

Tudományos Diákköri Konferencia

Ther Péter Pál  
IV. éves építész hallgató

---

# FESZÍTETT VASBETON TARTÓK ERŐJÁTÉKÁNAK VIZUÁLIS MEGJELENÍTÉSE

---

Konzulens:  
Dr. Hegyi Dezső  
egyetemi docens



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM  
SZILÁRDSÁGTANI ÉS TARTÓSZERKEZETI TANSZÉK

2015.



Ther Péter Pál

konzulens: Dr. Hegyi Dezső

## FESZÍTETT VASBETON TARTÓK ERŐJÁTÉKÁNAK VIZUÁLIS MEGJELENÍTÉSE

Köszönet

Dr. Hegyi Dezső tanár úrnak

az áldozatos munkájáért és kitartó segítségéért;

Dr. Sipos András Árpád tanár úrnak

a jegyzetekért, a szóbeli- és írásbeli segítségéért;

Regős Annamáriának

a türelméért.



## Tartalomjegyzék

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Bevezetés .....</b>   | <b>4</b>  |
| <b>A feszített vasbeton .....</b>                                    | <b>5</b>  |
| <i>A feszítés története .....</i>                                    | <i>5</i>  |
| <i>A feszítés előnyei.....</i>                                       | <i>5</i>  |
| <i>A feszítés fajtái .....</i>                                       | <i>6</i>  |
| <i>Feszítő pászmák és huzalok .....</i>                              | <i>7</i>  |
| <b>Vasbeton szerkezetek szilárdságtana .....</b>                     | <b>8</b>  |
| <i>Első feszültségi állapot .....</i>                                | <i>9</i>  |
| <i>Második feszültségi állapot.....</i>                              | <i>9</i>  |
| <i>Harmadik feszültségi állapot .....</i>                            | <i>10</i> |
| <i>Feszített vasbeton szerkezetek szilárdságtana .....</i>           | <i>10</i> |
| <i>Vasbeton szerkezetek lehajlás vizsgálata.....</i>                 | <i>11</i> |
| <b>A GeoGebra programozói felület .....</b>                          | <b>13</b> |
| <b>A program ismertetése .....</b>                                   | <b>14</b> |
| <i>Az „A” keresztmetszet számítása .....</i>                         | <i>15</i> |
| <i>A „B” keresztmetszet számítása.....</i>                           | <i>16</i> |
| <i>A „C” keresztmetszet számítása .....</i>                          | <i>18</i> |
| <i>Esettanulmányok a program paramétereinek változtatásával.....</i> | <i>21</i> |
| <b>Összefoglaló .....</b>  | <b>25</b> |
| <b>Irodalom jegyzék.....</b>   | <b>26</b> |
| <b>Ábra jegyzék.....</b>   | <b>26</b> |

## Bevezetés

Feszített és feszítetlen vasbeton tartókat a feszültségi állapotaik kitüntetett határállapotainak számításával méretezünk. Ezen méretezési módszer alkalmazása során nem jelent többlet információt az, hogy láthatjuk a szerkezet leterhelése következtében folyamatosan változó belső erőket. Azonban a szerkezet megértése szempontjából a belső erők változásának ismerete nélkülözhetetlen. Valamint ebből derülhet ki egyértelműen, hogy a két szerkezet mennyire különbözik egymástól mind erőjátékában, mind pedig alakváltozásában [1].

A kutatás során egy programozási feladatot hajtottam végre, mely a kéttámaszú vasbeton tartók változó teher hatására létrejövő belső feszültségek és alakváltozások változásainak pontos vizuális megjelenítését tűzte ki célul. A program megkönnyíti a kéttámaszú vasbeton tartók [2] működésének megértését, használata során lehetőség nyílik a feszített és feszítetlen vasbeton tartók belső feszültségi és alakváltozási összehasonlítására, valamint a feszített tartók egyszerűsített [3] és szabvány [4] szerinti számításából adódó különbségek összevetésére.

## A feszített vasbeton

### A feszítés története

A vasbeton feltalálása *Joseph Lambot* francia mérnök és *Joseph Monier* francia kertész nevéhez fűződik. Előbbi 1848-as vasbetétekkel erősített csónakjának, utóbbi vasbetétes beton virágtartóinak szabadalmával jutott el a vasbeton feltalálásához [1]. Az anyagot elsőnek *François Coignet* szintén francia iparos használta először szerkezet építéshez 1853-ban. [6]

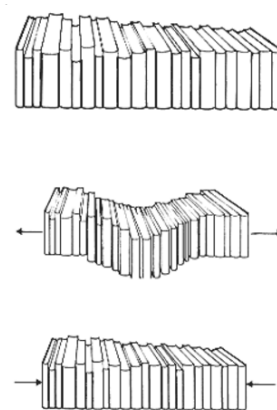
Ekkor még mind a beton, mind pedig a betonacél rosszabb minőségű volt a ma használatosakhoz képes, ám hamar felmerült igényként a beton kis húzószilárdságának kiküszöbölése.

Ennek lehetséges menete a húzásra igénybe vett elemek előfeszítése, melyet *A. V. Gadohnij* orosz tűzértiszt vetett fel 1861-ben ágyúcsövek előfeszítésére. Oroszországban 1888-ban került sor vasbeton feszítéses kísérletekre, de eredménytelenül. A XX. század elején Németországban szintén voltak sikertelen kísérletek feszített vasbeton gerendákkal (*Koenen, Bach*). A század 20-as éveinek közepén a beton komolyabb vizsgálatai során kiderült, hogy a feszítés csak nagy szilárdságú beton és acél esetén válhat hatékonná, mert a zsugorodási és kúszási alakváltozásokkal járó pászma relaxáció nem elhanyagolható. Ezekről *Eugène Freyssinet* számolt be az 1927-es bécsi hídkongresszuson [1]. 1935-ben *Freyssinet* az előfeszítéses technológiával megerősítette *Le Havre* tengeri állomását. [7]

### A feszítés előnyei

Húzásra igénybevett elemek előfeszítésének legfontosabb oka, hogy az elemre ható erőknek ne csak az anyag húzószilárdságát, hanem az abban ébredő nyomófeszültséget is le kelljen győznie. Ez a probléma hasonló a külpontosan nyomott oszlopok esetéhez, ahol egy bizonyos határig a külső nyomóerő növeli a keresztmetszet nyomatéki ellenállását.

Vasbeton esetében igen szemléletes példa az, amikor 15-20 könyvet egyszerre veszünk le a polcról (1. ábra). A könyvek közötti húzó szilárdság nulla, míg a nyomó szilárdság viszonylag magas. A könyveket csak úgy tudjuk leemelni a polcról, hogy közben össze is nyomjuk őket, ebben az esetben még a tetejére is tehetnénk egyéb súlyokat, mégsem esne szét a „tartó”, ám amint elkezdjük csökkenteni a könyvekre nehezedő külső nyomást, a „tartó” tönkremegy. [8]



1. ábra

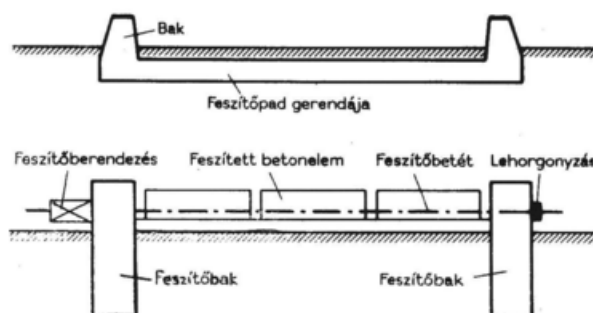
Vasbeton tartóknál a feszítésre a beton kis húzószilárdsága miatt van szükség, ugyanis gerendák és lemezek esetében a húzott öv egy normál vasbeton szerkezet esetén berepedt (2. feszültségi<sup>1)</sup>) állapotban dolgozik. Berepedt állapotban a tartó inerciája majdnem egy nagyságrenddel kisebb, így ebből nagyobb lehajlások származnak, míg feszített vasbeton tartók esetén a keresztmetszet használati állapotban általában repedésmentes keresztmetszettel dolgozik. [1]

### *A feszítés fajtái*

Feszítésnél a feszítőerőt nagyban meghatározza az, hogy a kábel a megfeszítés után feszültséget veszít. Ez főként a beton alakváltozásainak, a kúszásnak és a zsugorodásnak köszönhető. Ezt hívjuk relaxációnak. Minél nagyobb a feszítő erő, annál nagyobb a feszültségveszteség. Ebből adódóan a kábeleket a szakítószilárdságuk 70-80%-áig szokták megfeszíteni: 70% esetén a relaxáció általában 2,5% körüli, 80% esetén 4%-ot is elérheti. [8]

### Az előfeszítés

Előfeszítés esetén a tartó minden esetben üzemileg előre gyártott és tapadó huzalos. Gyártása feszítő padon (2. ábra) történik, ahol a huzalokat megfelelő távolságban egymástól, több tíz méter hosszan kifeszítik (ez a feszítőpad méretétől függ). A huzalok mentén elhelyezik a gerendák zsaluzatát,



2. ábra

majd ráöntik a betont. A kötésyorsítóval és egyéb adalékokkal kevert beton pár naponan annyira megszilárdul, hogy fel tudja venni a szükséges tapadóerőt önmaga és a pászma között. Ekkor a padot tehermentesítik, a huzalokat pedig elvágják a tartók között. Ezek után megindul a huzalok relaxációja a beton további szilárdulása mellett. [8]

A tapadó kapcsolat azt jelenti, hogy a huzal és a beton között kontakt kapcsolat van, és a feszültség megtartását a tapadó erő végzi. Ha a huzal valahol elszakad, az általában lokális problémát okoz, mert a tapadó erő más helyeken még ellátja feladatát.

