.2.a)$$

$$N_b = b_b \left(\frac{\cos \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} N_{\varphi'} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta)} N_{\theta\varphi'} \right) \quad (4.4.2.b)$$

$$N_a = b_a \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} N_{\varphi'} - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin(\alpha + \beta)} N_{\theta\varphi'} \right) \quad (4.4.2.c)$$

A b_c , b_b , b_a értékek az adott oldalakhoz tartozó magasságok, α , β , γ a háromszög szögei.

Ezt mindhárom felosztás esetén elvégezve az így kapott normálerőket kell összevetnünk a végeselemes program által számolt erőkkel. A héjmodellből számolt értékek esetén az egy oldalhoz tartozó erőt két háromszögből is megkapjuk, tehát ezeket átlagolnunk kell, hogy a rácshéjhoz tudjunk viszonyítani.

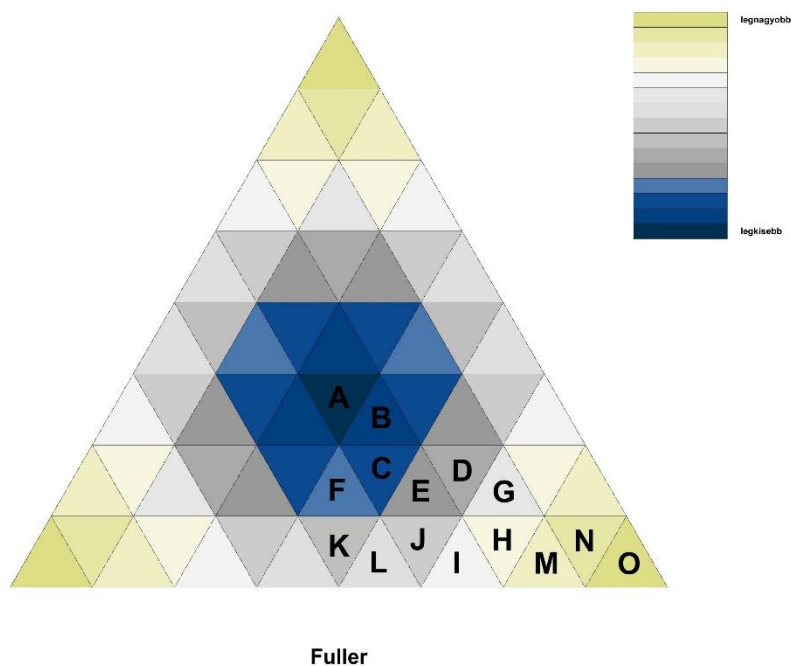
4. EREDMÉNYEK

Különböző felosztásokhoz tartozó η értékeket 8-as frekvencia esetén az alábbi táblázat mutatja. ^[51]-ben szerepelnek ezek az értékek, de a modell validálása miatt ezeket újraszámoltam. Minimális numerikus eltérést jelent, hogy a dolgozatban a rúd hosszakkal számoltam, ^[51]-ben viszont gömbi főkörszakaszokkal számolt értékek szerepelnek.

Felosztás	η
Fuller-féle	1,38
Oldalfelezéses	1,19
Bauersfeld-féle	1,18

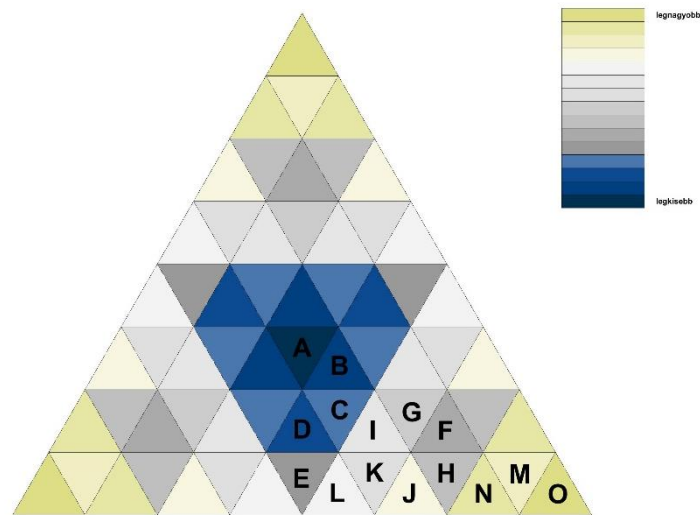
4.1. A D -számok eloszlásának vizsgálata

A Fuller-féle felosztás esetén a saját skálás színezésen megfigyelhető, hogy a legkisebb értékek esnek az ikozaéder oldalának közepére, és onnan egy folyamatos átmenet szerint növekszik a D -szám a csúcsok felé haladva. (A kisebb értékek kék, a nagyobb értékek sárga színnel vannak jelölve.)



11. ábra: Fuller-féle felosztás D -szám eloszlása

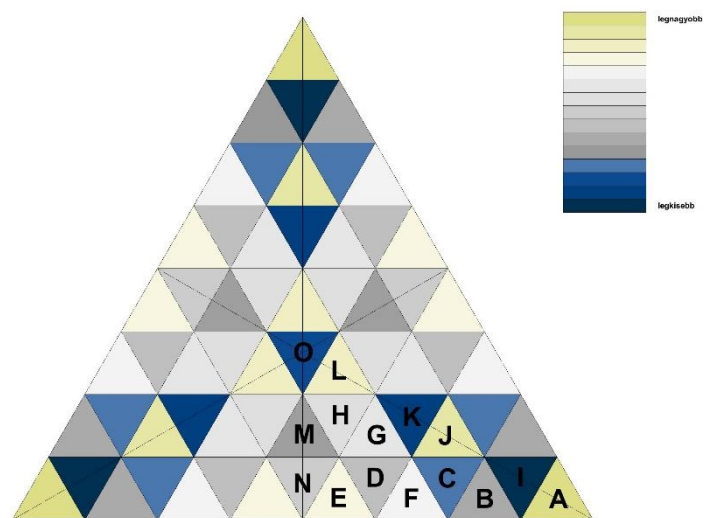
Az *oldalfelezéses felosztás* esetén is hasonló a D -számok eloszlása, mint a Fuller-félénél, ellenben itt a rekurzív szerkesztési mód miatt a D értékek csökkenésében is egy rekurzív minta figyelhető meg. Az n frekvenciás esetről tovább lépve az $n+1$ frekvenciásra minden kis háromszöget négy új háromszögre bontunk az oldalívek felezőpontjainak összekötésével. Így a kialakuló háromszögek közül a legbelsőnek a legkisebb a D értéke, és a külsőknek nagyobb.



Oldalfelezés

12. ábra: Oldalfelezéses felosztás D -szám eloszlása

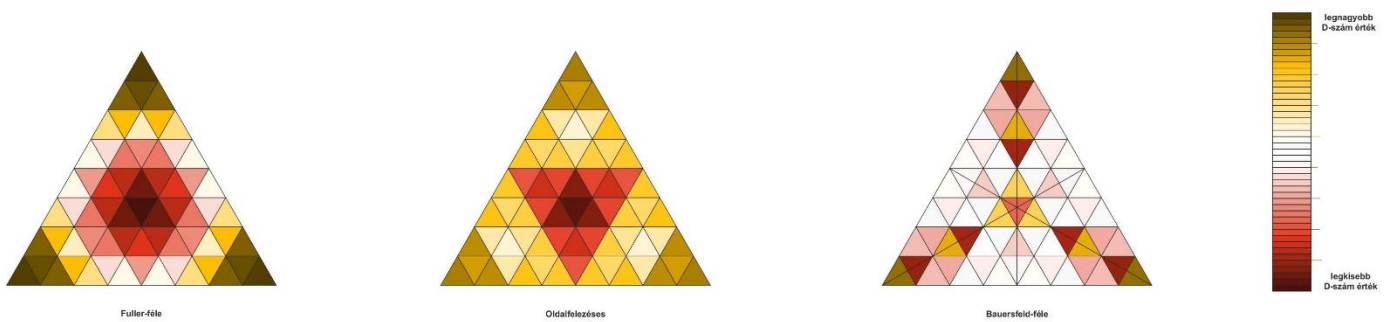
A *Bauersfeld-féle felosztás* lényegi eleme, hogy azonos területű (gömbi) háromszögek létrehozására törekszik. A kialakuló mintázatot elemezve azt látjuk, hogy a 'szabályos' elemek D -száma elég hasonló, vagyis terület/kerület hányados is közel állandó. Nem szabályos elemek azok, amik a Schwartz háromszög belső élei mentén helyezkednek el, mert ezek esetében a szimmetria megtartása miatt eltér a szerkesztés az algoritmustól. Jellemzően itt láthatóak a D -szám szélsőértékei.



Bauersfeld

13. ábra: Bauersfeld-féle felosztás D -szám eloszlása

Az abszolút skálás vizsgálat:



14. ábra: D -számok abszolút skála szerinti eloszlása

Ennél a vizsgálatnál az figyelhető meg, hogy összességében a *legszélsőségesebb értékek* a Fuller-féle felosztás esetén alakulnak ki. Az oldalfelezéses felosztás a kisebb és nagyobb értékek közül is az átlag körülieket mutatja. A skála közepe, világos része szinte teljes egészében a Bauersfeld-féle felosztásnál jelenik meg, tehát ennek a felosztásnak a 'szabályos' része a D -szám szempontjából a legegyszerűsebb eloszlást mutatja, azonban a belső él mentén (Scwhartz-háromszög átfogója) nagyon eltérő értékeket kapunk. A D számok legkisebb szórása (tehát a *legkisebb d*) a Bauersfeld-féle felosztás esetén adódik. Ezt mutatják az alábbi táblázatok. A betűzést az egyes felosztások esetén a 10., 11., 12. ábrák mutatják.

	K	T	D'	Dref
Gömbi ikozaéder egy oldala	6,3177	1,19513	2,643101587	2,234301875

FULLER-FÉLE								
Háromszög	a	b	c	K	T	D'	D	D/Dref
A	0,3136	0,3136	0,3136	0,9408	0,043115078	10,91033623	2,593932	1,160958806
B	0,3136	0,310425	0,310425	0,93445	0,042524945	10,98708053	2,612178	1,169125096
C	0,310425	0,30496	0,3104	0,925785	0,041724784	11,09394586	2,637586	1,180496538
D	0,2934	0,2934	0,2971	0,8839	0,037997977	11,63088235	2,765242	1,237631454
E	0,3104	0,2934	0,2978	0,9016	0,039487657	11,41622567	2,714208	1,214790036
F	0,30496	0,30496	0,3054	0,91532	0,040784079	11,22153564	2,66792	1,194073248
G	0,2779	0,2779	0,2971	0,8529	0,035245822	12,09930649	2,87661	1,287476035
H	0,2779	0,2818	0,2689	0,8286	0,033313505	12,4363978	2,956754	1,32334561
I	0,2689	0,2906	0,2786	0,8381	0,034024235	12,31622114	2,928182	1,310557722
J	0,2978	0,2906	0,283	0,8714	0,036875594	11,81540292	2,809112	1,257266118
K	0,3054	0,2872	0,2872	0,8798	0,037547318	11,71588329	2,785451	1,246676326
L	0,2872	0,283	0,2913	0,8615	0,036065422	11,94357297	2,839584	1,270904574
M	0,2818	0,2555	0,2481	0,7854	0,029648858	13,24502932	3,149006	1,409391344
N	0,2481	0,2481	0,2669	0,7631	0,028139371	13,55929404	3,223722	1,442831962
O	0,2274	0,2274	0,2669	0,7217	0,024751648	14,57882711	3,466116	1,551319534

η	σd	$d=D_{max}/D_{min}$
1,379067722	0,238579	1,336239947

OLDALFELEZÉS								
Háromszög	a	b	c	K	T	D'	D	D/Dref
A	0,3135	0,3135	0,3135	0,9405	0,043087243	10,91390316	2,59478	1,16133836
B	0,3104	0,3135	0,3104	0,9343	0,042511263	10,98885246	2,6126	1,169313647
C	0,3104	0,3017	0,2988	0,9109	0,040354431	11,28624507	2,683305	1,20095892
D	0,3017	0,3132	0,3017	0,9166	0,040860492	11,21621333	2,666655	1,193506907
E	0,2988	0,3132	0,2988	0,9108	0,040315998	11,29576397	2,685568	1,201971816
F	0,2749	0,309	0,2749	0,8588	0,035494568	12,09762589	2,876211	1,287297203
G	0,2724	0,309	0,2724	0,8538	0,035017693	12,19098018	2,898406	1,297230948
H	0,3069	0,2749	0,2724	0,8542	0,03512448	12,15961053	2,890947	1,293892931
I	0,2724	0,2656	0,2988	0,8368	0,033741012	12,40033925	2,948181	1,319508653
J	0,2632	0,3008	0,2724	0,8364	0,033637832	12,43243015	2,95581	1,322923416
K	0,3008	0,2747	0,2656	0,8411	0,034072119	12,34293642	2,934533	1,313400471
L	0,2632	0,2747	0,2988	0,8367	0,033715668	12,40817771	2,950044	1,320342736
M	0,2655	0,3088	0,2655	0,8398	0,03368048	12,46716214	2,964068	1,326619215
N	0,3069	0,2655	0,2632	0,8356	0,033355083	12,52582714	2,978015	1,332861703
O	0,2632	0,3088	0,2632	0,8352	0,033235217	12,56498504	2,987325	1,33702846

η	σd	$d=D_{max}/D_{min}$
1,191109422	0,141391	1,151282439

BAUERSFELD-FÉLE								
Háromszög	a	b	c	K	T	D'	D	D/Dref
A	0,2632	0,2632	0,3088	0,8352	0,033235217	12,56498504	2,987325	1,33702846
B	0,2632	0,311	0,3115	0,8857	0,037530715	11,79966855	2,805371	1,255591838
C	0,3115	0,3085	0,2661	0,8861	0,037664172	11,76316831	2,796693	1,251707881
D	0,3042	0,3109	0,266	0,8811	0,037273892	11,81926473	2,81003	1,257677049
E	0,2632	0,3109	0,3017	0,8758	0,03677078	11,90891232	2,831344	1,267216366
F	0,2632	0,3085	0,3042	0,8759	0,036795762	11,90218601	2,829745	1,266500626
G	0,266	0,3085	0,3017	0,8762	0,036903293	11,8715693	2,822466	1,26324273
H	0,3024	0,3017	0,2694	0,8735	0,036807713	11,8657195	2,821075	1,262620259
I	0,311	0,311	0,3088	0,9308	0,042190861	11,03082499	2,622579	1,173779905
J	0,2661	0,2661	0,3099	0,8421	0,033856206	12,43642001	2,956759	1,323347973
K	0,3085	0,3085	0,3099	0,9269	0,041834599	11,07815078	2,63383	1,178815798
L	0,2694	0,2694	0,3009	0,8397	0,033955536	12,36469968	2,939707	1,315716279
M	0,3024	0,3024	0,2716	0,8764	0,037089107	11,81478966	2,808966	1,257200861
N	0,3017	0,3017	0,2716	0,875	0,036980214	11,83065091	2,812737	1,258888643
O	0,3009	0,3009	0,3009	0,9027	0,039654459	11,38207445	2,706088	1,211156035

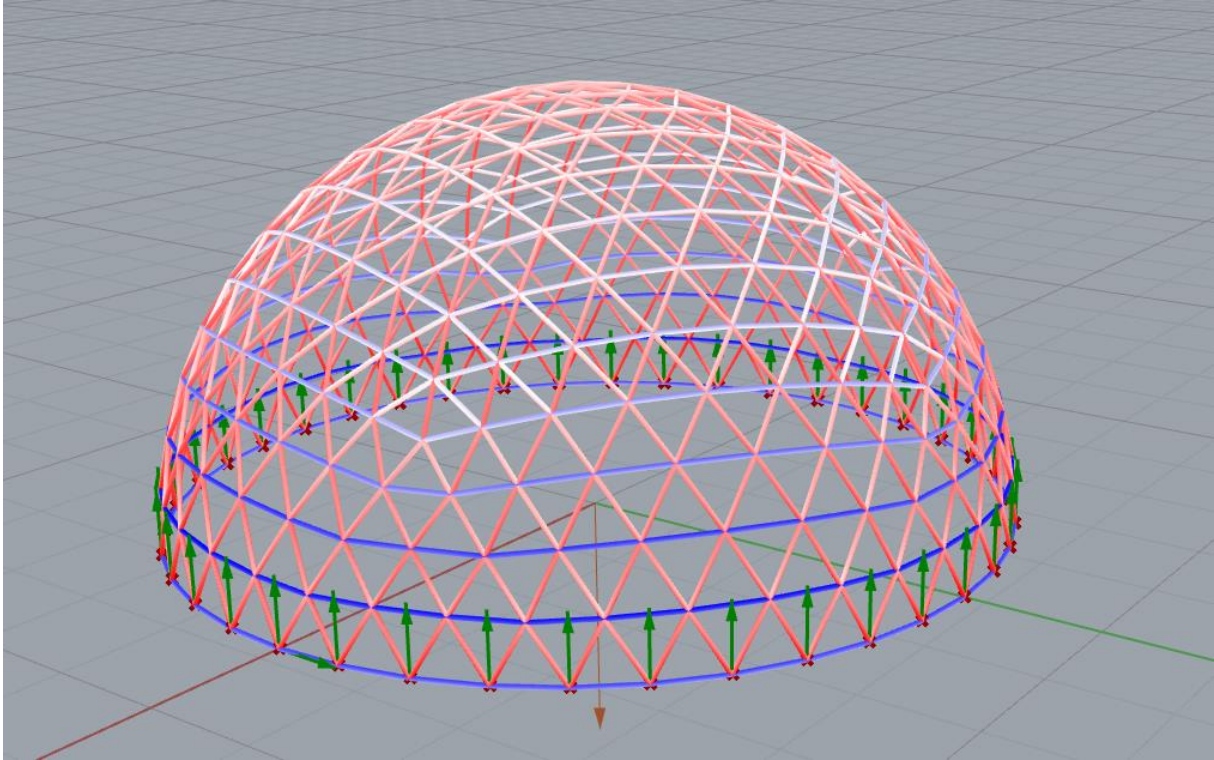
η	σd	$d=D_{max}/D_{min}$
1,183510638	0,099337	1,139079357

15. ábra: D-számok szórása

Figyelem! A 11-13. ábra esetében, a csatlakozó táblázattal együtt, eltérő betűzést használtam. A táblázatokban szereplő D_{ref} egy ideális szabályos háromszög D száma adott frekvencia mellett.

