

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építészmérnöki kar

Szilárdságtan és Tartószerkezeti Tanszék

Tudományos Diákköri Dolgozat

ÉLEIN SZELT POLIÉDEREK KOMBINATORIKUS ÉS METRIKUS
TULAJDONSÁGAI

Készítette: Szesztay Ágoston Péter

Témavezetők:

Dr. Domokos Gábor

Dr. Lángi Zsolt

TARTALOM

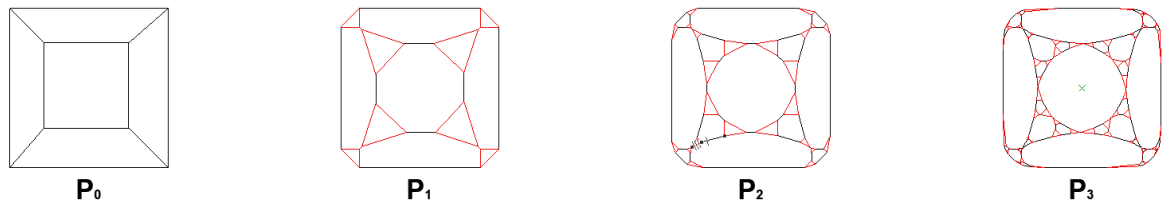
ABSZTRAKT:	3
1. BEVEZETÉS.	4
1.1. A csonkolási algoritmus leírása:	4
1.2. A poliéder-sorozat kombinatorikus tulajdonságai:	4
1.3. A poliéder-sorozat metrikus tulajdonságai:	4
1.4. A duális sorozat bemutatása:	5
2. A CSONKOLÓ ALGORITMUS KOMBINATORIKUS TULAJDONSÁGAI:	5
2.1. „Csonkolás”:	5
2.2. Az új csúcsok fokszáma:	6
2.3. P_i sorozat helyzete a 3D poliéderek tartományában:	7
2.4. P_i „alosztályai”:	9
2.5. P_i alosztályai az $F-V$ síkon:	10
2.6. A P_i sorozat éleinek, csúcsainak és lapjainak számát leíró függvények:	10
2.7. P_i sorozat lapjainak átlagos csúcsszáma:	11
2.8. A P_i sorozat fraktál jellegű tulajdonságai:	14
3. A P_i SOROZAT METRIKUS TULAJDONSÁGAI.....	18
3.1. A P_i sorozat éleinek fejlődése:	19
3.2. A lapok határalakzatának alakja:	20
3.3. A lapok határalakzatának területéről:	22
4. A DUÁLIS SOROZAT BEMUTATÁSA.....	25
4.1. A P'_i duális sorozat:	25
4.2. A P'_i sorozat lapjainak, csúcsainak és éleinek számát leíró függvények:	26
4.3. P'_i „alosztályai”:	27
4.4. A P'_i sorozat alosztályainak helyzete az $F-V$ síkon:	27
ÖSSZEGZÉS:	28
KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS:	29
Felhasznált irodalom:	29
Ábrajegyzék.....	30

ABSZTRAKT:

A dolgozatban olyan konvex poliéderek tulajdonságait vizsgálom, amelyek egy általános poliéder összes csúcsának ismételt levágásával állnak elő olyan módon, hogy a vágások csak a csúcsból kiinduló éleket metszhetik. A folyamat által generált fejlődési sorok tagjai egyszerű poliéderek. Dolgozatomban ezen poliéderek metrikus és kombinatorikai tulajdonságait elemzem és bemutatom, hogy a létrejövő konvex test lapszerkezete fraktál jellegű tulajdonságokat mutat. Utóbbival kapcsolatban rámutatok a poliéderek síkba terített hálózata és a síkbeli habok közötti vizuális analógiára. A leírt folyamatnak más fizikai alkalmazása is lehet, bemutatom ugyanis, hogy ez nem más, mint Redner és Krapivsky kopásmodelljének geometriai megfogalmazása. Végül röviden bemutatom a duális folyamatot is, amely szimpliciális poliédereket hoz létre.

In this study I investigate the nature of polyhedra that are created by chipping off all vertices of an arbitrary convex polyhedron several times, in such a manner that the chipping plane can only intersect edges starting from the vertex. This algorithm generates a series of simple polyhedra. In this study I investigate their combinatoric and metric properties and show that the face structure of the final polyhedron has fractal properties. About the latter I show the visual analogy between planar face structure of these polyhedra and planar foams. Other physical applications include the connection to the abrasion model of Redner and Krapivsky. Finally, I present the dual process that creates simplicial polyhedra.

1. BEVEZETÉS.



1. ábra: Kocka csonkolása síkbeli hálózaton

1.1. A csonkolási algoritmus leírása:

Legyen P_0 egy konvex poliéder. Az első lépésben P_0 összes csúcsát levágjuk egy-egy síkkal oly módon, hogy a metsző sík csak a csúcsból kiinduló éleket metszhesse, és a levágott gúlkak között semelyik kettőnek sincs közös pontja. Az így létrejövő P_1 poliédereken megismételjük ugyanezt a lépést, mellyel létrehozuk a P_2 poliédert és ezt az eljárást folytatjuk, vizsgálva az illusztrált P_i poliéder-sorozat egyes tulajdonságait és ezek konvergenciáját (1. ábra).