### Utófeszítés

Utófeszítés lehet üzemi és helyszíni, valamint tapadó illetve csúszó pászmas is. Gyártása minden esetben a gerenda megvasalásával, és a pászmat védő cső elhelyezésével kezdődik. A

<sup>1</sup>Isd.: "Vasbeton szerkezetek szilárdságtana" c. fejezet



betonozást követően a megfelelő betonszilárdság elérésekor a pászmát feszítőpuskával megfeszítik. Csúszó pászmás esetben olajjal-, tapadó pászmás esetben műgyantával injektálják ki a védőcsövet. [8]

Utófeszítés esetén a relaxáció csak a beton kúszásából áll, mert a kábelt a zsugorodási alakváltozások lejátszódása után feszítik meg. A huzal szakadása csúszó pászmás esetben globális tönkremenetelhez vezethet.

### *Feszítő pászmák és huzalok*

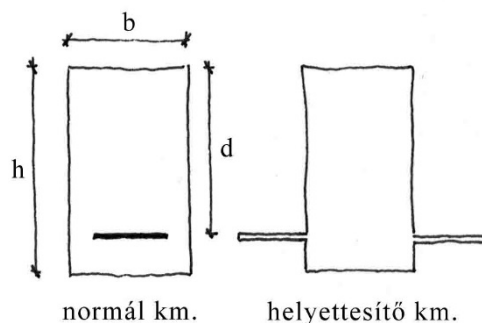
Manapság a feszített szerkezetek létrehozásához nagyszilárdságú acélt használnak, melynek rugalmassági modulusa (195 GPa) közel azonos a normál betonacéléval (210 GPa). A nagy szilárdsághoz jelentős megnyúlások tartoznak, így ilyen kábelek használata feszítés nélkül csak jelentős repedések kialakulása mellett lehetséges, míg normál betonacélok feszítésénél a beton kúszása és zsugorodása az előfeszültség nagy részét felemészti. Feszítőbetétek szilárdsága jóval nagyobb a normál betonacélokénál, valamint nem rendelkeznek határozott folyáshatárral, ezért konvenció alapján a 0,1%-os maradó nyúlást okozó feszültség értéke a kitüntetett érték. A nagyszilárdságú acél drágább, de a kisebb szükséges keresztmetszet miatt versenyképes. [8]

## Vasbeton szerkezetek szilárdságtana

Szerkezeteink méretezését határállapotok alapján végezzük. Így van ez vasbeton szerkezetek esetén is, ahol 3 határállapotot különböztetünk meg. A három határállapot létét a vasbeton inhomogenitása indokolja, ugyanis nem csak egy, hanem két anyag szilárdsági tulajdonságait kell folyamatosan szem előtt tartanunk. Ezen anyagok viselkedése pedig befolyásolja magának a vizsgált keresztmetszetnek a viselkedését. Hajlított szerkezeteknél pedig elengedhetetlen a keresztmetszet pontos ismerete az inercia számításhoz. Ennek két nehézsége van:

1. A beton és az acél rugalmassági modulusa különböző, így a beton keresztmetszet inerciája nem jellemzi jól a valódi vasbeton keresztmetszetet
2. A beton húzószilárdsága töredéke a nyomószilárdságának, így az használati állapotban általában bereped

Az első nehézséget egy úgynevezett helyettesítő betonkeresztmetszettel küszöbölhetjük ki, ahol az acél keresztmetszeti területét a rugalmassági modulusok arányával szorozzuk fel, ami egyenértékű azzal, hogy az acélt betonnal helyettesítjük. Az acél helyettesítéséből adódóan a helyettesítő keresztmetszet (3. ábra) teljes egészét a beton rugalmassági modulusa jellemzi. Így megváltozik a keresztmetszet alakja, területe és súlypontja is, ebből pedig kiszámolhatjuk az inerciát.

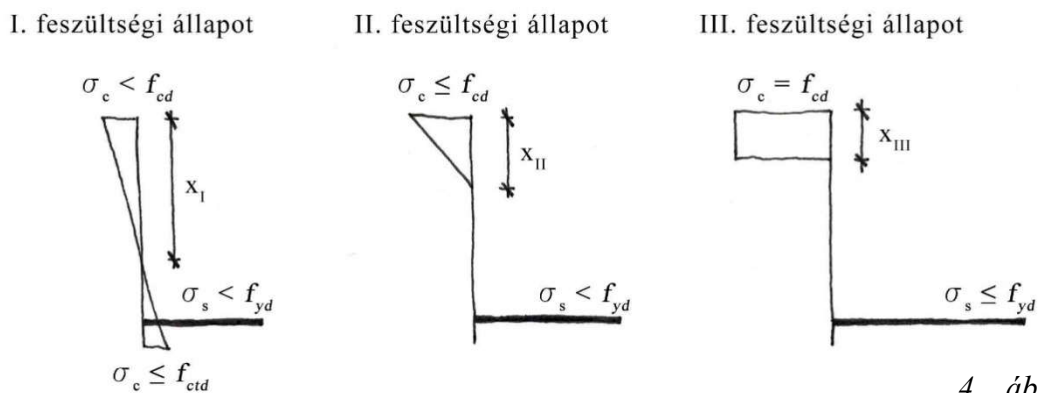


3. ábra

A második probléma kiküszöbölésére használjuk a feszültségi állapotokat:

1. Közismert, hogy a vasbeton szerkezetekben a beton nyomásra, míg a vasalás húzásra dolgozik, ám ez nem jelenti azt, hogy a beton nem rendelkezik húzószilárdsággal. A beton húzószilárdsága nyomószilárdságának körülbelül 5-10%-át teszi ki anyagminőségtől függően, így ezt nem mindig hanyagolhatjuk el. Ebből adódik az első feszültségi állapot, ahol a beton teljes keresztmetszete dolgozik, és húzást is felvesz.
2. Amint a beton túllépi a húzószilárdságát, a vasbeton keresztmetszet bereped, de még rugalmas marad. Ezt jellemzi a második feszültségi állapot. Itt már elhanyagoljuk a beton húzószilárdságát

3. A harmadik feszültségi állapotban a beton már eléri képlékeny határfeszültségét is, így új geometriai viszonyok jönnek létre a keresztmetszetben.



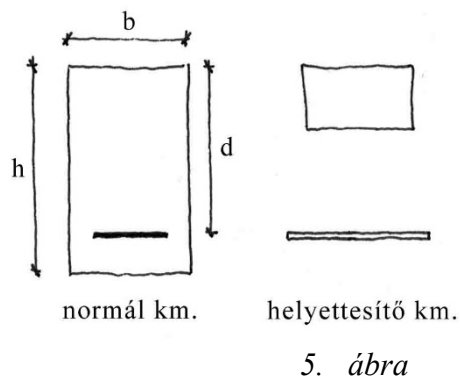
### Első feszültségi állapot

Első feszültségi állapotban a vasbeton keresztmetszet teljes egészében dolgozik (4. ábra). Az inerciáját a helyettesítő vasbeton keresztmetszettel számolhatjuk ki, aminek segítségével megtudhatjuk mind a beton, mind az acél feszültségeit.

Ebben az állapotban a lehajlás igen csekély, mivel az inercia jelentős. Ám a beton húzószilárdságának alacsony értéke miatt ez az állapot csak nagyon kis teherbírással rendelkezik.

### Második feszültségi állapot

Második feszültségi állapotban a beton bereped, így már csak nyomásra dolgozik. A berepedt keresztmetszet inerciája úgy állapítható meg, hogy a semleges tengely a repedés széle (4. ábra), tehát ezen a tengelyen van egyensúlyban a beton és az acélt helyettesítő beton (5. ábra) statikai nyomatéka.



A berepedt keresztmetszet inerciája általában egy nagyságrenddel kisebb, mint a repedésmentes keresztmetszeté, ebből kifolyólag a lehajlással szembeni ellenállása is jóval rosszabb. Vasbeton szerkezetek használati állapotban többnyire II. feszültségi állapotban vannak. Ez is jelzi, hogy míg az I. feszültségi állapot teherbírása hamar kimerül, II. feszültségi állapotban a szerkezet jóval nagyobb terheket képes elviselni.

