

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Egy tervezett sportcsarnok térrács lefedésének elemzése

TDK konferencia
Építészmérnöki kar
2017

Szerző:

Szabó Simon

Konzulens:

Dr. Sajtos István

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Összefoglalás	3
1. Bevezetés	4
2. Kontinuum módszer rövid összefoglalása	5
3. A sportcsarnok történetének áttekintése	7
4. Térbeli rúdszerkezetek tipizálása	8
4.1 Elemi cella és az analóg rendszerek	11
5. Kontinuum módszer	12
5.1 térrács merevségi adatainak meghatározása	12
5.11 Normálmerevségi mátrix	13
5.12 Hajlító merevségi mátrix	15
5.2 A merevségi adatokból a helyettesítő kontinuum merevségi adatainak meghatározása	17
5.3 A helyettesítő kontinuum lehajlásainak/ igénybevételeinek meghatározása	18
5.4 A kapott eredményekből a térrács igénybevételeinek meghatározása	20
6. A Sportcsarnok lefedésének ellenőrzése	22
6.1 A lefedés adatainak meghatározása	22
6.1.1 Geometria	22
6.1.2 Támaszok	23
6.1.3 Hálózat	23
6.1.4 Rács rudak kialakítása	24
6.2 A rács rudak egyszerű, tömör keresztmetszetű rúddá való alakítása	25
6.3 A térrácsra ható terhek meghatározása	26
6.4 Igénybevételek meghatározása a kontinuum módszerrel	27
6.4.1 A térrács merevségi adatainak meghatározása	27
6.4.2 A merevségi adatokból a helyettesítő kontinuum merevségi adatainak meghatározása	29
6.4.3 A helyettesítő kontinuum lehajlásainak/ igénybevételeinek meghatározása	31
6.4.4 A kapott eredményekből a térrács igénybevételeinek meghatározása	33
6.4.4.1 Rúderők kiszámítása	33
6.4.4.1.1 Eredmények értékelése	36
6.4.4.2 Nyomatékok kiszámítása	37
6.4.4.2.1 Eredmények értékelése	38
7. Összefoglalás	39
8. Irodalomjegyzék	40

Habár a mérnökök szívéhez közelebb állnak a folytonos szerkezetek (rudak, héjak), a mérnöki mechanika sok területén találkozhatunk diszkrét rendszerekkel, szerkezetekkel (anyagok kristályrácsa, rácsos tartók). A diszkrét szerkezetek analitikus/numerikus megoldása legtöbbször, időigényesebb és matematikai háttérük eltér a mérnökök által használtaktól. Ezen akadály kiküszöbölésére különböző közelítő számítási eljárásokat dolgoztak ki, amelyek „folytonos” modelleket használnak. Ezek a módszerek nemcsak a számítási időt/tervezési munkát gyorsítják, hanem legtöbb esetben sokkal szemléletesebb képet mutatnak a diszkrét rendszer viselkedéséről, mint maga a „pontos” eljárás. Ilyen diszkrét rendszer (térács, rácshéj) áll ezen tanulmány központjában.

Ahogy nagyobb fesztávok kiváltására gerendák helyett síkbeli rácsos tartókat szoktak alkalmazni, ugyanez az elv érvényesül nagy területek lefedésének esetében is, ahol egy bizonyos fesztávolság után érdemesebb térbeli rácsos tartóval, térráccsal kialakítani a lefedést a tömör héjak helyett. A térrácsok a folytonos, pl. vasbeton héjakkal szemben diszkrét rendszert alkotnak, mivel a szerkezet csak csomópontokból és rudakból áll, míg a héj egy folytonos felületet. Az alapvető kialakítási különbség ellenére a térrácsok, bizonyos megszorítások mellett, öröklik a folytonos héjak viselkedését. Ebből az analógiából kiindulva alakult ki az ún. „helyettesítő kontinuum módszer”, amiben a vizsgált diszkrét térrácsot egy folytonos héjjal helyettesítjük, így leegyszerűsítve/meggyorsítva a számítási munkát. Ez a módszer nemcsak a számításokat gyorsítja, hanem sokkal szemléletesebb képet ad a térrácsok erőjátékáról és viselkedéséről.

A sokkal kisebb önsúly és az egyszerűbb kivitelezési lehetőség miatt a térrácsok sok esetben ideálisabb térlefedő szerkezetek, mint a síklemez födécek. Ilyen megfontolások után jutottak a térrács lefedés alkalmazására a dolgozatban tárgyalt sportcsarnoknál is.

A dolgozat fő témája, egy 1966-ban pályázatot nyert, de meg nem épített sportcsarnok térrács lefedésének elemzése, és a közelítő módszerekkel történő vizsgálata, optimalizálása. A dolgozatban szó lesz az eredetileg tervezett szerkezet kialakításáról, és ennek elemzéséről, továbbá a tervezett alakra használható egyszerűbb statikai viselkedésű rácsozatok tanulmányozásáról is.

1. Bevezetés

A dolgozat a helyettesítő kontinuum módszer előnyeit mutatja be. Továbbá a dolgozat egyik fő célkitűzése a módszer pontosságának meghatározása. Emellett bemutatja a helyettesítő kontinuum módszer elveit a téma szakértői által írott könyv alapján^[1]. Röviden összefoglalja a módszer menetét és a mechanikai hátteret, ami mögötte található. Azzal kísérletezik, hogy a módszer a mai számítástechnikai viszonyok mellett mennyire állja meg a helyét.

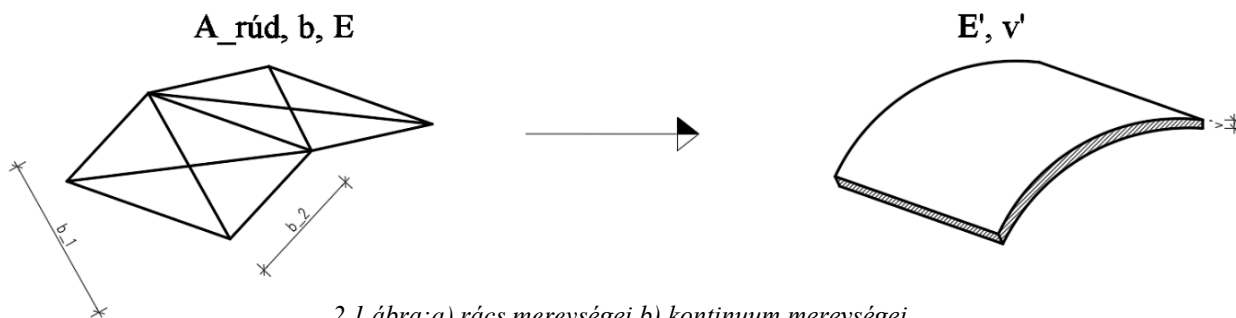
Végezetül egy konkrét példán keresztül mutatja meg a módszer folyamatát. A példa megoldása arra szolgál, hogy kihangsúlyozza a módszer előnyeit és a hátrányait. Továbbá meghatározza, hogy mennyire pontosan adja vissza a pontos adatokat.

2. Kontinuum módszer rövid összefoglalása

A kontinuum módszert diszkrét rendszerek egyszerűsített, közelítő megoldására dolgozták ki. A módszer kapcsolatot teremt diszkrét és folytonos rendszerek között. A matematikai alapjait tekintve lineáris egyenletrendszereket közelít differenciálegyenletekkel. A módszer fénykora a 60-as 80-as évekre tehető, mivel az akkori számítógépes technológia nem tette lehetővé a nagy számítási igényt igénylő diszkrét rendszerek pontos megoldását. Alkalmazását tekintve lehetővé tette térrácsok, gerendarácsok, rácshéjak számítását, továbbá fontos szerepe volt az anyagok kristály szerkezetéből kifejezett rugalmassági állandók megállapításában is. A dolgozatban e módszernek a térrácsok közelítő számításában való alkalmazásáról lesz szó.

A módszernek napjainkban is van haszna, mivel egy nagyon hatékony előtervezési eljárás, mert a mértékadó igénybevételek/rúderök kiszámításához nem kell megmodellezni a diszkrét rúd hálózatot. Az eljárás menete a következő:

- A rúd rudak geometriai és anyagi jellemzőiből továbbá a rácsozás fajtájából a rúd merevség tulajdonságainak meghatározása(2.1.a ábra).
- Ezeket kell megfeleltetni egy, a térrács viselkedését jól leíró „helyettesítő”, folytonos lemez/héj merevségi tulajdonságainak.
- Meg kell határozni a „helyettesítő” szerkezet vastagságát és merevségi adatait(2.1.b ábra).
- Az így kapott „helyettesítő”, folytonos szerkezet, elmozdulásainak és igénybevételeinek kiszámolása.
- A kapott elmozdulások és igénybevételek visszavitele az eredeti diszkrét szerkezetre, így meghatározva a térrács szerkezet igénybevételeit.



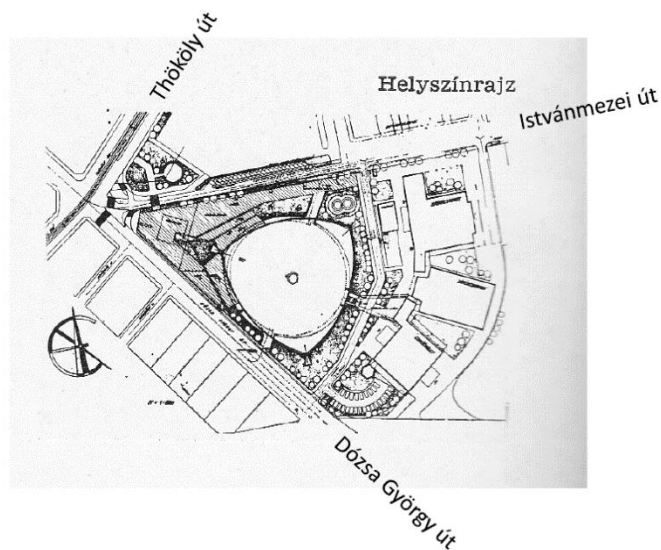
2.1 ábra: a) rúd merevségei, b) kontinuum merevségei

A legелеmbb kérdés, ami felmerülhet, hogy létezik-e olyan helyettesítő kontinuum, ami kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít a diszkrét szerkezettel. Mivel a rácsok véges változótól függő rendszerek, míg a folytonos kontinuumok végtelen változótól függenek, így kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot nem lehet a két rendszer között teremteni. Fontos ennek a jelenségnek a kihangsúlyozása, mivel ez azt jelenti, hogy a kontinuumnak a viselkedéséből következtetünk a rács igénybevételeire, de ez a kapcsolat nem kölcsönös. Ebből az egyoldalú kapcsolatból az következik, hogy a rácsokban képződhetnek olyan „nem kontinuumszerű” alakváltozások, amikre nem következtetünk a helyettesítő kontinuum alakváltozásaiból.

Megemlíthető továbbá, hogy ezzel a módszerrel pontos megoldást nem lehet megkapni. Míg az ún. véges elem módszerrel, ahol differenciálegyenleteket közelítünk lineáris egyenletrendszerekkel, a geometriai finitizálás sűrítésével a kapott közelítő megoldás tart a pontos megoldáshoz, addig a kontinuum módszernél a rács véges változó való függése miatt a differenciál operátorok magasabb hatványra emelése nem pontosítja a megoldást.