4.2. A végelelemes rácsmodellek

4.2.1. A Fuller-féle felosztás végelelemes modellje



16. ábra: Fuller-féle felosztás végelelemes modellje

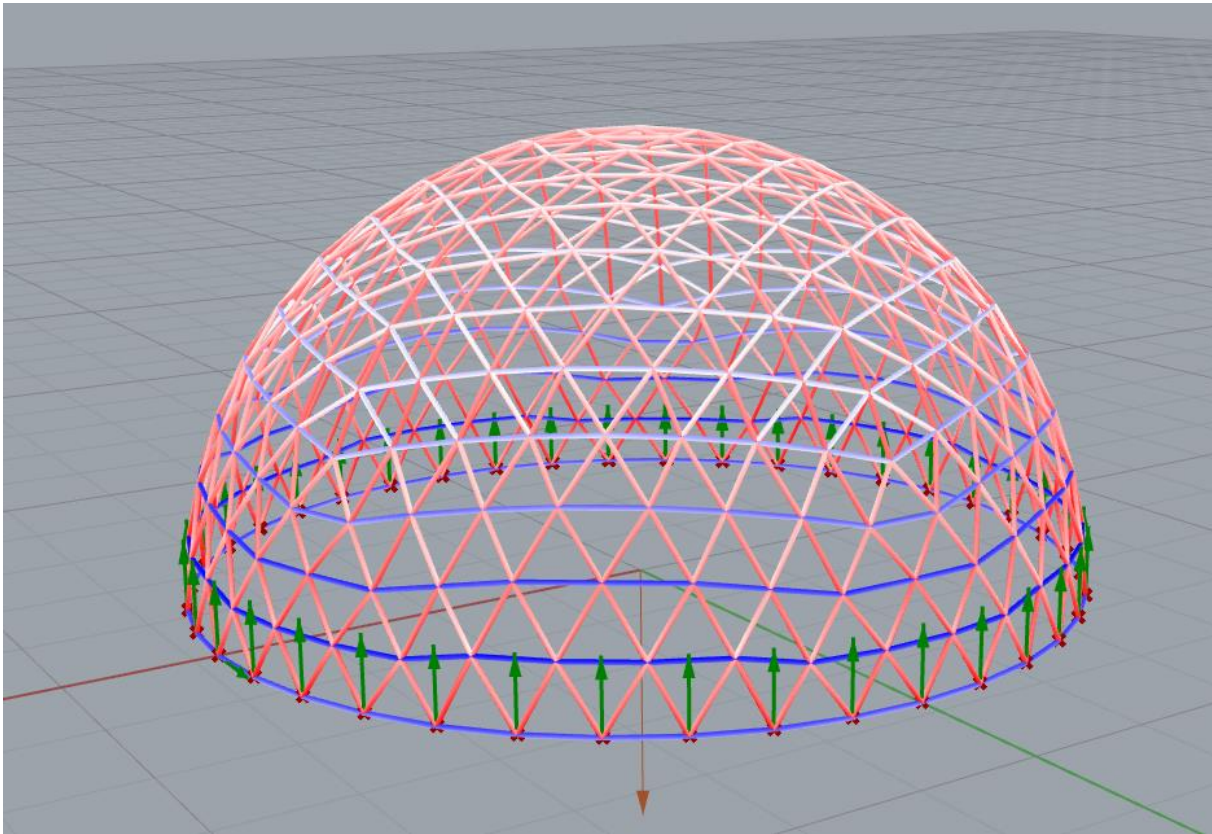
A 3.3 fejezetben tárgyaltak szerint ennél a felosztásnál az egyenlítő mentén elhelyezkedő összes csomópontot megtámasztottam függőleges irányban. Itt azért megfelelő a függőleges irány, mert a megtámasztások irányának az adott pontban lévő gömbi meridián irányú érintő irányával kell megegyezniük. A bemutatott megtámasztás mellett a teljes szerkezet két szabadsági fokkal rendelkezik (tengelye körül el tud fordulni, illetve vízszintes síkon el tud mozdulni, de a vizsgált speciális teheresetben (önsúlyteher) ez nem gátolja a belső erők meghatározását.)

A kialakuló belsőerőknél megfigyelhető, hogy gyűrűirányban a kupola alsó részén, a membránmodellből várt viselkedés szerint húzott a szerkezet, ezt jelöli az ábrán a kék szín. Minél sötétebb kéket látunk, annál nagyobb húzás ébred az adott rudakban.

A piros színnel jelölt rudak nyomottak, ahol szintén a sötétebb szín mutatja a nagyobb erőt. Az önsúlyteherrel való terhelés miatt igaz, hogy a kupola teteje felé kisebb, míg az alján nagyobb erők ébrednek, ez főleg a meridián-irányú igénybevételeknél figyelhető meg.

Érdekes jelenség, hogy a héjmodellből eltérően a legnagyobb gyűrűerő nem a kupola pereménél ébred, hanem egy 'sorral' feljebb.

4.2.2. Az oldalfelezéses felosztás végeselemes modellje



17. ábra: Oldalfelezéses felosztás végeselemes modellje

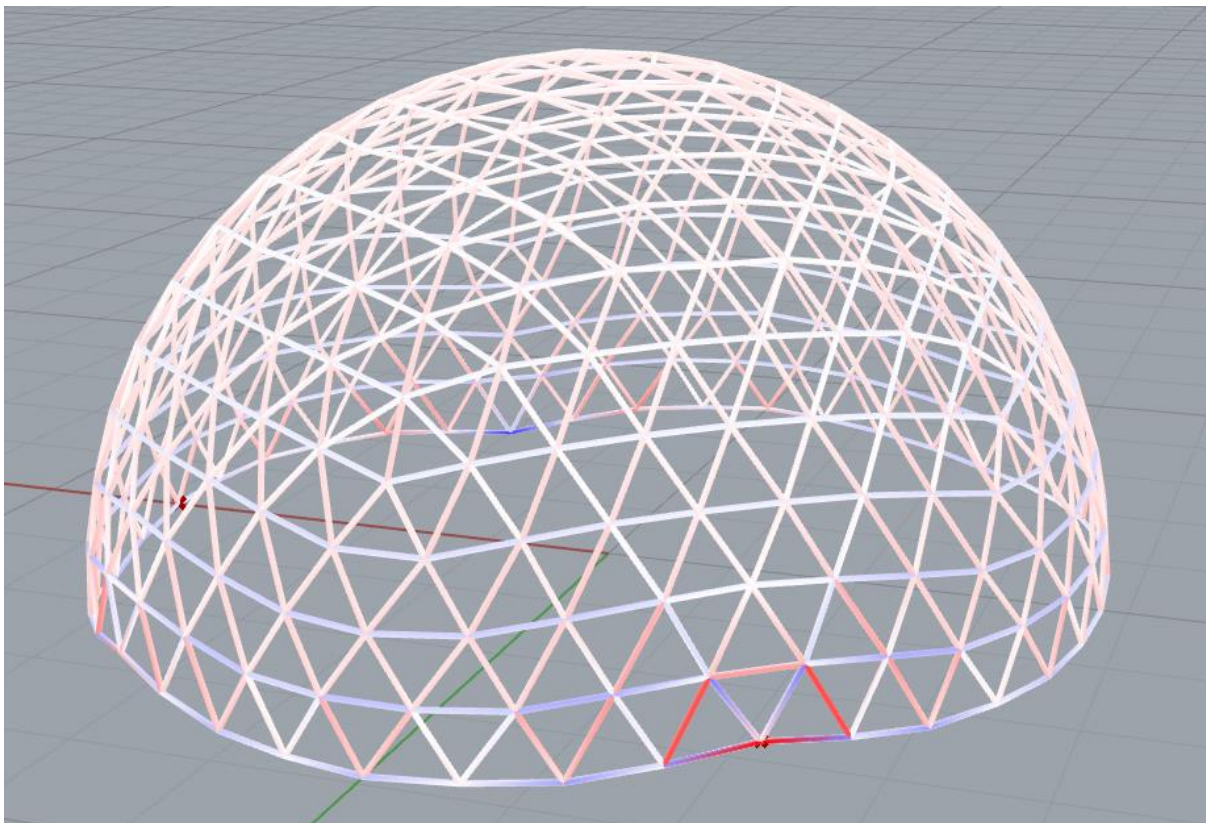
Az egyenlítő ez esetben is vízszintes, az alkalmazott megtámasztás az előzőekben leírtakkal egyező, így itt is membrán megtámasztás jön létre, a rudakban csak normálerők ébrednek. A megtámasztás módjából a Fuller-féle felosztáshoz hasonlóan következik, hogy a szerkezetnek két szabadsági foka van: tengelye körül el tud fordulni, illetve vízszintes síkon el tud mozdulni. Ez önsúlyteher esetén a belső-erők számítását ebben az esetben sem befolyásolja.

Az erők játéka is egészen hasonlít az előző ábrán látottakhoz. Megfigyelhető a félgömb membránhéj modell szerint várt viselkedés. A kék szín itt is a húzást jelöli, és minél sötétebb, annál nagyobbak az igénybevételek. A piros szín a nyomott rudakat mutatja, és az igénybevétel mértékét szintén az árnyalatok jelzik. A gyűrűerők eloszlására a fentiekben elmondottak itt is igazak.

4.2.3. A Bauersfeld-féle felosztás végeselemes modellje

A Bauersfeld-féle felosztás esetén az egyenlítő már nem egy vízszintes főkör, ami a szerkesztésének módszeréből adódik.

A megtámasztások ebben az esetben is a membrán viselkedést segítik elő. Minden olyan ponton, ami ezen a „hullámos egyenlítőn” helyezkedik el úgy alakítottam ki a támaszokat, hogy a rudakban csak normálerő ébredjen. Ehhez arra volt szükség, hogy a gömbnek az adott ponton átmenő függőleges síkú főköréhez a pontban lévő érintő irányával egyezzen meg a támaszerő.



18. ábra: Bauersfeld-féle felosztás végeelemes modellje

Az előző két esethez hasonlóan itt is egy pontot kiválasztottam, amelyet nem csak az imént leírt módon, hanem arra merőlegesen is megtámasztottam. Viszont mivel itt nem minden csomópont megegyező, így a vízszintes támaszt egy olyan pontba helyeztem, ami a vízszintes síkú gömbi főkörön helyezkedik el.

A szerkezetnek ebben az esetben nem alakul ki egyetlen szabadsági foka sem, hiszen ezt a különböző irányú támaszerők meggátolják.

A gyűrűerők eloszlására a fentiekben elmondottak itt is igazak, illetve bizonyos megtámasztási pontokon a korábbiakban nem tapasztalt lokálisan kiugró erők jelentek meg (ld. 18-as ábra), ezek azonban a rúderök általános tendenciáját nem változtatták meg.

4.3. A rácsozatok és a héj statikai működésének összevetése

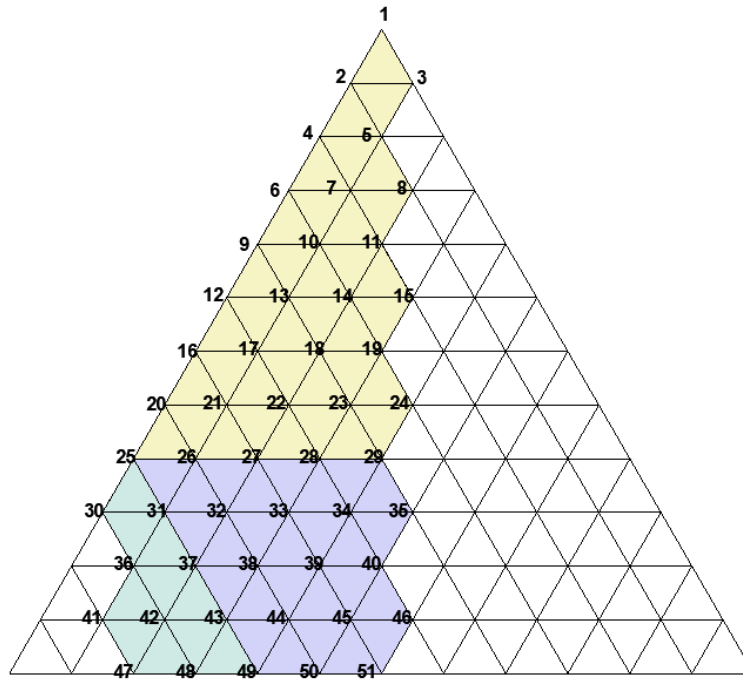
A szimmetria tulajdonságokat kihasználva csak a félgömb kupola 1/10-ére számoltam ki a szükséges értékeket. A kupola tetején a gömbi ikozaéder öt lapja találkozik egy csúcban, és minden lap tengelyesen szimmetrikus a felosztások szempontjából, így adódik a 10-es szimmetria.

A referenciaként használt héj súlyát, csak úgy, mint a rácshéj rudjainak keresztmetszetét (súlyát) önkényesen, egymástól függetlenül vettem fel. Így természetesen nem várhatom a két modellből kapott rúderök egyezését. Ellenben belátható, hogy a héjmodellből kapott értékek szabadon skálázhatóak, N_c , N_b és N_a a súllyal lineárisan változik. Ugyancsak nem evidens, hogy

használhatom ugyanazt a referencia hajat mindhárom esetben (erre az eredmények értékelésénél visszatérek), de jelen vizsgálat során ez történt.

4.3.1. A membránhájmodell alkalmazhatósága a vizsgált felosztások esetén

A felosztások esetén az oldalak számozása a 19. ábrán látható módon a csúcsok számainak összeolvasásával történik. A különböző színek az ikozaéder különböző oldalait jelölik. Mivel azonos topológiákat (de különböző felosztásokat) vizsgálók, így mindhárom esetben alkalmazható az alábbi ábrán mutatott oldalszámozás.



19. ábra: A vizsgált gömbfelület

A rácsháj-kontinuum megfeleltetésre a Kollár-Hegedűs könyv [6] szerinti összefüggéseket használtam, amelyeket a szintén a 3.3.-as fejezetben ismertettem. Eszerint az elvi séma szerint számoltam ki a hájból származó, az egyes háromszögek oldalaival párhuzamos feszültségeket, a rácshájokban ébredő rüderőket pedig a vége-selemes modellből olvastam ki. A könyvben a módszer leírása után jelzi a szerző, hogy nem garantált, hogy helyes eredményre jutunk a kezdetben felvett statikailag határozott modellel, ez úgy javítható, ha a szerkezetet statikailag határozatlanná tesszük. Ekkor átlagosan közelebb lesznek egymáshoz a különböző szerkezetekből számolt igénybevételek, viszont a perem mentén nagyobb eltéréseket tapasztalunk.

	Fuller	Oldalfelezés	Oldalfelezés (stat.hat.lan)	Bauersfeld
közös referencia háj				
átlag	1,0165	1,0011	1,0154	0,9976
szórás	0,2024	0,1918	0,2057	0,1856
saját háj				
átlag	0,9999	1,0000	1,0281	0,9999
szórás	0,1991	0,2167	0,2082	0,1860

	Simaság (globális)			
η	1,3791	1,1911	1,1911	0,1835
d	1,3362	1,1513	1,1513	1,1391

A membránhéjmodellből kapott értékeket összevetve a rácshéj modellből számított értékekkel összességében (aránylag) jó egyezést kaptam: a közös referenciaként meghatározott héj rúderőivel átlagosan 95%-os volt az egyezés, a szórás 19-17% között változott, felosztástól függően. Kvalitatív az egyezés jó: az általam kiszámolt értékeken mindhárom esetben megfigyelhető, hogy a héjmodellből kapott értékek és a rácsmodellből kapott értékek tendenciája azonos (a ferde/függőleges rudakban az erők nagysága a támasz felé nő, a (nagyjából) gyűrűirányú rúdsorok egymáshoz képest ugyancsak a héjban megfigyelt tendencia szerint változnak – kivétel a peremnél). Azonban lokálisan vannak eltérések, aminek feltehetően geometriai okai lehetnek. Globálisan három 'zavart' zónát azonosítottam (26. ábra): a nulla gyűrűerő magassága – ez kiugró eltéréseket eredményez, hiszen itt a rácsrudakban nem pont nulla, hanem nagyon kis erők ébrednek. Arányaiban ez nagyon eltérhet a két modellben akkor is, ha numerikusan közel van a két érték. A 25-ös csúcsonál 5 ikozaéder lap található – itt is, minden felosztásban megfigyelhető, hogy aránylag rossz az egyezés a két modellből. Ennek oka az, hogy a Kollár-Hegedűs eljárás háromszög sorok (ez esetben gyűrű irányban) létét feltételezi, itt pedig 'sorokról' nem beszélhetünk. A perem mentén, ahogy már jeleztem korábban, a rácsmodell az egy sorral feljebbinnél kisebb „gyűrű irányú” erőket jelez, ennek az oka egyelőre nem világos, de az egyezést elrontja. Az aránylag nagy szórás miatt az oldalfelvezéses felosztás esetén elvégeztem egy olyan végeselemes számítást is, amelyben minden támaszt x , y , z irányokban támasztottam meg – bízva benne, hogy a Kollár-Hegedűs könyvben ^[6] leírtakkal összhangban a perem mentén ugyan romlik, de a peremtől távol javul az egyezés. A kapott eredmények a kupola felső részén nem különböztek érdemben a statikailag határozott megtámasztással modellezett szerkezet értékeitől, viszont az alsó részen megnövekedtek az igénybevételek, és a legalsó gyűrűben (a várakozásoknak megfelelően) 0 értékeket kaptam.

Ahogy fent jeleztem, a rácsmodellek összevetéséhez egy héjmodellt használtam *közös bázisként*. A rácshéj-kontinuum megfeleltetés során a héjból kapott normálerőket arányosítottam egy általam meghatározott, a felosztásokat leíró tényezővel. Ezt az alábbiak szerint határoztam meg: Ezt a tényezőt minden felosztás esetén egységesen 0,68-nak vettem. Az önkényesen felvett héjból és a rácsból kapott normálerők hányadosainak átlagát vettem mindhárom hálózat esetén (ld. melléklet), majd ezt a három értéket átlagolva kaptam meg az arányosító tényezőt (0,68). Ezzel a tényezővel osztottam el a héjmodellből kapott erőket minden felosztás esetén. A rúderők hányadosának átlagos értékét és azok szórását mutatja egy-egy felosztásra a fenti táblázat.

Az egyes felosztásokhoz meghatároztam a saját 'ekvivalens' héjukat is, amikor a rúderők arányának átlaga éppen 1-re adódott. Ez esetben a szórás abszolútértéke természetesen nőtt, de a felosztások egymáshoz képesti sorrendjén ez mit sem változtat.

4.3.2. A globális simaságot leíró paraméterek és statikai működés közötti összefüggés

A fenti táblázatból kiolvasható, hogy a simaság leírására használt mindkét globális paraméter, a η és a d is korrelál a szórással, vagyis minél simább egy felosztás, annál jobban passzol az erőjátéka a membránmodellből számítottához. A két mérőszám között minőségi különbség nincs

(egyik sem jelzi jobban a másikonál az egyezést, például a Fuller-féle hálózat simasága geometriai értelemben sokkal rosszabb a másik kettőnél, mindkét paraméter szerint, azonban szerkezeti működése az értékek szórása alapján elég hasonló). A kiugró értékekhez tartozó éleket (ld. zavart zónák fent) az átlag és a szórás számításakor is kivettem a vizsgálatból, hogy egységesebb képet kapjak a felosztások általános felületeire nézve. A részletes eredményeket a mellékletekben található táblázatok szemléltetik. Megállapítható, hogy globálisan a Bauersfeld-féle felosztás esetén egyezik legjobban a héjmodellből és a rácsmodellből számított erőjáték.