### *Harmadik feszültségi állapot*

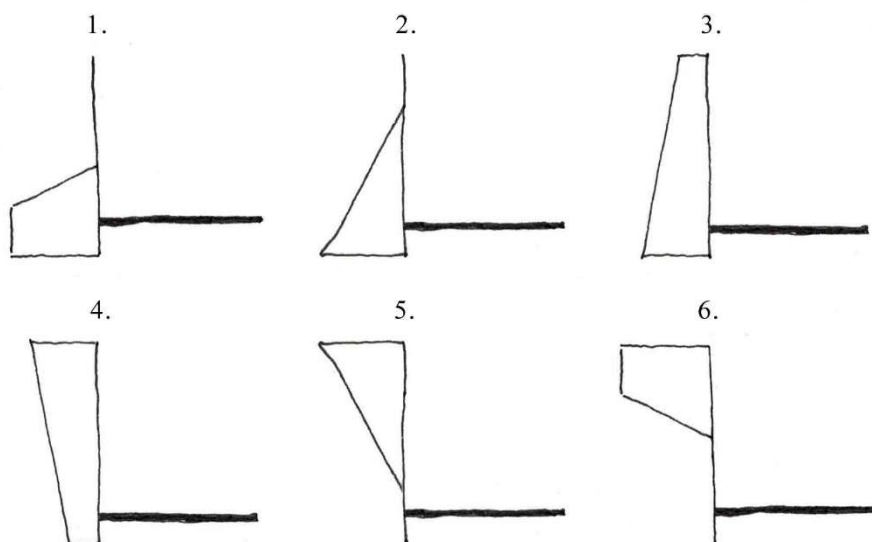
Harmadik feszültségi állapotban a tartó mindkét anyaga részben, vagy egészben képlékenyedik. Ebben az állapotban az inercia már folyamatosan változik úgy, hogy az acél és a beton feszültségei kielégítsék az egyensúlyi egyenleteket, melyeket a normálerőre és a nyomatékra írunk fel.

Vasbeton gerendák számításánál a tartót harmadik feszültségi állapotban ellenőrizzük, míg a lehajlás számításához az első és a második feszültségi állapot inerciáját használjuk.

### *Feszített vasbeton szerkezetek szilárdságtana*

Feszített tartók esetén kétfajta számítás adódik. Mindkét esetben szintén feszültségi állapotokat különböztetünk meg (6. ábra), ám ezek közt nincs olyan markáns különbség, mint normál vasbeton szerkezetek esetén. Mindkét esetben elhanyagoljuk a beton húzószilárdságát.

A két számítás közti különbség a feszítés technikai kivitelezéséből adódik. A pászmákat ugyanis nem a folyáshatárig feszítik, hanem annak 70-80%-ig, valamint a tárolás során ennek a feszültségnek 2-4%-a relaxálódik. Feszített tartók esetén tehát az acél nincs képlékeny állapotban, így a keresztmetszetben létrejövő megnyúlások következtében a rugalmas acélbetétek tovább nyúlnak, amivel a bennük lévő feszültség is nő.



### Egyszerűsített számítás

6. ábra

Egyszerűsített számítás esetén az acélbetétben működő erőt állandó nagyságúnak feltételezzük, mintha a pászma szakítóerejének 80%-ánál elérné a képlékeny határt (ez lesz a feszítőerő), és végig ekkora erő működne benne a keresztmetszet görbületétől függetlenül. Így egy állandó

külső erővel és növekvő nyomatékkaal terhelt keresztmetszetként számolhatjuk [3]. Ennek nagy előnye, hogy repedésmentes keresztmetszet esetén érvényesül a szuperpozíció elve.

A keresztmetszet berepedése nem ugrásszerű, így a lehajlás számítását a maximálisan berepedt keresztmetszet inerciájával és az első feszültségi állapot inerciájával számoljuk.

### Pontos számítás

Pontos számítás esetén az acél feszültségének növekedését nem hanyagolhatjuk el. Ebből adódik az a kényszer, hogy ismernünk kell a keresztmetszet görbületét, hogy ismerjük a pászma megnyúlását. Az görbülethez pedig ismernünk kell a semleges tengely helyét [4]. Erre a két ismeretlenre felírhatjuk az egyensúlyi egyenleteket minden feszültségi állapotban. Ezek az egyenletek azonban többnyire harmad-negyed fokú polinom egyenletek, így kézi megoldásuk nem kivitelezhető, vagy igen időigényes.

Lehajlási vizsgálatát az egyszerűsített számításéhoz hasonlóan végezzük.

### *Vasbeton szerkezetek lehajlás vizsgálata*

Az Eurocode 2 kétféle lehajlás vizsgálatot tartalmaz. Az egyik egy egyszerűsített számítás, a másik pedig „pontos”<sup>2</sup>.

A közelítő számítás a jól ismert  $w = \frac{5}{384} \frac{p l^4}{E_{c,eff} I}$  képletet használja úgy, hogy az I. és II. feszültségi állapot inerciájával is számít egy-egy lehajlást, majd a kettőt egy  $\zeta$  tényezővel arányosítva összeadja a következőképpen:  $w = (1 - \zeta)w_I + \zeta w_{II}$ .

A „pontos” számítás a tartó görbületéből ( $\kappa = \frac{M}{E_{c,eff} I}$ ) számol lehajlást. Itt is külön görbület tartozik az I. és II. feszültségi állapothoz, és az előzőhöz hasonlóan itt is a  $\zeta$  tényező teremt kapcsolatot a két görbületi érték között:  $\kappa = (1 - \zeta)\kappa_I + \zeta \kappa_{II}$ . A görbületből pedig egy egyszerűsített integrálszámítással kaphatunk lehajlást:  $w = \frac{\kappa l^2}{\gamma}$ , ahol  $\gamma = 10,5$ , mely egy táblázatban található 2 támaszú berepedt tartó esetére [2].

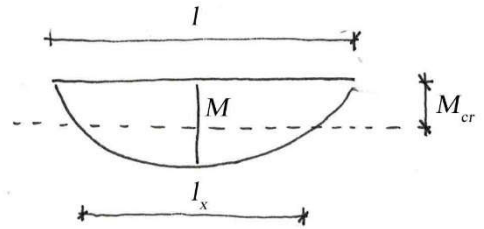
---

<sup>2</sup>DEÁK GYÖRGY, DRASKÓCZY ANDRÁS, DULÁCSKA ENDRE, KOLLÁR LÁSZLÓ, VISNOVITZ GYÖRGY: Vasbeton szerkezetek - Tervezés az Eurocode alapján. Budapest, 2014. március, Artifex Kiadó Kft. 57. oldal.

A  $\zeta$  szám szintén egy közelítő számítás eredménye, ahol  $\zeta = 1 - 0,5 \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^2 \geq 0$ . Az egyenlet tehát a repesztő nyomaték és a teher viszonyát jelzi, ám mégsem azt fejezi ki pontosan, hogy mekkora rész van berepedve a tartóból.

Így a két fenti számításon kívül egy harmadik módszert is fontosnak tartok, melyet kéttámaszú tartók esetén egy pontosított  $\zeta$  értékkel és a „pontos” módszerrel számolhatunk (7. ábra). A  $\zeta$  tényező pontosítására tehát a következő összefüggést határoztam meg:

$$\frac{p l_x^2}{8} = M - M_{cr}$$
$$l_x = \sqrt{(M - M_{cr}) \frac{8}{p}}$$
$$\zeta = \frac{l_x}{l}$$



7. ábra

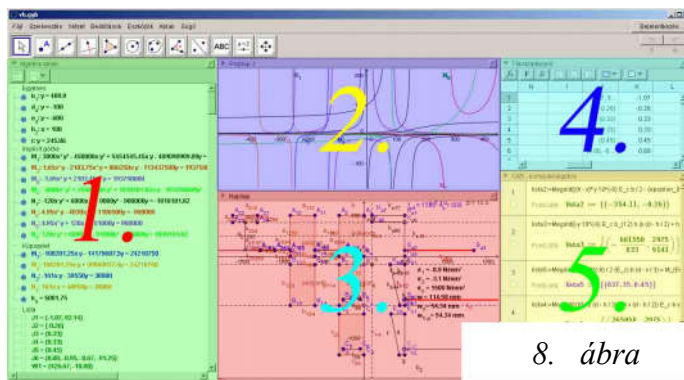
A fenti összefüggések alapján tehát  $\zeta = \frac{1}{l} \sqrt{(M - M_{cr}) \frac{8}{p}} \geq 0$ , ahol  $l$  a tartó hossza  $p$  pedig a megoszló teher nagysága.

## A GeoGebra programozói felület

A GeoGebra egy nyílt forráskódú geometriai és algebrai oktatóprogram. A fejlesztését 2001-ben Markus Hohenwarter kezdte a Linzi Egyetemen, majd az Atlanti és később a Floridai Állami Egyetemen folytatta. Jelenleg a Linzi Egyetemen dolgozik a programon közösségi fejlesztéssel. [5]

A GeoGebra geometriai, algebrai, táblázatkezelői és valószínűség számítási funkciókkal rendelkezik. A funkciók kölcsönösen átjárhatók, és egyszerre is használhatók (8. ábra).