3. A sportcsarnok történetének áttekintése^[2]

A dolgozatban tárgyalt sportcsarnok a Magyar Testnevelés- és Sportszövetség Országos Tanácsa által 1965-ben meghirdetett pályázat I. díjazottja. Az építésztervezők Gulyás Zoltán, Rimanóczy Gyula és Rimanóczy Jenő voltak. A szerkezettervezést Kollár Lajos és Hegedűs István végezte. A sportcsarnoknak a pályázat megnyerése után elkészültek a kiviteli tervei, de kivitelezésére nem került sor. A beépítési telek a Dózsa György út és az Istvánmezei út kereszteződésében elhelyezkedő háromszög alakú terület volt.



3.1 ábra: a) A tervezési helyszín mai állapota, b) A tervezett beépítés

A pályázat általános követelményei előírták, hogy a sportcsarnok legyen 10 000 fő befogadására alkalmas, továbbá a funkció miatt belső alátámasztás nélküli lefedésű tér jöjjön létre. Ez a 10.000 m² –es stadionra nézve körülbelül 100m-es támaszközt írt elő.

A csarnok lefedését nézve a szerkezettervező szakemberek több különböző kialakítást megvizsgáltak (vasbeton héj, bordás vasbeton lemez), de végül a nagy fesztávolságra való tekintettel a többi szerkezethez képest csekély önsúlyú acél rácshéj lefedésre esett a választás.

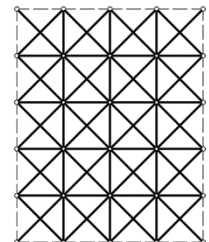
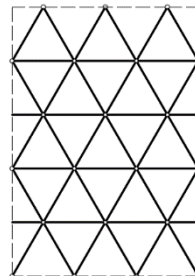
4. Térbeli rúdszerkezetek tipizálása^[3]

A térbeli rúdszerkezetek egyik legfontosabb jellemzője a rács rudak egymáshoz való kapcsolata. Ebből a szempontból két csoportba lehet osztani a térbeli rúdszerkezeteket:

- Térbeli rács
 - Csuklósan összekapcsolt rudak
 - A csomópontok körül a rudak szabadon elfordulhatnak
 - A csomópontok helyzete/elmozdulása egyértelműen meghatározza a szerkezet erőjátékát
- Térbeli keret
 - A rudak mereven vannak összekapcsolva
 - A csomópontok körül a kapcsolódó rudak nem, vagy a kapcsolat merevségének függvényében tudnak elfordulni
 - A csomópontok helyzete/elmozdulása és elfordulása határozza meg a szerkezet erőjátékát

Ahogy bármely más felületszerkezet egy térbeli rúdszerkezet is viselkedhet tárcsaszerűen, lemezként és héjként. Egy csuklósan összekapcsolt hálózat habár képes a síkjával párhuzamos (tárcsaszerű) továbbá görbült felületen kialakítva membránszerű erőjátékot kialakítani, de síkjára merőleges/lemezszerű igénybevételeket nem képes felvenni. Ennek kiküszöbölésére több rétegű rácsokat alakíthatunk ki, ami így már képes felvenni a síkjára merőleges erőket. Így beszélhetünk:

- 1 rétegű rács(4.1 ábra)
 - 1 darab rácsos felület alkotja
 - Síkban vagy görbült felületen
 - Térrács esetében síkfelületen csak tárcsaként, görbült felületen membránként viselkedik
 - Térbeli keret esetében minden kialakítható

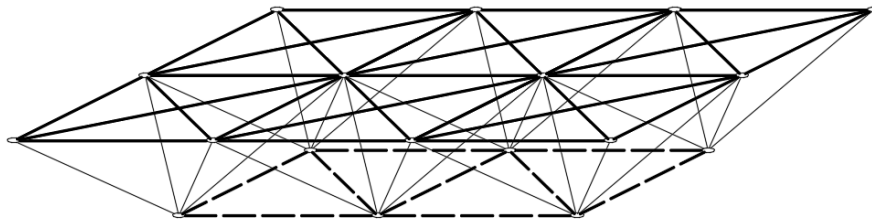


4.1 ábra: 1 rétegű térrácsok:

a) háromszögrács,

b) négyzetes-átlókkal rács

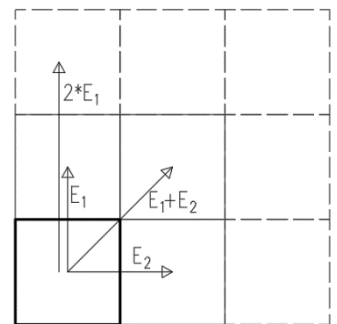
- Több rétegű rács(4.2 ábra)
 - 2 vagy több rácsos felület alkotja, amik össze vannak kötve rácsozással, amik a teherátadást biztosítják
 - Térrács és térbeli keret esetében is bármely fajta statikai viselkedést biztosítja



4.2 ábra: 2 rétegű négyzet-átlóval eltolva a háromszögön rács

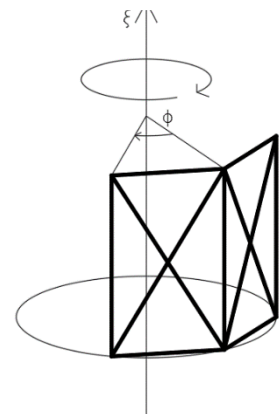
Ezek az alapvető tulajdonságok mellett nagy számítási előnyt jelent, ha csoportba foglalhatjuk a rácsokat bizonyos geometriai ismétlődések szerint. Olyan ismétlődések/tulajdonságok szerint, amik a rács egyes tartományain, vagy esetleg a rács egészén megjelennek. Ekkor beszélhetünk:

- Transzlációs szimmetria(4.3 ábra)
 - Kijelölhető egy csoport ún. analóg rendszer, ami olyan csomópontokat és rudakat tartalmaz, amiket egy megadott E_1 , E_2 távolságokkal ξ és η tengely mentén eltolva kiserkeszthető a rács
 - Ezeket az analóg rendszereket, ha összefüggő rendszert alkotnak „egység cellá”-nak nevezzük
 -



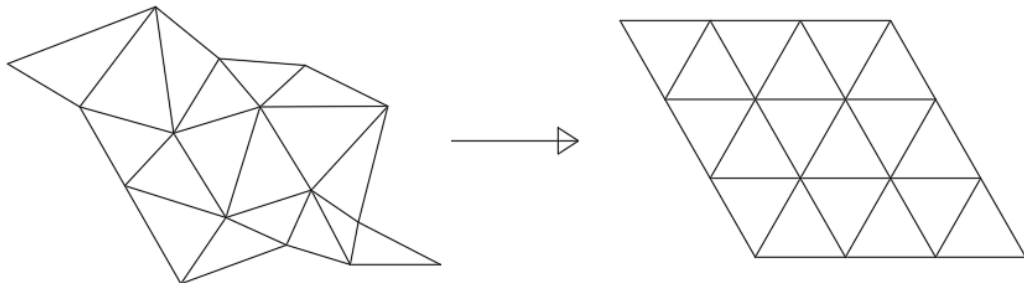
4.3 ábra: Transzlációs szimmetriájú hálózat

- Forgási szimmetria
 - Kijelölhető egy csoport ún. analóg rendszer, ami olyan csomópontokat és rudakat tartalmaz, amiket egy megadott ϕ szöggel elforgatva egy ξ tengely körül kiserkeszthető a rács



4.4 ábra: Forgási szimmetriájú hálózat

- Kapcsolati szimmetria:
 - Kijelölhető egy csoport ún. analóg rendszer, ami olyan csomópontokat és rudakat tartalmaz, amelyek kapcsolódásai ismétlődnek a rács mentén.
 - A kapcsolati szimmetria az ismétlődések/tulajdonságok közül a legáltalánosabb, így például minden rács, ami translációs szimmetriával rendelkezik, ugyancsak rendelkezik kapcsolati szimmetriával, ez azt is jelenti, hogy minden kapcsolati szimmetriával rendelkező rácshoz létezik egy topológiailag egyenértékű translációs szimmetriájú rács(4.4 ábra).



4.5 ábra: Transzlációs szimmetriájú ráccsal topológiailag egyenértékű kapcsolati szimmetriájú rács

- Míg translációs szimmetria nem csak az egyes pontok kapcsolatainak ismétlődését, hanem a rúd hosszak és a rudak által bezárt szögek ismétlődését is előírja, addig a kapcsolati szimmetria csak a kapcsolatok ismétlődését
- A kapcsolati szimmetria a térrácsok analízisében egy nagyon fontos tulajdonság, mert így elég egy darab „egység cellára”(Amiben az elemek csak topológiailag egyeznek meg) felírni az összefüggéseket. Ez azért igaz, mivel a kapcsolati szimmetria miatt az összes cella topológiailag megegyezik, így a felállított egyenletek igazak az összesre. Az így kapott egyenletekben az ismétlődés miatt differenciaoperátorok találhatóak, így a rács igénybevételei kiszámolhatóak egy differencia egyenletrendszer segítségével.

A dolgozatban tárgyalt szerkezet az előző definíció szerinti megfogalmazásban egy egyrétegű térbeli keret, de ennek ellenére a továbbiakban térrácsként fogok hivatkozni rá.

4.1 Elemi cella és az analóg rendszerek:

Az Elemi cella egy olyan rudakból és csomópontokból álló rendszer, amin elemi transzformációkat végezve ki lehet szerkeszteni az egész rácshálózatot.

- Transzlációs szimmetriánál: Az elemi cella egyenletes mozgatásával/kiosztásával kiserkeszthető a hálózat
- Forgási szimmetriánál: Az elemi cella egyenletes forgatásával/poláris kiosztásával kiserkeszthető a hálózat
- Kapcsolati szimmetria: A kapcsolati szimmetria kapcsolatainak/topológiai tulajdonságaink kiosztásával kiserkeszthető a hálózat

Az elemi cellában található rudak és csomópontokat analóg pontoknak és analóg rudaknak hívjuk és ezek alkotják az ún. analóg rendszert (arra utalva, hogy ezeknek a tulajdonságait osztjuk ki a teljes rácson).

Mivel soroljuk ezeket az elemi cellákat, kialakulnak az ugyanabba az analóg rendszerbe tartozó különböző elemi cellákban található rudakból „rúdsorok”, amik képesek esetén egytengelyű feszültségállapotban (csak normálerővel) továbbítani a terheiket a peremig, támaszig.

5. Kontinuum módszer^[4]

A kontinuum módszer alkalmazásának lépései a következőképpen foglalható össze:

1. A térrács merevségi adatainak meghatározása
2. A merevségi adatokból a helyettesítő kontinuum merevségi adatainak meghatározása.
3. A helyettesítő kontinuum lehajlásainak/igénybevételeinek meghatározása
4. A kapott eredményekből a térrács igénybevételeinek kiszámolása (rúderők, nyomatékok)

5.1 A térrács merevségi adatainak meghatározása

A kontinuum módszer nagy előnye, hogy nem kell kiserkeszteni a teljes hálózatot, elég az elemi cella/ cellák és keresztmetszeti adatok és a szerkezet kontúrjának és a felület geometriájának meghatározása a rács merevségi adatainak meghatározásához.

1. Elemi cella definiálása

Első lépésként meg kell határozni az elemi cellában található rudaknak, egy adott globális koordináta rendszer tengelyéhez képesti szögeit($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$) továbbá 1-1 egymás melletti elemi cellában lévő rudak távolságát($b_1, b_2, b_3 \dots b_n$).