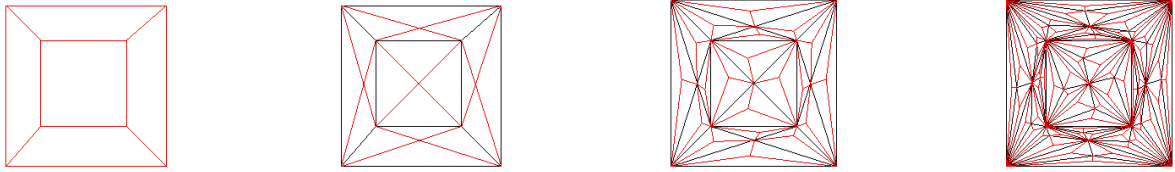
1.2. A poliéder-sorozat kombinatorikus tulajdonságai:

Bár a P_0 poliéder csúcsainak fokszámáról nem tételeztünk fel semmit, mégis nyilvánvaló, hogy tetszőleges $i > 0$ esetén a P_i poliéder összes csúcsának fokszáma 3, így $i > 0$ esetén P_i úgynevezett *egyszerű poliéder*. Jelölje rendre F_i és V_i a P_i poliéder lapjainak és csúcsainak számát. Az (F_i, V_i) pontsorozatot ábrázolva megfigyelhetjük, hogy ezen pontok az $i=1$ indextől kezdve az egyszerű poliédereket hordozó $V_i = 2F_i - 4$ egyenesre esnek. Ez az egyenes Steinitz tétele [5], [6] szerint az $F-V$ sík rácspontjait kettéválasztja: olyan $F-V$ párokra melyekre $V > 2F - 4$, nem létezhet konvex poliéder. A dolgozat második részében bemutatom, hogy a P_i poliéder-sorozat lapjainak átlagos fokszáma 6-hoz tart, ha az i index tart a végtelenhez. A P_i poliéder-sorozat tagjainak hálózatát síkban ábrázolva (1.ábra) fraktálokra és habokra emlékeztető alakzatokat láthatunk.

1.3. A poliéder-sorozat metrikus tulajdonságai:

Meg fogom mutatni, hogy ha P_0 egyszerű poliéder és a csúcsokat csonkoló sík az éleket egy rögzített λ arány szerint metszi el, akkor a poliéder élhossz-átlagának határértéke 0, ugyanakkor a lapok határalakzata nem kör. Kiszámítom azt a λ arányt, amely szabályos n -szögből szabályos $2n$ -szöget generál. A test lapjainak területe a testfejlődés során

konvergens módon csökken, ennek területét egy külső és egy belső közelítéssel kereselem.

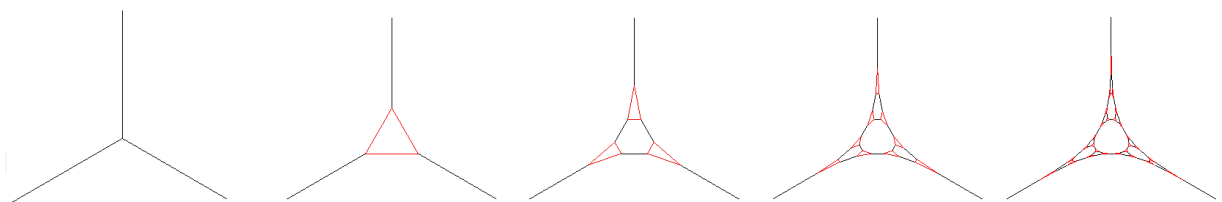


2. ábra: Gúlkák illesztése kockához síkbeli ábra

1.4. A duális sorozat bemutatása:

Kombinatorikai szempontból duális sorozatot kapunk (a továbbiakban P'_i), hogyha a kiinduló P_0 poliéder minden lapjához egy gúlát illesztünk oly módon, hogy a létrejövő P'_1 poliéder is konvex maradjon. A duális sorozat minden $i > 0$ indexű tagja *szimpliciális* poliéder lesz, azaz minden lapja háromszög. Jelölje rendre F'_i és V'_i a P'_i poliéder lapjainak és csúcsainak számát. Az (F'_i, V'_i) pontsorozatot ábrázolva megfigyelhetjük, hogy ezen pontok az $i=1$ indextől kezdve a szimpliciális poliédereket hordozó $F'_i = 2V'_i - 4$ egyenesre esnek. Ez az egyenes Steinitz tétele [5][6] szerint az $F-V$ sík rácspontjait kettéválasztja: olyan $F-V$ párokra melyekre $F > 2V - 4$, nem létezhet konvex poliéder.

2. A CSONKOLÓ ALGORITMUS KOMBINATORIKUS TULAJDONSÁGAI:



3. ábra: Egy kiragadott csúcs csonkolása

2.1. „Csonkolás”:

Definíció: Legyen P_0 egy konvex poliéder. P_0 csúcsainak a számát V_0 (vertex angolul csúcs), lapjainak számát F_0 (face angolul lap), és éleinek számát E_0 (edge angolul él) számok jelzik. Első lépésként távolítsunk el egy gúlát P_0 minden csúcsából, amely elegendően kicsi ahhoz, hogy a vágás csak a csúcsból kiinduló éleket metszse. A poliédert, amelyet így kapunk, nevezzük P_1 -nek, amelyet a V_1 , F_1 és E_1 számok

jellemeznek. A P_2 poliéder P_1 összes csúcsának az előző feltételek szerinti levágásával áll elő. Az így létrejövő poliéderek csúcsait újra és újra levágva a P_i poliédert kapjuk P_{i-1} összes csúcsának levágásával, vagyis P_0 csúcsainak i -szeres levágásával. Az összes P_0 poliéder csúcsainak levágásaival létrejövő poliédereknek a létrehozáshoz szükséges vágási ciklusok szerint indexelt, sorba rendezett halmazát nevezzük P_i sorozatnak a továbbiakban.