A program geometriai felülete (8. ábra, 2-3. mező) rendelkezik minden



8. ábra

olyan funkcióval, ami szükséges egy szerkesztés végrehajtásához az Euklideszi-térben. Ezt ráadásul 2 rajzlapon tehetjük egyszerre. Az elemek egymáshoz kapcsolhatóak, így ha például két pont közé egy szakaszt definiálunk, az egyik pont helyzetének változtatásával az egyenes is transzformálódik. A kapcsolatok nem csak geometriaiak lehetnek, hanem algebrai függést is megadhatnak más pontoktól vagy változóktól. Ezeket a tulajdonságokat kihasználva tudtam vizualizálni a vasbeton keresztmetszetek feszültségi ábráit.

A program algebrai felülete egy listaként jeleníti meg a fájlban található függvényeket, pontokat, szakaszokat, poligonokat, változókat, stb (8. ábra, 1. mező). Itt könnyen kereshetők, és változtathatók is, melyet itt algebrai alakokkal, a geometriai nézetben pedig az elem helyzetével láthatunk. Az algebrai felülethez tartozik még egy algebrai megoldó (8. ábra 5. mező), mely a különböző egyenleteket, egyenletrendszereket számszerűsítve oldja meg, így láthatóvá válik az ismeretlenekkel és változókkal definiált egyenletünk, vagy akár egyenletrendszerünk eredménye.

A táblázatkezelői felület (8. ábra 4. mező) egy Excelhez hasonló táblázatkezelő korlátozottabb lehetőségekkel, ám nagy előnye, hogy a program folyamatosan adatokat tud lekérdezni innen, így nem szükséges egyéb módon összekapcsolnunk más programokkal. A felületet főleg a polinom egyenletrendszerek megoldásainak rendezésére használtam.

## A program ismertetése

Az elkészített program felhasználói felületén a 3 vizsgált modell (normál vasbeton, feszített vasbeton egyszerűsített és szabványos számítása) egymás alatt található (9. ábra). Balra a keresztmetszetektől a helyettesítő betonkeresztmetszetek jelennek meg. A keresztmetszetektől jobbra a keresztmetszet feszültségi ábrája látszik számított értékekkel valamint a lehajlás 3 féle<sup>3</sup> számított értékével.

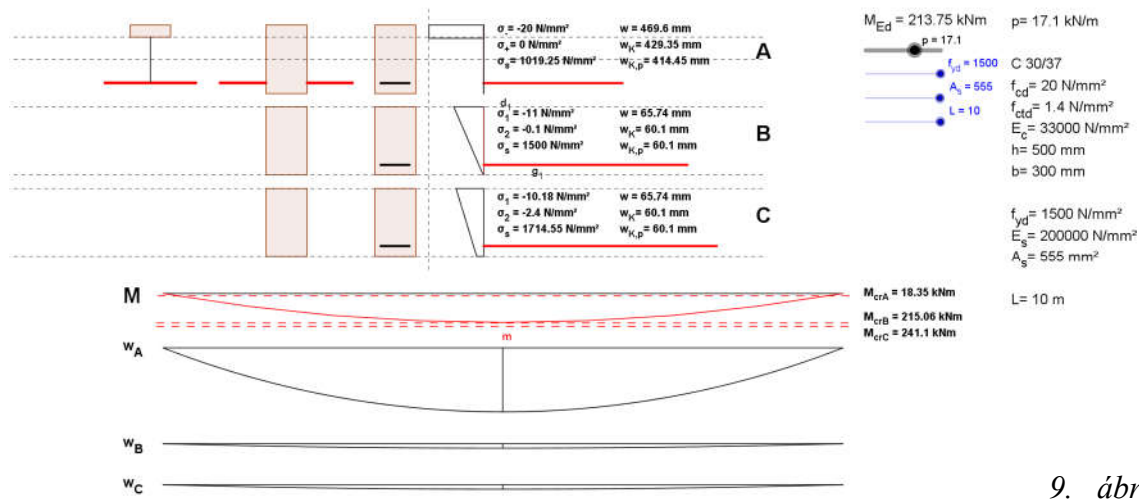
A keresztmetszetek alatt a tartók nyomatékábrája látható a repesztő nyomatékok értékeivel. A nyomatékábra alatt pedig a különböző tartók lehajlását mutatja az ábra léptékhelyesen.

A keresztmetszetektől jobbra a program beviteli adatai és a paramétereket változtatható csúszkák jelennek meg. Lehetséges változók a támaszköz, a megoszló teher mértéke, az acél minősége (normál szerkezetnél a folyáshatár, feszített szerkezetnél az  $0,8f_u$ ) és a húzásra dolgozó vaskeresztmetszet.

A csúszkák változtatásával a programban azonnal látható az új feltételeket kielégítő feszültségi ábra, és az abból származó lehajlás.

A program az alábbi linken érhető el:

<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/1905327>



9. ábra

<sup>3</sup>Isd.: "Vasbeton szerkezetek lehajlás vizsgálata" c. alfejezet



*Az „A” keresztmetszet számítása*

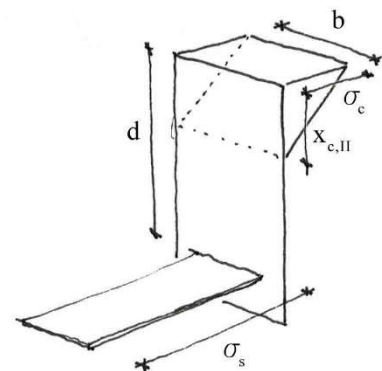
Az „A” keresztmetszet egy normál vasbeton gerenda számításainak végéig. Jól láthatók rajta a feszültségi állapotok ugrásszerű változásai.

I. feszültségi állapotban a keresztmetszet teljes egészében rugalmas, és repedésmentes. Itt tehát az I. helyettesítő betonkeresztmetszet (lsd.: 3. ábra) segítségével számolt inercia alapján határozza meg a program a feszültségeket:

- $\sigma = \frac{M_{Ed}}{I_I} z$ , ahol  $M_{Ed}$  a keresztmetszetet terhelő nyomaték,  $I_I$  az első feszültségi állapothoz tartozó inercia,  $z$  pedig a vizsgált pont semleges tengelytől mért távolsága.
- az acél feszültségének megállapításához az acél helyén kapott feszültséget még fel kell szorozni az  $\alpha = \frac{E_s}{E_c}$ , számmal, mely a két anyag rugalmassági modulusának arányszáma.

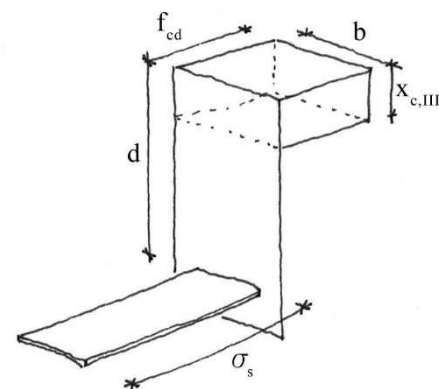
II. feszültségi állapotban a keresztmetszet berepedt, de sem az acél, sem a beton nem képlékenyedik még. Itt tehát a II. helyettesítő betonkeresztmetszet (lsd.: 5. ábra) segítségével állapíthatja meg a program a feszültségeket a két egyensúlyi egyenleten keresztül:

- $\sum M = 0$ ,  $M_{Ed} = \left(d - \frac{x_{c,II}}{3}\right) \cdot \frac{x_{c,II} b \sigma_c}{2}$ , amiből  $\sigma_c = \frac{2 M_{Ed}}{\left(d - \frac{x_{c,II}}{3}\right) x_{c,II} b}$ , ahol  $x_{c,II}$  a nyomott beton magassága,  $b$  a keresztmetszet szélessége,  $d$  a betonacél tengelyének távolsága a gerenda felső élétől,  $\sigma_c$  pedig a betonban ébredő legnagyobb feszültség (9. ábra).
- $\sum N = 0$ ,  $0 = \frac{x_{c,II} b \sigma_c}{2} - A_s \sigma_s$ , amiből  $\sigma_s = \frac{x_{c,II} b \sigma_c}{2 A_s}$ , ahol  $\sigma_s$  az acélfeszültség,  $A_s$  pedig a betonacél keresztmetszeti területe (10. ábra).



10. ábra

III. feszültségi állapotban a keresztmetszet szintén berepedt, a beton pedig elérte képlékeny határfeszültségét. Itt már folyamatosan változik a nyomott beton keresztmetszeti területe, így a program a nyomott zóna magasságát, és az acélfeszültséget az egyensúlyi egyenletek segítségével számolja ki:



11. ábra

- $\sum N = 0$ ,  $x_{c,III} b f_{cd} = A_s \sigma_s$ , amiből  $x_{c,III} = \frac{\sigma_s A_s}{b f_{cd}}$ , valamint
- $\sum M = 0$ ,  $M_{Ed} = \left(d - \frac{x_{c,III}}{2}\right) x_{c,III} b f_{cd}$ , amiből másodfokú megoldó képlettel megkapható, hogy  $x_{c,III} = -\frac{d b f_{cd} + \sqrt{d^2 b^2 f_{cd}^2 - 4 M_{Ed} \frac{1}{2} b f_{cd}}}{b f_{cd}}$ , ahol  $x_{c,III}$  a nyomott betonöv magassága,  $f_{cd}$  pedig a beton szilárdsága (11. ábra).