Egy görbült felületen kialakított térrács rúdjaiban kialakulhatnak hajlító nyomatékok, nyíróerők és normálerők is. Ebből következik, hogy a rács helyettesítő kontinuumában lesznek membránerők és nyomatékok is, azaz egy hajlított héjként fog viselkedni. Hogy megállapítsuk a helyettesítő kontinuum viselkedését hajlításra és membrán igénybevételekre is, meg kell határoznunk a rács viselkedését ezen két igénybevételre is. Ebből adódik, hogy definiálni kell a rács ún. normálmerevségi mátrixát és a hajlító merevségi mátrixát is.

5.1.1 Normálmerevségi mátrix:

Tegyük bele az elemi cella-rács egyes rúdjaik fajlagos megnyúlását(ε_i) (a rudak

lokális rendszerében, azaz a rúdirányú megnyúlás) egy oszlopvektorba: $\varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$

Ezek megkaphatóak egy globális $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$ alakváltozás vektor elforgatásából

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = L_\varepsilon * \varepsilon \quad \text{Itt } L \text{ egy forgatómátrixot jelöl } L_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & \cos \alpha_1 * \sin \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \alpha_i & \sin^2 \alpha_i & \cos \alpha_i * \sin \alpha_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos^2 \alpha_n & \sin^2 \alpha_n & \cos \alpha_n * \sin \alpha_n \end{bmatrix}$$

Tekintve hogy az egyes rudak egytengelyű feszültségállapotban vannak, így

igénybevételeik a $\sigma = \frac{F}{A}$ képletből számolhatóak, amiből ε -t kifejezve mint

ismeretlen az alábbi egyenletet kapjuk: $n = \frac{A * E * \varepsilon}{b}$, ahol b az egységnyi felületre jutó

normálerőt jelöli, az összes n értéket egy vektorba szedve a következő alakot adja: $n' =$

$$\begin{bmatrix} \frac{A_1 * E}{b_1} * \varepsilon_1 \\ \frac{A_2 * E}{b_2} * \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \frac{A_n * E}{b_n} * \varepsilon_n \end{bmatrix} \text{ azaz } r' = R_n * \varepsilon', \text{ ahol } R_n = \begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & r_n \end{bmatrix} \quad r_i = \frac{A_i * E}{b_i}$$

Ezekből a rúd irányú erőkből ki lehet számolni a globális x,y koordináta rendszerben a tárcsa/membrán igénybevételeket:

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = L_\varepsilon^* * n'$$

Az így kapott képleteket egymásba helyettesítve a következő egyenletre jutunk:

$$n = L_\varepsilon^* * R_n * L_\varepsilon * \varepsilon$$

$$n = T \varepsilon$$

Látható, hogy az igénybevételek és az alakváltozások közötti kapcsolatot a

$$\mathbf{T} = \mathbf{L}_\varepsilon^* * \mathbf{R}_n * \mathbf{L}_\varepsilon$$

mátrix fejezi ki, amit a rács normálmerevségi mátrixának hívunk.

A $\mathbf{L}_\varepsilon^* * \mathbf{R}_n * \mathbf{L}_\varepsilon$ mátrixszorzás elvégzése után a következő alakot kapjuk a normálmerevségi mátrixra:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sum_1^n r_i * \cos^4 \alpha_i & \sum_1^n r_i * \cos^2 \alpha_i * \sin^2 \alpha_i & \sum_1^n r_i * \cos^3 \alpha_i * \sin \alpha_i \\ \dots & \sum_1^n r_i * \sin^4 \alpha_i & \sum_1^n r_i * \cos \alpha_i * \sin^3 \alpha_i \\ \text{Szimmetrikus} & \dots & \sum_1^n r_i * \sin^2 \alpha_i * \cos^2 \alpha_i \end{bmatrix}$$

A merevségi mátrix elemeinek fizikai tartalma:

- T_{11} és T_{22} és T_{33} főmerevségeknek felelnek meg, mivel az azonos irányú igénybevételeket és alakváltozásokat kötik össze. T_{11} és T_{22} az egymásra merőleges irányú húzási merevséget T_{33} a nyírási merevséget fejezi ki.
- T_{12} és T_{21} A haránt kontrakcióból származó többlet igénybevételeket határozza meg, mert az egymásra merőleges irányú igénybevételek és alakváltozásokat köti össze.

A Poisson tényező definíciójából, azaz a hossz és haránt irányú alakváltozás aránya a rács Poisson tényezője a $\nu = \frac{T_{12}}{T_{11}}$

A merevségi mátrix felépítéséből látható hogy a $T_{12}=T_{21}=T_{33}$ így a rács nem lehet teljesen allotróp. Ez különösebben nem is probléma, mivel statikai és gazdasági szempontból is előnyösebb egy izotróp, esetleg ortotróp rács kialakítása.

Elemi szilárdságtanból ismeretes, hogy az izotróp anyagmodellben a normál és nyírófeszültségek nem befolyásolják egymás alakváltozásait, így az izotróp rács alapfeltétele, hogy T_{23} és T_{13} (és a szimmetrikus mátrix miatt T_{31} és T_{32}) zérus legyen. Az izotrópia másik feltétele, hogy a normálmerevségek egyenlők legyenek egymással azaz $T_{11}=T_{22}$. Harmadikként a lineárisan rugalmas anyagmodellből az is belátható, hogy

az izotrópia feltétele a következő egyenlőség teljesülése: $T_{11} = T_{12} + 2 * T_{33}$. Ezeknek a feltételeknek az a következménye, hogy, mivel $T_{12}=T_{33} \rightarrow \nu = \frac{T_{12}}{T_{11}} = \frac{T_{12}}{3*T_{12}} = \frac{1}{3}$

5.1.2 Hajlító merevségi mátrix:

A hajlítás merevség meghatározásához meg kell határoznunk a rudak görbületét és

elcsavarodását. Ezeket egy χ' vektorba foglaljuk $\chi' = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \\ \dots \\ 2 * \theta_1 \\ \vdots \\ 2 * \theta_n \end{bmatrix}$.

Ezeket a rúd alakváltozásokat ugyancsak megkaphatjuk a a globális x,y koordináta

rendszer tengelyeihez viszonyított $\chi = \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \theta_{xy} \end{bmatrix}$ lemez alakváltozások rúdirányokba való

elforgatásával.

$$\chi = \mathbf{L}_\chi * \chi'$$

A nyomatékok és az alakváltozások között az elemi mechanikából már jól ismert összefüggések léteznek ($M_{bi} = i - edik$ rúd *hajlítónyomatéka*, $M_{ti} = i - edik$ rúd *csavarónyomatéka*):

$$M_{bi} = -E_i * I_i * \chi_i$$

$$M_{ti} = -\frac{G_i * I_{xi}}{2} * 2 * \theta_i$$

Ezeknek a nyomatékoknak vegyük a fajlagos értékét, azaz osszuk le a rácssorok közötti távolságokkal

$$m_{bi} = \frac{M_{bi}}{b_i}$$

$$m_{ti} = \frac{M_{ti}}{b_i}$$

5.2 A merevségi adatokból a helyettesítő kontinuum merevségi adatainak meghatározása.

Most hogy sikerült meghatározni a rács merevségi adatait, továbbá a héj igénybevételeivel való kapcsolatát (mekkora alakváltozásokat okoznak a héj metszet erői és nyomatékai) határozzuk meg a helyettesítő héj adatait. Mivel a rács meghatározza a héj geometriáját csupán két szükséges adat kell a helyettesítő kontinuum egyértelmű meghatározásához:

- E' = a héj rugalmassági modulusa
- ν' = a héj vastagsága

Ahhoz, hogy a helyettesítő kontinuum egyenértékűen viselkedjen hajlításra és húzásra/nyomásra is meg kell feleltetni a rács normál és hajlítószilárdságát a kontinuuméval.

Klasszikus, izotróp anyagú héj normálmerevsége:

$$\frac{E' * t'}{1 - \nu^2} \rightarrow T_{11} = \frac{E' * t'}{1 - \nu^2}$$

Klasszikus, izotróp anyagú héj hajlítási merevsége:

$$\frac{E' * t'^3}{12 * (1 - \nu^2)} \rightarrow B_{11} = \frac{E' * t'^3}{12 * (1 - \nu^2)}$$

Ebben a két egyenletben, csak E' és t' az ismeretlen, így megoldható a 2 ismeretlenes explicit egyenletrendszer.

A megkapott E' és t' helyettesítő adatokból meghatározható a héj. Következő lépésként meg kell kapnunk a héj igénybevételeit.

5.3 A helyettesítő kontinuum igénybevételeinek meghatározása

A helyettesítő kontinuum differenciál egyenlete:

Mivel a rácshéj rúdjaiban normálerő, a felületre merőleges nyíróerő és hajlító nyomaték is keletkezhet, így a helyettesítő kontinuumában is keletkeznie kell membránerőknek és nyomatékoknak, ebből eredően hajlított héjként fog viselkedni. Így a differenciálegyenlete összetehető egy membránhéj és egy hajlított lemez összegeként.

$$D_w^* * B_m * D_w * w - D_w^* * z * D_\phi * \phi = p$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 2 * \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 * \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 2 * \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = p$$

Ahol D_w és D_ϕ differenciál operátorok, w a lehajlás függvény, z a héj alakját leíró függvény

A hajlított lemez egyenlete kifejtve a következő:

$$D_w^* * B_m * D_w * w = B_{11} * \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 * B_{13} * \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(B_{12} + 2B_{33}) * \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 * B_{23} * \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + B_{22} * \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

Ami egy allotrop Kirchhoff-lemeznek felel meg.

A membránhéj egyenlete kifejtve:

$$D_w^* * z * D_\phi * \phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 2 * \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} * \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 * \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} * \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

ahol ϕ az úgynevezett Pucher feszültségfüggvény, amit a következőképpen definiálunk:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = D_\phi * \Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

A két ismeretlen függvény: $w =$ lehajlás, $\phi =$ Pucher-féle feszültség függvény meghatározásához nem elég egyetlen egyensúlyi egyenlet, hanem szükséges egy kompatibilitási egyenlet felállítása is, ami meghatározza a kapcsolatot az alakváltozás függvények között és így biztosítja a folytonosságot.

Az alakváltozás vektor felállításához szükségünk van a membránerők és a hajlítás által okozott alakváltozások meghatározásához: $\varepsilon = \varepsilon_{membr} + \varepsilon_{hajl}$

Az alakváltozások kifejezhetőek a 3 elmozdulás vektor u, v, w függvényeként:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} - w * \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 * \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} * z = \varepsilon_{u,v} - w * D_w * z$$

Mivel w függetlenül okoz alakváltozást u és v -től így elég $\varepsilon_{u,v}$ folytonosságát biztosítani.