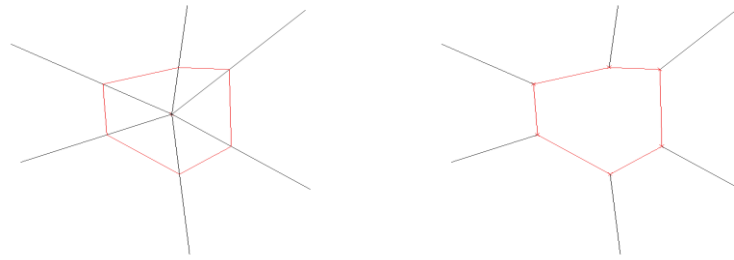
Megjegyzés: Az előző definíció kombinatorikai származtatását tekintve analóg S. Redner és P.L. Krapivsky ütközéses kopásmodelljével [1], akik D.J. Durian és társai kopási kísérletein [4] alapuló kutatásukban kövek kopását modellezik. A köveket képzeletben 2-dimenziós sokszögekként, poligonként képzelik el, és a valósághoz képest ezen modell egy véletlenszerűen kiválasztott csúcsát és az abból kiinduló két él egy-egy a csúcsot tartalmazó szakaszát távolítják el a vizsgált alakzatról. Ezen kopásmodell elsődleges előnye, hogy a létrejövő alakzatok, ellentétben más modellekből származó formákkal, „nem tűnnek el” a test fejlődés során: területük és kerületük bizonyos értékeken belül marad. Ennek garanciája az, hogy a vágások során az eredeti élek egy pontja mindenképp a határalakzat (azon alakzat, amely a forma geometriai határértéke) pontja marad. Ez a modell geológiai célokra ma nem használt, mivel a kövek kopása során nem figyelhető meg, hogy minden ütközés során egy gúlával csonkoljuk a testet. Geometriai szempontból azonban számunkra továbbra is érdekes formákat generál a modellező algoritmus.

2.2. Az új csúcsok fokszáma:

Állítás: A csonkolások által létrehozott új csúcsok fokszáma 3.

Igazolás: Amikor tetszőleges P poliéder egy választott csúcsának környezetében megtörténik a vágás, az a definíció miatt elmetszi az összes a csúcsból kiinduló élt. A vágási síkban létrejövő alakzat egy síkbeli sokszög, ennek minden csúcsának fokszáma

2. Minden létrejövő csúcs egy eredeti él pontja, amely él megmaradó része a csúcsból kiinduló harmadik él. Így minden a csonkolási síkban keletkező csúcs fokszáma három.

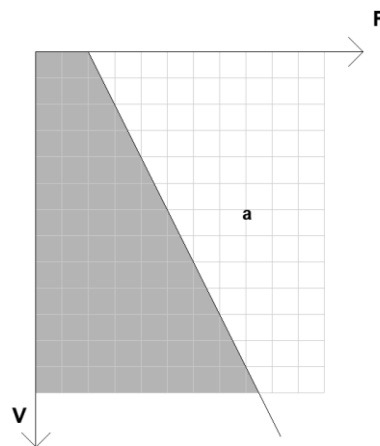


4. ábra: Egy csúcs környezetében ejtett vágás

Megjegyzés 2: $i > 1$ esetén a P_i sorozat tagjainak csúcsaiból csak tetraéderek vághatók le.

2.3. P_i sorozat helyzete a 3D poliéderek tartományában:

Állítás: A P_i sorozat $i > 1$ tagjai a 3D poliéderekhez tartozó $F-V$ tartomány határára esnek.

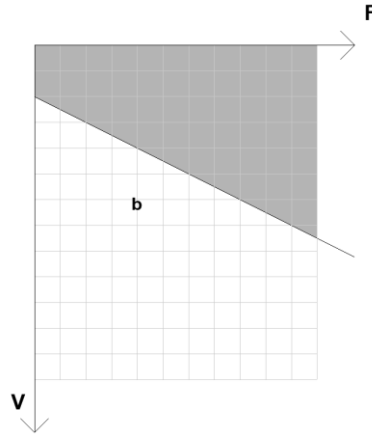


5. ábra:

Igazolás: Soroljuk fel a 3-dimenziós konvex poliédereket lapjaik és csúcsaik száma szerint $F-V$ osztályokba. A Steinitz tétel [5][6] szerint a 3-dimenziós konvex poliéderek nem találhatók bármely $F-V$ rácspontban, mivel egy csúcs fokszámanak legkisebb értéke 3. Ennél nagyobb lehet a foksám, de kisebb nem, mivel ennél kisebb foksám síkbeli sokszöget jelentene (vagy térbeli törtvonalat). A poliéder minden éle 2 csúcsot köt össze. Így $\frac{3}{2} * V \leq E$. Ezt az értéket az Euler tételbe [8] behelyettesítve:

$$\frac{3}{2} * V \leq F + V - 2 \rightarrow a: F \geq \frac{1}{2}V + 2, \quad \text{ahol } F, V \in \mathbf{N}$$

feltételt kapjuk, amely az F - V osztályokat két részre osztja. Az a sötéttel jelölt rácspontokban ezen feltétel szerint nem lehet poliéder (5.ábra).