A program a lehajlásokat a „Vasbeton szerkezetek lehajlás vizsgálata” c. alfejezet alapján számolja.

### A „B” keresztmetszet számítása

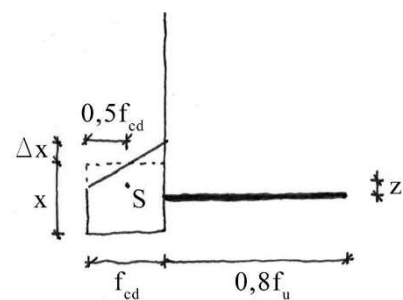
A „B” keresztmetszet a feszített vasbeton tartók egyszerű számítását mutatja be. Az itt használt feltételezések közül a legfontosabb, hogy az acélban képlékeny állapotot van, így feszültsége változatlan.

A változatlan feszültségnek köszönhetően az acélban lévő normálerő állandó, aminek következtében a beton által kifejtett erő is állandó. Ez jelenti azt az előnyt, amitől a számítás nagyságrendekkel leegyszerűsödik.

Kis nyomaték esetén a keresztmetszet berepedt állapotban dolgozik, ám normál vasbeton szerkezetektől eltérően nem a gerenda alja, hanem a teteje van berepedt állapotban. A 6. ábra alapján az 1-es és 2-es állapot is ide tartozik.

A 1. állapotban a beton képlékeny állapotban van. A feszültség ábra számítását a következőképpen végzi a program (12. ábra):

- Az egyensúlyi egyenlet alapján meghatározzuk, hogy milyen magas az a feszültségi test ami egyensúlyt tart az acél nyomóerejével:  $\sum N = 0$ ,  $x b f_{cd} = A_s f_u 0,8$ , amiből  $x = \frac{A_s f_u 0,8}{b f_{cd}}$ , ahol  $0,8 f_u$  az acél szakítószilárdságának 80%-a<sup>4</sup>,  $x$  pedig a képlékeny feszültségi test magassága. A feladatok paraméterezésének megkönnyítése érdekében az „A” keresztmetszet  $f_{yd}$ -je és a „B” keresztmetszet  $0,8 f_u$ -ja számértékében megegyezik.



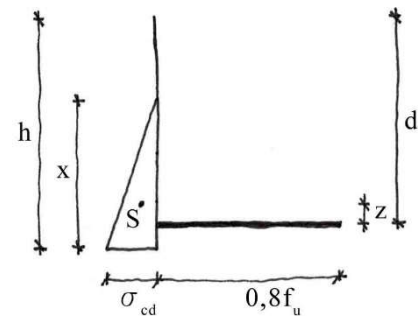
12. ábra

<sup>4</sup> lsd.: “Feszített vasbetonszerkezetek szilárdságtana” c. alfejezet

- A fenti feszültségi test a nyomatéki egyensúlyt nem teljesíti, így azonos térfogatú új feszültségi testet keresünk úgy, hogy a test súlypontjára felírt nyomatéki egyenlet kielégítse a  $\sum M = 0$  egyenletet. A nyomatéki egyenlet így a következő lesz  $M_{Ed} = z A_s f_u 0,8$ , amiből  $z = \frac{M_{Ed}}{A_s f_u 0,8}$ , ahol  $z$  a pázsmák és a feszültségi test súlypontjának távolsága.
- A feszültségi testet pedig úgy módosíthatjuk, hogy a test felső lapját a lap felezőpontjain átmenő tengely körül forgatjuk. A program tehát a test súlypontjából  $z$  és  $x$  ismeretében számítja ki  $\Delta x$ -et, amivel növeli, illetve csökkenti  $x$  értékét.
- 6. állapotban a számítás szimmetrikus módon történik.

A 2. állapotban a beton rugalmas, de még berepedt állapotban van. A feszültség ábra számítását a következőképpen végzi a program (13. ábra):

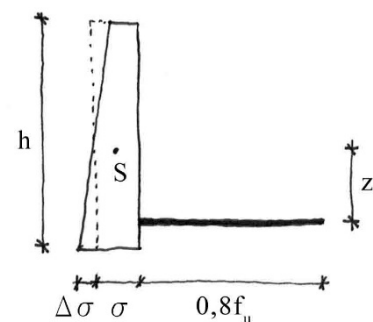
- A rugalmas állapotban a beton feszültségi teste egy háromszög alapú hasáb lesz, melynek súlypontját a nyomatéki egyenletből kaphatjuk meg.  $\sum M = 0$ ,  $M_{Ed} = z A_s f_u 0,8$ , amiből  $z = \frac{M_{Ed}}{A_s f_u 0,8}$ , valamint  $\frac{x}{3} = h - d + z$ , ahol  $x$  a feszültségi test magassága.
- A feszültségi test szélső feszültségét pedig a következőképpen állapíthatjuk meg a normálerő egyenletből:  $\sum N = 0$ ,  $\frac{x b \sigma_c}{2} = A_s f_u 0,8$ , amiből  $\sigma_c = \frac{2 A_s f_u 0,8}{x b}$ .
- 5. állapotban a számítás szimmetrikus módon történik.



13. ábra

A 3. és 4. állapotban a keresztmetszet rugalmas állapotban van és repedésmentes. Ez az az állapot, ahol kihasználhatnánk a szuperpozíció elvét, ám a program mégsem így, hanem az 1. állapothoz hasonló módon működik (14. ábra):

- az kiinduló feszültségi test mélysége és magassága a keresztmetszeti adatokkal egyezik, míg a szélességét a normálerő egyenletből állapítja meg a program:  $\sum N = 0$ ,  $h b \sigma_c = A_s f_u 0,8$ , amiből  $\sigma_c = \frac{A_s f_u 0,8}{h b}$ , ahol  $\sigma_c$  a kiinduló feszültségi test szélessége.
- A fenti feszültségi test a nyomatéki egyensúlyt itt sem teljesíti, így azonos térfogatú új feszültségi testet



14. ábra

keresünk úgy, hogy a test súlypontjára felírt nyomatéki egyenlet kielégítse a  $\sum M = 0$  egyenletet. A nyomatéki egyenlet így a következő lesz  $M_{Ed} = z A_s f_u 0,8$ , amiből  $z = \frac{M_{Ed}}{A_s f_u 0,8}$

- A feszültségi testet itt úgy módosíthatjuk, hogy a test oldalsó lapját a lap felezőpontjain átmenő tengely körül forgatjuk. A program tehát a test súlypontjából  $z$  és  $\sigma_c$  ismeretében számítja ki  $\Delta\sigma$ -t, amivel növeli, illetve csökkenti a kiinduló feszültségi test  $\sigma_c$  értékét.

A program a lehajlás vizsgálatokat a „Vasbeton szerkezetek lehajlás vizsgálata” c. alfejezet alapján végzi.

### A „C” keresztmetszet számítása

A „C” keresztmetszet feszített vasbeton tartók pontos számítását mutatja be. Ahogy az előző fejezetben is írtam, pontos számításhoz a  $\kappa$  és  $x$  változók folyamatos ismeretére van szükség, így először azt ismertetem, hogy ezeket a változókat hogyan számolja a program az egyes állapotokban.

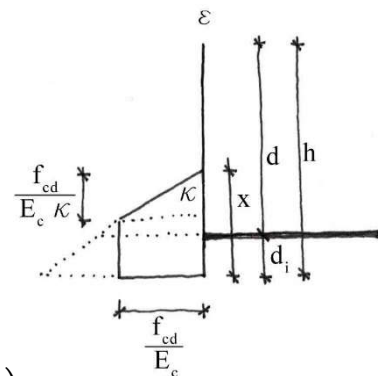
1. állapot:

$$\sum N = 0,$$

$$x f_{cd} b + \frac{f_{cd}^2 b}{E_c \kappa 2} = N_p + (\varepsilon_0 + (x - d_i)\kappa) E_s A_s$$

$$\sum M = 0,$$

$$\frac{f_{cd}^2 b}{E_c \kappa 2} \left( x + \frac{2f_{cd}}{E_c \kappa 3} - d_i \right) - b f_{cd} \left( x + \frac{f_{cd}}{\kappa E_c} \right) \left( d_i - \frac{x}{2} - \frac{f_{cd}}{E_c \kappa 2} \right) = M_{Ed}$$



15. ábra

ahol  $\varepsilon_0$  a betonacélok kezdeti megnyúlása. Erre azért van szükség, mert  $\kappa$  pozitív és negatív is lehet, míg az alakváltozás csak pozitív lehet.