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$D_\phi^* * \varepsilon_{u,v} = 0$$

Felhasználva hogy $n = T * \varepsilon$ és a Pucher-féle feszültségfüggvény definícióját, megkapjuk a kompatibilitási egyenletet:

$$D_\phi^* * (T)^{-1} * D_\phi * \phi + D_\phi^* * w * D_w * z = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{T_{22}}{T_{11} * T_{22} - T_{12} * T_{21}} & \frac{T_{12}}{T_{11} * T_{22} - T_{12} * T_{21}} & 0 \\ \frac{T_{21}}{T_{11} * T_{22} - T_{12} * T_{21}} & \frac{T_{11}}{T_{11} * T_{22} - T_{12} * T_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_{33}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ 2 * \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = 0$$

5.4 A kapott eredményekből a térrács igénybevételeinek kiszámolása (rúderők, nyomatékok)

$$\begin{cases} D_w^* * B_m * D_w * w - D_w^* * z * D_\phi * \phi = p \\ D_\phi^* * (T)^{-1} * D_\phi * \phi + D_\phi^* * w * D_w * z = 0 \end{cases}$$

Differenciálegyenlet megoldása után megkapjuk w -t és ϕ -t

- ϕ -t behelyettesítve $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_\phi * \phi$ képletbe, megkapjuk a héjon keletkező fajlagos membránerőket.
- $\mathbf{n}' = \mathbf{R}_n * \boldsymbol{\varepsilon}'$ és $\boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{L}_\varepsilon * \boldsymbol{\varepsilon}$ behelyettesítésével a $\mathbf{n} = \mathbf{T} * \boldsymbol{\varepsilon}$ egyenletbe a következő képlethez jutunk:

$$\mathbf{n}' = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_n \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n * \mathbf{L}_\varepsilon * \mathbf{T}^{-1} * \mathbf{n}$$

ennek segítségével meghatározhatóak a fajlagos rúderők, ezeket megszorozva a rácssorok távolságaival megkapjuk a rudakban keletkező rúderőket

$$\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix}$$

Fontos megemlíteni, hogy ez az eljárás elhanyagolja, hogy a rudak mereven vannak összekapcsolva, és azt veszi alapul, hogy csuklós kapcsolatok vannak. Ez abból adódik, hogy a merev kapcsolatok olyan határozatlan rendszert alkotnak, amihez még nem sikerült helyettesítő kontinuumot hozzárendelni. Ez, a módszer alapból közelítő volta mellett további eléréseket okoz a tényleges és a módszerrel számolt eredmények között. Viszont, a csuklós kapcsolatok feltételezése azt jelenti, hogy elhanyagoljuk a rudak hajlítási merevségét, amik a pontos megoldásnál erőket vesznek fel nyomaték útján.

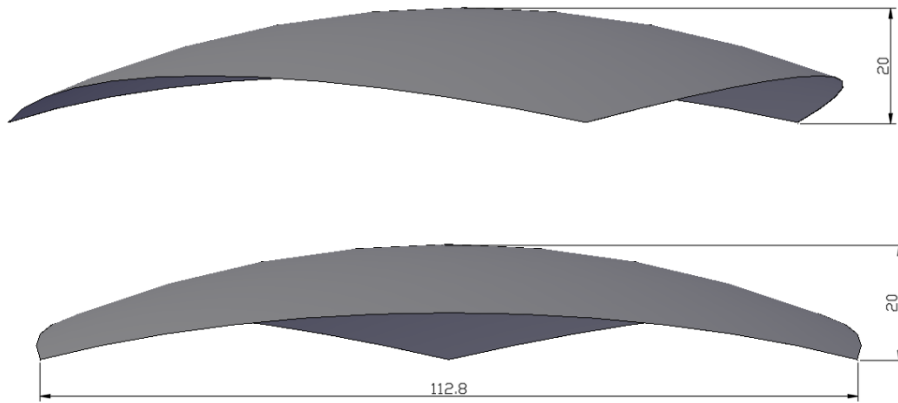
6. A sportcsarnok lefedésének ellenőrzése

A szerkezet geometriájára és a rácszat kialakítását több, a statikus tervezők által közzétett szöveg leírja^[5]. Ezeknek az adatoknak a birtokában szándékom ellenőrizni a szerkezetet.

6.1 A lefedés adatainak meghatározása

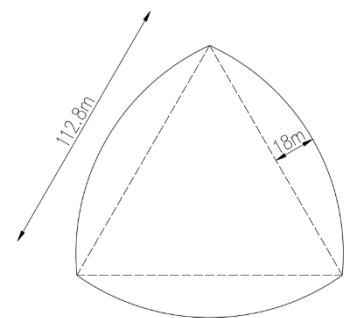
6.1.1 Geometria:

A sportcsarnok térrácsa egy szinusz hullám megforgatása által nyert fogásfelületen lett kialakítva, aminek egyenlete: $z(x, y) = 20 * \sin(0,024 * x)$.



6.1 ábra: A lefedés felületének geometriája

A kontúrja alaprajzon egy 112,8 m egyenlő oldalú háromszög, melynek oldalai kifelé domborodnak, alaprajzi vetületen 19m-el. A legnagyobb ívmagassága 20m (6.1 és 6.2 ábra).

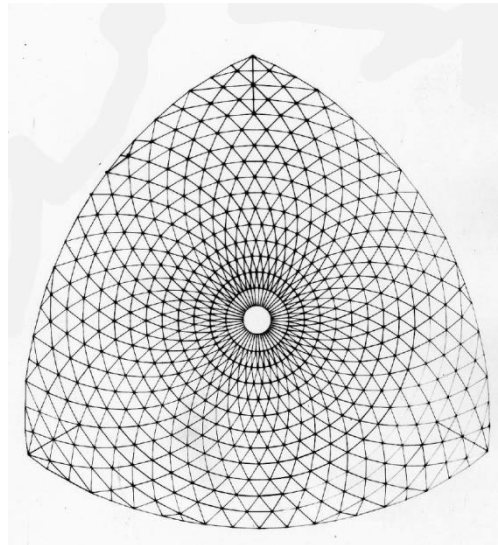
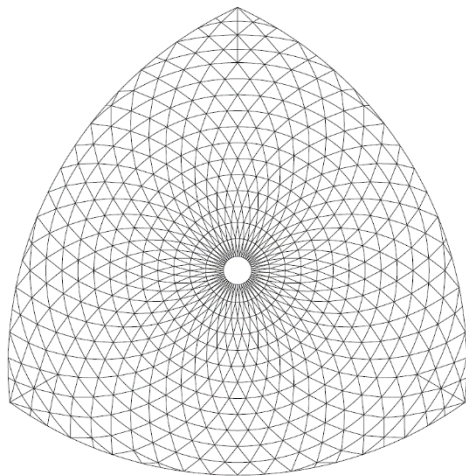


6.2 ábra: A lefedés alaprajzi vetülete és méretei

6.1.2 Támaszok:

A rács stabilitását a háromszög 3 csúcsában kialakított csuklós saru biztosítja, ezek a föld alatt vasbeton vonórudakkal vannak összekötve, hogy fel tudják venni a rács vízszintes terheit. A saruk egymástól 112.8m re vannak elhelyezve, így maga a rács fesztávja is ekkora.

6.1.3 Hálózat:

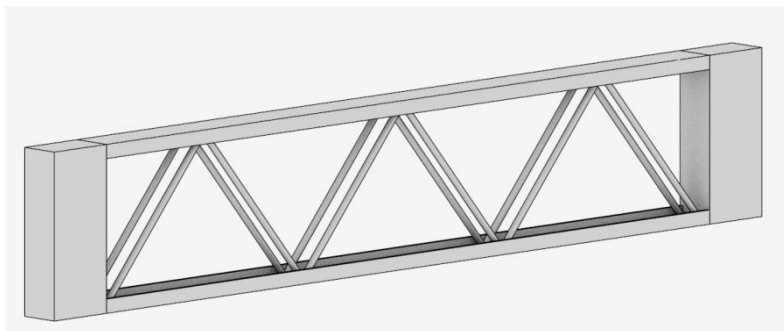


6.3 ábra: A hálózat alaprajzi képe (Bal: általam készített, és ezzel készültek a számítások
Jobb: Kollár Lajos által készített eredeti szerinti hálózat⁽³¹⁾)

A hálózatot a forgási középpont körüli koncentrikus rácsgyűrűk és a középpontból radiális irányban induló íves rácssorok alkotják. A rács közepén egy 7 m átmérőjű kör alakú lyuk található, ahol a csarnok ventilátorja kap helyet. A rácsgyűrűk egyenletesen 3.95m távolságokban lettek kiosztva (Az eredeti tervezetben 3,9m volt de így nem jött ki a geometria, így át kellett méreteznem). A támaszok környezetében 1-1 radiális irányú többlet rúd lett elhelyezve, az itt keletkező nagy igénybevétel miatt.

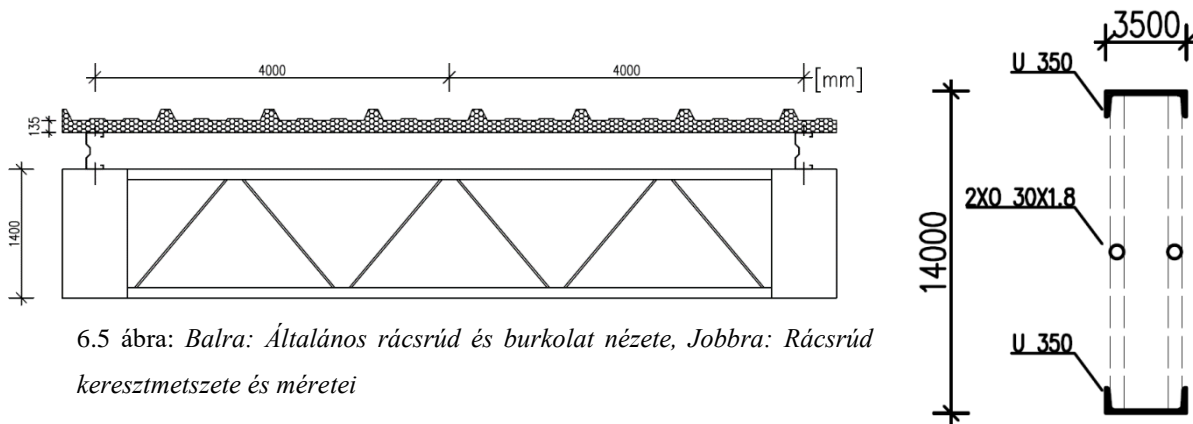
6.1.4 Rács rudak kialakítása:

A rácshálózatot felépítő rács rudak 2 U profilból vannak kialakítva, amik a rúd alsó és felső öveit adják, ezeket csőszelvényű síkbeli rácsozat köti össze, ami adja át a terheket a két öv között, továbbá az övek egymástól való eltolásával nagy inerciát biztosítja(6.4 ábra).