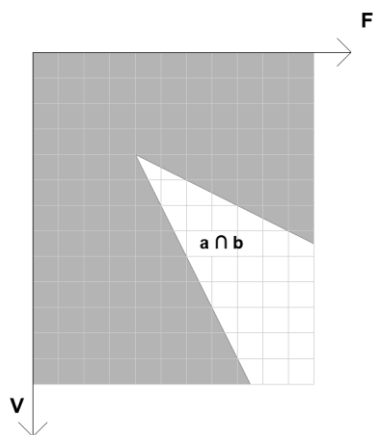


6. ábra:

Hasonlóképp: egyetlen poliéder lapjai sem lehetnek háromszögnél kisebb sokszögek, és P minden éle két laphoz tartozik. Így $\frac{3}{2}F \leq E$. Az így kapott feltétellel az Euler tétel szerint:

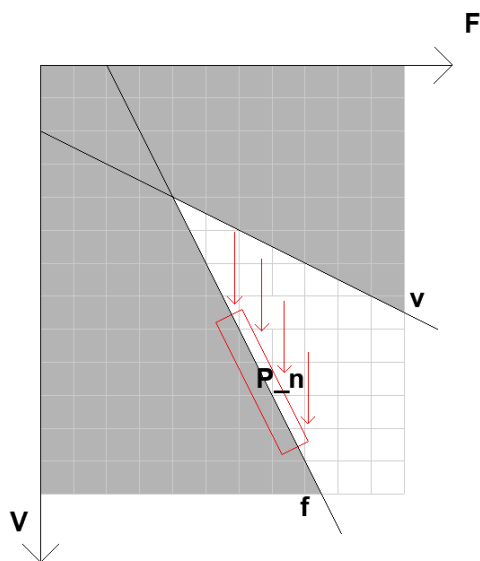
$$\frac{3}{2}F \leq F + V - 2 \rightarrow b: F \leq 2V - 4$$

Az így kapott feltétel az F - V párok halmazát kétfelé osztja, a 6. ábrán sötéttel jelölt felső rácspontjaiban a feltétel szerint nem lehetnek poliéderek, a világos részeiben viszont ezen feltétel szerint létezhetnek. A 3-dimenziós konvex poliéderekhez tartozó rácspontok tehát a Steinitz-tétel szerint csak azok lehetnek, amelyeket egyik feltétel sem zárja ki, tehát a 3-dimenziós konvex poliéderekhez tartozó rácspontok tartománya a $P = a \cap b$ halmaz. Steinitz előbb említett tétele mutatja meg, hogy a két halmaz valójában egybeesik. (7. ábra)



7. ábra: A poliéderekhez tartozó rácspontok tartománya

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a 2.2 pontban igazoltak szerint az általunk vizsgált poliéderek épp az első feltétel alsó korlátjának felelnek meg, hiszen minden csúcsuk fokszáma 3. Így ezen poliéderekre az $E=3/2V$ egyenlőség válik igazgá, amelyet az előzőek szerint az Euler [8] tételbe írva épp az $f := F = 2V - 4$ egyeneshez, az egyszerű poliéderek rácspontjait tartalmazó egyeneshez jutunk (8. ábra).



8. ábra: P_i sorozat helyzete a Poliéderek tartományán

2.4. P_i „alosztályai”:

Definíció: Nevezzünk a P_i sorozat P_i és P_{i+1} poliéderek közötti első alosztályának egy olyan poliédert, amely P_i egy csúcsának a csonkolásával jön létre. Hogyha P_i egy további csúcsát is csonkoljuk (vagyis egy olyan csúcsot, amit nem az első csonkolás hozott létre), egy P_i és P_{i+1} poliéderek közötti második alosztályhoz jutunk. Hasonlóan, hogyha P_i egy csúcsát kivéve minden csúcsáról levágtunk gúlákat, akkor egy (V_i-1) -

edik alosztályhoz jutunk. Két alosztályt az különböztet meg egymástól, hogy létrehozásához hány csúcs csonkolására van szükség.

2.5. P_i alosztályai az F-V síkon:

Állítás: A P_i sorozat $i \geq 1$ elemei közötti alosztályok a 3d poliéderek tartományának (f) határoló egyenesén található összes F-V rácspontot kitöltik.

Igazolás: A 2.2. állításban belátottak szerint bármely csúcsból, amely csonkolás során jött létre, három él indul ki. Az újabb csonkolási ciklus során, minden csúcsból levágva egy-egy tetraédert (mivel a definíció szerint csak tetraéderek levágása lehetséges) csupa három fokszámú csúcs keletkezik. Az így létrejövő alakzat tehát szintén az f egyenesen található (8. ábra). Az állítás igazolásához azt kell belátni, hogy egyetlen csúcs csonkolása épp a határoló egyenes soron következő rácspontjába juttatja a poliédert.

Hogyha egy csúcsról, amelynek fokszáma 3, levágunk egy tetraédert, a létrejövő alakzat lapjainak száma épp eggyel nő (mintha egy csúcs helyére egy lapot illesztünk), az új lap háromszög, de mivel egy csúcsot eltávolítottunk, a csúcsok száma csak kettővel nő. Az eredeti élek közül egy sem veszik el, de a vágási sík háromszögében három új él keletkezik.