Első állapotban  $\kappa$  negatív,  $x$  pedig pozitív

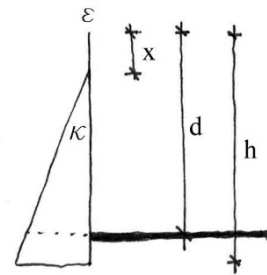
2. állapot:

$$\sum N = 0,$$

$$\frac{(h-x)^2 \kappa E_c b}{2} = -N_p - (\varepsilon_0 + (d-x)\kappa) E_s A_s$$

$$\sum M = 0,$$

$$-\frac{(h-x)^2 \kappa E_c b}{2} \left( d - \frac{2}{3} h + \frac{2}{3} x \right) = M_{Ed}$$



16. ábra

Második állapotban  $\kappa$  továbbra is negatív,  $x$  továbbra is pozitív.

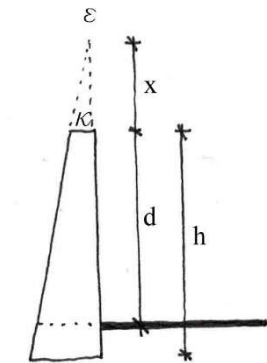
3. állapot

$$\sum N = 0,$$

$$-b E_c \frac{1}{2} \kappa ((h-x)^2 - x^2) = N_p + (\varepsilon_0 - (x-d)\kappa) E_s A_s$$

$$\sum M = 0,$$

$$-\kappa E_c b h \left( \frac{h}{2} \left( d - \frac{2h}{3} \right) - x \left( d - \frac{h}{2} \right) \right) = M_{Ed}$$



17. ábra

Harmadik állapotban  $\kappa$  és  $x$  is negatív.

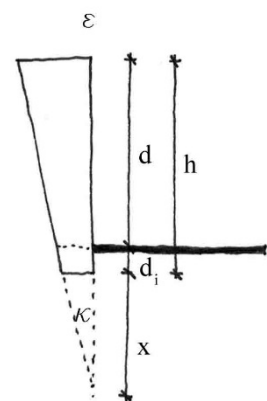
4. állapot

$$\sum N = 0,$$

$$\left( \frac{(h+x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \kappa E_c b = N_p + (\varepsilon_0 + (x+d_i)\kappa) E_s A_s$$

$$\sum M = 0,$$

$$\left( \frac{h}{2} \left( d - \frac{h}{3} \right) + x \left( d - \frac{h}{2} \right) \right) E_c b h \kappa = M_{Ed}$$



18. ábra

Negyedik állapotban  $\kappa$  és  $x$  is pozitív.

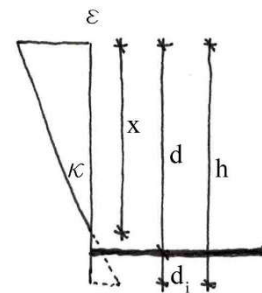
5. állapot

$$\sum N = 0,$$

$$\frac{x^2 \kappa}{2} E_c b = N_p + (\varepsilon_0 + |d - x| \kappa) E_s A_s$$

$$\sum M = 0,$$

$$\frac{x^2 \kappa}{2} E_c b \left( d - \frac{x}{3} \right) = M_{Ed}$$



19. ábra

Ötödik állapotban  $\kappa$  és  $x$  is pozitív.

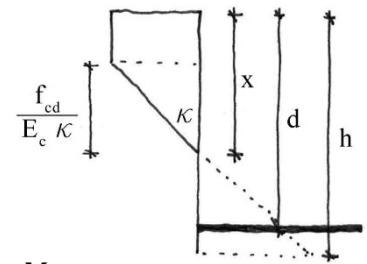
6. állapot

$$\sum N = 0,$$

$$x f_{cd} b - \frac{f_{cd}^2 b}{E_c \kappa 2} = N_p + (\varepsilon_0 + (d - x) \kappa) A_s E_s$$

$$\sum M = 0,$$

$$\left( x - \frac{f_{cd}}{E_c \kappa} \right) b f_{cd} \left( d - \frac{x}{2} + \frac{f_{cd}}{E_c \kappa 2} \right) + \frac{f_{cd}^2 b}{2 E_c \kappa} \left( d - x + \frac{2 f_{cd}}{3 E_c \kappa} \right) = M_{Ed}$$



20. ábra

Hatodik állapotban  $\kappa$  és  $x$  is pozitív.

Az egyenletek láthatóan nem ugyanarra az  $x$  paraméterre vonatkoznak, főként azért, mert így volt egyszerűbb felírni az egyenleteket. Ezt kiküszöbölve, a program átváltja az  $x$  értékeket úgy, hogy mindig a keresztmetszet felső éléig érjen, és előjel helyes legyen.

Ezután folytonossá teszi a darabokból összerakott  $x_M$  és  $\kappa_M$  függvényeket, majd az alábbi módon kiszámolja a feszültségeket:

- keresztmetszet teteje:  $0 \leq \sigma_c = x \kappa E_c \leq f_{cd}$
- keresztmetszet alja:  $0 \leq \sigma_c = (x - h) \kappa E_c \leq f_{cd}$
- acél feszültség:  $\sigma_s = (\varepsilon_0 + |x - d| \kappa) E_s + 0,8 f_u$

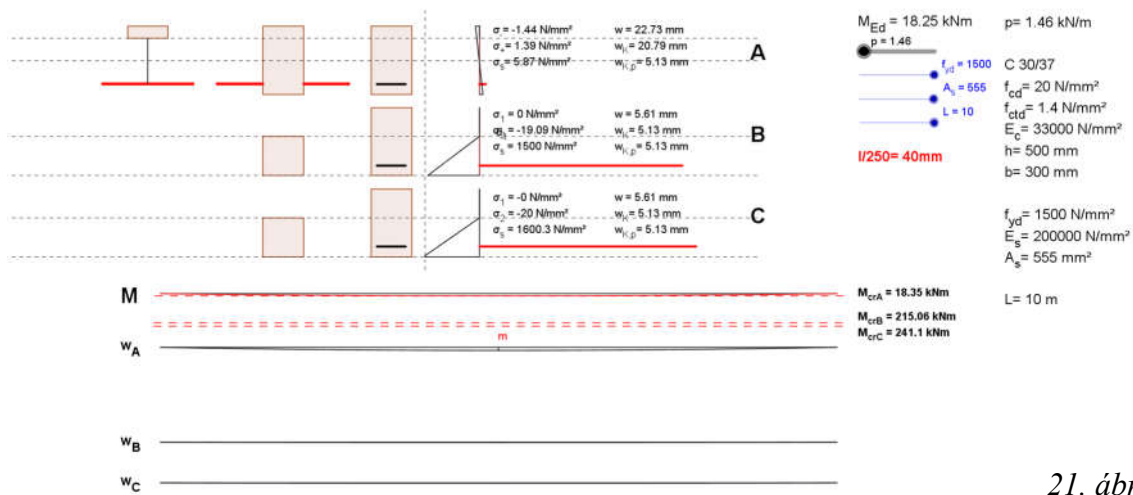
A program a lehajlásokat a „Vasbeton szerkezetek lehajlás vizsgálata” c. alfejezet alapján számítja.

Esettanulmányok a program paramétereinek változtatásával

A program minden esetben az alábbi paraméterekkel számol:  $h=500$  mm,  $b=300$  mm, C30/37-es beton. Módosítható az acélminőség ( $f_{yd}$ ) 435 és 1500 N/mm<sup>2</sup> között, a vaskeresztmetszet ( $A_s$ ) 200 és 555 mm<sup>2</sup> között, valamint a támaszköz ( $L$ ) 0 és 10 m között, és természetesen a vonal menti teher ( $p$ ) 0 és 26 kN/m között.

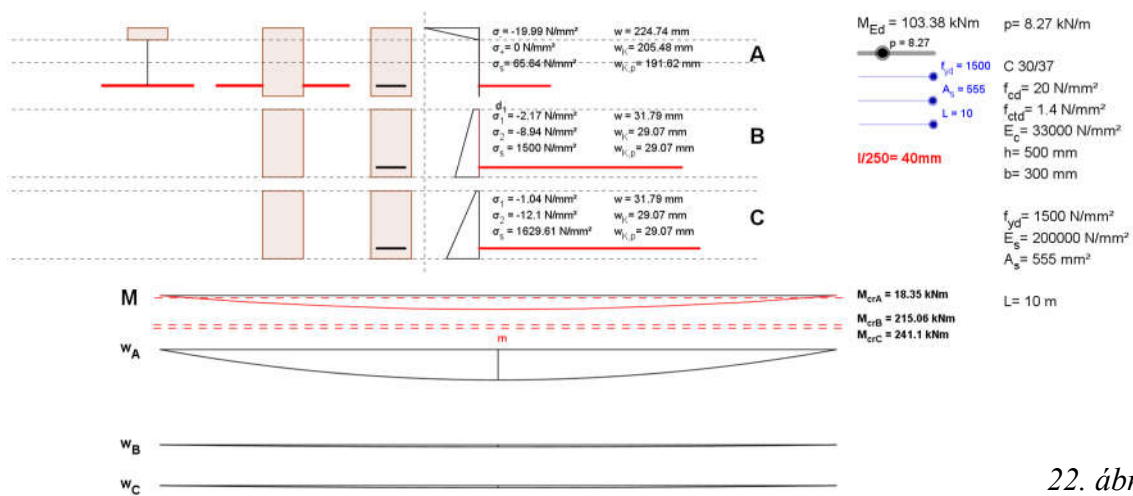
Normál vasbeton feszültségi állapotai

Az alábbi esettanulmány paramétereit a következők:  $f_{yd}=1500$  N/mm<sup>2</sup>,  $A_s=555$  mm<sup>2</sup>,  $L=10$  m.