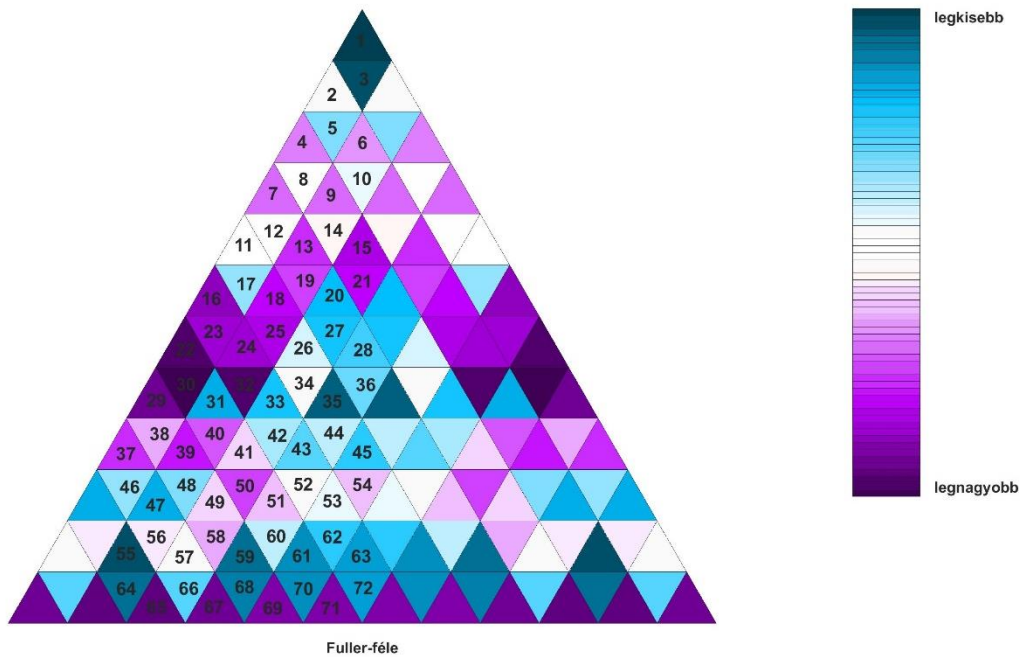
4.4. Az eredmények kiértékelése felosztásonként

Az alábbiakban az egyes felosztásokat külön is elemzem, illetve megvizsgálom, hogy a vizsgált tartományon belül mennyire egyezik a kétféle modellből számított erőjáték, lokálisan, egy-egy háromszög esetében.

Az összehasonlítás alapját a héjmodellből arányosított igénybevételek és a végeselemes modellből kiolvasott rúderők hányadosai adták minden felosztás minden háromszöge esetén. A vizsgált részen a háromszögek oldalaira elvégezve az imént ismertetett eljárást, három tényezőt határoztam meg. Az első a három oldalhoz tartozó arányszámok *átlaga*, a második a „meridián” irányú oldalakhoz tartozó arányszámok átlaga (*átlag2*), a harmadik pedig a három arányszám *szórása*. Az *átlag2* tényezőre azért volt szükség, mert a felosztások esetén többnyire a gyűrűirányú értékekben jelennek meg a már említett kiugró esetek. A vizsgálatot a továbbiakban a meghatározott *szórás* értékekkel végzem el a 19. ábrán látható tartományban, a részletes eredményeket a mellékletben található táblázatok ’kimutatás’ lapjain közlöm.

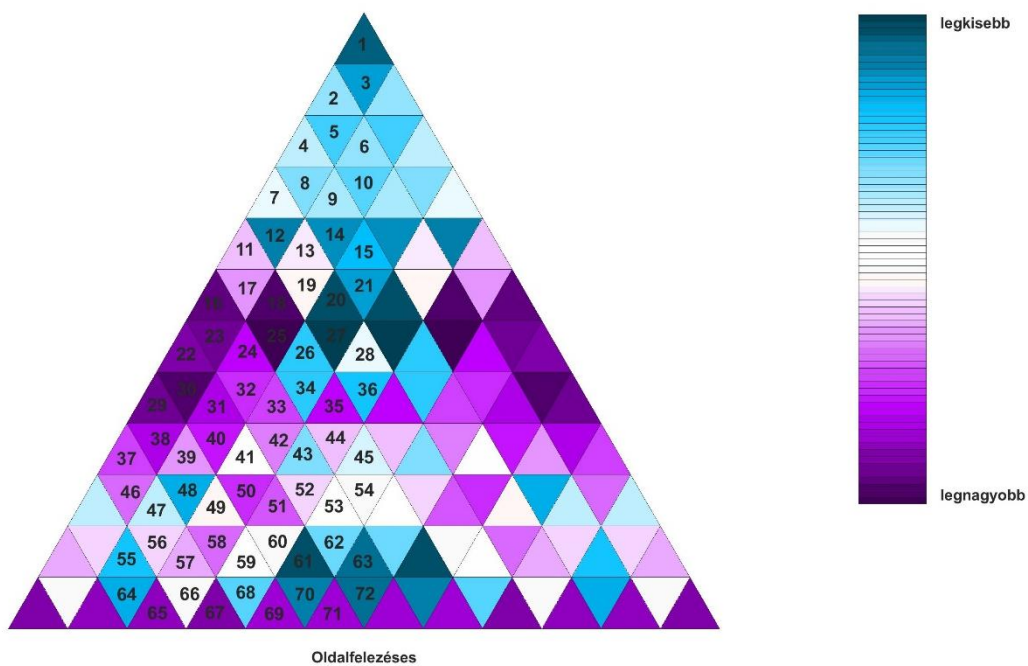
A felosztások mindegyikénél készítettem egy színezett ábrát, amely a háromszögekre kiszámolt szórás értékek eloszlását mutatja a vizsgált gömbtizeden, hasonlóan ahhoz, amilyen ábrák a *D*-számok bemutatására készültek. Az ábránkon látható számozások mutatják a háromszögek mellékletekben használt számozását.

A Fuller-féle felosztás esetén a színezett ábrán megfigyelhető hogy a nagyobb szórásértékek az ikozaéderek oldalainak találkozásánál, valamint a perem mentén alakulnak ki.



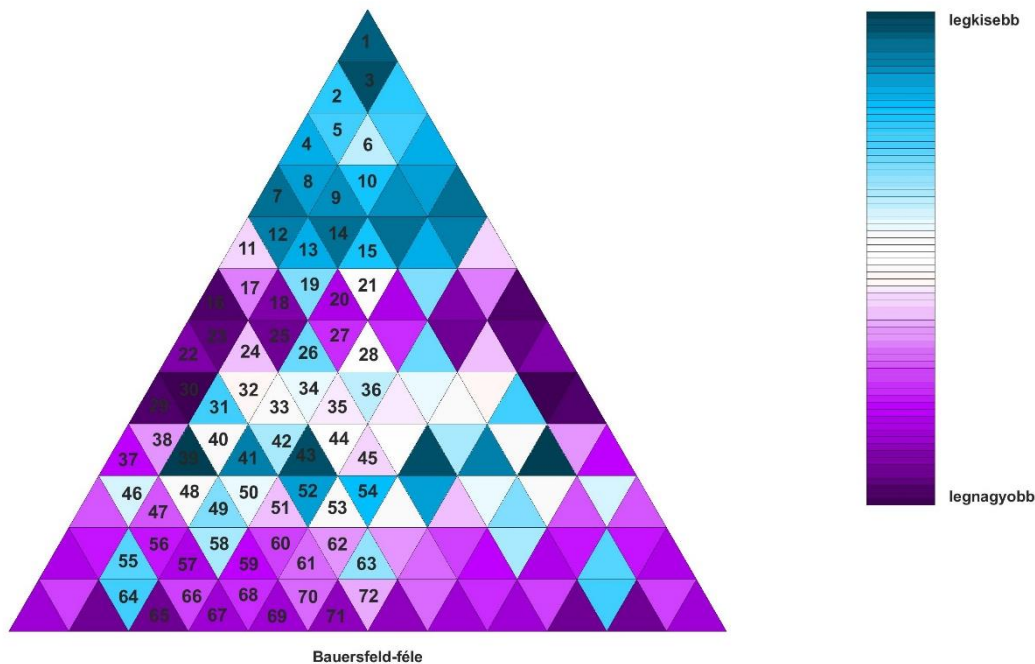
20. ábra: Fuller-féle felosztás - szórásértékek eloszlása

Az oldalfelezéses felosztás kisebb szórásértékei a félgömbkupola tetején helyezkednek el, míg a nagyobb szórások egy csoportja az ikozaéder a vizsgált területben szereplő másik csúcsa köré rendeződik.



21. ábra: Oldalfelezéses felosztás - szórásértékek eloszlása

A Bauersfeld-féle felosztásban a kisebb értékek szintén a félgömb kupola tetejére kerülnek, viszont itt a perem mentén egyértelműen a nagy szórásértékek helyezkednek el.



22. ábra: Bauersfeld-féle felosztás - szórásértékek eloszlása

A Bauersfeld-féle felosztás szimmetriájában is jelentkezik egy kis egyenlőtlenség: a kupola alján a lapok szimmetria tengelyei mentén egyre nagyobb eltérések mutatkoznak a végeelemes modellhez képest. Ennek oka, hogy két egymással szemben lévő (a vizsgált részen kívül eső) csomóponti támasznál jelentősen nagyobb erők tapasztalhatók, ez megfigyelhető a 18. ábrán. Ezek az erők, bár a vizsgált részbe éppen nem esnek bele, mégis kihatással vannak arra, így aszimmetriát okoznak (ez az aszimmetria a 22-es ábrán nincs megjelenítve, de a 36,45,54,63,72 háromszögek esetében azt eredményezi, hogy a rácsmodellben a ferde-függőleges rudakban nem azonos erő ébred, míg a héjmodell szerint igen).

A színezések mintázata meglehetősen eltér egymástól, különösen a Fuller-féle hálózat esetén, mivel ott nem jelenik meg szignifikánsan, hogy a kupola tetején kis szórásértékekkel rendelkező háromszögek vannak, míg a másik két felosztás esetén ez egyértelműen látszik. Azonban a globális zavart zónák jelenléte mindhárom esetben megfigyelhető (26. ábra) – bár a Fuller-féle szintén kivétel: ott a nulla-közeli gyűrűerő régiójában szerencsésen egyezett pl. a számított erők előjele (míg a másik két esetben tipikusan nem), így ott kicsi a kapott értékek közötti eltérés.

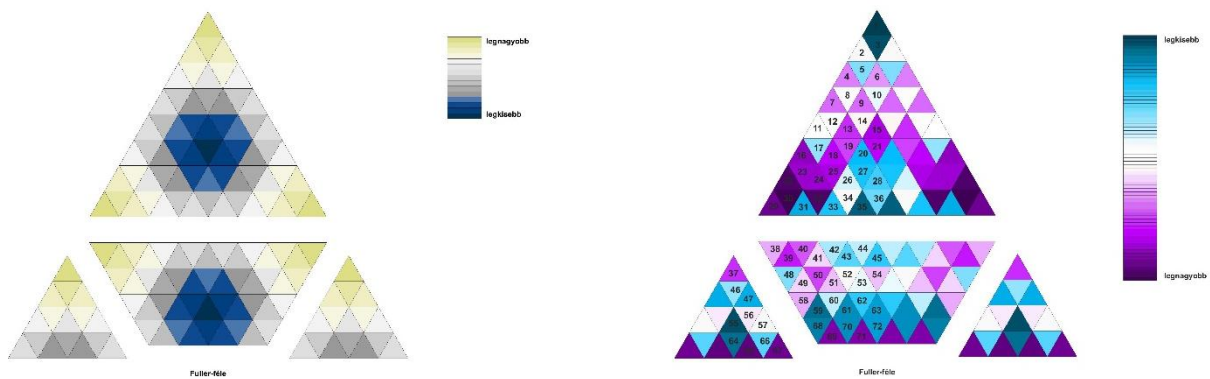
4.4.1. Korreláció a D -szám és a héjmodell között

A D -szám olyan lokális geometriai jellemző, ami lehetővé teszi, hogy vizsgáljuk az eloszlását a belső-erőjáték alakulása függvényében (és viszont). A 2-es fejezetben leírtak szerint azt reméltem, hogy a kisebb D -szám jobb egyezést jelent a rácshej-és a membránhej modellből számított értékek között:

Különösen a 4.4 fejezet elején ismertetett *átlag* és *szórás* értékek közül jobbakat illetve kisebbeket kellene kapnunk, de két fontos tényező befolyásolhatja ezt. A rúderőkre hatással vannak a szomszédos háromszögekből kapott értékek is, így ha azok a háromszögek „torzak”,

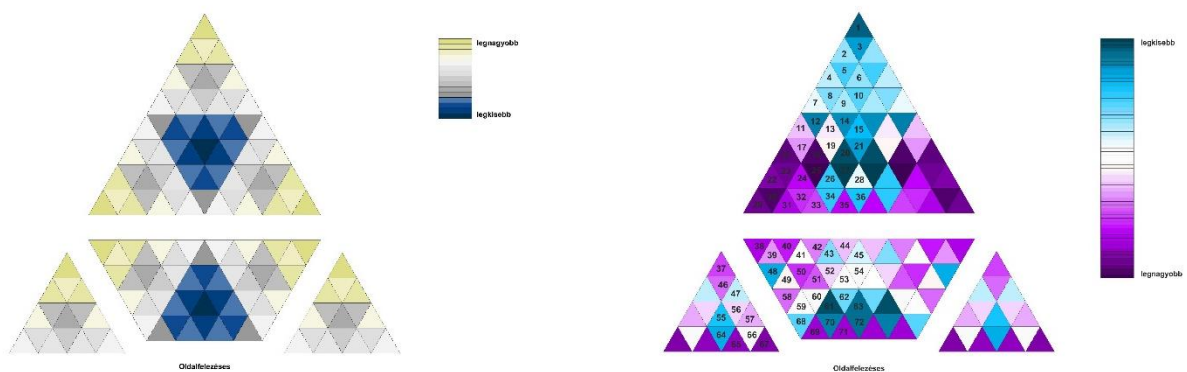
akkor elronthatják az egyezést. A másik tényező, hogy a kis D -szám önmagában nem elég, mivel adott *kerület* esetén lenne igaz a héjmodell és a D -számok közötti összefüggés, ezért az adott háromszögek esetén annak átlagos oldalhosszához kellene viszonyítani. Külön kifejtés nélkül megjegyezzük, hogy megvizsgáltuk ezt a lehetőséget, de érdemi változást nem jelent (a η elég alacsony ennél a felosztásnál, az teljes felosztásra jellemző átlagos rúdhossztól nem nagyon térnek el háromszögenként a rudak).

A D számok eloszlását és a belső erő értékek szórását bemutató színezett ábrákat felosztásonként párban közöljük a 23-25-ös ábrán. A 4.1. és a 4.3. fejezetek alapján megállapíthatjuk, hogy a Bauersfeld-féle felosztásnál kapjuk a legkedvezőbb értékeket, mivel a D -számok szórásában, és belső-értékek szórásában egyaránt ennél a felosztásnál adódnak a legkisebb számértékek.

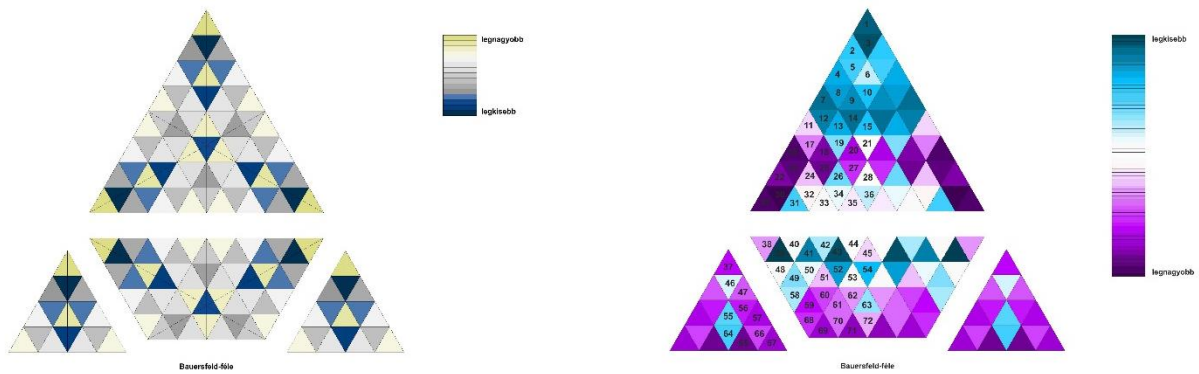


23. ábra: Fuller-féle felosztás D -szám és szórásérték eloszlások összehasonlítása

Ezzel szemben a színezett D -szám és szórás eloszlás ábrákat vizsgálva nem mutatkozik ilyen egyértelmű kapcsolat. A D -szám színezett ábráin mindhárom felosztás esetén megfigyelhetők olyan szabályosságok, amelyek a szórásértékek ábráin nem jelennek meg tisztán. Az ikozaéder lefelé forduló oldalán található tendenciára utaló jeleket a különböző típusú színezett ábrák esetén.

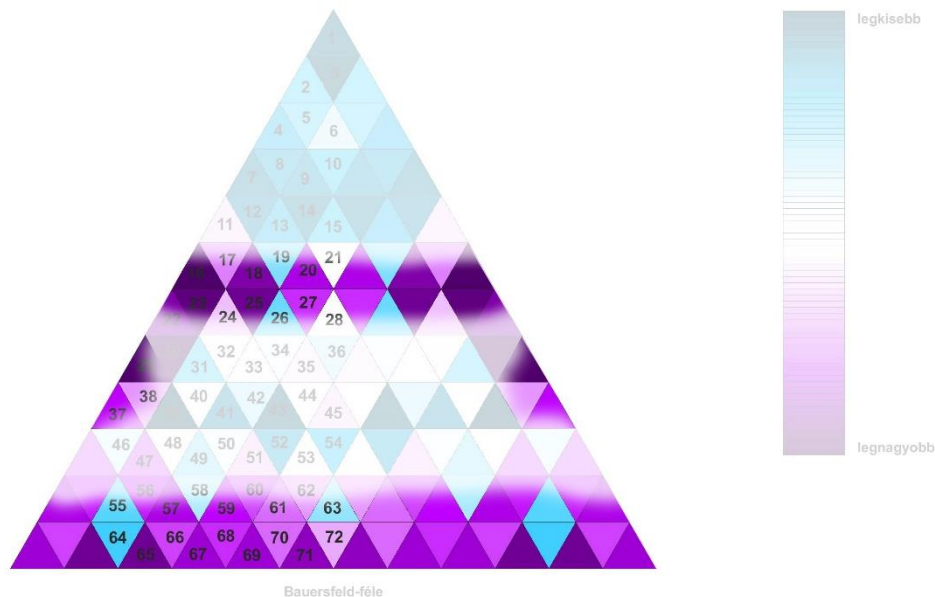


24. ábra: Oldalfelvezéses felosztás D -szám és szórásérték eloszlások összehasonlítása



25. ábra: Bauersfeld-féle felosztás D -szám és szórásérték eloszlások összehasonlítása

Arra a következtetésre jutottam, hogy az eltéréseket két ábrásor között elsősorban a *zavart zónák* okozzák (26. ábra) amelyek a 11, 13, 16, 17-es háromszögek gyűrűerőinél, illetve a 19-es háromszög 20-26-os élénél jönnek létre.