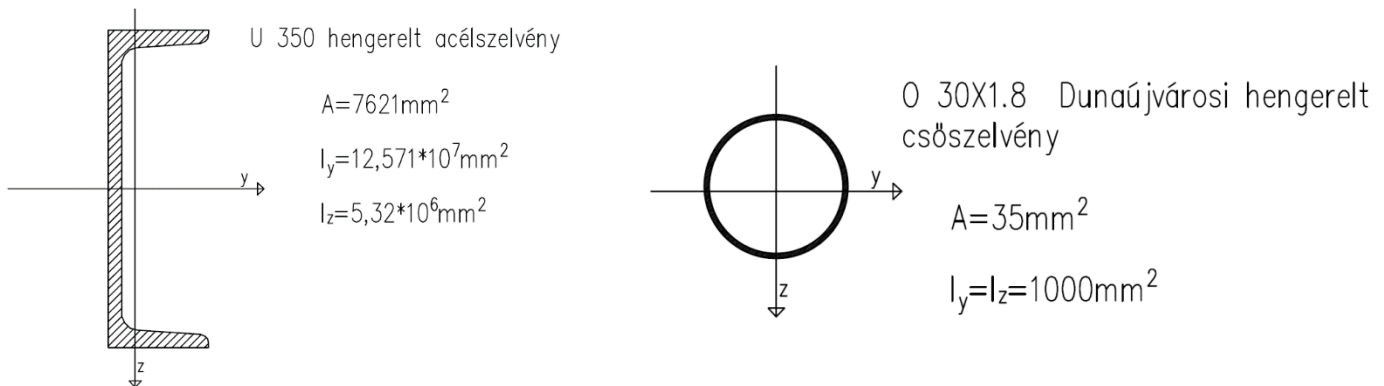
6.4 ábra: Általános rácsrúd keresztmetszete és axonometrikus képe

6.1.4.1 A rács rudak technikai adatai:



6.5 ábra: Balra: Általános rácsrúd és burkolat nézete, Jobbra: Rácsrúd keresztmetszete és méretei

Mindegyik acélelem S235-ös anyagminőségű acélból lett kialakítva. Az övek U350 Magyar U szelvényből az összekötő rácsozat 2 darab O 30x1.8 Dunaújvárosi csőszelvényből lett kialakítva. A teljes rúd 0,35m széles és 1,4m magas. A rácsozat 50°-t zár be a vízszintessel. A rács által határolt terület 135mm vastag alumíniumborítású hőszigetelő szendvicspanel fedi le, ami biztosítja a víz és a hőszigetelést is. Ezek a panelek acél profilú szelemenekre terhelnek, amik a rács csomópontjaiban vannak a felső övhöz csavarozva.

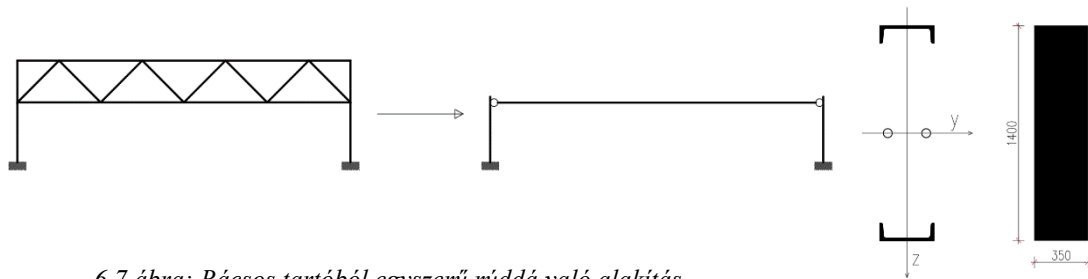


6.6 ábra: Szelvények geometriája és keresztmetszeti jellemzői

A rácsrudak végein acél dobozok lettek kialakítva, hogy ehhez lehessen kapcsolni az alsó felső csomólemezt, ami biztosítja a csomópontok merevségét. A kapcsolatok a szükséges teherbírás érdekében feszített csavarokkal lett kialakítva.

6.2 A rács rudak „számolható” egyszerű, tömör keresztmetszetű rúddá való alakítása^[6]:

A rácsszerkezet ellenőrzésének elvégzéséhez meg kell határoznunk a rács rudak inerciáját, ami a tanult elemi szilárdságtani szabályokkal nem lehetséges, így magát a rács rudat helyettesíteni kell egy egyszerű rúddal, ami statikailag úgy viselkedik, mint a rácsozat, azaz itt is egy diszkrét rácsoz rudat alakítunk folytonos, tömör rúddá (6.7 ábra).



6.7 ábra: Rácsoz tartóból egyszerű rúddá való alakítás

Meg kell határozni a helyettesítő rúd inercia nyomatékait és területét:

- $A_{rud} = \sum_i A_i \rightarrow$ A rúd területe a területek összege
- $I_y = \sum_i A_i * y_i^2 \rightarrow$ A rúd nagyobb tehetetlenségi főirányhoz tartozó inerciája az övek Steiner-tagjának összegei
- $I_x = \frac{1.29}{3} * \sum_i v_i^3 * b_i \rightarrow$ A rúd csavaró inerciája a nyitott-vékonzselvényű tartókra levezetett képletből kapható meg $\eta=1.29$ es alaki tényezővel
- $I_z = \int_A y^2 dA \rightarrow$ A kisebb tehetetlenségi főirányhoz tartozó inercia a jól ismert módon meghatározható

Így a rácsrúd adatai a következők:

- $A = 7621 * 2 + 35 * 2 = 15312 mm^2$
- $I_y = 7621 * 700^2 * 2 = 7.46858 * 10^9 mm^4$
- $I_x = \frac{1.29}{3} * (2 * 14^3 * 350) = 8.2594 * 10^5 mm^4$
- $I_z = 2 * 5.32 * 10^6 = 1.064 * 10^7 mm^4$

6.3 A térrácsra ható terhek meghatározása^[7]:

- Önsúly teher:
 - Gépészet súlya: $20-25 \text{ kg/m}^2 \rightarrow 0.25 \text{ kN/m}^2$
 - Burkolat súlya
 - Alu-hősziget szendvicspanel:
 - EPS : $0.15 \text{ kN/m}^3 \rightarrow 0.15 * 0.135 = 0.02025 \text{ kN/m}^2$
 - Ventilátor súlya
 - $250 \text{ kg} \rightarrow 2.52 \text{ kN}$
 - Szétosztva a rácson 48 csomópontba $\rightarrow \frac{2.52}{48} = 0.0525 \text{ kN}$
 - Kontinuumon szétosztva vonal menti teherként:
$$g_k = \frac{2.52}{K} = \frac{2.52}{2 * 3.5 * \pi} = 0.11459 \text{ kN/m}^2$$
 - Rács rudak súlya
 - Acél sűrűsége: 7850 kg/m^3
 - tömör $1,4 * 0,35 \text{ m}$ kontúrú keresztmetszet területe: 490000 mm^2
 - Rács rudak területe: 15312 mm^2
 - $\frac{\rho_{\text{racsrud}}}{7850} = \frac{15312}{490000} \rightarrow \rho_{\text{racsrud}} = 15312 * \frac{7850}{490000} = 245.3 \text{ kg/m}^3$
- Meteorológiai terhek:
 - Hóteher:
 - $s_k = 1.25 \text{ kN/m}^2$ Alaki tényezője lapos héjra: $\eta_1 = 0.8$
 - $s = 1.25 * 0.8 = 1 \text{ kN/m}^2$
 - Szélteher:
 - A héj 20 m magas ívmagasságú és IV. beépítési osztályban található így: $q_p = 0.572 \text{ kN/m}^2$ Alaki tényezője: $c_{pe} = 0.5$
 - $q = 0.572 * 0.5 = 0.285 \text{ kN/m}^2$
 - A széltehernél a szélszívás a meghatározó, így, mivel csökkentené az igénybevételeket, elhanyagoltam.

Vizsgált teherkombinációk:

- Teherbírási határállapot:
 - Totál hóteher
 - Féloldalas hóteher

6.4 Igénybevételek meghatározása kontinuum módszerrel

A vizsgálatot a már említett és részletezett lépések szerint fogjuk végezni:

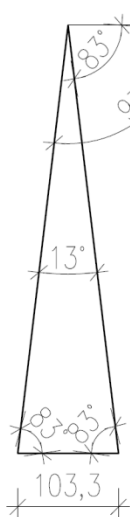
1. A térrács merevségi adatainak meghatározása
2. A merevségi adatokból a helyettesítő kontinuum merevségi adatainak meghatározása.
3. A helyettesítő kontinuum lehajlásainak/igénybevételeinek meghatározása
4. A kapott eredményekből a térrács igénybevételeinek kiszámolása (rúderők, nyomtatók)

6.4.1) A térrács merevségi adatainak meghatározása:

A rács geometriája radiális irányban változik, mivel a rács háromszögek oldalai és szögei változnak, így eszerint változnak a helyettesítő kontinuum adatai is. Kerületi irányban a rácsháromszögek egybevágóak így a kontinuum adatai végig megegyeznek.

Általános háromszög elemi cellából számított merevségi adatok:

Az eljárás szemléltetésére egy konkrét elemi cellán fogom elvégezni a számításokat:



Meg kell határozni a normálmerevségi és a hajlító merevségi mátrixot:

$$\mathbf{T} = \mathbf{L}_\varepsilon^* * \mathbf{R} * \mathbf{L}_\varepsilon$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}_m * \mathbf{R}_m * \mathbf{L}_\chi$$

Ehhez meg kell határozni a háromszög oldalainak a vízszintes tengellyel bezárt szögeit továbbá a rúdsorok távolságait. Ebben az esetben ezek:

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 83 \quad \alpha_3 = 97$$

$$b_1 = 4.38m \quad b_2 = 0.99m \quad b_3 = 0.99m$$

A szögek ismeretében meghatározható L_ε , L_m és L_χ forgatómátrix:

$$L_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0149 & 0.9851 & 0.1210 \\ 0.0149 & 0.9851 & -0.1210 \end{bmatrix}$$

$$L_m = \begin{bmatrix} 1 & 0.0149 & 0.0149 & 0 & -0.1210 & 0.1210 \\ 0 & 0.9851 & 0.9851 & 0 & 0.1210 & -0.1210 \\ 0 & 0.1210 & -0.1210 & 1 & 0.0149 & 0.0149 \end{bmatrix}$$

$$L_\chi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0149 & 0.9851 & 0.1210 \\ 0.0149 & 0.9851 & -0.1210 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.2419 & 0.2419 & -0.9703 \\ 0.2419 & -0.2419 & -0.9703 \end{bmatrix}$$

A rúdsorok közti távolságok ismeretében meghatározható R és R_m mátrix:

$$R = EA * 10^{-3} \begin{bmatrix} \frac{1}{4.375} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.99} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.99} \end{bmatrix}$$

$$R_m = E * I * 10^{-3} \begin{bmatrix} \frac{1}{4.375} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.99} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0.99} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R_m -ben el van hanyagolva a csavarási merevség, mivel a hajlítási merevséghez képest elhanyagolhatóan kicsi, továbbá azért mert az összes rácsrúdnak a legnagyobb tehetetlenségi főiránya merőleges a felület normálisára, így csavaró nyomatékok nem nagyon alakulnak ki a rudakban amúgy sem.

Ezek után meghatározható T és B is:

$$T_{G1-G2} = EA * 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.238 & 0.0285 & 0 \\ 0.0285 & 1.9522 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0285 \end{bmatrix}$$

$$B_{G1-G2} = EI * 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.238 & 0.0285 & 0 \\ 0.0285 & 1.9522 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0285 \end{bmatrix}$$

6.4.2) A merevségi adatokból a helyettesítő kontinuum merevségi adatainak meghatározása.