Visszaidézve a 2.3. állítás igazolásának végén bemutatott $f := F = 2V - 4$ határoló egyenest, látható, hogy ennek meredeksége épp 2. Egész számokon értelmezett függvényként bármely cella után F értékét eggyel növelve V értéke épp kettővel nő. Ez a távolság épp megegyezik a P_{i-1} poliéder egy csúcsának levágása által előidézett változással.

Megjegyzés: A P_0 és P_1 között a testfejlődés során a csúcsok fokszámától és a csonkolás sorrendjétől függően többféle utat járhatnak be a testek.

2.6. A P_i sorozat éleinek, csúcsainak és lapjainak számát leíró függvények:

Állítás: A P_i poliéder lapjainak, csúcsainak és éleinek F_i , V_i , és E_i száma megadható a csonkolási sor kiinduló poliédere élei számának ismeretében. Ezen értékeket leíró függvények rendre a következők:

$$F_i = E_{i-1} + 2 = 3^{i-1} * E_0 + 2$$

$$V_i = 2 * 3^{i-1} * E_0$$

$$E_i = 3^i * E_0$$

Igazolás: A csonkolás minden csúcs helyére egy új lapot hoz létre, tehát $F_i = F_{i-1} + V_{i-1}$. A csúcsok és lapok számának összege pedig az Euler formula [8] ($E = F + V - 2$) szerint $E_{i-1} + 2 = F_{i-1} + V_{i-1} = F_i$. A csonkolás minden vágásban annyi új csúcsot hoz létre, amennyi az eredeti csúcs fokszáma volt. Egy poliéder csúcsainak összfokszáma épp kétszer annyi, mint az éleinek száma, tehát: $V_i = 2 * E_{i-1}$. Így az Euler képlet szerint $E_i = F_i + V_i - 2 = E_{i-1} + 2 + 2 * E_{i-1} - 2 = 3 * E_{i-1} = 3^i * E_0$.
Vagyis

$$E_i = 3^i * E_0$$

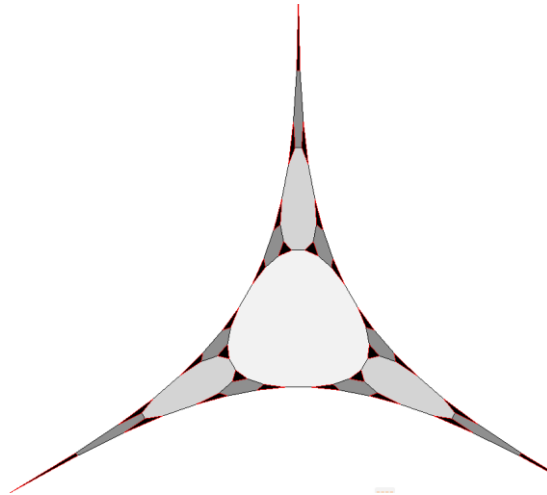
$$F_i = 3^{i-1} * E_0 + 2,$$

$$V_i = 2 * 3^{i-1} * E_0$$

Látható, hogy az iménti kifejezésekben bal oldalon a keresett értékek, jobb oldalon pedig csakis a kiinduló poliéder éleinek számára vonatkozó E_0 változó szerepel.

2.7. P_i sorozat lapjainak átlagos csúcsszáma:

Állítás: A P_i , $i \rightarrow \infty$ poliédersorozatban a poliéderek lapjainak átlagos csúcsszáma 6-hoz tart.

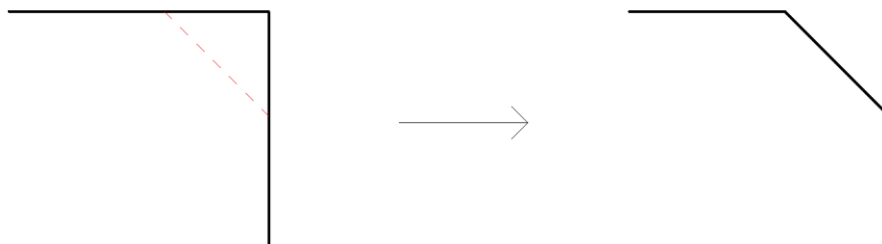


9. ábra: Kezdetben három fokszerű csúcs négy csonkolási ciklus után

Igazolás 1: A P_i poliéder lapjait attól függően, hogy hányadik csonkolás hozta őket létre szintekbe sorolhatjuk. Tartozzon ez alapján 0-sz szinthez minden olyan lap, ami a P_0 kezdeti poliéder lapja volt, az 1-es szinthez azok a lapok, melyeket az első csonkolás

hozott létre, a 2-es szinthez, amely lapokat a második csonkoláskor, és az i -edik szinthez azok a lapok, melyek az i -edik csonkoláskor jöttek létre. A 9. ábrán egy 0-s szintű háromszöglap csonkolásából származó lapokat láthatjuk, melyben egyre sötétebb szürkére vannak színezve azok a lapok, amelyek későbbi csonkolás eredményeként jöttek létre: a 0-s szinthez tartozik a középső 24-szög, az egyes szinthez a 3 kicsit sötétebb 12 szög, a hármas szinthez pedig a 27 darab kis fekete háromszög.