26. ábra: A kiugró értékek helyei

Összefoglalóan elmondható, hogy a D -szám eloszlása és a belső-erőjáték lokális 'membránszerűsége' közötti vélt kapcsolatot jelen vizsgálat egyértelműen nem tudta igazolni. Azonban annak szemléltetésére jó a fenti ábrásor (23-25), hogy hasonló globális paraméterekkel (elsősorban szórás, átlag) bíró felosztások lokális szerkezeti viselkedése (pontosabban annak 'membránszerűsége') meglehetősen eltérő lehet.

5.ÖSSZEGZÉS, LEHETSÉGES KUTATÁSI IRÁNYOK

- A fentiekben meghatároztam három (Fuller-féle, oldalfelezéses, Bauersfeld-féle) geodetikus felosztás esetében az a η és D , illetve d értékeket.
- Megállapítottam, hogy a η és a d érték között a globális simaság leírása szempontjából nincs érdemi különbség.
- Elkészítettem az egyes felosztások D -szám eloszlási térképét, abszolút és relatív skála szerint is.
- Elkészítetem az egyes felosztások parametrikus modelljét *Rhino3D* program *Grasshopper* kiegészítőjén keresztül programozva, illetve az ezekre épülő végeselemes modellt (*Karamba 3D*): Meghatároztam a rácshéjmodellből számított rúderöket
- A Kollár-Hegedűs által javasolt eljárás szerint felvettem a helyettesítő membránhéj modellt és abból is meghatároztam a rúderöket
- Az erőjáték és a simaság közötti kapcsolat globális vizsgálata során megállapítottam, hogy a simább felosztású rácshéj erőjátéka jobban közelíti a membránhéj erőjátékát. A vizsgált felosztások közül mind a d , mind a η esetében a Bauersfeld-féle felosztás bizonyult a legsimábbnak, és ez működik a leginkább héjszerűen is.
- A két mérőszám (d és η) azonban a vizsgálataim szerint lényegében azonosan alkalmas a héjszerű erőjáték előrejelzésére (egyik sem tűnik alkalmasabbnak a másiknál).
- A D -értékek eloszlása és a rác-membrán lokális megfelelés (adott héjrészen) közötti kapcsolat vizsgálata során azt láttam, hogy a globális hatások jelentősen megzavarják az egyezést, csak bizonyos régiókban tapasztalható a két jelenség korrelációja (sima felület, héjszerű viselkedés).

A fenti felemás eredmények ellenére is úgy gondolom, hogy a D -szám és a héjszerű viselkedés között lehet kapcsolatot találni, és érdemes keresni. Érdemes lehet a végeselemes modell felülvizsgálata, amelyre jó megoldás lenne egy másik környezetben készülő számítás, hogy kizárjuk az eltérések okaként felmerülő modellezési és számítási hibát – bár az elvi megfontolások alapján radikális változás egy adott esetben 'jobb' számítás sem fog eredményezni.

Elsősorban azért, mert úgy tűnik, hogy a felosztások topológiája (ez a globális zavart zónáknál pl. megjelenik) erősebben befolyásolja szerkezeti viselkedést – ez az eredmény egyébként nem meglepő. A fenti vizsgálatok azt mindenképpen megerősítik, hogy ezzel az eszköztárral érdemes nem csak geodetikus felosztások, hanem más, kimondottan szabályos, vagy ahhoz közeli háromszögeket eredményező felosztások vizsgálatát is elvégezni.

Mellékletek

1.melléklet: rács-héj kapcsolat az oldalak szerint (a pirossal jelölt kiugró értékek a szórás és átlag számításban nem szerepelnek)

él	Fuller				Oldalfelezés			
	héj	rács	h'=héj/0.68	h'/rács	héj	rács	h'=héj/0.68	h'/rács
12	-0,6189	-1,0100	-0,9102	0,9012	-0,7169	-1,0500	-1,0542	1,0040
13	-0,6189	-1,0100	-0,9102	0,9012	-0,7169	-1,0500	-1,0542	1,0040
23	-0,5330	-0,8900	-0,7838	0,8807	-0,5515	-0,8400	-0,8111	0,9656
24	-0,6973	-1,2200	-1,0254	0,8405	-0,7459	-1,3000	-1,0969	0,8438
25	-0,6682	-1,1600	-0,9826	0,8471	-0,7107	-1,2300	-1,0451	0,8497
53	-0,6682	-1,1600	-0,9826	0,8471	-0,7107	-1,2300	-1,0451	0,8497
45	-0,5782	-0,7900	-0,8503	1,0763	-0,5315	-0,7200	-0,7816	1,0856
46	-0,7903	-1,3500	-1,1621	0,8608	-0,8038	-1,4500	-1,1821	0,8153
47	-0,6798	-1,0500	-0,9997	0,9521	-0,6784	-1,0800	-0,9976	0,9237
75	-0,7489	-1,2200	-1,1014	0,9028	-0,7727	-1,2800	-1,1363	0,8877
58	-0,7489	-1,2200	-1,1014	0,9028	-0,7727	-1,2800	-1,1363	0,8877
67	-0,5672	-0,6900	-0,8340	1,2088	-0,4524	-0,6000	-0,6653	1,1089
78	-0,5435	-0,6600	-0,7993	1,2111	-0,4381	-0,5700	-0,6443	1,1304
96	-0,9076	-1,4700	-1,3347	0,9080	-0,8756	-1,6200	-1,2877	0,7949
610	-0,6206	-0,8700	-0,9127	1,0491	-0,5902	-0,8600	-0,8680	1,0093
107	-0,8550	-1,3300	-1,2574	0,9454	-0,8234	-1,3900	-1,2109	0,8711
711	-0,7693	-1,1400	-1,1313	0,9924	-0,7329	-1,1600	-1,0779	0,9292
118	-0,7693	-1,1400	-1,1313	0,9924	-0,7329	-1,1600	-1,0779	0,9292
910	-0,4736	-0,5500	-0,6965	1,2663	-0,4081	-0,5400	-0,6002	1,1115
1011	-0,4319	-0,4900	-0,6352	1,2963	-0,3744	-0,4800	-0,5506	1,1471
912	-1,0371	-1,6200	-1,5251	0,9414	-0,9515	-1,7200	-1,3993	0,8135
913	-0,4904	-0,6500	-0,7212	1,1096	-0,4860	-0,6900	-0,7147	1,0358
1310	-0,9870	-1,4500	-1,4515	1,0011	-0,9990	-1,4100	-1,4692	1,0420
1014	-0,7164	-0,9800	-1,0535	1,0750	-0,7118	-1,0100	-1,0467	1,0364
1411	-0,8882	-1,2700	-1,3061	1,0285	-0,8773	-1,2300	-1,2902	1,0489
1115	-0,8882	-1,2700	-1,3061	1,0285	-0,8773	-1,2300	-1,2902	1,0489
1213	-0,2769	-0,3400	-0,4073	1,1978	-0,1428	-0,3500	-0,2101	0,6002
1314	-0,2299	-0,2400	-0,3381	1,4086	-0,2575	-0,2700	-0,3787	1,4025
1415	-0,2094	-0,2100	-0,3079	1,4663	-0,2094	-0,2600	-0,3079	1,1843
1216	-1,1394	-1,7700	-1,6757	0,9467	-1,0574	-1,8300	-1,5550	0,8497
1217	-0,3143	-0,4300	-0,4622	1,0749	-0,3070	-0,4200	-0,4515	1,0749
1713	-1,1172	-1,6200	-1,6429	1,0141	-0,9905	-1,6300	-1,4565	0,8936
1318	-0,5992	-0,8100	-0,8812	1,0879	-0,5773	-0,8200	-0,8490	1,0354
1814	-1,0236	-1,4400	-1,5053	1,0454	-1,0212	-1,4300	-1,5017	1,0501
1419	-0,8473	-1,1700	-1,2460	1,0650	-0,8473	-1,1600	-1,2460	1,0742
1915	-0,8473	-1,1700	-1,2460	1,0650	-0,8473	-1,1600	-1,2460	1,0742
1617	0,0161	0,0800	0,0237	0,2963	0,0960	-0,1300	0,1412	-1,0864
1718	0,0603	0,0600	0,0886	1,4774	0,0699	-0,0200	0,1027	-5,1363
1819	0,0918	0,1400	0,1351	0,9647	0,0998	-0,1400	0,1468	-1,0485
2016	-1,1749	-1,8300	-1,7279	0,9442	-1,1543	-1,9800	-1,6975	0,8573
1621	-0,1342	-0,2600	-0,1974	0,7591	-0,1527	-0,2600	-0,2245	0,8636
2117	-1,2010	-1,8300	-1,7662	0,9652	-1,1437	-1,8300	-1,6820	0,9191
1722	-0,4522	-0,6400	-0,6650	1,0390	-0,4132	-0,5700	-0,6076	1,0659
2218	-1,1373	-1,6200	-1,6725	1,0324	-1,0132	-1,6100	-1,4900	0,9255
1823	-0,7506	-1,0300	-1,1038	1,0716	-0,6996	-0,9700	-1,0288	1,0606

2319	-0,9872	-1,3600	-1,4517	1,0675	-0,9851	-1,3800	-1,4487	1,0498
1924	-0,9872	-1,3600	-1,4517	1,0675	-0,9851	-1,3800	-1,4487	1,0498
2021	0,3540	0,2700	0,5207	1,9284	0,3981	0,2800	0,5854	2,0906
2122	0,4043	0,4100	0,5946	1,4503	0,3721	0,3500	0,5472	1,5634
2223	0,4464	0,5200	0,6565	1,2626	0,3102	0,4100	0,4561	1,1125
2324	0,4633	0,5700	0,6813	1,1953	0,4973	0,5500	0,7313	1,3296
2520	-1,1313	-1,8900	-1,6637	0,8803	-1,2961	-2,1200	-1,9060	0,8991
2026	0,0102	-0,1400	0,0150	-0,1072	0,0330	-0,0700	0,0486	-0,6940
2621	-1,2110	-1,9800	-1,7809	0,8995	-1,2300	-2,1400	-1,8088	0,8452
2127	-0,3174	-0,4700	-0,4668	0,9931	-0,2690	-0,3300	-0,3956	1,1988
2722	-1,1913	-1,8200	-1,7519	0,9626	-1,1565	-1,8400	-1,7008	0,9243
2228	-0,6353	-0,8700	-0,9342	1,0738	-0,5380	-0,7300	-0,7912	1,0839
2823	-1,0915	-1,5800	-1,6051	1,0159	-1,0198	-1,6100	-1,4997	0,9315
2329	-0,9030	-1,2700	-1,3279	1,0456	-0,8504	-1,0600	-1,2505	1,1797
2924	-0,9030	-1,2700	-1,3279	1,0456	-0,8504	-1,0600	-1,2505	1,1797
2526	0,4700	0,8300	0,6912	0,8328	0,5436	0,9800	0,7994	0,8157
2627	0,6020	0,9400	0,8852	0,9417	0,5534	0,9800	0,8138	0,8304
2728	0,7253	1,0300	1,0666	1,0355	0,5877	1,0000	0,8642	0,8642
2829	0,8023	1,1100	1,1798	1,0629	0,5967	0,9900	0,8775	0,8864
3025	-0,6149	-1,0200	-0,9043	0,8866	-0,7214	-1,1400	-1,0609	0,9306
2531	-0,6149	-1,0200	-0,9043	0,8866	-0,7214	-1,1400	-1,0609	0,9306
3126	-1,3538	-1,7300	-1,9909	1,1508	-1,5831	-1,8900	-2,3280	1,2318
2632	-0,5041	-0,9800	-0,7413	0,7564	-0,5125	-1,0000	-0,7536	0,7536
3227	-1,3041	-1,6800	-1,9177	1,1415	-1,3639	-1,8000	-2,0058	1,1143
2733	-0,7026	-1,2200	-1,0332	0,8469	-0,6908	-1,3100	-1,0158	0,7754
3328	-1,2116	-1,8400	-1,7818	0,9684	-1,1493	-1,6800	-1,6902	1,0061
2834	-0,8997	-1,3400	-1,3231	0,9874	-0,8426	-1,6300	-1,2391	0,7602
3429	-1,0746	-1,5100	-1,5803	1,0465	-1,0300	-1,6400	-1,5147	0,9236
2935	-1,0746	-1,5100	-1,5803	1,0465	-1,0300	-1,6400	-1,5147	0,9236
3031	1,4959	1,7600	2,1999	1,2499	1,8677	1,8700	2,7466	1,4688
3132	1,3304	1,6900	1,9564	1,1577	1,4049	1,9800	2,0660	1,0434
3233	1,1833	1,7300	1,7401	1,0058	0,9806	1,7800	1,4420	0,8101
3334	1,3430	1,7800	1,9750	1,1095	0,9644	1,7100	1,4182	0,8294
3435	1,4238	1,8000	2,0938	1,1632	1,4645	1,8200	2,1537	1,1834
3036	-1,1251	-1,5800	-1,6546	1,0472	-1,1967	-1,7500	-1,7599	1,0057
3631	-1,1251	-1,5800	-1,6546	1,0472	-1,1967	-1,7500	-1,7599	1,0057
3137	-1,0437	-1,3600	-1,5349	1,1286	-1,1283	-1,4400	-1,6592	1,1523
3732	-1,2994	-1,9300	-1,9109	0,9901	-1,4593	-2,1100	-2,1460	1,0171
3238	-0,6114	-1,2200	-0,8991	0,7369	-0,5246	-1,1300	-0,7715	0,6827
3833	-1,4061	-1,8400	-2,0678	1,1238	-1,5703	-1,8000	-2,3093	1,2829
3339	-0,8239	-1,4000	-1,2116	0,8655	-0,7032	-1,2900	-1,0341	0,8016
3934	-1,3360	-1,7600	-1,9647	1,1163	-1,3476	-1,6800	-1,9817	1,1796
3440	-1,0317	-1,7200	-1,5171	0,8821	-0,9751	-1,6300	-1,4339	0,8797
4035	-1,0317	-1,7200	-1,5171	0,8821	-0,9751	-1,6300	-1,4339	0,8797
3637	2,1671	2,5800	3,1869	1,2352	2,5238	2,8500	3,7114	1,3023
3738	1,3054	2,6500	1,9197	0,7244	1,1660	2,6800	1,7147	0,6398
3839	1,5297	2,7000	2,2495	0,8332	1,2836	2,5600	1,8876	0,7373
3940	1,6859	2,7000	2,4793	0,9183	1,5512	2,7100	2,2812	0,8418
4136	-1,2056	-1,8500	-1,7729	0,9583	-1,2277	-2,0000	-1,8055	0,9027
3642	-1,2056	-1,8500	-1,7729	0,9583	-1,2277	-2,0000	-1,8055	0,9027

4237	-1,2978	-1,8500	-1,9086	1,0317	-1,2748	-1,9600	-1,8747	0,9565
3743	-0,9587	-1,6300	-1,4098	0,8649	-0,9556	-1,6600	-1,4053	0,8466
4338	-1,4780	-2,0700	-2,1735	1,0500	-1,7795	-2,2000	-2,6170	1,1895
3844	-1,0165	-1,4900	-1,4949	1,0033	-0,7248	-1,2700	-1,0659	0,8393
4439	-1,4557	-2,0100	-2,1408	1,0651	-1,4680	-2,0300	-2,1588	1,0634
3945	-1,2131	-1,7200	-1,7839	1,0372	-1,2422	-1,7600	-1,8268	1,0379
4540	-1,3660	-1,9100	-2,0088	1,0517	-1,3660	-1,9000	-2,0088	1,0572
4046	-1,3660	-1,9100	-2,0088	1,0517	-1,3660	-1,9000	-2,0088	1,0572
4142	2,0224	3,2100	2,9741	0,9265	2,2715	3,1700	3,3404	1,0538
4243	2,4136	3,1700	3,5494	1,1197	2,7396	3,1400	4,0288	1,2831
4344	2,2120	3,1300	3,2529	1,0393	1,8133	3,1000	2,6666	0,8602
4445	2,4168	3,2300	3,5541	1,1004	2,3616	3,2400	3,4729	1,0719
4546	2,4937	3,2900	3,6673	1,1147	2,4937	3,2500	3,6673	1,1284
4147	-1,4461	-2,1800	-2,1266	0,9755	-1,3799	-2,2000	-2,0292	0,9224
4742	-1,4461	-2,1800	-2,1266	0,9755	-1,3799	-2,2000	-2,0292	0,9224
4248	-1,3550	-2,0800	-1,9926	0,9580	-1,3891	-2,2500	-2,0428	0,9079
4843	-1,4641	-2,1500	-2,1531	1,0014	-1,3612	-2,0300	-2,0017	0,9861
4349	-1,2707	-1,9000	-1,8687	0,9835	-1,0784	-1,9600	-1,5858	0,8091
4944	-1,5070	-2,2100	-2,2162	1,0028	-1,7300	-2,4600	-2,5442	1,0342
4450	-1,3589	-1,8700	-1,9984	1,0687	-1,4082	-1,9000	-2,0709	1,0900
5045	-1,5275	-2,1600	-2,2464	1,0400	-1,4738	-2,1800	-2,1674	0,9942
4551	-1,4771	-2,0700	-2,1722	1,0494	-1,4562	-1,9700	-2,1414	1,0870
5146	-1,4771	-2,0700	-2,1722	1,0494	-1,4562	-1,9700	-2,1414	1,0870
4748	2,9859	2,2700	4,3911	1,9344	3,1399	2,2000	4,6175	2,0988
4849	2,7903	2,2200	4,1033	1,8483	3,1333	2,1800	4,6078	2,1137
4950	2,6858	2,2100	3,9497	1,7872	2,7495	2,2500	4,0434	1,7971
5051	2,8782	2,2800	4,2327	1,8564	2,7613	2,2700	4,0608	1,7889
			szórás	0,2024			szórás	0,1918
			átlag	1,0165			átlag	1,0011