Hogy hajlításra és nyomásra/húzásra is egyenértékű legyen a rács a héjjal így a normál és hajlító merevségeiknek egyenlőnek kell, hogy lenniük:

$$T_{11} = \frac{E' * t'}{1 - \nu^2} = 0.238 * 10^{-3} * E * A$$

$$B_{11} = \frac{E' * t'^3}{12 * (1 - \nu^2)} = 0.238 * 10^{-3} * E * I$$

$$E' = \frac{0.238 * 10^{-3} * E * I * 12 * (1 - \nu^2)}{t'^3}$$

$$0.238 * 10^{-3} * E * A = \frac{0.238 * 10^{-3} * E * I * 12 * (1 - \nu^2) * t'}{t'^3 * (1 - \nu^2)}$$

$$t'^2 = \frac{I * 12}{A}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

$$t'^2 = 12 * i^2$$

$$t' = 2 * \sqrt{3} * i$$

$$E' = \frac{0.2292 * 10^{-3} * E * A * (1 - \nu^2)}{3.464 * i}$$

$$v = \frac{B_{12}}{B_{11}} = \frac{E * I * 10^{-3} * 0.0285}{E * I * 10^{-3} * 0.238} = 0.1197$$

- E=210000 N/mm²
- A=15312*10⁹ mm²
- I_y=7.46858 mm⁴

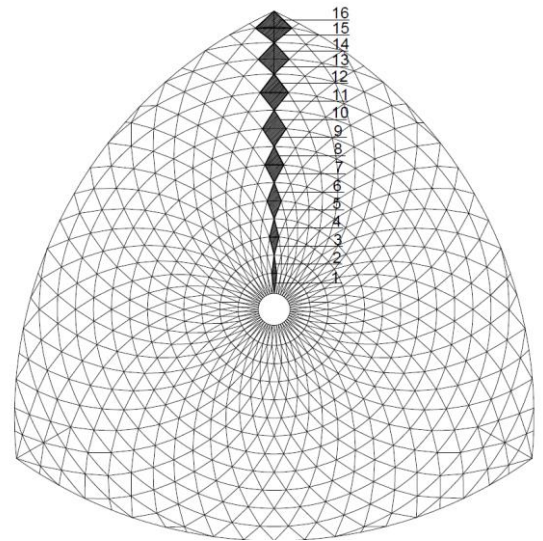
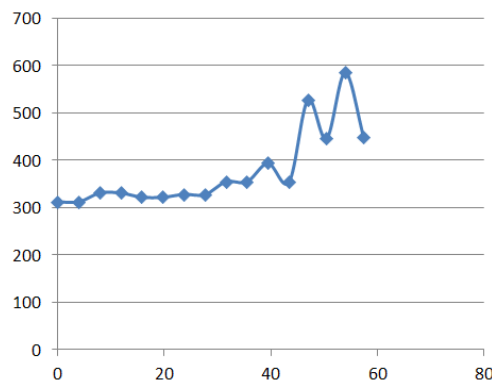
$$\rightarrow t' = 2 * \sqrt{3} * \sqrt{\frac{7.46858 * 10^9}{15312}} = 2419.322 \text{ mm}$$

Mivel t' csak a keresztmetszeti adatok függvénye így a helyettesítő kontinuum vastagsága állandó a teljes felületén

$$E' = \frac{0.2292 * 10^{-3} * 210000 * 15312 * (1 - 0.1197^2)}{3.464 * \sqrt{\frac{7.46858 * 10^9}{15312}}} = 311.985 \text{ N/mm}^2$$

Az E' értékét kiszámolva a radiális irányban változó geometriájú elemi cellákon a következőket kapjuk:

Sorszám	E'[N/mm ²]
1	311,985
2	311,985
3	330,65
4	330,65
5	321,68
6	321,68
7	327,77
8	327,33
9	354,48
10	354,48
11	393,19
12	354,07
13	527,25
14	444,777
15	584,65
16	448,22



6.4.1 ábra:

Balra: Rugalmassági modulusok megoszlása a rács mentén radiális irányban.

Jobbra: Elemi cellák sorszámozása

6.4.1 táblázat: rugalmassági modulusok

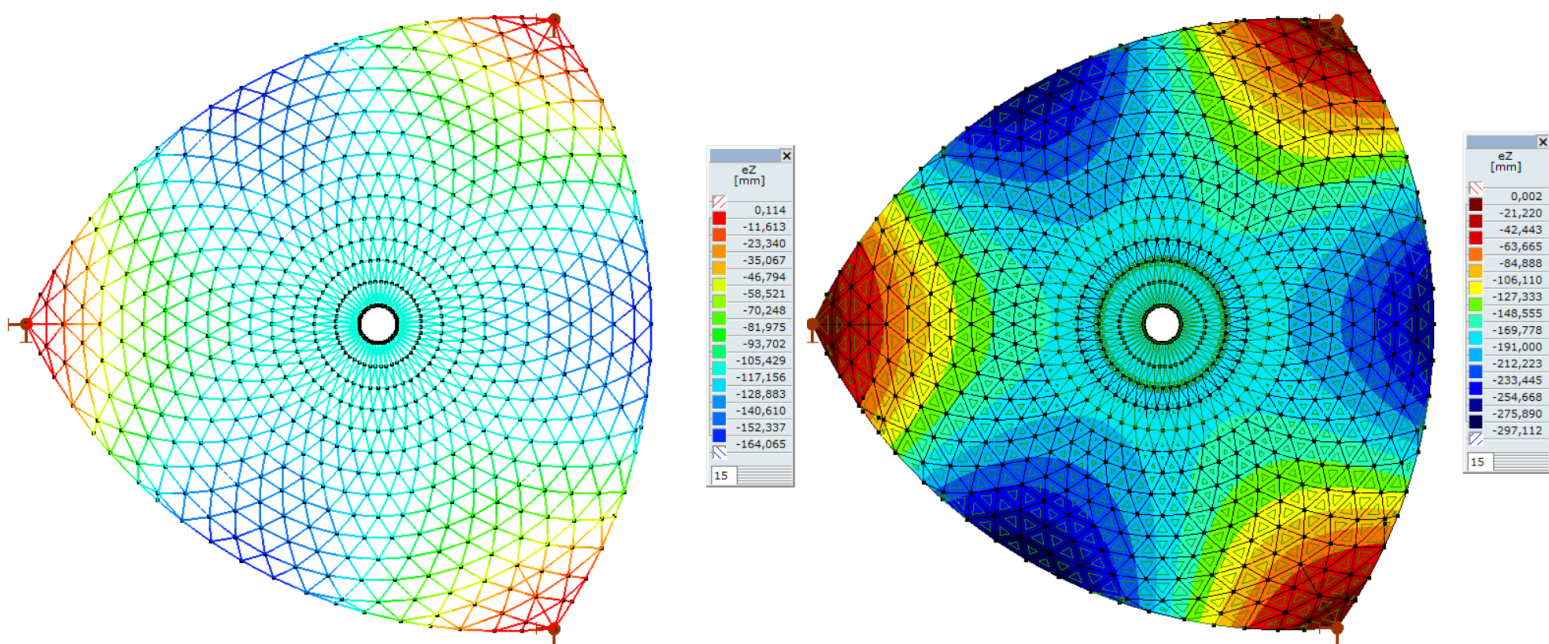
6.4.3) A helyettesítő kontinuum igénybevételeinek meghatározása

Habár az 5.3-as alfejezetben levezetett differenciálegyenletekből meg lehetne kapni a keresett ismeretleneket, viszont a szemléletesebb megoldás érdekében az AxisVM nevű végelem programmal végeztem el a számításokat. Ez által szemléletesebben látszik majd a rács és a helyettesítő kontinuum igénybevételeinek/ erőjátékának hasonlóságai, és különbségei.

A végelem modellben a kontinuumot 1,5m oldalméretű 21 szabadságfokú szimplexekkel osztottam fel. A végelem háló sűrítésével a héjon mért metszeterők minimálisan változtak csak így megfelelőnek bizonyult ennek az egy modellnek a használata.

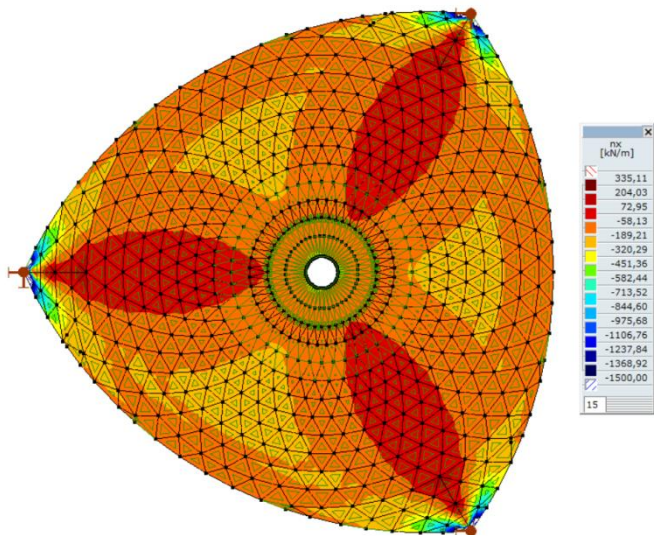
Mivel a dolgozat célja a kontinuum módszer pontosságának meghatározása volt, így készült egy rácsmodell is, ami visszaadta a pontos eredményeket.

A végelemek lokális koordináarendszere úgy lett felvéve, hogy az x irány kerületi irányú, az y irány radiális irányú és a z irány normális irányú.

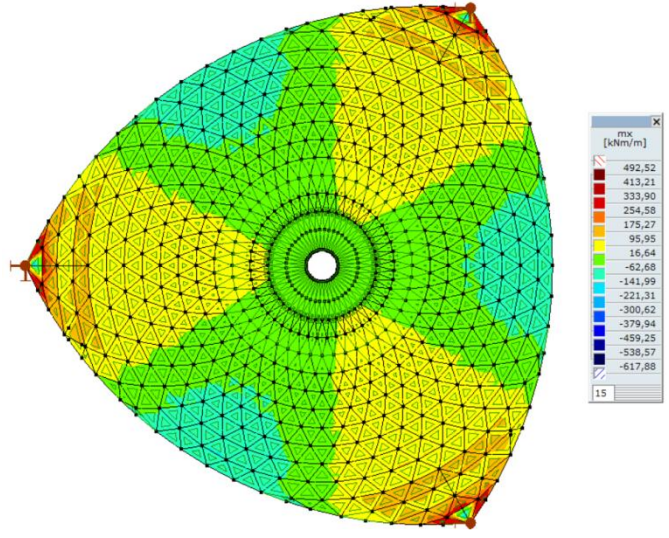


6.4.3.1 ábra: A hég és a rács lehajlás ábrája

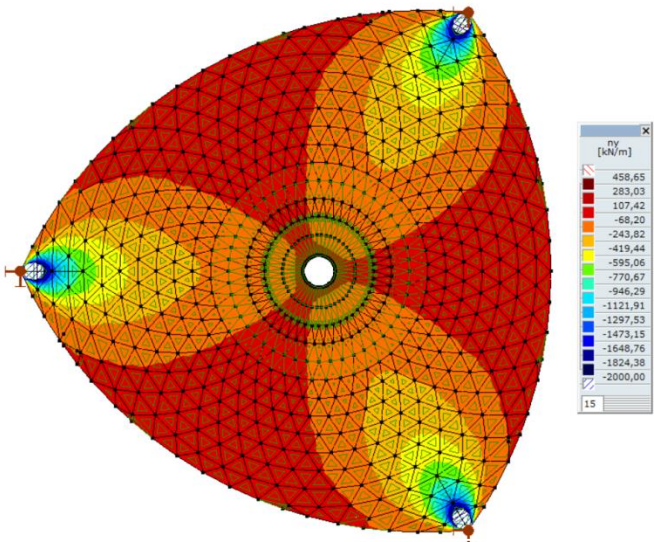
Már a lehajlás ábrából is látszik, hogy mennyire hasonlóan viselkedik a kontinuum és a rács. A maximális lehajlások a peremen vannak, ahol a legnagyobb a differencia a kontinuum és a rács között, de általános mezőben a kontinuum lehajlásai jól közelítik a rács csomópontjait(6.4.3.1 ábra).