21. ábra

Megfigyelhető, hogy a normál vasbeton tartó igen kis nyomatékra már eléri a repesztő nyomatékát (21. ábra) azaz az I feszültségi állapot határát, miközben a feszített tartók felső repedése még be sem zárult. A számított lehajlása jelen esetben már több mint 4-szerese a feszített tartóknak, ha nem alkalmazzuk a  $\zeta$  tényező pontosított számítását.

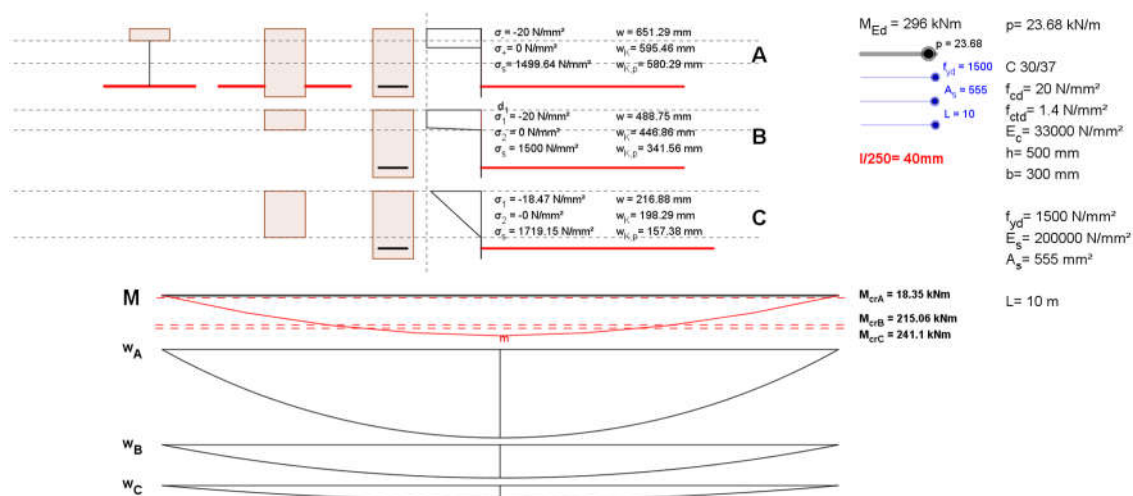


22. ábra



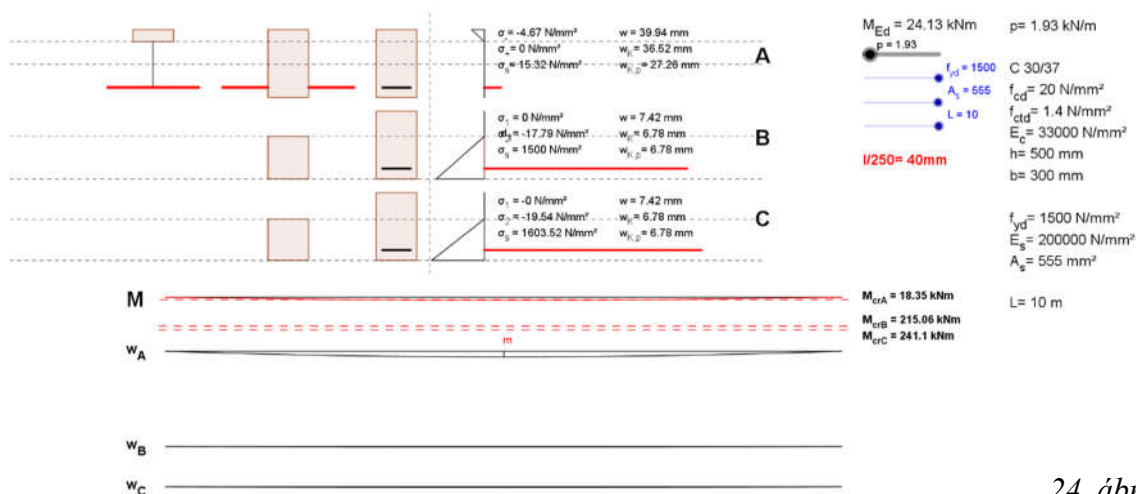
A II. feszültségi állapot végére jelen esetben a tartó lehajlása mintegy 5-szöröse a megengedett  $L/250$ -es esztétikai korlátnak (22. ábra). Tehát jelen esetben hiába méreteznénk a tartónkat képlékeny állapotban, a lehajlási korlát nagyon alacsony határt szab a használhatóságnak. Mindeközben a feszített tartók még javában repedésmentes keresztmetszetben dolgoznak.

Ez az eset egyértelműen alátámasztja a „Feszítő pászmák és huzalok” c. alfejezetben tett állítást, miszerint ilyen típusú kábelek csak nagy megnyúlások mellett tudnak igazán jól hasznosulni, ami feszítés nélkül nagy repedéseket és nagy lehajlásokat okoz.



23. ábra

A III. feszültségi állapot tönkremenetel előtt már fél méteres nagyságrendű lehajlásokat eredményez jelen példa alapján (23. ábra). Természetesen a valóságban a tartó egyéb módon tönkrement volna, de a program ezt nem tudja lekövetni.



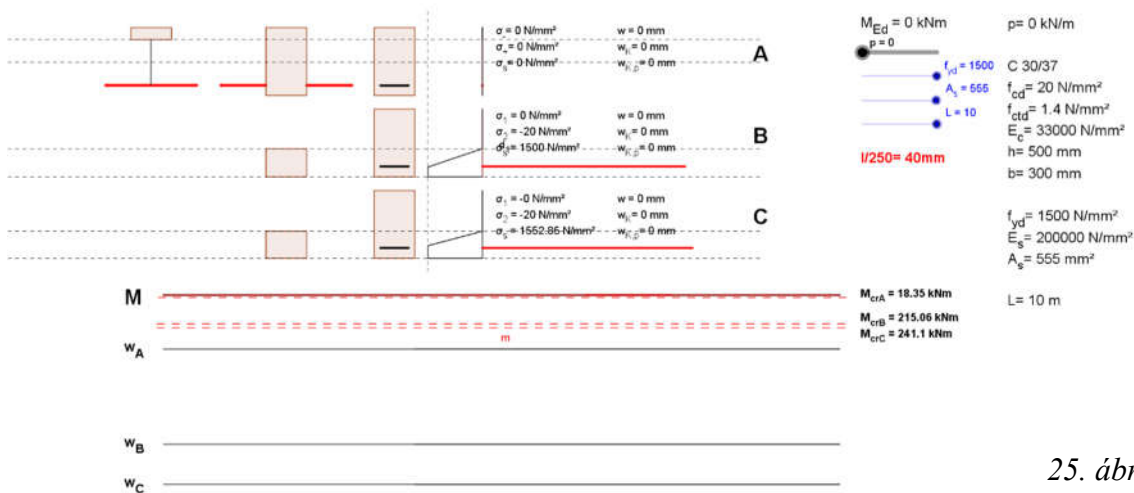
24. ábra

A fentiek alapján érdekes lehet az az állapot, amikor a tartó eléri a lehajlási korlátot (24. ábra).



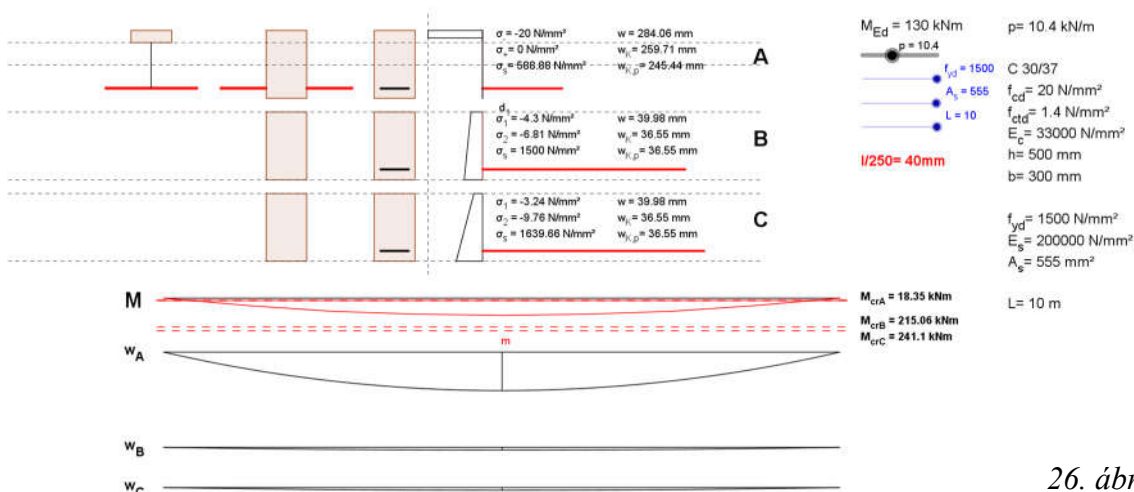
Feszített tartók lehajlásának összehasonlítása

A kiindulási adatok megegyeznek az előző esetével.