él	Oldalfelvezés (stat.hat.lan)				Bauersfeld			
	hég	rács	$h'=hég/0,68$	$h'/rács$	hég	rács	$h'=hég/0,68$	$h'/rács$
12	-0,7169	-1,05	-1,0542	1,0040	-0,7169	-1,1100	-1,0542	0,9498
13	-0,7169	-1,05	-1,0542	1,0040	-0,7169	-1,0700	-1,0542	0,9853
23	-0,5515	-0,84	-0,8111	0,9656	-0,6125	-0,9100	-0,9007	0,9898
24	-0,7459	-1,29	-1,0969	0,8503	-0,7606	-1,2800	-1,1185	0,8738
25	-0,7107	-1,23	-1,0451	0,8497	-0,7371	-1,1300	-1,0840	0,9593
53	-0,7107	-1,23	-1,0451	0,8497	-0,7371	-1,0900	-1,0840	0,9945
45	-0,5315	-0,72	-0,7816	1,0856	-0,5780	-0,8300	-0,8500	1,0241
46	-0,8038	-1,45	-1,1821	0,8153	-0,7989	-1,3300	-1,1749	0,8834
47	-0,6784	-1,08	-0,9976	0,9237	-0,6576	-1,0100	-0,9671	0,9575
75	-0,7727	-1,28	-1,1363	0,8877	-0,7594	-1,2800	-1,1168	0,8725
58	-0,7727	-1,28	-1,1363	0,8877	-0,7594	-1,3200	-1,1168	0,8461
67	-0,4524	-0,6	-0,6653	1,1089	-0,4903	-0,7200	-0,7210	1,0014
78	-0,4381	-0,57	-0,6443	1,1304	-0,4302	-0,5900	-0,6326	1,0722
96	-0,8756	-1,62	-1,2877	0,7949	-0,8709	-1,4300	-1,2807	0,8956
610	-0,5902	-0,86	-0,8680	1,0093	-0,5734	-0,8600	-0,8432	0,9804
107	-0,8234	-1,39	-1,2109	0,8711	-0,8153	-1,3300	-1,1990	0,9015
711	-0,7329	-1,16	-1,0779	0,9292	-0,7438	-1,1600	-1,0938	0,9430
118	-0,7329	-1,16	-1,0779	0,9292	-0,7438	-1,1200	-1,0938	0,9766

910	-0,4081	-0,54	-0,6002	1,1115	-0,3621	-0,5800	-0,5326	0,9182
1011	-0,3744	-0,48	-0,5506	1,1471	-0,3414	-0,5000	-0,5021	1,0041
912	-0,9515	-1,71	-1,3993	0,8183	-0,9654	-1,6000	-1,4197	0,8873
913	-0,4860	-0,66	-0,7147	1,0828	-0,4613	-0,6700	-0,6784	1,0125
1310	-0,9990	-1,41	-1,4692	1,0420	-0,9022	-1,4000	-1,3268	0,9477
1014	-0,7118	-1,02	-1,0467	1,0262	-0,6442	-1,0000	-0,9474	0,9474
1411	-0,8773	-1,23	-1,2902	1,0489	-0,8092	-1,2700	-1,1901	0,9371
1115	-0,8773	-1,23	-1,2902	1,0489	-0,8092	-1,3300	-1,1901	0,8948
1213	-0,1428	-0,35	-0,2101	0,6002	-0,1731	-0,3900	-0,2546	0,6528
1314	-0,2575	-0,27	-0,3787	1,4025	-0,2082	-0,3600	-0,3062	0,8505
1415	-0,2094	-0,24	-0,3079	1,2830	-0,1358	-0,2500	-0,1997	0,7988
1216	-1,0574	-1,83	-1,5550	0,8497	-1,0860	-1,7800	-1,5971	0,8972
1217	-0,3070	-0,42	-0,4515	1,0749	-0,3133	-0,4400	-0,4607	1,0470
1713	-0,9905	-1,62	-1,4565	0,8991	-1,0137	-1,6400	-1,4908	0,9090
1318	-0,5773	-0,82	-0,8490	1,0354	-0,5125	-0,7300	-0,7537	1,0324
1814	-1,0212	-1,43	-1,5017	1,0501	-0,8907	-1,4300	-1,3099	0,9160
1419	-0,8473	-1,16	-1,2460	1,0742	-0,7568	-1,0600	-1,1130	1,0500
1915	-0,8473	-1,16	-1,2460	1,0742	-0,7568	-1,0500	-1,1130	1,0600
1617	0,0960	-0,13	0,1412	-1,0864	0,0564	-0,1500	0,0829	-0,5530
1718	0,0699	-0,02	0,1027	-5,1363	0,0159	-0,0800	0,0234	-0,2930
1819	0,0998	0,14	0,1468	1,0485	-0,0295	-0,0300	-0,0434	1,4465
2016	-1,1543	-1,98	-1,6975	0,8573	-1,2334	-2,0900	-1,8139	0,8679
1621	-0,1527	-0,26	-0,2245	0,8636	-0,1273	-0,1800	-0,1871	1,0396
2117	-1,1437	-1,82	-1,6820	0,9242	-1,1054	-1,8600	-1,6255	0,8740
1722	-0,4132	-0,6	-0,6076	1,0126	-0,3908	-0,5300	-0,5747	1,0844
2218	-1,0132	-1,6	-1,4900	0,9313	-1,0675	-1,5700	-1,5699	0,9999
1823	-0,6996	-0,97	-1,0288	1,0606	-0,6463	-0,8700	-0,9504	1,0924
2319	-0,9851	-1,38	-1,4487	1,0498	-0,8901	-1,2800	-1,3089	1,0226
1924	-0,9851	-1,38	-1,4487	1,0498	-0,8901	-1,1300	-1,3089	1,1583
2021	0,3981	0,27	0,5854	2,1681	0,3094	0,2200	0,4550	2,0682
2122	0,3721	0,35	0,5472	1,5634	0,2958	0,3500	0,4350	1,2427
2223	0,3102	0,41	0,4561	1,1125	0,2356	0,3800	0,3465	0,9117
2324	0,4973	0,55	0,7313	1,3296	0,2553	0,4300	0,3755	0,8732
2520	-1,2961	-2,09	-1,9060	0,9120	-1,2961	-2,2900	-1,9060	0,8323
2026	0,0330	-0,05	0,0486	-0,9716	0,0374	-0,0100	0,0550	-5,4996
2621	-1,2300	-2,11	-1,8088	0,8572	-1,3828	-2,0400	-2,0335	0,9968
2127	-0,2690	-0,35	-0,3956	1,1303	-0,2841	-0,4200	-0,4177	0,9946
2722	-1,1565	-1,83	-1,7008	0,9294	-1,1684	-1,7900	-1,7182	0,9599
2228	-0,5380	-0,75	-0,7912	1,0550	-0,5384	-0,6900	-0,7917	1,1475
2823	-1,0198	-1,61	-1,4997	0,9315	-1,0402	-1,6400	-1,5297	0,9327
2329	-0,8504	-1,06	-1,2505	1,1797	-0,7839	-1,0300	-1,1528	1,1192
2924	-0,8504	-1,06	-1,2505	1,1797	-0,7839	-1,2000	-1,1528	0,9607
2526	0,5436	0,98	0,7994	0,8157	0,5436	1,1400	0,7994	0,7012
2627	0,5534	0,98	0,8138	0,8304	0,5875	1,0100	0,8639	0,8554
2728	0,5877	1	0,8642	0,8642	0,5832	0,9800	0,8576	0,8751
2829	0,5967	0,99	0,8775	0,8864	0,5679	1,0300	0,8351	0,8108
3025	-0,7214	-1,12	-1,0609	0,9473	-0,7214	-1,1800	-1,0609	0,8991
2531	-0,7214	-1,12	-1,0609	0,9473	-0,7214	-1,2200	-1,0609	0,8696
3126	-1,5831	-1,84	-2,3280	1,2652	-1,5420	-2,0800	-2,2677	1,0902
2632	-0,5125	-1,03	-0,7536	0,7317	-0,5466	-0,7300	-0,8039	1,1012

3227	-1,3639	-1,62	-2,0058	1,2381	-1,4606	-1,9900	-2,1480	1,0794
2733	-0,6908	-1,13	-1,0158	0,8990	-0,5221	-0,7200	-0,7677	1,0663
3328	-1,1493	-1,46	-1,6902	1,1577	-1,2249	-1,6800	-1,8013	1,0722
2834	-0,8426	-1,39	-1,2391	0,8914	-0,7627	-1,0600	-1,1217	1,0582
3429	-1,0300	-1,31	-1,5147	1,1562	-1,0455	-1,4500	-1,5375	1,0604
2935	-1,0300	-1,31	-1,5147	1,1562	-1,0455	-1,2800	-1,5375	1,2012
3031	1,8677	2	2,7466	1,3733	1,7847	2,0200	2,6246	1,2993
3132	1,4049	1,88	2,0660	1,0989	1,5641	2,0500	2,3001	1,1220
3233	0,9806	1,81	1,4420	0,7967	1,2411	1,8400	1,8252	0,9920
3334	0,9644	1,77	1,4182	0,8012	1,2726	1,8100	1,8715	1,0340
3435	1,4645	1,89	2,1537	1,1395	1,0749	1,7900	1,5808	0,8831
3036	-1,1967	-1,67	-1,7599	1,0538	-1,3140	-1,6700	-1,9323	1,1571
3631	-1,1967	-1,67	-1,7599	1,0538	-1,3140	-1,8600	-1,9323	1,0389
3137	-1,1283	-1,46	-1,6592	1,1365	-0,9789	-1,6900	-1,4396	0,8518
3732	-1,4593	-2,03	-2,1460	1,0572	-1,4173	-1,8700	-2,0842	1,1145
3238	-0,5246	-1,19	-0,7715	0,6483	-0,9284	-1,4600	-1,3653	0,9351
3833	-1,5703	-1,76	-2,3093	1,3121	-1,4814	-1,8300	-2,1785	1,1905
3339	-0,7032	-1,37	-1,0341	0,7548	-0,8339	-1,2700	-1,2263	0,9656
3934	-1,3476	-1,66	-1,9817	1,1938	-1,3503	-1,8500	-1,9857	1,0734
3440	-0,9751	-1,69	-1,4339	0,8485	-0,7728	-1,2300	-1,1365	0,9240
4035	-0,9751	-1,69	-1,4339	0,8485	-0,7728	-1,4200	-1,1365	0,8003
3637	2,5238	2,8	3,7114	1,3255	2,4959	2,8900	3,6704	1,2700
3738	1,1660	2,77	1,7147	0,6190	1,7770	2,6500	2,6132	0,9861
3839	1,2836	2,73	1,8876	0,6914	1,5254	2,7100	2,2433	0,8278
3940	1,5512	2,89	2,2812	0,7893	1,3831	2,6300	2,0340	0,7734
4136	-1,2277	-1,93	-1,8055	0,9355	-1,1373	-1,7200	-1,6725	0,9724
3642	-1,2277	-1,93	-1,8055	0,9355	-1,1373	-1,9200	-1,6725	0,8711
4237	-1,2748	-1,75	-1,8747	1,0713	-1,3460	-2,3100	-1,9795	0,8569
3743	-0,9556	-1,77	-1,4053	0,7940	-1,0447	-1,5900	-1,5363	0,9663
4338	-1,7795	-2,08	-2,6170	1,2582	-1,5507	-1,9500	-2,2805	1,1695
3844	-0,7248	-1,42	-1,0659	0,7507	-1,1189	-2,1000	-1,6454	0,7835
4439	-1,4680	-2,04	-2,1588	1,0582	-1,3399	-1,6800	-1,9704	1,1729
3945	-1,2422	-1,84	-1,8268	0,9928	-1,1072	-1,9900	-1,6282	0,8182
4540	-1,3660	-1,94	-2,0088	1,0355	-1,3477	-1,7400	-1,9820	1,1391
4046	-1,3660	-1,94	-2,0088	1,0355	-1,3477	-1,9300	-1,9820	1,0269
4142	2,2715	2,68	3,3404	1,2464	2,0828	3,7800	3,0629	0,8103
4243	2,7396	2,73	4,0288	1,4757	2,4267	2,6900	3,5686	1,3266
4344	1,8133	2,91	2,6666	0,9163	2,5257	3,0400	3,7143	1,2218
4445	2,3616	3,13	3,4729	1,1096	2,5121	3,1300	3,6943	1,1803
4546	2,4937	3,14	3,6673	1,1679	2,5088	3,0000	3,6894	1,2298
4147	-1,3799	-1,93	-2,0292	1,0514	-1,5319	-2,9800	-2,2528	0,7560
4742	-1,3799	-1,93	-2,0292	1,0514	-1,5319	-3,4300	-2,2528	0,6568
4248	-1,3891	-2,25	-2,0428	0,9079	-1,1610	-1,0300	-1,7073	1,6576
4843	-1,3612	-1,74	-2,0017	1,1504	-1,5630	-1,8600	-2,2985	1,2357
4349	-1,0784	-2,26	-1,5858	0,7017	-1,1728	-2,0300	-1,7246	0,8496
4944	-1,7300	-2,37	-2,5442	1,0735	-1,6606	-1,9600	-2,4421	1,2460
4450	-1,4082	-2,13	-2,0709	0,9723	-1,3254	-2,5500	-1,9491	0,7643
5045	-1,4738	-2,24	-2,1674	0,9676	-1,5192	-2,3500	-2,2341	0,9507
4551	-1,4562	-2,04	-2,1414	1,0497	-1,3003	-2,2000	-1,9122	0,8692
5146	-1,4562	-2,04	-2,1414	1,0497	-1,3003	-1,6400	-1,9122	1,1660

4748	3,1399	0	4,6175	#####	2,8102	1,9800	4,1327	2,0872
4849	3,1333	0	4,6078	#####	2,7517	2,4000	4,0466	1,6861
4950	2,7495	0	4,0434	#####	3,1155	2,4700	4,5816	1,8549
5051	2,7613	0	4,0608	#####	3,2448	2,4800	4,7718	1,9241
			szórás	0,2057			szórás	0,1856
			átlag	1,0154			átlag	0,9976

2.melléklet: Fuller-féle felosztás és a membránhéj a háromszögek szerint

	oldalak			héj					
	a	b	c	Na-h	Nb-h	Nc-h	h'a	h'b	h'c
1	0,4544	0,4544	0,5333	-0,6189	-0,6189	-0,5330	-0,9102	-0,9102	-0,7838
2	0,5107	0,4958	0,5631	-0,6973	-0,6682	-0,5782	-1,0254	-0,9826	-0,8503
3	0,4958	0,4958	0,5333	-0,6682	-0,6682	-0,5330	-0,9826	-0,9826	-0,7838
4	0,5565	0,5347	0,5808	-0,7903	-0,6798	-0,5672	-1,1621	-0,9997	-0,8340
5	0,5534	0,5347	0,5631	-0,7489	-0,6798	-0,5782	-1,1014	-0,9997	-0,8503
6	0,5534	0,5534	0,5949	-0,7489	-0,7489	-0,5435	-1,1014	-1,1014	-0,7993
7	0,5826	0,5654	0,5819	-0,9076	-0,6206	-0,4736	-1,3347	-0,9127	-0,6965
8	0,5948	0,5654	0,5808	-0,8550	-0,6206	-0,5672	-1,2574	-0,9127	-0,8340
9	0,5948	0,5888	0,6120	-0,8550	-0,7693	-0,4319	-1,2574	-1,1313	-0,6352
10	0,5888	0,5888	0,5949	-0,7693	-0,7693	-0,5435	-1,1313	-1,1313	-0,7993
11	0,5826	0,5819	0,5654	-1,0371	-0,4904	-0,2769	-1,5251	-0,7212	-0,4073
12	0,6100	0,5819	0,5819	-0,9870	-0,4904	-0,4736	-1,4515	-0,7212	-0,6965
13	0,6100	0,6099	0,6099	-0,9870	-0,7164	-0,2299	-1,4515	-1,0535	-0,3381
14	0,6201	0,6099	0,6120	-0,8882	-0,7164	-0,4319	-1,3061	-1,0535	-0,6352
15	0,6201	0,6201	0,6264	-0,8882	-0,8882	-0,2094	-1,3061	-1,3061	-0,3079
16	0,5565	0,5808	0,5347	-1,1394	-0,3143	0,0161	-1,6757	-0,4622	0,0237
17	0,5948	0,5808	0,5654	-1,1172	-0,3143	-0,2769	-1,6429	-0,4622	-0,4073
18	0,5948	0,6120	0,5888	-1,1172	-0,5992	0,0603	-1,6429	-0,8812	0,0886
19	0,6201	0,6120	0,6099	-1,0236	-0,5992	-0,2299	-1,5053	-0,8812	-0,3381
20	0,6201	0,6264	0,6201	-1,0236	-0,8473	0,0918	-1,5053	-1,2460	0,1351
21	0,6264	0,6264	0,6264	-0,8473	-0,8473	-0,2094	-1,2460	-1,2460	-0,3079
22	0,5107	0,5631	0,4958	-1,1749	-0,1342	0,3540	-1,7279	-0,1974	0,5207
23	0,5534	0,5631	0,5347	-1,2010	-0,1342	0,0161	-1,7662	-0,1974	0,0237
24	0,5534	0,5949	0,5534	-1,2010	-0,4522	0,4043	-1,7662	-0,6650	0,5946
25	0,5888	0,5949	0,5888	-1,1373	-0,4522	0,0603	-1,6725	-0,6650	0,0886
26	0,5888	0,6120	0,5948	-1,1373	-0,7506	0,4464	-1,6725	-1,1038	0,6565
27	0,6099	0,6120	0,6201	-0,9872	-0,7506	0,0918	-1,4517	-1,1038	0,1351
28	0,6099	0,6099	0,6100	-0,9872	-0,9872	0,4633	-1,4517	-1,4517	0,6813
29	0,4544	0,5333	0,4544	-1,1313	0,0102	0,4700	-1,6637	0,0150	0,6912
30	0,4958	0,5333	0,4958	-1,2110	0,0102	0,3540	-1,7809	0,0150	0,5207
31	0,4958	0,5631	0,5107	-1,2110	-0,3174	0,6020	-1,7809	-0,4668	0,8852
32	0,5347	0,5631	0,5534	-1,1913	-0,3174	0,4043	-1,7519	-0,4668	0,5946
33	0,5347	0,5808	0,5565	-1,1913	-0,6353	0,7253	-1,7519	-0,9342	1,0666
34	0,5654	0,5808	0,5948	-1,0915	-0,6353	0,4464	-1,6051	-0,9342	0,6565
35	0,5654	0,5819	0,5826	-1,0915	-0,9030	0,8023	-1,6051	-1,3279	1,1798
36	0,5819	0,5819	0,6100	-0,9030	-0,9030	0,4633	-1,3279	-1,3279	0,6813
37	0,4544	0,4544	0,5333	-0,6149	-0,6149	1,4959	-0,9043	-0,9043	2,1999