Mivel az első csonkolás által létrehozott új csúcsok fokszáma három, a második szint lapjai a P_2 poliéderen csak háromszögek lehetnek. A továbbiakban egy F második szintű lap további csonkolásaival kapott lapok összességét F környezetének hívjuk. A bizonyítás ötlete azon a megfigyelésen alapszik, hogy az így keletkező környezetek páronként diszjunktak, melynek következtében a P_i poliéder határa előáll, mint a második szintű lapok környezeteinek, valamint a nulladik és első szintű lapjainak diszjunkt uniója. A különböző második szintű lapoknak a környezete azonos kombinatorikus tulajdonságokat mutat, mivel minden 2-es szinthez tartozó lap csúcsainak száma azonos és azonos a csúcsaik fokszáma is. Így a különböző második szintű lapok környezetei minden időpillanatban azonos darabszámú és azonos átlagos csúcscsámú lapot tartalmaznak. Az igazolás során először bemutatom, hogy az $i=1$ és $i=0$ szintekhez tartozó lapok fejlődése a teljes poliéder lapjainak átlagos csúcscsámának határértékéhez elhanyagolható módon járul hozzá. Így a P_i poliéder lapjainak átlagos csúcscsámát a 2-es szintről induló, a 2-es szint minden lapjára nézve azonos fejlődési sorokra kapott átlagérték határozza meg.



10. ábra: P egy lapján egy csúcsának csonkolása

Ha P egy lapjának egy csúcsát levágjuk, akkor a 10. ábra szerint a helyén a lapnak két csúcsa lesz a vágás hatására. Ha hasonlóan a laphoz tartozó összes csúcson elvégezzük a csonkolást, akkor így megkészezzük a csúcsainak számát. Ha pedig a keletkezett

csúcsoakat újra és újra csonkoljuk, megállapíthatjuk, hogy a laphoz tartozó csúcsoak száma 2^i nagyságrendben növekszik. (i a csonkolások száma)

Ahogy $i \rightarrow \infty$, az oldalak csúcsoszámának átlagában a testfejlődés során keletkezett új lapok határozzák meg az átlagos csúcsoszámot (nem pedig a kiinduló lapok csúcsoainak sokasodása), mivel az új lapok száma 3^i szerint (ld. 2.5. Állítás), míg az eredeti lapok csúcsoainak száma csak 2^i szerint növekszik. A P poliéder n fokszámú csúcsoainak csonkolásakor n -oldalú sokszögek lesznek az új lapok (4. ábra), tudjuk azonban, hogy $i \geq 1$ esetén a fejlődési sorban a P_i poliédernek kizárólag három fokszámú csúcsoai vannak, vagyis a második csonkolástól kezdve csak háromszögek lehetnek a keletkezett lapok. Ezek miatt a lapok átlagos csúcsoszámának meghatározásához elegendő összeszámolni, hogy egy háromszöglapból kiindulva milyen új lapok keletkeznek, és hogy ezeknek hány csúcsoa van.

A 11. ábrán azt mutatja, hogy P_i egy tetszőlegesen választott 2-es szintű lapjának környezetében milyen új lapok alakulnak ki.

i	szint 2		szint 3		szint 4		szint 5		...	szint i	
	lap szögei	db	lap szögei	db	lap szögei	db	lap szögei	db		lap szögei	db
2	3	1									
3	6	1	3	3							
4	12	1	6	3	3	9					
5	24	1	12	3	6	9	3	27			
...											
i	$3 \cdot 2^{(i-2)}$	$3^{\wedge}(0)$	$3 \cdot 2^{\wedge}(i-2-1)$	$3^{\wedge}(1)$	$3 \cdot 2^{\wedge}(i-3-1)$	$3^{\wedge}(2)$	$3 \cdot 2^{\wedge}(i-5)$	$3^{\wedge}(3)$...	$3 \cdot 2^{\wedge}(i-i)$	$3^{\wedge}(i-2)$

11. ábra: Táblázat az új lapok számáról, és azok csúcsoairól

A 11. ábra táblázatának utolsó sora i , mint változó értékével kifejezve mutatja meg a darabszámokat és a lapok csúcsoainak számát, ha egy csúcso környezetét figyeljük. Látható, hogy míg a csúcsoszámok értéke szintenként a felére csökken, addig a hozzájuk tartozó darabszám szintenként a háromszorosára nő. Az adott környezethez tartozó lapok csúcsoszámainak darabszámok szerinti súlyozott átlagát felírva a következő képlethez jutunk:

$$\frac{\sum_{n=2}^i 2^{i-n} \cdot 3^{n-1}}{\sum_{n=2}^i 3^{n-2}},$$

ahol a kifejezés számlálója a lapok csúcsoai számának és a darabszámok szorzatainak összegére vonatkozik, míg a nevezőben a darabszámok összege található. Megmutatjuk,

hogy ezen kifejezés határértéke 6, ha $i \rightarrow \infty$: Ha a számlálóból kiemelünk $2^i * 3$ -at, akkor jól látható, hogy a számláló és a nevező is egy-egy mértani sorozat összegének felel meg:

$$2^i * 3 * \frac{\frac{1}{4} * \frac{[3/2]^{i-1} - 1}{3/2 - 1}}{\frac{3^{i-1} - 1}{2}} = 2^i * 3 * \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1} - 1}{3^{i-1} - 1}.$$

Ha ennek a kifejezésnek $i \rightarrow \infty$ határértékét vizsgáljuk, akkor látható, hogy a tört számlálójában és nevezőjében is megjelenő legnagyobb számosságú tag 3^{i-1} , amelyek hányadosa határértékben 1. Hasonlóan a számlálóban és a nevezőben is megjelenő $\frac{2^i}{2^{i-1}}$ tagok hányadosának határértéke 2, így a teljes kifejezés határértéke 6.