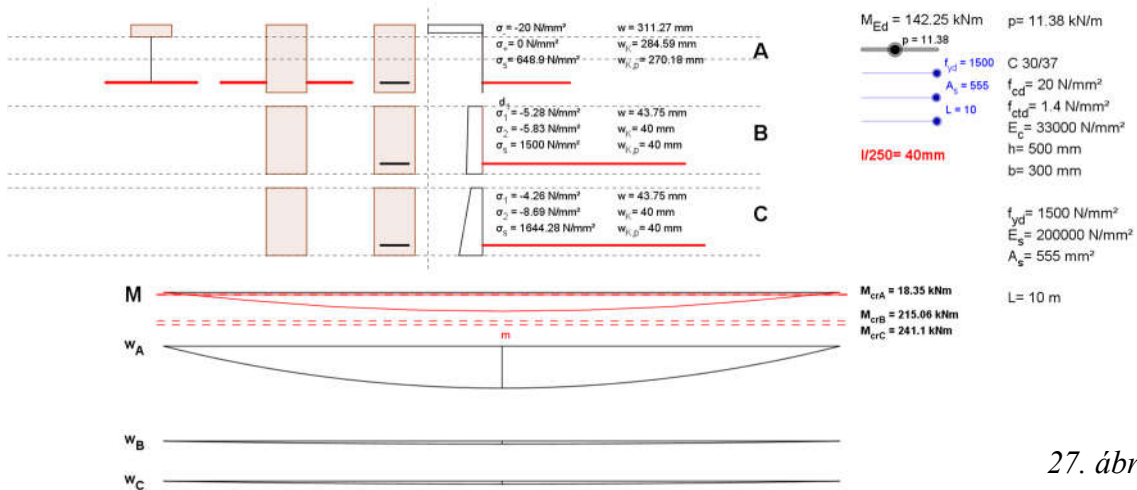
25. ábra

A két tartó kiindulási állapota közel azonos, a minimális eltérést programhiba okozhatja (25. ábra). A valóságban vasbeton tartók kezdeti állapotukban felfele görbülnek, így a lehajlásukat ez is csökkenti, ám a program ezt nem vizsgálja. A pontos számítás egy kicsivel magasabb repesztő nyomatékot számol, mint az egyszerűsített számítás. A lehajlás vizsgálati módszerek alapvetései miatt a két tartó lehajlása nem is fog különbözni addig, amíg az egyik el nem éri repesztő nyomatékát.



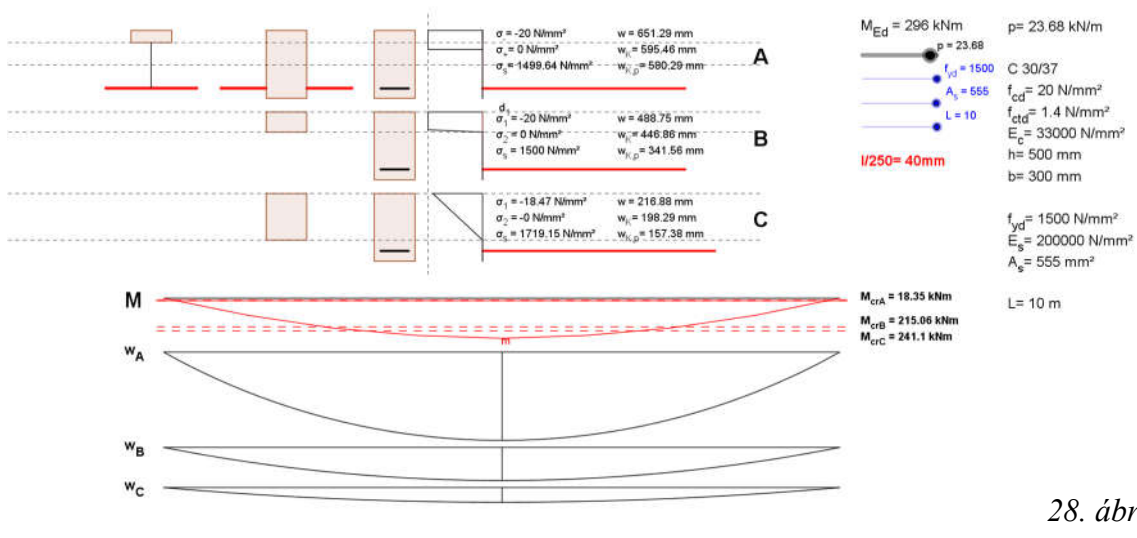
26. ábra

A két tartó körülbelül a repesztő nyomaték felénél eléri az egyszerűsített számítás alapján a használati határállapotot (26. ábra), melynél a megengedett lehajlás  $I/250$ .



27. ábra

A lehajlás „pontos” számítása valamivel jobb nyomatéki teherbírást eredményez használati határállapotban.



28. ábra

Az egyszerűsített számítás határyomatékánál a „C” keresztmetszet lehajlása pontos számítással kevesebb, mint fele a „B” keresztmetszetének (28. ábra). Ennek több oka van:

- a két számítási mód határyomatéka különbözik
- ebből adódóan a  $\zeta$  tényező is nagyban különbözik
- végül pedig a „C” keresztmetszet középső inerciája jelentősen nagyobb a „B” keresztmetszet inerciájánál

## Összefoglaló

Az esettanulmányok egyértelműen rámutatnak arra, hogy a szabvány szerinti egyszerűsített számítások mekkora hibát okozhatnak a számításban. A legnagyobb pontatlanság a  $\zeta$  tényezőnek köszönhető. Ennek pontos számítása nem vesz különösen sok időt igénybe, legyen szó bármilyen nyomateki ábráról, viszont pontosítása jelentős teherbírasi növekedést eredményez a használati határállapot számításánál.

A program eredetileg oktatási célra készült. A jövőben igen hasznos lehet egyéb szilárdságtani modelleket is leprogramozni a könnyebb megértés és a vizuális megjelenítés érdekében. Ilyen fajta programok segítségével könnyebben érthető meg az inercia nagyságának fontossága, a vasbeton tartók feszültségi állapotai, és egyéb nehezen érthető, főleg a vizuális megértést igénylő egyéb szilárdságtani problémák.

A kutatás további lehetőségei a fentiekén kívül, hogy más, gyakran használt vasbeton szerkezetek, mint például a fejlemez tartók, lemezek, vagy akár körüreges pallók viselkedése is programozható. Ezen kívül újabb paraméterek bevezetése sokkal szélesebb körben tudná használhatóvá tenni a programot.

## Irodalom jegyzék

[1] BÖRÖCZ IMRE (szerk.): Feszített betonszerkezetek – I. kötet. Budapest, 1952, Közlekedési Kiadó.

[2] DEÁK GYÖRGY, DRASKÓCZY ANDRÁS, DULÁCSKA ENDRE, KOLLÁR LÁSZLÓ, VISNOVITZ GYÖRGY: Vasbeton szerkezetek - Tervezés az Eurocode alapján. Budapest, 2014. március, Artifex Kiadó Kft.

[3] HEGYI DEZSŐ: Nagy támaszközű tartók – Különleges tartószerkezetek. Budapest, 2011, jegyzet kézirat.

[4] Eurocode 2

[5] <https://hu.wikipedia.org/wiki/GeoGebra> (2015.10.18.)

[6] [https://en.wikipedia.org/wiki/Reinforced\\_concrete](https://en.wikipedia.org/wiki/Reinforced_concrete) (2015.10.18.)

[7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne\\_Freyssinet](https://en.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Freyssinet) (2015.10.18.)

[8] [http://szt.bme.hu/phocadownload/szakmernoki/uj\\_evfolyam\\_2\\_felev\\_2014\\_osz/Fesz\\_egy\\_vb\\_tartossag/1\\_fesz\\_vb.pdf](http://szt.bme.hu/phocadownload/szakmernoki/uj_evfolyam_2_felev_2014_osz/Fesz_egy_vb_tartossag/1_fesz_vb.pdf) (2015.10.23.)

## Ábra jegyzék

1-2. *ábra*: a [8] forrásból származó képek

8., 21-28. *ábra*: az általam írt program egy-egy képernyőképe

3-8., 10-20. *ábra*: saját készítésű ábrák