38	0,5333	0,4544	0,4544	-1,3538	-0,6149	0,4700	-1,9909	-0,9043	0,6912
39	0,5333	0,4958	0,4958	-1,3538	-0,5041	1,3304	-1,9909	-0,7413	1,9564
40	0,5631	0,4958	0,5107	-1,3041	-0,5041	0,6020	-1,9177	-0,7413	0,8852
41	0,5631	0,5347	0,5534	-1,3041	-0,7026	1,1833	-1,9177	-1,0332	1,7401
42	0,5808	0,5347	0,5565	-1,2116	-0,7026	0,7253	-1,7818	-1,0332	1,0666
43	0,5808	0,5654	0,5948	-1,2116	-0,8997	1,3430	-1,7818	-1,3231	1,9750
44	0,5819	0,5654	0,5826	-1,0746	-0,8997	0,8023	-1,5803	-1,3231	1,1798
45	0,5819	0,5819	0,6100	-1,0746	-1,0746	1,4238	-1,5803	-1,5803	2,0938
46	0,4958	0,4958	0,5333	-1,1251	-1,1251	1,4959	-1,6546	-1,6546	2,1999
47	0,5347	0,5534	0,5631	-1,1251	-1,0437	2,1671	-1,6546	-1,5349	3,1869
48	0,4958	0,5107	0,5631	-1,2994	-1,0437	1,3304	-1,9109	-1,5349	1,9564
49	0,5631	0,5107	0,4958	-1,2994	-0,6114	1,3054	-1,9109	-0,8991	1,9197
50	0,5631	0,5534	0,5347	-1,4061	-0,6114	1,1833	-2,0678	-0,8991	1,7401
51	0,5949	0,5534	0,5534	-1,4061	-0,8239	1,5297	-2,0678	-1,2116	2,2495
52	0,5949	0,5888	0,5888	-1,3360	-0,8239	1,3430	-1,9647	-1,2116	1,9750
53	0,6120	0,5888	0,5948	-1,3360	-1,0317	1,6859	-1,9647	-1,5171	2,4793
54	0,6120	0,6099	0,6201	-1,0317	-1,0317	1,4238	-1,5171	-1,5171	2,0938
55	0,6099	0,6099	0,6100	-1,2056	-1,2056	2,0224	-1,7729	-1,7729	2,9741
56	0,5534	0,5534	0,5949	-1,2978	-1,2056	2,1671	-1,9086	-1,7729	3,1869
57	0,5347	0,5565	0,5808	-1,2978	-0,9587	2,4136	-1,9086	-1,4098	3,5494
58	0,5808	0,5565	0,5347	-1,4780	-0,9587	1,3054	-2,1735	-1,4098	1,9197
59	0,5808	0,5948	0,5654	-1,4780	-1,0165	2,2120	-2,1735	-1,4949	3,2529
60	0,6120	0,5948	0,5888	-1,4557	-1,0165	1,5297	-2,1408	-1,4949	2,2495
61	0,6120	0,6201	0,6099	-1,4557	-1,2131	2,4168	-2,1408	-1,7839	3,5541
62	0,6264	0,6201	0,6201	-1,3660	-1,2131	1,6859	-2,0088	-1,7839	2,4793
63	0,6264	0,6264	0,6264	-1,3660	-1,3660	2,4937	-2,0088	-2,0088	3,6673
64	0,5888	0,5888	0,5949	-1,4461	-1,4461	2,0224	-2,1266	-2,1266	2,9741
65	0,5888	0,5948	0,6120	-1,4461	-1,3550	2,9859	-2,1266	-1,9926	4,3911
66	0,5654	0,5948	0,5808	-1,4641	-1,3550	2,4136	-2,1531	-1,9926	3,5494
67	0,5654	0,5826	0,5819	-1,4641	-1,2707	2,7903	-2,1531	-1,8687	4,1033
68	0,5819	0,5826	0,5654	-1,5070	-1,2707	2,2120	-2,2162	-1,8687	3,2529
69	0,5819	0,6100	0,5819	-1,5070	-1,3589	2,6858	-2,2162	-1,9984	3,9497
70	0,6099	0,6100	0,6099	-1,5275	-1,3589	2,4168	-2,2464	-1,9984	3,5541
71	0,6099	0,6201	0,6120	-1,5275	-1,4771	2,8782	-2,2464	-2,1722	4,2327
72	0,6201	0,6201	0,6264	-1,4771	-1,4771	2,4937	-2,1722	-2,1722	3,6673

	rács		
	Na-r	Nb-r	Nc-r
1	-1,0100	-1,0100	-0,8900
2	-1,2200	-1,1600	-0,7900
3	-1,1600	-1,1600	-0,8900
4	-1,3500	-1,0500	-0,6900
5	-1,2200	-1,0500	-0,7900
6	-1,2200	-1,2200	-0,6600
7	-1,4700	-0,8700	-0,5500
8	-1,3300	-0,8700	-0,6900
9	-1,3300	-1,1400	-0,4900
10	-1,1400	-1,1400	-0,6600
11	-1,6200	-0,6500	-0,3400
12	-1,4500	-0,6500	-0,5500

13	-1,4500	-0,9800	-0,2400
14	-1,2700	-0,9800	-0,4900
15	-1,2700	-1,2700	-0,2100
16	-1,7700	-0,4300	0,0800
17	-1,6200	-0,4300	-0,3400
18	-1,6200	-0,8100	0,0600
19	-1,4400	-0,8100	-0,2400
20	-1,4400	-1,1700	0,1400
21	-1,1700	-1,1700	-0,2100
22	-1,8300	-0,2600	0,2700
23	-1,8300	-0,2600	0,0800
24	-1,8300	-0,6400	0,4100
25	-1,6200	-0,6400	0,0600
26	-1,6200	-1,0300	0,5200
27	-1,3600	-1,0300	0,1400
28	-1,3600	-1,3600	0,5700
29	-1,8900	-0,1400	0,8300
30	-1,9800	-0,1400	0,2700
31	-1,9800	-0,4700	0,9400
32	-1,8200	-0,4700	0,2700
33	-1,8200	-0,8700	1,0300
34	-1,5800	-0,8700	0,5200
35	-1,5800	-1,2700	1,1100
36	-1,2700	-1,2700	0,5700
37	-1,0200	-1,0200	1,7600
38	-1,7300	-1,0200	0,8300
39	-1,7300	-0,9800	1,6900
40	-1,6800	-0,9800	0,9400
41	-1,6800	-1,2200	1,7300
42	-1,8400	-1,2200	1,0300
43	-1,8400	-1,3400	1,7800
44	-1,5100	-1,3400	1,1100
45	-1,5100	-1,5100	1,8000
46	-1,5800	-1,5800	1,7600
47	-1,5800	-1,3600	2,5800
48	-1,9300	-1,3600	1,6900
49	-1,9300	-1,2200	2,6500
50	-1,8400	-1,2200	1,7300
51	-1,8400	-1,4000	2,7000
52	-1,7600	-1,4000	1,7800
53	-1,7600	-1,7200	2,7000
54	-1,7200	-1,7200	1,8000
55	-1,8500	-1,8500	3,2100
56	-1,8500	-1,8500	2,5800
57	-1,8500	-1,6300	3,1700
58	-2,0700	-1,6300	2,6500
59	-2,0700	-1,4900	3,1300
60	-2,0100	-1,4900	2,7000
61	-2,0100	-1,7200	3,2300
62	-1,9100	-1,7200	2,7000

63	-1,9100	-1,9100	3,2900
64	-2,1800	-2,1800	3,2100
65	-2,1800	-2,0800	2,2700
66	-2,1500	-2,0800	3,1700
67	-2,1500	-1,9000	2,2200
68	-2,2100	-1,9000	3,1300
69	-2,2100	-1,8700	2,2100
70	-2,1600	-1,8700	3,2300
71	-2,1600	-2,0700	2,2800
72	-2,0700	-2,0700	3,2900

kimutatás								
	h'a/Na-r	h'b/Nb-r	h'c/Nc-r	átlag	átlag2	szórás	old. átl.	D
1	0,9012	0,9012	0,8807	0,8944	0,9012	0,0097	0,4807	3,4661
2	0,8405	0,8471	1,0763	0,9213	0,8438	0,1096	0,5232	3,1490
3	0,8471	0,8471	0,8807	0,8583	0,8471	0,0159	0,5083	3,2237
4	0,8608	0,9521	1,2088	1,0072	0,9065	0,1473	0,5573	2,9282
5	0,9028	0,9521	1,0763	0,9771	0,9274	0,0730	0,5504	2,9568
6	0,9028	0,9028	1,2111	1,0055	0,9028	0,1453	0,5673	2,8766
7	0,9080	1,0491	1,2663	1,0744	0,9785	0,1474	0,5766	2,8396
8	0,9454	1,0491	1,2088	1,0677	0,9972	0,1083	0,5803	2,8091
9	0,9454	0,9924	1,2963	1,0780	0,9689	0,1555	0,5985	2,7142
10	0,9924	0,9924	1,2111	1,0653	0,9924	0,1031	0,5908	2,7652
11	0,9414	1,1096	1,1978	1,0829	1,0255	0,1064	0,5766	2,8396
12	1,0011	1,1096	1,2663	1,1256	1,0553	0,1089	0,5913	2,7854
13	1,0011	1,0750	1,4086	1,1616	1,0380	0,1773	0,6100	2,6679
14	1,0285	1,0750	1,2963	1,1333	1,0517	0,1168	0,6140	2,6376
15	1,0285	1,0285	1,4663	1,1744	1,0285	0,2064	0,6222	2,6122
16	0,9467	1,0749	0,2963	0,7726	1,0108	0,3409	0,5573	2,9282
17	1,0141	1,0749	1,1978	1,0956	1,0445	0,0764	0,5803	2,8091
18	1,0141	1,0879	1,4774	1,1931	1,0510	0,2033	0,5985	2,7142
19	1,0454	1,0879	1,4086	1,1806	1,0666	0,1621	0,6140	2,6376
20	1,0454	1,0650	0,9647	1,0250	1,0552	0,0434	0,6222	2,6122
21	1,0650	1,0650	1,4663	1,1987	1,0650	0,1892	0,6264	2,5939
22	0,9442	0,7591	1,9284	1,2106	0,8517	0,5132	0,5232	3,1490
23	0,9652	0,7591	0,2963	0,6735	0,8621	0,2797	0,5504	2,9568
24	0,9652	1,0390	1,4503	1,1515	1,0021	0,2134	0,5673	2,8766
25	1,0324	1,0390	1,4774	1,1830	1,0357	0,2083	0,5908	2,7652
26	1,0324	1,0716	1,2626	1,1222	1,0520	0,1005	0,5985	2,7142
27	1,0675	1,0716	0,9647	1,0346	1,0695	0,0494	0,6140	2,6376
28	1,0675	1,0675	1,1953	1,1101	1,0675	0,0603	0,6100	2,6679
29	0,8803	-0,1072	0,8328	0,5353	0,3866	0,4547	0,4807	3,4661
30	0,8995	-0,1072	1,9284	0,9069	0,3961	0,8310	0,5083	3,2237
31	0,8995	0,9931	0,9417	0,9448	0,9463	0,0383	0,5232	3,1490
32	0,9626	0,9931	2,2022	1,3860	0,9778	0,5773	0,5504	2,9668
33	0,9626	1,0738	1,0355	1,0240	1,0182	0,0461	0,5573	2,9281
34	1,0159	1,0738	1,2626	1,1174	1,0448	0,1053	0,5803	2,8091
35	1,0159	1,0456	1,0629	1,0415	1,0308	0,0194	0,5766	2,8396
36	1,0456	1,0456	1,1953	1,0955	1,0456	0,0706	0,5913	2,7855
37	0,8866	0,8866	1,2499	1,0077	0,8866	0,1713	0,4807	3,4661

38	1,1508	0,8866	0,8328	0,9567	1,0187	0,1390	0,4807	3,4661
39	1,1508	0,7564	1,1577	1,0216	0,9536	0,1876	0,5083	3,2237
40	1,1415	0,7564	0,9417	0,9466	0,9490	0,1573	0,5232	3,1490
41	1,1415	0,8469	1,0058	0,9981	0,9942	0,1204	0,5504	2,9568
42	0,9684	0,8469	1,0355	0,9503	0,9076	0,0781	0,5573	2,9282
43	0,9684	0,9874	1,1095	1,0218	0,9779	0,0625	0,5803	2,8091
44	1,0465	0,9874	1,0629	1,0323	1,0170	0,0324	0,5766	2,8396
45	1,0465	1,0465	1,1632	1,0854	1,0465	0,0550	0,5913	2,7855
46	1,0472	1,0472	1,2499	1,1148	1,0472	0,0956	0,5083	3,2237
47	1,0472	1,1286	1,2352	1,1370	1,0879	0,0770	0,5504	3,1490
48	0,9901	1,1286	1,1577	1,0921	1,0594	0,0731	0,5232	3,1490
49	0,9901	0,7369	0,7244	0,8172	0,8635	0,1224	0,5232	2,9568
50	1,1238	0,7369	1,0058	0,9555	0,9304	0,1619	0,5504	2,8766
51	1,1238	0,8655	0,8332	0,9408	0,9946	0,1301	0,5673	2,7652
52	1,1163	0,8655	1,1095	1,0304	0,9909	0,1167	0,5908	2,7142
53	1,1163	0,8821	0,9183	0,9722	0,9992	0,1030	0,5985	2,6375
54	0,8821	0,8821	1,1632	0,9758	0,8821	0,1326	0,6140	2,6679
55	0,9583	0,9583	0,9265	0,9477	0,9583	0,0150	0,6100	2,8766
56	1,0317	0,9583	1,2352	1,0751	0,9950	0,1171	0,5673	2,9568
57	1,0317	0,8649	1,1197	1,0054	0,9483	0,1057	0,5573	2,9282
58	1,0500	0,8649	0,7244	0,8798	0,9574	0,1333	0,5573	2,9282
59	1,0500	1,0033	1,0393	1,0309	1,0266	0,0200	0,5803	2,8091
60	1,0651	1,0033	0,8332	0,9672	1,0342	0,0981	0,5985	2,7142
61	1,0651	1,0372	1,1004	1,0675	1,0511	0,0259	0,6140	2,6376
62	1,0517	1,0372	0,9183	1,0024	1,0444	0,0598	0,6222	2,6112
63	1,0517	1,0517	1,1147	1,0727	1,0517	0,0297	0,6264	2,5939
64	0,9755	0,9755	0,9265	0,9592	0,9755	0,0231	0,5908	2,7652
65	0,9755	0,9580	1,9344	1,2893	0,9667	0,4562	0,5985	2,7142
66	1,0014	0,9580	1,1197	1,0264	0,9797	0,0683	0,5803	2,8091
67	1,0014	0,9835	1,8483	1,2778	0,9925	0,4035	0,5766	2,8396
68	1,0028	0,9835	1,0393	1,0085	0,9932	0,0231	0,5766	2,8396
69	1,0028	1,0687	1,7872	1,2862	1,0358	0,3553	0,5913	2,7855
70	1,0400	1,0687	1,1004	1,0697	1,0543	0,0247	0,6100	2,6679
71	1,0400	1,0494	1,8564	1,3153	1,0447	0,3827	0,6140	2,6376
72	1,0494	1,0494	1,1147	1,0712	1,0494	0,0308	0,6222	2,6122

3. melléklet: Oldalfelezéses felosztás és a membránhéj a háromszögek szerint

	oldalak			héj					
	a	b	c	Na-h	Nb-h	Nc-h	h'a	h'b	h'c
1	0,5261	0,5261	0,6169	-0,7169	-0,7169	-0,5515	-1,0542	-1,0542	-0,8111
2	0,5261	0,5306	0,6130	-0,7459	-0,7107	-0,5315	-1,0969	-1,0451	-0,7816
3	0,5306	0,5306	0,6169	-0,7107	-0,7107	-0,5515	-1,0451	-1,0451	-0,8111
4	0,5261	0,5444	0,6011	-0,8038	-0,6784	-0,4524	-1,1821	-0,9976	-0,6653
5	0,5493	0,5444	0,6130	-0,7727	-0,6784	-0,5315	-1,1363	-0,9976	-0,7816
6	0,5493	0,5493	0,6174	-0,7727	-0,7727	-0,4381	-1,1363	-1,1363	-0,6443
7	0,5261	0,5489	0,5970	-0,8756	-0,5902	-0,4081	-1,2877	-0,8680	-0,6002
8	0,5307	0,5489	0,6011	-0,8234	-0,5902	-0,4524	-1,2109	-0,8680	-0,6653

9	0,5307	0,5444	0,5970	-0,8234	-0,7329	-0,3744	-1,2109	-1,0779	-0,5506
10	0,5444	0,5444	0,6174	-0,7329	-0,7329	-0,4381	-1,0779	-1,0779	-0,6443
11	0,5261	0,5970	0,5489	-0,9515	-0,4860	-0,1428	-1,3993	-0,7147	-0,2101
12	0,6257	0,5970	0,5970	-0,9990	-0,4860	-0,4081	-1,4692	-0,7147	-0,6002
13	0,6257	0,6028	0,6028	-0,9990	-0,7118	-0,2575	-1,4692	-1,0467	-0,3787
14	0,6201	0,6028	0,5970	-0,8773	-0,7118	-0,3744	-1,2902	-1,0467	-0,5506
15	0,6201	0,6201	0,6264	-0,8773	-0,8773	-0,2094	-1,2902	-1,2902	-0,3079
16	0,5261	0,6011	0,5444	-1,0574	-0,3070	0,0960	-1,5550	-0,4515	0,1412
17	0,5307	0,6011	0,5489	-0,9905	-0,3070	-0,1428	-1,4565	-0,4515	-0,2101
18	0,5307	0,5970	0,5444	-0,9905	-0,5773	0,0699	-1,4565	-0,8490	0,1027
19	0,6201	0,5970	0,6028	-1,0212	-0,5773	-0,2575	-1,5017	-0,8490	-0,3787
20	0,6201	0,6264	0,6201	-1,0212	-0,8473	0,0998	-1,5017	-1,2460	0,1468
21	0,6264	0,6264	0,6264	-0,8473	-0,8473	-0,2094	-1,2460	-1,2460	-0,3079
22	0,5261	0,6130	0,5306	-1,1543	-0,1527	0,3981	-1,6975	-0,2245	0,5854
23	0,5493	0,6130	0,5444	-1,1437	-0,1527	0,0960	-1,6820	-0,2245	0,1412
24	0,5493	0,6174	0,5493	-1,1437	-0,4132	0,3721	-1,6820	-0,6076	0,5472
25	0,5444	0,6174	0,5444	-1,0132	-0,4132	0,0699	-1,4900	-0,6076	0,1027
26	0,5444	0,5970	0,5307	-1,0132	-0,6996	0,3102	-1,4900	-1,0288	0,4561
27	0,6028	0,5970	0,6201	-0,9851	-0,6996	0,0998	-1,4487	-1,0288	0,1468
28	0,6028	0,6028	0,6257	-0,9851	-0,9851	0,4973	-1,4487	-1,4487	0,7313
29	0,5261	0,6169	0,5261	-1,2961	0,0330	0,5436	-1,9060	0,0486	0,7994
30	0,5306	0,6169	0,5306	-1,2300	0,0330	0,3981	-1,8088	0,0486	0,5854
31	0,5306	0,6130	0,5261	-1,2300	-0,2690	0,5534	-1,8088	-0,3956	0,8138
32	0,5444	0,6130	0,5493	-1,1565	-0,2690	0,3721	-1,7008	-0,3956	0,5472
33	0,5444	0,6011	0,5261	-1,1565	-0,5380	0,5877	-1,7008	-0,7912	0,8642
34	0,5489	0,6011	0,5307	-1,0198	-0,5380	0,3102	-1,4997	-0,7912	0,4561
35	0,5489	0,5970	0,5261	-1,0198	-0,8504	0,5967	-1,4997	-1,2505	0,8775
36	0,5970	0,5970	0,6257	-0,8504	-0,8504	0,4973	-1,2505	-1,2505	0,7313
37	0,5261	0,5261	0,6169	-0,7214	-0,7214	1,8677	-1,0609	-1,0609	2,7466
38	0,6169	0,5261	0,5261	-1,5831	-0,7214	0,5436	-2,3280	-1,0609	0,7994
39	0,6169	0,5306	0,5306	-1,5831	-0,5125	1,4049	-2,3280	-0,7536	2,0660
40	0,6130	0,5306	0,5261	-1,3639	-0,5125	0,5534	-2,0058	-0,7536	0,8138
41	0,6130	0,5444	0,5493	-1,3639	-0,6908	0,9806	-2,0058	-1,0158	1,4420
42	0,6011	0,5444	0,5261	-1,1493	-0,6908	0,5877	-1,6902	-1,0158	0,8642
43	0,6011	0,5489	0,5307	-1,1493	-0,8426	0,9644	-1,6902	-1,2391	1,4182
44	0,5970	0,5489	0,5261	-1,0300	-0,8426	0,5967	-1,5147	-1,2391	0,8775
45	0,5970	0,5970	0,6257	-1,0300	-1,0300	1,4645	-1,5147	-1,5147	2,1537
46	0,5306	0,5306	0,6169	-1,1967	-1,1967	1,8677	-1,7599	-1,7599	2,7466
47	0,5444	0,5493	0,6130	-1,1967	-1,1283	2,5238	-1,7599	-1,6592	3,7114
48	0,5306	0,5261	0,6130	-1,4593	-1,1283	1,4049	-2,1460	-1,6592	2,0660
49	0,6130	0,5261	0,5306	-1,4593	-0,5246	1,1660	-2,1460	-0,7715	1,7147
50	0,6130	0,5493	0,5444	-1,5703	-0,5246	0,9806	-2,3093	-0,7715	1,4420
51	0,6174	0,5493	0,5493	-1,5703	-0,7032	1,2836	-2,3093	-1,0341	1,8876
52	0,6174	0,5444	0,5444	-1,3476	-0,7032	0,9644	-1,9817	-1,0341	1,4182
53	0,5970	0,5444	0,5307	-1,3476	-0,9751	1,5512	-1,9817	-1,4339	2,2812
54	0,5970	0,6028	0,6201	-0,9751	-0,9751	1,4645	-1,4339	-1,4339	2,1537
55	0,6028	0,6028	0,6257	-1,2277	-1,2277	2,2715	-1,8055	-1,8055	3,3404
56	0,5493	0,5493	0,6174	-1,2748	-1,2277	2,5238	-1,8747	-1,8055	3,7114
57	0,5444	0,5261	0,6011	-1,2748	-0,9556	2,7396	-1,8747	-1,4053	4,0288
58	0,6011	0,5261	0,5444	-1,7795	-0,9556	1,1660	-2,6170	-1,4053	1,7147