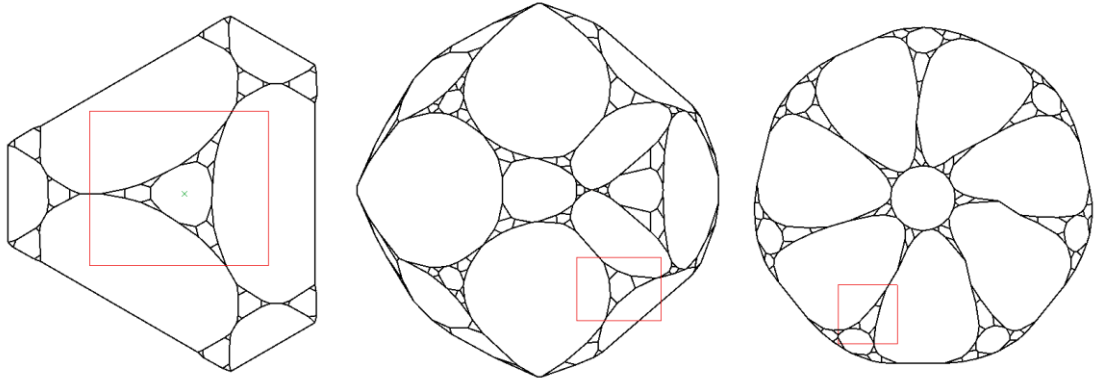
Igazolás 2: Ha a P_i poliéder lapjait nem egyesével, hanem a teljes poliéder összes lapját együtt kezeljük, akkor az állítás sokkal egyszerűbben is belátható. A poliéderek lapjainak azonos számú csúcsa és éle van. Így elegendő megválaszolnunk azt a kérdést, hogy átlagosan hány él határolja P_i lapjait. Mivel minden él egyszerre két lapot is határol, minden egyes élt kétszer kell számolni, hogyha lapokra vonatkozó értéket keresünk. Így a keresett átlagos értéket megkaphatjuk, ha összeszámoljuk a P_i poliéder összes lapját, és ezzel elosztjuk P_i élei számának kétszeresét. Felhasználva a 2.6-os állításban F_i -re és E_i -re kapott értékeket:

$$\frac{2E_i}{F_i} = \frac{2 * 3^i * E_0}{3^{i-1} * E_0 + 2}$$

Látható, hogy a kifejezésben i értékének növelésével a lineáris tag elhanyagolhatóan kicsivé válik, így a számláló és a nevező hányadosának határértéke épp 6.

2.8. A P_i sorozat fraktál jellegű tulajdonságai:

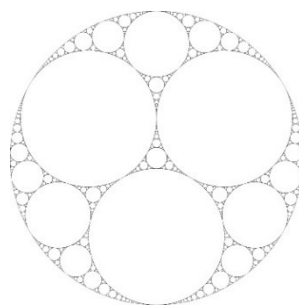
A dolgozat második része alapvetően a P_i poliéder lapjai, élei és csúcsai számának változásáról szól. Nem szorul magyarázatra, hogy elméletileg a csúcsok csonkolása végtelen sokszor megismételhető egymás után, azonban az eredeti P_0 poliéder méreteihez képest a levágott gúla (ahogy i értéke nő) elhanyagolhatóan kicsik lesznek. Hogyha a kialakuló lapszerkezetet jellegzetességeire koncentrálnak, minden csúcs egy környezetében egy sajátos szimmetriát, szabályosságot figyelhetünk meg:



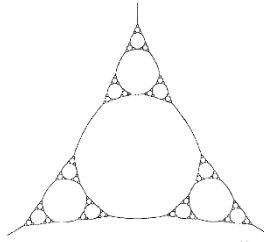
12. ábra: $i=3$ -szor csonkolt poliéderek síkbaterített lapszerkezetei

A 12. ábrán pirossal kiemelve egy-egy kezdetben három foksámú csúcs egy környezetét láthatjuk többszöri csonkolás után. A lapok szerkezetében megjelenő szimmetria oka az, hogy a csonkolási algoritmus mindig három foksámú csúcsokat hoz létre, amelyek környezetére kombinatorikai szempontból azonos fejlődés jellemző (2.6).

Emiatt az m -edik szintről ($m > 1$) és az $(m+k)$ -edik szintről kiindulva is egyforma kombinatorikai jellemzőket kapunk. Így azt mondhatjuk, hogy a szintek indexétől független tulajdonságokkal rendelkezik a csúcsok egy környezetében kialakuló lapszerkezet. Máshogy megfogalmazva a lapszerkezet végtelenül nagyítható, a megfelelő részeire közelítve mindig azonos lapszerkezetet láthatunk majd. Ezek fraktálokra jellemző tulajdonságok.

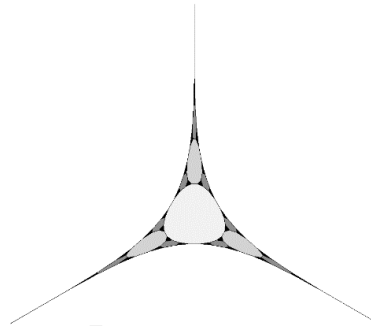


13. ábra: A Leibniz – pakolás



Fractal foam embedded at a vertex of a system of larger cells. For this case $w = \frac{1}{3}$ and there are 5 levels.