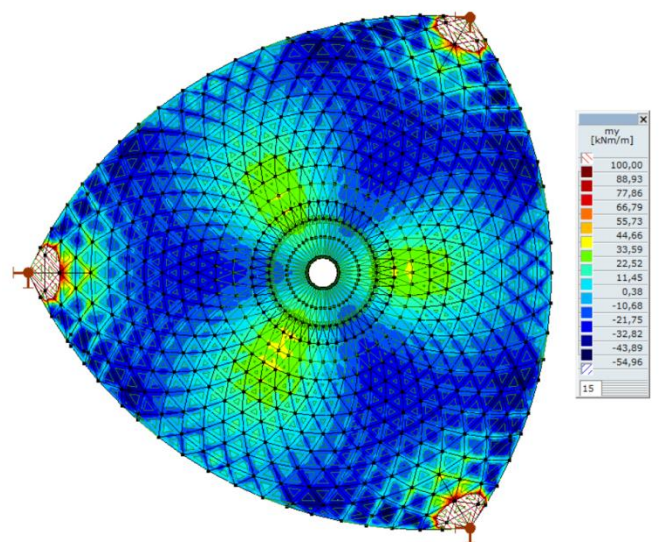
6.4.3.2/1 ábra: Lokális x irányú normálérők



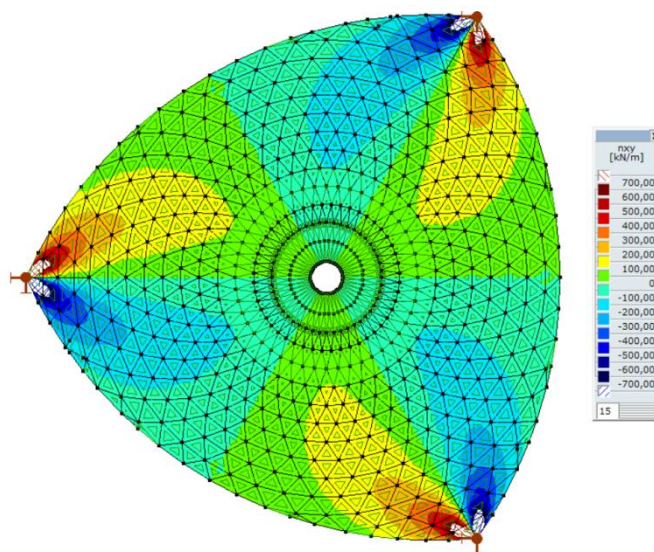
6.4.3.2/2 ábra: Lokális x irányú nyomatékok



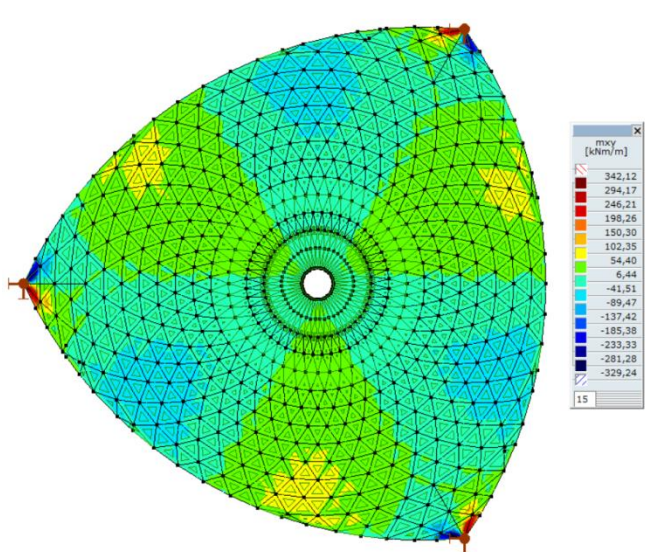
6.4.3.2/3 ábra: Lokális y irányú normálérők



6.4.3.2/4 ábra: Lokális y irányú nyomatékok



6.4.3.2/5 ábra: Lokális xy irányú nyíróerők



6.4.3.2/6 ábra: Lokális xy irányú csavaró

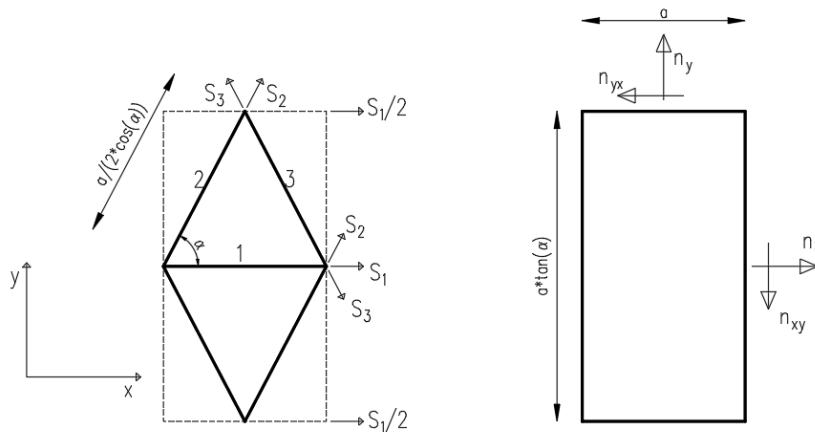
6.4.4) A kapott eredményekből a térrács igénybevételeinek kiszámolása (rúderők, nyomatók)

6.4.4.1 Rúderők kiszámítása

Habár a rudakban ébredő normálerők meghatározhatóak az 5.4 –es alfejezetben tárgyalt

képlet alapján: $\mathbf{n}' = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_n \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n * \mathbf{L}_\varepsilon * \mathbf{T}^{-1} * \mathbf{n}$, ez a képlet kifejezve vízszintes alapú

egyenlő szárú háromszögekre, a következő alakot ölti(6.4.4.1 ábra):



6.4.4.1 ábra: a rúderők és a kontinuum közötti kapcsolat

Az ábra alapján felírható 3 darab lineárisan független egyenlet:

$$2 * S_1 + S_2 * \cos(\alpha) + S_3 * \cos(\alpha) = a * \tan(\alpha) * n_x$$

$$S_2 * \sin(\alpha) - S_3 * \sin(\alpha) = a * \tan(\alpha) * n_{xy}$$

$$S_2 * \sin(\alpha) + S_3 * \sin(\alpha) = a * n_y$$

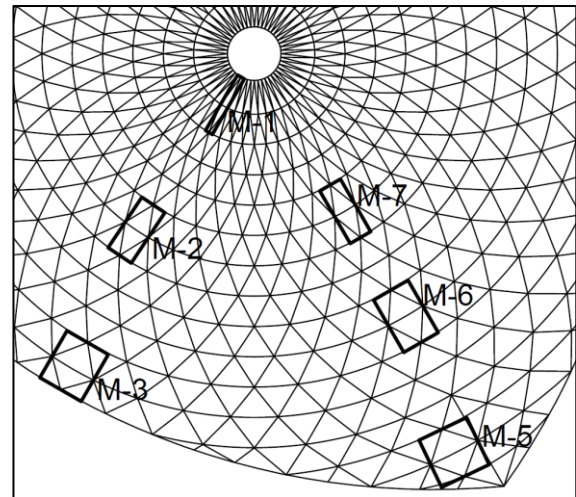
Ebből a rúderők:

$$S_1 = \frac{a * \tan(\alpha) * n_x - \operatorname{ctg}(\alpha) * a * n_y}{2}$$

$$S_2 = \frac{a * \tan(\alpha) * n_{xy} + a * n_y}{2 * \sin(\alpha)}$$

$$S_3 = \frac{-a * \tan(\alpha) * n_{xy} + a * n_y}{2 * \sin(\alpha)}$$

A módszer pontosságának és problémáinak szemléltetésére 6 darab jellemző egység cellának kiszámoltam a rúderőit merev kapcsolatú ráccsal, csuklós kapcsolatú ráccsal és a kontinuummal.



Kapott rúderők a kiválasztott helyeken:

		Merev kapcsolatú rács	Csuklós kapcsolatú rács	Kontinuum
M-1: belső perem közelében	S₁	-582.32kN	-140.56kN	-867.96kN
	S₂	-104.42kN	-10.87kN	-28.8kN
	S₃	50.15kN	23.83kN	27.63kN
M-2: belső mezőben, általános területen	S₁	-828,2kN	-807.98kN	-820.26kN
	S₂	-121.42kN	-91.78kN	-16.71kN
	S₃	24.77kN	49.42kN	21.65kN
M-3: külső perem közelében	S₁	-498.47kN	-504.86kN	-559.17kN
	S₂	2.04kN	-7.23kN	83.456kN
	S₃	0.17kN	19.19kN	-7.69kN
M-4: támasznál	S₁	1212.42kN	1189.92kN	2170kN
	S₂	-2971kN	-2967kN	-3572kN
	S₃	-473.65kN	-496kN	-3588kN
M-5: belső mezőben, támasz felé	S₁	1858.37kN	731.26kN	659kN
	S₂	-1264.63kN	-794.03kN	-1297kN
	S₃	-1295.09kN	-788.56kN	-706.9kN
M-6: belső mezőben, belső perem felé	S₁	39.67kN	112.86kN	44.79kN
	S₂	-300.27kN	-360.24kN	-428.14kN
	S₃	-304.49kN	-377.67kN	-234kN

6.4.4.1 táblázat: Eltérő módszerekkel kapott rúderők a felvett rudakban

		Csuklós:Merev	Merev: Kontinuum	Csuklós : Kontinuum
M-1: belső perem közelében	S ₁	314%	49%	517%
	S ₂	845%	259%	163%
	S ₃	108%	79%	17%
	Átlag:	422.3%	129%	232.3%
M-2: belső mezőben	S ₁	2.47%	0.9%	1.5%
	S ₂	31.5%	611%	441%
	S ₃	100%	16%	131.5%
	Átlag:	133.9%	209.3%	191.16%
M-3: külső perem közelében	S ₁	1.4%	12.5%	11%
	S ₂	265%	4070%	1042%
	S ₃	9500%	3750%	150%
	Átlag:	3255%	2610%	401%
M-4: Támasznál	S ₁	1.9%	79%	82%
	S ₂	1.1%	12%	20%
	S ₃	4.8%	658%	623%
	Átlag:	2.6%	249.6%	241.6%
M-5: Belső mezőben, támasz felé	S ₁	154%	182%	11%
	S ₂	59%	2.6%	63%
	S ₃	64%	83%	11%
	Átlag:	91.3%	89.2%	28.3%
M-6: Belső mezőben, belső perem felé	S ₁	180%	12.5%	149%
	S ₂	20%	42.6%	19%
	S ₃	23.6%	30%	61%
	Átlag:	74.5%	28.36%	76.3%