59	0,6011	0,5307	0,5489	-1,7795	-0,7248	1,8133	-2,6170	-1,0659	2,6666
60	0,5970	0,5307	0,5444	-1,4680	-0,7248	1,2836	-2,1588	-1,0659	1,8876
61	0,5970	0,6201	0,6028	-1,4680	-1,2422	2,3616	-2,1588	-1,8268	3,4729
62	0,6264	0,6201	0,6201	-1,3660	-1,2422	1,5512	-2,0088	-1,8268	2,2812
63	0,6264	0,6264	0,6264	-1,3660	-1,3660	2,4937	-2,0088	-2,0088	3,6673
64	0,5444	0,5444	0,6174	-1,3799	-1,3799	2,2715	-2,0292	-2,0292	3,3404
65	0,5444	0,5307	0,5970	-1,3799	-1,3891	3,1399	-2,0292	-2,0428	4,6175
66	0,5489	0,5307	0,6011	-1,3612	-1,3891	2,7396	-2,0017	-2,0428	4,0288
67	0,5489	0,5261	0,5970	-1,3612	-1,0784	3,1333	-2,0017	-1,5858	4,6078
68	0,5970	0,5261	0,5489	-1,7300	-1,0784	1,8133	-2,5442	-1,5858	2,6666
69	0,5970	0,6257	0,5970	-1,7300	-1,4082	2,7495	-2,5442	-2,0709	4,0434
70	0,6028	0,6257	0,6028	-1,4738	-1,4082	2,3616	-2,1674	-2,0709	3,4729
71	0,6028	0,6201	0,5970	-1,4738	-1,4562	2,7613	-2,1674	-2,1414	4,0608
72	0,6201	0,6201	0,6264	-1,4562	-1,4562	2,4937	-2,1414	-2,1414	3,6673

	rács		
	Na-r	Nb-r	Nc-r
1	-1,0500	-1,0500	-0,8400
2	-1,3000	-1,2300	-0,7200
3	-1,2300	-1,2300	-0,8400
4	-1,4500	-1,0800	-0,6000
5	-1,2800	-1,0800	-0,7200
6	-1,2800	-1,2800	-0,5700
7	-1,6200	-0,8600	-0,5400
8	-1,3900	-0,8600	-0,6000
9	-1,3900	-1,1600	-0,4800
10	-1,1600	-1,1600	-0,5700
11	-1,7200	-0,6900	-0,3500
12	-1,4100	-0,6900	-0,5400
13	-1,4100	-1,0100	-0,2700
14	-1,2300	-1,0100	-0,4800
15	-1,2300	-1,2300	-0,2600
16	-1,8300	-0,4200	-0,1300
17	-1,6300	-0,4200	-0,3500
18	-1,6300	-0,8200	-0,0200
19	-1,4300	-0,8200	-0,2700
20	-1,4300	-1,1600	0,1400
21	-1,1600	-1,1600	-0,2600
22	-1,9800	-0,2600	0,2800
23	-1,8300	-0,2600	-0,1300
24	-1,8300	-0,5700	0,3500
25	-1,6100	-0,5700	-0,0200
26	-1,6100	-0,9700	0,4100
27	-1,3800	-0,9700	0,1400
28	-1,3800	-1,3800	0,5500
29	-2,1200	-0,0700	1,8900
30	-2,1400	-0,0700	0,2800
31	-2,1400	-0,3300	1,7800
32	-1,8400	-0,3300	0,3500
33	-1,8400	-0,7300	1,7100

34	-1,6100	-0,7300	0,4100
35	-1,6100	-1,0600	1,8200
36	-1,0600	-1,0600	0,5500
37	-1,1400	-1,1400	1,8700
38	-1,8900	-1,1400	1,8900
39	-1,8900	-1,0000	1,9800
40	-1,8000	-1,0000	1,7800
41	-1,8000	-1,3100	1,7800
42	-1,6800	-1,3100	1,7100
43	-1,6800	-1,6300	1,7100
44	-1,6400	-1,6300	1,8200
45	-1,6400	-1,6400	1,8200
46	-1,7500	-1,7500	1,8700
47	-1,7500	-1,4400	2,8500
48	-2,1100	-1,4400	1,9800
49	-2,1100	-1,1300	2,6800
50	-1,8000	-1,1300	1,7800
51	-1,8000	-1,2900	2,5600
52	-1,6800	-1,2900	1,7100
53	-1,6800	-1,6300	2,7100
54	-1,6300	-1,6300	1,8200
55	-2,0000	-2,0000	3,1700
56	-1,9600	-2,0000	2,8500
57	-1,9600	-1,6600	3,1400
58	-2,2000	-1,6600	2,6800
59	-2,2000	-1,2700	3,1000
60	-2,0300	-1,2700	2,5600
61	-2,0300	-1,7600	3,2400
62	-1,9000	-1,7600	2,7100
63	-1,9000	-1,9000	3,2500
64	-2,2000	-2,2000	3,1700
65	-2,2000	-2,2500	2,2000
66	-2,0300	-2,2500	3,1400
67	-2,0300	-1,9600	2,1800
68	-2,4600	-1,9600	3,1000
69	-2,4600	-1,9000	2,2500
70	-2,1800	-1,9000	3,2400
71	-2,1800	-1,9700	2,2700
72	-1,9700	-1,9700	3,2500

	kimutatás							
	h'a/Na-r	h'b/Nb-r	h'c/Nc-r	átlag	átlag2	szórás	old.átl.	D
1	1,0040	1,0040	0,9656	0,9912	1,0040	0,0181	0,5564	2,9873
2	0,8438	0,8497	1,0856	0,9264	0,8467	0,1126	0,5566	2,9780
3	0,8497	0,8497	0,9656	0,8883	0,8497	0,0546	0,5594	2,9640
4	0,8153	0,9237	1,1089	0,9493	0,8695	0,1212	0,5572	2,9558
5	0,8877	0,9237	1,0856	0,9657	0,9057	0,0861	0,5689	2,8909
6	0,8877	0,8877	1,1304	0,9686	0,8877	0,1144	0,5720	2,8762
7	0,7949	1,0093	1,1115	0,9719	0,9021	0,1319	0,5573	2,9500
8	0,8711	1,0093	1,1089	0,9964	0,9402	0,0975	0,5602	2,9345

9	0,8711	0,9292	1,1471	0,9825	0,9002	0,1188	0,5574	2,9482
10	0,9292	0,9292	1,1304	0,9962	0,9292	0,0948	0,5687	2,8984
11	0,8135	1,0358	0,6002	0,8165	0,9246	0,1778	0,5573	2,9500
12	1,0420	1,0358	1,1115	1,0631	1,0389	0,0343	0,6065	2,6856
13	1,0420	1,0364	1,4025	1,1603	1,0392	0,1713	0,6105	2,6667
14	1,0489	1,0364	1,1471	1,0775	1,0426	0,0495	0,6066	2,6833
15	1,0489	1,0489	1,1843	1,0940	1,0489	0,0638	0,6222	2,6126
16	0,8497	1,0749	-1,0864	0,2794	0,9623	0,9701	0,5572	2,9558
17	0,8936	1,0749	0,6002	0,8562	0,9842	0,1956	0,5602	2,9345
18	0,8936	1,0354	-5,1363	-1,0691	0,9645	2,8765	0,5574	2,9482
19	1,0501	1,0354	1,4025	1,1627	1,0428	0,1697	0,6066	2,6833
20	1,0501	1,0742	1,0485	1,0576	1,0622	0,0117	0,6222	2,6126
21	1,0742	1,0742	1,1843	1,1109	1,0742	0,0519	0,6264	2,5948
22	0,8573	0,8636	2,0906	1,2705	0,8605	0,5799	0,5566	2,9780
23	0,9191	0,8636	-1,0864	0,2321	0,8913	0,9326	0,5689	2,8909
24	0,9191	1,0659	1,5634	1,1828	0,9925	0,2757	0,5720	2,8762
25	0,9255	1,0659	-5,1363	-1,0483	0,9957	2,8912	0,5687	2,8984
26	0,9255	1,0606	1,1125	1,0329	0,9931	0,0788	0,5574	2,9482
27	1,0498	1,0606	1,0485	1,0530	1,0552	0,0054	0,6066	2,6833
28	1,0498	1,0498	1,3296	1,1431	1,0498	0,1319	0,6105	2,6667
29	0,8991	-0,6940	0,4230	0,2093	0,1025	0,6677	0,5564	2,9873
30	0,8452	-0,6940	2,0906	0,7473	0,0756	1,1389	0,5594	2,9641
31	0,8452	1,1988	0,4572	0,8337	1,0220	0,3029	0,5566	2,9780
32	0,9243	1,1988	1,5634	1,2288	1,0616	0,2618	0,5689	2,8909
33	0,9243	1,0839	0,5054	0,8379	1,0041	0,2440	0,5572	2,9558
34	0,9315	1,0839	1,1125	1,0426	1,0077	0,0795	0,5602	2,9345
35	0,9315	1,1797	0,4821	0,8645	1,0556	0,2887	0,5573	2,9500
36	1,1797	1,1797	1,3296	1,2297	1,1797	0,0706	0,6065	2,6856
37	0,9306	0,9306	1,4688	1,1100	0,9306	0,2537	0,5564	2,9873
38	1,2318	0,9306	0,4230	0,8618	1,0812	0,3338	0,5564	2,9873
39	1,2318	0,7536	1,0434	1,0096	0,9927	0,1967	0,5594	2,9641
40	1,1143	0,7536	0,4572	0,7750	0,9340	0,2687	0,5566	2,9780
41	1,1143	0,7754	0,8101	0,9000	0,9449	0,1522	0,5689	2,8909
42	1,0061	0,7754	0,5054	0,7623	0,8908	0,2046	0,5572	2,9558
43	1,0061	0,7602	0,8294	0,8652	0,8831	0,1035	0,5602	2,9345
44	0,9236	0,7602	0,4821	0,7220	0,8419	0,1822	0,5573	2,9500
45	0,9236	0,9236	1,1834	1,0102	0,9236	0,1225	0,6065	2,6856
46	1,0057	1,0057	1,4688	1,1600	1,0057	0,2183	0,5594	2,9641
47	1,0057	1,1523	1,3023	1,1534	1,0790	0,1211	0,5689	2,9780
48	1,0171	1,1523	1,0434	1,0709	1,0847	0,0585	0,5566	2,9780
49	1,0171	0,6827	0,6398	0,7799	0,8499	0,1686	0,5566	2,8909
50	1,2829	0,6827	0,8101	0,9252	0,9828	0,2582	0,5689	2,8762
51	1,2829	0,8016	0,7373	0,9406	1,0423	0,2435	0,5720	2,8984
52	1,1796	0,8016	0,8294	0,9369	0,9906	0,1720	0,5687	2,9482
53	1,1796	0,8797	0,8418	0,9670	1,0296	0,1511	0,5574	2,6833
54	0,8797	0,8797	1,1834	0,9809	0,8797	0,1432	0,6066	2,6667
55	0,9027	0,9027	1,0538	0,9531	0,9027	0,0712	0,6105	2,8762
56	0,9565	0,9027	1,3023	1,0538	0,9296	0,1770	0,5720	2,8909
57	0,9565	0,8466	1,2831	1,0287	0,9015	0,1854	0,5572	2,9558
58	1,1895	0,8466	0,6398	0,8920	1,0181	0,2267	0,5572	2,9558

59	1,1895	0,8393	0,8602	0,9630	1,0144	0,1604	0,5602	2,9345
60	1,0634	0,8393	0,7373	0,8800	0,9514	0,1362	0,5574	2,9482
61	1,0634	1,0379	1,0719	1,0578	1,0507	0,0144	0,6066	2,6833
62	1,0572	1,0379	0,8418	0,9790	1,0476	0,0973	0,6222	2,6126
63	1,0572	1,0572	1,1284	1,0810	1,0572	0,0335	0,6264	2,5948
64	0,9224	0,9224	1,0538	0,9662	0,9224	0,0619	0,5687	2,8984
65	0,9224	0,9079	2,0988	1,3097	0,9152	0,5580	0,5574	2,9482
66	0,9861	0,9079	1,2831	1,0590	0,9470	0,1616	0,5602	2,9345
67	0,9861	0,8091	2,1137	1,3029	0,8976	0,5778	0,5573	2,9500
68	1,0342	0,8091	0,8602	0,9012	0,9217	0,0964	0,5573	2,9500
69	1,0342	1,0900	1,7971	1,3071	1,0621	0,3472	0,6065	2,6856
70	0,9942	1,0900	1,0719	1,0520	1,0421	0,0415	0,6105	2,6667
71	0,9942	1,0870	1,7889	1,2900	1,0406	0,3548	0,6066	2,6833
72	1,0870	1,0870	1,1284	1,1008	1,0870	0,0195	0,6222	2,6126

4.melléklet: Bauersfeld-féle felosztás és a membránhéj a háromszögek szerint

	oldalak			héj					
	a	b	c	Na-h	Nb-h	Nc-h	h'a	h'b	h'c
1	0,5261	0,5261	0,6169	-0,7169	-0,7169	-0,6125	-1,1563	-1,1563	-0,9879
2	0,5261	0,5567	0,5817	-0,7606	-0,7371	-0,5780	-1,2267	-1,1889	-0,9323
3	0,5930	0,5567	0,6169	-0,7371	-0,7371	-0,6125	-1,1889	-1,1889	-0,9879
4	0,5261	0,5523	0,5691	-0,7989	-0,6576	-0,4903	-1,2886	-1,0607	-0,7908
5	0,5307	0,5523	0,5817	-0,7594	-0,6576	-0,5780	-1,2249	-1,0607	-0,9323
6	0,5307	0,5318	0,6180	-0,7594	-0,7594	-0,4302	-1,2249	-1,2249	-0,6938
7	0,5261	0,5566	0,5650	-0,8709	-0,5734	-0,3621	-1,4046	-0,9248	-0,5841
8	0,5305	0,5566	0,5691	-0,8153	-0,5734	-0,4903	-1,3151	-0,9248	-0,7908
9	0,5305	0,5523	0,5650	-0,8153	-0,7438	-0,3414	-1,3151	-1,1997	-0,5506
10	0,5879	0,5523	0,6180	-0,7438	-0,7438	-0,4302	-1,1997	-1,1997	-0,6938
11	0,5261	0,5650	0,5566	-0,9654	-0,4613	-0,1731	-1,5571	-0,7440	-0,2792
12	0,5395	0,5650	0,5650	-0,9022	-0,4613	-0,3621	-1,4552	-0,7440	-0,5841
13	0,5395	0,5413	0,5413	-0,9022	-0,6442	-0,2082	-1,4552	-1,0390	-0,3358
14	0,5358	0,5413	0,5650	-0,8092	-0,6442	-0,3414	-1,3052	-1,0390	-0,5506
15	0,5358	0,5381	0,5998	-0,8092	-0,8092	-0,1358	-1,3052	-1,3052	-0,2190
16	0,5261	0,5691	0,5523	-1,0860	-0,3133	0,0564	-1,7516	-0,5053	0,0910
17	0,5305	0,5691	0,5566	-1,0137	-0,3133	-0,1731	-1,6351	-0,5053	-0,2792
18	0,5305	0,5650	0,5523	-1,0137	-0,5125	0,0159	-1,6351	-0,8266	0,0257
19	0,5358	0,5650	0,5413	-0,8907	-0,5125	-0,2082	-1,4366	-0,8266	-0,3358
20	0,5358	0,5998	0,5381	-0,8907	-0,7568	-0,0295	-1,4366	-1,2207	-0,0476
21	0,6012	0,5998	0,5998	-0,7568	-0,7568	-0,1358	-1,2207	-1,2207	-0,2190
22	0,5261	0,5817	0,5567	-1,2334	-0,1273	0,3094	-1,9894	-0,2052	0,4990
23	0,5307	0,5817	0,5523	-1,1054	-0,1273	0,0564	-1,7829	-0,2052	0,0910
24	0,5307	0,6180	0,5318	-1,1054	-0,3908	0,2958	-1,7829	-0,6303	0,4770
25	0,5879	0,6180	0,5523	-1,0675	-0,3908	0,0159	-1,7218	-0,6303	0,0257
26	0,5879	0,6304	0,5316	-1,0675	-0,6463	0,2356	-1,7218	-1,0424	0,3800
27	0,5752	0,6304	0,5381	-0,8901	-0,6463	-0,0295	-1,4356	-1,0424	-0,0476
28	0,5752	0,6041	0,5428	-0,8901	-0,8901	0,2553	-1,4356	-1,4356	0,4118
29	0,5261	0,6169	0,5261	-1,2961	0,0374	0,5436	-2,0905	0,0603	0,8768

30	0,5930	0,6169	0,5567	-1,3828	0,0374	0,3094	-2,2303	0,0603	0,4990
31	0,5930	0,6489	0,5261	-1,3828	-0,2841	0,5875	-2,2303	-0,4582	0,9475
32	0,5879	0,6489	0,5318	-1,1684	-0,2841	0,2958	-1,8845	-0,4582	0,4770
33	0,5879	0,6350	0,5261	-1,1684	-0,5384	0,5832	-1,8845	-0,8684	0,9406
34	0,5929	0,6350	0,5316	-1,0402	-0,5384	0,2356	-1,6777	-0,8684	0,3800
35	0,5929	0,6304	0,5261	-1,0402	-0,7839	0,5679	-1,6777	-1,2643	0,9159
36	0,6028	0,6304	0,5428	-0,7839	-0,7839	0,2553	-1,2643	-1,2643	0,4118
37	0,5261	0,5261	0,6169	-0,7214	-0,7214	1,7847	-1,1636	-1,1636	2,8786
38	0,6169	0,5261	0,5261	-1,5420	-0,7214	0,5436	-2,4872	-1,1636	0,8768
39	0,6169	0,6213	0,6213	-1,5420	-0,5466	1,5641	-2,4872	-0,8817	2,5227
40	0,6224	0,6213	0,5261	-1,4606	-0,5466	0,5875	-2,3558	-0,8817	0,9475
41	0,6224	0,6164	0,5319	-1,4606	-0,5221	1,2411	-2,3558	-0,8420	2,0018
42	0,6077	0,6164	0,5261	-1,2249	-0,5221	0,5832	-1,9757	-0,8420	0,9406
43	0,6077	0,6212	0,5316	-1,2249	-0,7627	1,2726	-1,9757	-1,2302	2,0526
44	0,6028	0,6212	0,5261	-1,0455	-0,7627	0,5679	-1,6863	-1,2302	0,9159
45	0,6028	0,6304	0,5428	-1,0455	-1,0455	1,0749	-1,6863	-1,6863	1,7338
46	0,5567	0,5930	0,6169	-1,3140	-1,3140	1,7847	-2,1193	-2,1193	2,8786
47	0,5523	0,5307	0,5817	-1,3140	-0,9789	2,4959	-2,1193	-1,5789	4,0256
48	0,5567	0,5261	0,5817	-1,4173	-0,9789	1,5641	-2,2859	-1,5789	2,5227
49	0,6224	0,5261	0,6213	-1,4173	-0,9284	1,7770	-2,2859	-1,4974	2,8661
50	0,6224	0,5319	0,6164	-1,4814	-0,9284	1,2411	-2,3894	-1,4974	2,0018
51	0,6192	0,5319	0,5319	-1,4814	-0,8339	1,5254	-2,3894	-1,3450	2,4604
52	0,6192	0,6164	0,6164	-1,3503	-0,8339	1,2726	-2,1779	-1,3450	2,0526
53	0,6028	0,6164	0,5316	-1,3503	-0,7728	1,3831	-2,1779	-1,2465	2,2309
54	0,6028	0,6041	0,5383	-0,7728	-0,7728	1,0749	-1,2465	-1,2465	1,7338
55	0,5752	0,6041	0,5428	-1,1373	-1,1373	2,0828	-1,8343	-1,8343	3,3593
56	0,5318	0,5307	0,6180	-1,3460	-1,1373	2,4959	-2,1710	-1,8343	4,0256
57	0,5523	0,5261	0,5691	-1,3460	-1,0447	2,4267	-2,1710	-1,6850	3,9140
58	0,6077	0,5261	0,6164	-1,5507	-1,0447	1,7770	-2,5012	-1,6850	2,8661
59	0,6077	0,5316	0,6212	-1,5507	-1,1189	2,5257	-2,5012	-1,8046	4,0737
60	0,6028	0,5316	0,6164	-1,3399	-1,1189	1,5254	-2,1611	-1,8046	2,4604
61	0,6028	0,5383	0,6041	-1,3399	-1,1072	2,5121	-2,1611	-1,7857	4,0518
62	0,6012	0,5383	0,5383	-1,3477	-1,1072	1,3831	-2,1738	-1,7857	2,2309
63	0,6012	0,5998	0,5998	-1,3477	-1,3477	2,5088	-2,1738	-2,1738	4,0464
64	0,5523	0,5879	0,6180	-1,5319	-1,5319	2,0828	-2,4708	-2,4708	3,3593
65	0,5523	0,5305	0,5650	-1,5319	-1,1610	2,8102	-2,4708	-1,8725	4,5326
66	0,5566	0,5305	0,5691	-1,5630	-1,1610	2,4267	-2,5209	-1,8725	3,9140
67	0,5566	0,5261	0,5650	-1,5630	-1,1728	2,7517	-2,5209	-1,8915	4,4382
68	0,6028	0,5261	0,6212	-1,6606	-1,1728	2,5257	-2,6784	-1,8915	4,0737
69	0,6028	0,5428	0,6304	-1,6606	-1,3254	3,1155	-2,6784	-2,1377	5,0250
70	0,5752	0,5428	0,6041	-1,5192	-1,3254	2,5121	-2,4503	-2,1377	4,0518
71	0,5752	0,5381	0,6304	-1,5192	-1,3003	3,2448	-2,4503	-2,0973	5,2336
72	0,5358	0,5381	0,5998	-1,3003	-1,3003	2,5088	-2,0973	-2,0973	4,0464

	rács		
	Na-r	Nb-r	Nc-r
1	-1,1100	-1,0700	-0,9100
2	-1,2800	-1,1300	-0,8300
3	-1,0900	-1,1300	-0,9100
4	-1,3300	-1,0100	-0,7200

5	-1,2800	-1,0100	-0,8300
6	-1,2800	-1,3200	-0,5900
7	-1,4300	-0,8600	-0,5800
8	-1,3300	-0,8600	-0,7200
9	-1,3300	-1,1600	-0,5000
10	-1,1200	-1,1600	-0,5900
11	-1,6000	-0,6700	-0,3900
12	-1,4000	-0,6700	-0,5800
13	-1,4000	-1,0000	-0,3600
14	-1,2700	-1,0000	-0,5000
15	-1,2700	-1,3300	-0,2500
16	-1,7800	-0,4400	-0,1500
17	-1,6400	-0,4400	-0,3900
18	-1,6400	-0,7300	-0,0800
19	-1,4300	-0,7300	-0,3600
20	-1,4300	-1,0600	-0,0300
21	-1,0500	-1,0600	-0,2500
22	-2,0900	-0,1800	0,2200
23	-1,8600	-0,1800	-0,1500
24	-1,8600	-0,5300	0,3500
25	-1,5700	-0,5300	-0,0800
26	-1,5700	-0,8700	0,3800
27	-1,2800	-0,8700	-0,0300
28	-1,2800	-1,1300	0,4300
29	-2,2900	-0,0100	1,1400
30	-2,0400	-0,0100	0,2200
31	-2,0400	-0,4200	1,0100
32	-1,7900	-0,4200	0,3500
33	-1,7900	-0,6900	0,9800
34	-1,6400	-0,6900	0,3800
35	-1,6400	-1,0300	1,0300
36	-1,2000	-1,0300	0,4300
37	-1,1800	-1,2200	2,0200
38	-2,0800	-1,2200	1,1400
39	-2,0800	-0,7300	2,0500
40	-1,9900	-0,7300	1,0100
41	-1,9900	-0,7200	1,8400
42	-1,6800	-0,7200	0,9800
43	-1,6800	-1,0600	1,8100
44	-1,4500	-1,0600	1,0300
45	-1,4500	-1,2800	1,7900
46	-1,8600	-1,6700	2,0200
47	-1,8600	-1,6900	2,8900
48	-1,8700	-1,6900	2,0500
49	-1,8700	-1,4600	2,6500
50	-1,8300	-1,4600	1,8400
51	-1,8300	-1,2700	2,7100
52	-1,8500	-1,2700	1,8100
53	-1,8500	-1,2300	2,6300
54	-1,4200	-1,2300	1,7900

55	-1,7200	-1,9200	3,7800
56	-2,3100	-1,9200	2,8900
57	-2,3100	-1,5900	2,6900
58	-1,9500	-1,5900	2,6500
59	-1,9500	-2,1000	3,0400
60	-1,6800	-2,1000	2,7100
61	-1,6800	-1,9900	3,1300
62	-1,7400	-1,9900	2,6300
63	-1,7400	-1,9300	3,0000
64	-3,4300	-2,9800	3,7800
65	-3,4300	-1,0300	1,9800
66	-1,8600	-1,0300	2,6900
67	-1,8600	-2,0300	2,4000
68	-1,9600	-2,0300	3,0400
69	-1,9600	-2,5500	2,4700
70	-2,3500	-2,5500	3,1300
71	-2,3500	-2,2000	2,4800
72	-1,6400	-2,2000	3,0000

	kimutató							
	h'a/Na-r	h'b/Nb-r	h'c/Nc-r	átlag	átlag2	szórás	old. átl.	D
1	1,0417	1,0806	1,0856	1,0693	1,0611	0,0196	0,5564	2,9873
2	0,9584	1,0521	1,1232	1,0446	1,0052	0,0675	0,5548	2,8054
3	1,0907	1,0521	1,0856	1,0761	1,0714	0,0171	0,5889	2,6226
4	0,9689	1,0502	1,0984	1,0391	1,0095	0,0534	0,5492	2,8297
5	0,9570	1,0502	1,1232	1,0434	1,0036	0,0680	0,5549	2,7967
6	0,9570	0,9280	1,1760	1,0203	0,9425	0,1107	0,5601	2,9568
7	0,9822	1,0753	1,0071	1,0215	1,0288	0,0394	0,5492	2,8313
8	0,9888	1,0753	1,0984	1,0542	1,0320	0,0472	0,5521	2,8100
9	0,9888	1,0342	1,1013	1,0414	1,0115	0,0462	0,5493	2,8225
10	1,0712	1,0342	1,1760	1,0938	1,0527	0,0600	0,5861	2,6338
11	0,9732	1,1105	0,7160	0,9332	1,0418	0,1635	0,5492	2,8313
12	1,0395	1,1105	1,0071	1,0523	1,0750	0,0432	0,5565	2,8127
13	1,0395	1,0390	0,9328	1,0038	1,0392	0,0502	0,5407	2,8089
14	1,0277	1,0390	1,1013	1,0560	1,0334	0,0323	0,5474	2,8211
15	1,0277	0,9814	0,8761	0,9617	1,0046	0,0634	0,5579	2,9397
16	0,9841	1,1483	-0,6065	0,5086	1,0662	0,7914	0,5492	2,8297
17	0,9970	1,1483	0,7160	0,9538	1,0727	0,1791	0,5521	2,8100
18	0,9970	1,1323	-0,3214	0,6026	1,0647	0,6557	0,5493	2,8225
19	1,0046	1,1323	0,9328	1,0233	1,0685	0,0825	0,5474	2,8211
20	1,0046	1,1516	1,5865	1,2476	1,0781	0,2470	0,5579	2,9397
21	1,1625	1,1516	0,8761	1,0634	1,1571	0,1325	0,6002	2,7061
22	0,9519	1,1402	2,2683	1,4535	1,0460	0,5813	0,5548	2,8054
23	0,9585	1,1402	-0,6065	0,4974	1,0494	0,7841	0,5549	2,7967
24	0,9585	1,1893	1,3630	1,1703	1,0739	0,1657	0,5601	2,9568
25	1,0967	1,1893	-0,3214	0,6549	1,1430	0,6914	0,5861	2,6338
26	1,0967	1,1981	0,9999	1,0983	1,1474	0,0809	0,5833	2,8225
27	1,1215	1,1981	1,5865	1,3021	1,1598	0,2035	0,5812	2,8211
28	1,1215	1,2704	0,9577	1,1166	1,1960	0,1277	0,5740	2,8089
29	0,9129	-6,0318	0,7691	-1,4500	-2,5595	3,2404	0,5564	2,9873

30	1,0933	-6,0318	2,2683	-0,8901	-2,4693	3,6673	0,5889	2,6226
31	1,0933	1,0909	0,9381	1,0408	1,0921	0,0726	0,5893	2,8054
32	1,0528	1,0909	1,3630	1,1689	1,0718	0,1381	0,5895	2,7967
33	1,0528	1,2585	0,9598	1,0904	1,1557	0,1248	0,5830	2,8297
34	1,0230	1,2585	0,9999	1,0938	1,1408	0,1168	0,5865	2,8100
35	1,0230	1,2275	0,8892	1,0466	1,1253	0,1391	0,5831	2,8313
36	1,0536	1,2275	0,9577	1,0796	1,1406	0,1117	0,5920	2,8127
37	0,9861	0,9538	1,4250	1,1216	0,9699	0,2149	0,5564	2,9873
38	1,1958	0,9538	0,7691	0,9729	1,0748	0,1747	0,5564	2,9873
39	1,1958	1,2077	1,2306	1,2114	1,2017	0,0144	0,6199	2,6226
40	1,1838	1,2077	0,9381	1,1099	1,1958	0,1218	0,5899	2,8054
41	1,1838	1,1695	1,0880	1,1471	1,1767	0,0422	0,5902	2,7967
42	1,1760	1,1695	0,9598	1,1018	1,1727	0,1004	0,5834	2,8297
43	1,1760	1,1606	1,1340	1,1569	1,1683	0,0173	0,5868	2,8100
44	1,1630	1,1606	0,8892	1,0709	1,1618	0,1285	0,5833	2,8313
45	1,1630	1,3174	0,9686	1,1497	1,2402	0,1427	0,5920	2,8127
46	1,1394	1,2691	1,4250	1,2778	1,2043	0,1168	0,5889	2,6226
47	1,1394	0,9343	1,3929	1,1555	1,0368	0,1876	0,5549	2,8054
48	1,2224	0,9343	1,2306	1,1291	1,0783	0,1378	0,5548	2,8054
49	1,2224	1,0256	1,0815	1,1099	1,1240	0,0828	0,5899	2,7967
50	1,3057	1,0256	1,0880	1,1397	1,1656	0,1201	0,5902	2,9568
51	1,3057	1,0590	0,9079	1,0909	1,1824	0,1639	0,5610	2,6338
52	1,1773	1,0590	1,1340	1,1234	1,1181	0,0488	0,6173	2,8225
53	1,1773	1,0134	0,8482	1,0130	1,0953	0,1343	0,5836	2,8211
54	0,8778	1,0134	0,9686	0,9533	0,9456	0,0564	0,5817	2,8089
55	1,0665	0,9554	0,8887	0,9702	1,0109	0,0733	0,5740	2,9568
56	0,9398	0,9554	1,3929	1,0961	0,9476	0,2100	0,5601	2,7967
57	0,9398	1,0598	1,4550	1,1515	0,9998	0,2201	0,5492	2,8297
58	1,2827	1,0598	1,0815	1,1413	1,1712	0,1003	0,5834	2,8297
59	1,2827	0,8593	1,3400	1,1607	1,0710	0,2144	0,5868	2,8100
60	1,2864	0,8593	0,9079	1,0179	1,0729	0,1909	0,5836	2,8225
61	1,2864	0,8974	1,2945	1,1594	1,0919	0,1853	0,5817	2,8211
62	1,2493	0,8974	0,8482	0,9983	1,0733	0,1786	0,5592	2,9397
63	1,2493	1,1263	1,3488	1,2415	1,1878	0,0910	0,6002	2,7061
64	0,7203	0,8291	0,8887	0,8127	0,7747	0,0697	0,5861	2,6338
65	0,7203	1,8180	2,2892	1,6092	1,2692	0,6573	0,5493	2,8225
66	1,3553	1,8180	1,4550	1,5428	1,5867	0,1988	0,5521	2,8100
67	1,3553	0,9318	1,8493	1,3788	1,1436	0,3749	0,5492	2,8313
68	1,3665	0,9318	1,3400	1,2128	1,1492	0,1990	0,5833	2,8313
69	1,3665	0,8383	2,0344	1,4131	1,1024	0,4894	0,5920	2,8127
70	1,0427	0,8383	1,2945	1,0585	0,9405	0,1866	0,5740	2,8089
71	1,0427	0,9533	2,1103	1,3688	0,9980	0,5256	0,5812	2,8211
72	1,2788	0,9533	1,3488	1,1936	1,1161	0,1723	0,5579	2,9397

A következő linken érhetőek el az általam írt Python kódok txt formátumú fájlok formájában:

<https://drive.google.com/drive/folders/1NyPg9yiv6fxWALRsO93jtKTPQan7x-tj?usp=sharing>

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a dolgozat készítése során nyújtott támogató szakmai segítséget konzulensemnek,
Dr. Gáspár Orsolyának.

Felhasznált irodalom

- [1] Gythiel, W., Mommeyer, C., Raymaekers, T. and Schevenels, M., 2020. A comparative study of the structural performance of different types of reticulated dome subjected to distributed loads. *Frontiers in Built Environment*. 6, p. 56.
- [2] Tarnai, T. Makai, E., 1974. Spherical grids of triangular network. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 76 (3-4), p. 307-336.
- [3] Tarnai, T., 1976. Morphology of spherical grids. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 83 (3-4), p. 247-283.
- [4] Zeiss Archives Jena, 1919-1923. BACZ 26024 Bauersfeld W. *Kugelunterteilung* ('Division of a sphere') manuscript/kézirat
- [5] Gáspár, O., 2021. Bauersfeld's concept for the subdivision of the first built geodesic dome structure. *Proceedings of the IASS Annual Symposium 2020/2021 and the 7th International Conference on Spatial Structures*
- [6] Kollár, L. and Hegedus, I., 1985. Analysis and design of space frames by the continuum method. *Developments in civil engineering, 10*. Elsevier
- [7] Popko, E.S., 2012. *Divided spheres: Geodesics and the orderly subdivision of the sphere*. CRC press.
- [8] <https://sinesthesia.co/blog/tutorials/python-icospheres/>

Ábrák forrása

- [1] Gythiel, W., Mommeyer, C., Raymaekers, T. and Schevenels, M., 2020. A comparative study of the structural performance of different types of reticulated dome subjected to distributed loads. *Frontiers in Built Environment*. 6, p. 56.
- [2] Tarnai, T. Makai, E., 1976. Spherical grids of triangular network. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 76 (3-4), p. 307-336.
- [4] Zeiss Archives Jena, 1919-1923. BACZ 26024 Bauersfeld W. *Kugelunterteilung* ('Division of a sphere') manuscript/kézirat
- [5] Gáspár, O., 2021. Bauersfeld's concept for the subdivision of the first built geodesic dome structure. *Proceedings of the IASS Annual Symposium 2020/2021 and the 7th International Conference on Spatial Structures*
- [9] https://en.wikipedia.org/wiki/Planetarium_Jena#/media/File:Dome_Jena_UnderConstruction.jpg
- [10] <https://hu.pinterest.com/pin/523473156665134152/>
- [11] <https://www.wdwinfo.com/wdwinfo/guides/epcot/ep-overview.htm>

A forrással meg nem jelölt ábrák a szerző munkái.