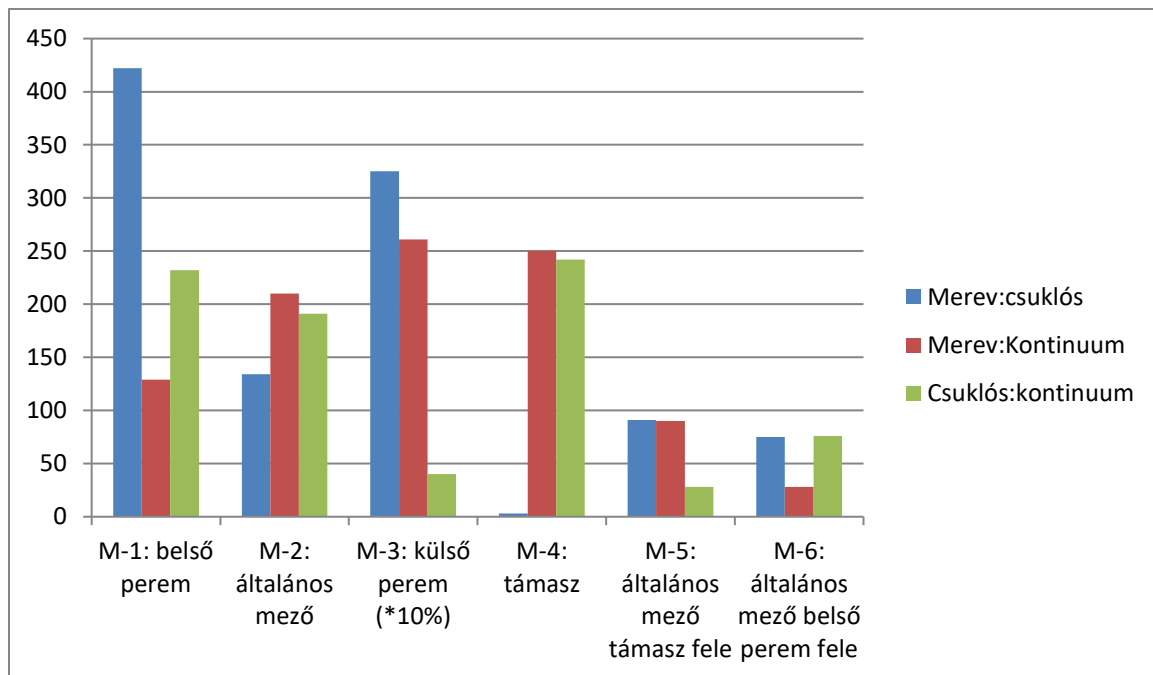
6.4.4.2 táblázat: Százalékos különbségek a kontinuum szerint számolt és a pontos megoldás között

6.4.4.1.1 Eredmények értékelése:

Jól látható a 6.4.4.1 diagramon és a 6.4.4.1, 6.4.4.2 táblázatban, hogy a kontinuum módszerrel számolt eredmények a közbelső mezőkön jól (20-30%) közelíti a pontos eredményeket, míg peremekhez, támaszokhoz közel ez a különbség nagyon nagy is lehet.

További különbségeket eredményez, hogy csuklós kapcsolatú rácsra levezetett képletekkel számoltuk a rúderőket, azaz elhanyagoltuk a rudak hajlítási merevségét a rúderők megállapításakor. Ezen felül, mivel a kontinuum adatait merev kapcsolatú rácsra vezettük le, így a kapott rúderők nem mindig közelítik meg a csuklós esetben kapott normálerőket.

Jól látszik az is, hogy ahol a csuklós és a merev kapcsolatú rácsoknál számolt eredmény közötti különbség nagy, ott a kontinuumból nyert eredmény is jobban eltér a pontos megoldástól. Ez betudható annak, hogy a pontos megoldások közötti nagy különbség azt jelenti, hogy nagy hajlítási merevséget hanyagoltunk el a rúderők számításánál, így nagy különbséget is kaptunk a pontos megoldásoktól.



6.4.4.1 diagram: Hibaszázalékok az egyes jellemző helyeken

6.4.4.2 Nyomatékok kiszámítása:

A kontinuum módszer konstanson megoszló nyomatékokat feltételez a egyes rudak mentén, ezt hasonlítottam össze a pontos megoldásból kapott nyomatékok átlagértékével.

A nyomatékok meghatározásához használható az 5.4 alfejezetben levezetett képlet:

$$m' = R_m * L_\chi * (B_m)^{-1} * m$$

$$M = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} * m'$$

$$\rightarrow M = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} R_m * L_\chi * (B_m)^{-1} * m$$

		Pontos nyomatékok	Kontinuumból kapott nyomatékok	Különbségek a rúdelemek között	Átlagos különbségek
M-2: Általános mező belső perem felé	M₁	-134.46kNm	-262.89kNm	95.55%	233.41%
	M₂	42.3kNm	65.01kNm	54.7%	
	M₃	10kNm	65.01kNm	550%	
M-3: Külső perem	M₁	-295.7kNm	-464.14kNm	56.9%	28%
	M₂	-63.05kNm	-80.4kNm	27.5%	
	M₃	-63.4kNm	-63.8kNm	0.6%	
M-4: Támasz mellett	M₁	60.32kNm	725.86kNm	1108%	431%
	M₂	110.64kNm	-89.88kNm	123%	
	M₃	-130.51kNm	-80.14kNm	62.5%	
M-5: Általános mező támasz felé	M₁	99.37kNm	387.4kNm	287%	125%
	M₂	-127.21kNm	-125.125kNm	2%	
	M₃	-126.17kNm	-66.98kNm	88%	

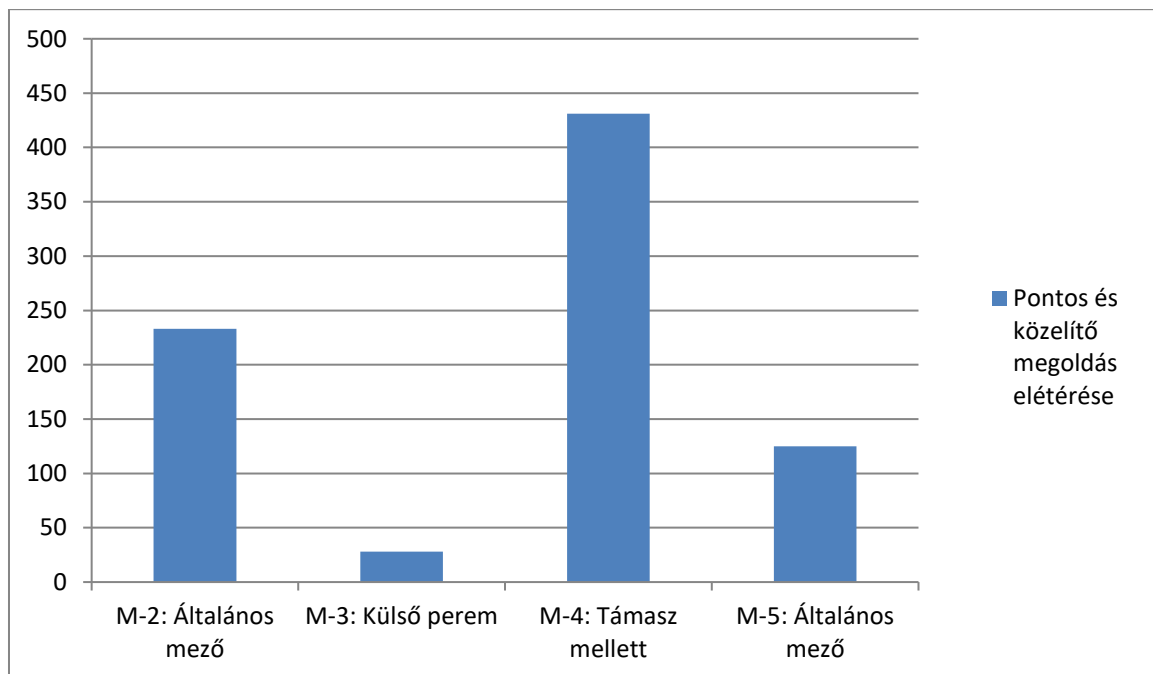
6.4.4.3 táblázat: Az eltérő módszerekkel számolt nyomatékok a felvett rudakban és azok eltérései

6.4.4.2.1 Eredmények értékelése

A 6.4.4.2 diagramból és a 6.4.4.3 táblázaton jól látható, hogy ahogy a normálerőknél a támaszhoz közel nagy különbségek jelennek meg a kontinuum módszerrel és a pontos megoldással számolt eredmények között. Ez betudható az erők a támaszok körüli besűrűsödésének, így nem egyenletes a kontinuum nyomatókfüggvénye, továbbá a számolási hibalehetőség is nagyobb. A normálerőkhöz képest a nyomatók parabolikusan változik a rudakban, míg a módszer konstans nyomatókot feltételez ez is növeli a különbségeket az eredmények között.

Míg a normálerők esetén a peremek környékén is nagy különbségek voltak az eredmények között, addig itt ez a különbség jóval kisebb. Ez abból eredhet, hogy míg a normálerők a peremig kifutnak és onnan futnak be a támaszokhoz, addig a nyomatók szépen egyenletesen futnak be a támaszokba, így a peremeken megoszló nyomatók sokkal szabályosabban oszlanak meg mint a normálerők.

További különbséget okozhat a nyomatók közötti eltérésben a csavaró merevség elhanyagolása, ami habár a hajlító merevséghez képest csekély, de akár nagyban befolyásolhatja a végleges eredményt a kontinuum módszerből.



6.4.4.2 diagram: Hibaszázalékok az egyes jellemző helyeken

7. Összefoglalás

Összességében véve a kontinuum módszer általános területen kielégítően pontos 20-30% os eltérésű eredményeket szolgáltatott, ami a szerkezet előzetes méretfelvételéhez tökéletes közelítés. Viszont peremek és támaszok közelében elég nagy eltérés keletkezett a módszerrel számolt és a pontos megoldás között. A módszernek a nagy előnye, hogy a rácshálózat meghatározása nélkül tudunk rúderőket meghatározni, és így felvenni a megfelelő keresztmetszeti adatokat nagyon sok energiát megtakaríthat. Az módszerből kapott eredmények nagyon érzékenyek a geometriai pontatlanságokra és a kontinuum igénybevételek pontatlanságaira.

A módszer további előnyének mondható a paramétereizhetősége. Míg a térrácsok klasszikus differencia egyenletrendszerekkel való felírása nagyon nehézkesen enged meg paraméteres adatok beírását, addig a kontinuum módszer lehetőséget adhat a térrácsok parametrikus tervezésére is.

Végezetül, habár a módszer a 60-as 80-as években élte fénykorát, napjainkban is hallhatunk a módszerről, mivel a lécrácshéjak kontinuum modellje egy felkapott probléma a mai mérnök társadalom körében.

8. Irodalomjegyzék

- [1] Kollár Lajos, Hegedűs István: Analysis and Design of Space Frames by the Continuum Method, Akadémiai kiadó, Budapest, 1985
- [2] Kollár Lajos: Kézirat a sportcsarnokról, 1967
- [3] Kollár Lajos, Hegedűs István: Analysis and Design of Space Frames by the Continuum Method, 13-24. oldal
- [4] Kollár Lajos, Hegedűs István: Analysis and Design of Space Frames by the Continuum Method, 118-124, 255-259. oldal
- [5] Kollár Lajos: Előadás a sportcsarnokról (Előadásanyag), 2016
- [6] MacLeoad, I.A.: Modern structural analysis. Modelling process and guidance. Thomas Telford, London, 2005.
- [7] Dulácska Endre: Kisokos Statikusoknak, Artifex Kiadó, Budapest, 2016