14. ábra: Síkbeli hab fraktál



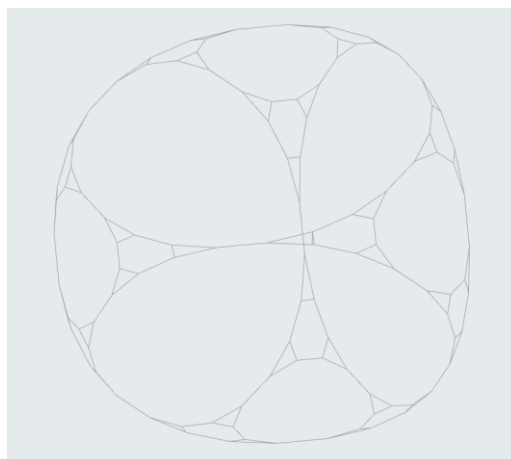
15. ábra: Négyszer csonkolt csúcs környezete

Megjegyzés: ha csak egy csúcs környezetében kialakuló lapszerkezet tulajdonságaira koncentrálnunk, egy nagyon erős vizuális kapcsolatot vehetünk észre a Leibniz-pakolásnak [7] is nevezett kétdimenziós körökből álló fraktállal (13. ábra), amely úgy áll elő, hogy három nagy kör közé apolloniusi kört illesztünk, majd azok hézagaiba szintén újabb kis köröket és így tovább. A Thomas Herdtle és Hassan Aref által vizsgált síkbeli hab-fraktálokkal [2] szintén nagyon hasonló szerkezetet mutat a P_i sorozat, amely annyiban különbözik a Leibniz-pakolástól, hogy nem körök alkotják, hanem a habokra jellemző buborékok (14. ábra). Ilyen hab-fraktálokat láthatunk a természetben például a sörös korsó falán 16. ábra).

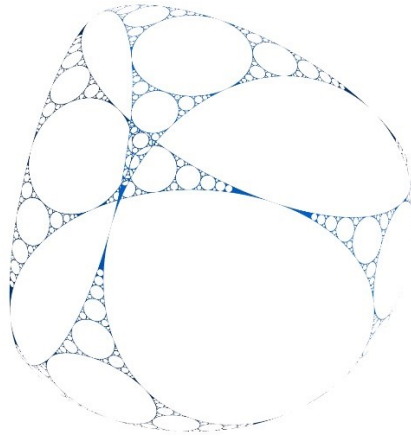


16. ábra: Leibniz – pakolásra emlékeztető alakzat sör habjában

Vera Roshchina, Tian Sangyand és David Yostz [3] cikkében konvex halmazokat kerestek gráfokra emlékeztető tulajdonságokkal. Ebben a cikkben szerepel egy olyan gömbi gráf, amely a Leibniz pakolás háromdimenziós megfelelője (18. ábra) Egy gömb és egy tetraéder áthatásából származik: a tetraéderbe gömböt illesztünk, hogy a tetraéder élei érintik a gömböt, majd eltávolítjuk a gömb tetraéderen kívül eső részeit. Az így keletkező körökhöz olyan köröket illesztünk, amely mindig érint a korábbi körök közül hármat. Ha az általunk vizsgált poliéderek lapszerkezetét három dimenzióban szemléljük (17. ábra), meghökkentő hasonlóságot tapasztalunk az említett fraktálról készült ábrázolásokkal is.



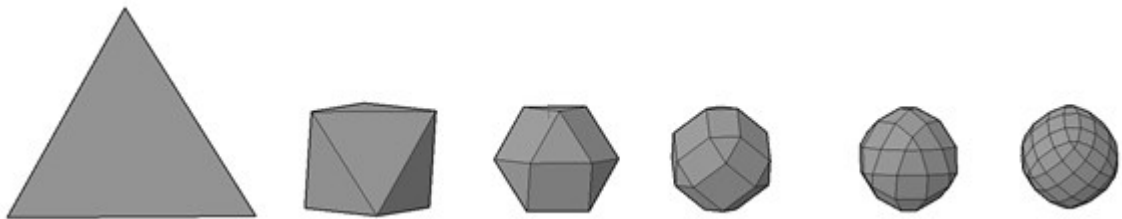
17. ábra: Csonkolt alakzat lapszerkezete három dimenzióban



18. ábra: Háromdimenziós Leibniz – pakolás

3. A P_i SOROZAT METRIKUS TULAJDONSÁGAI

A továbbiakban a P_i sorozat metrikus tulajdonságainak vizsgálatát olyan esetekre szűkítjük le, melyekben a csúcsból kiinduló éleket egy adott λ arány szerint szeljük el mindkét végüktől kiindulva. Feltételezzük azt is, hogy az összes csúcs levágása azonos időpillanatban történik, így $\lambda \leq 1/2$. Hogyha a csonkolási arány $1/2$ vagy ennél nagyobb érték, akkor degenerált alakzatokat kapunk, amelyekre nem igazak a második részben megfogalmazott állítások (például a 19. ábrán látható tetraéder éleinek $\lambda = 1/2$ arány szerinti csonkolásából származó csonkolási sor lapjai területének határértéke 0, és a csúcsok fokszáma 4 lenne). A 19. ábrán láthatunk egy tetraéderen elvégzett $\lambda = 1/2$ arány szerinti csonkolási sort. A jobb oldalán található formát összehasonlítva a 17. ábrával nyilvánvaló az erőteljes vizuális különbség.).



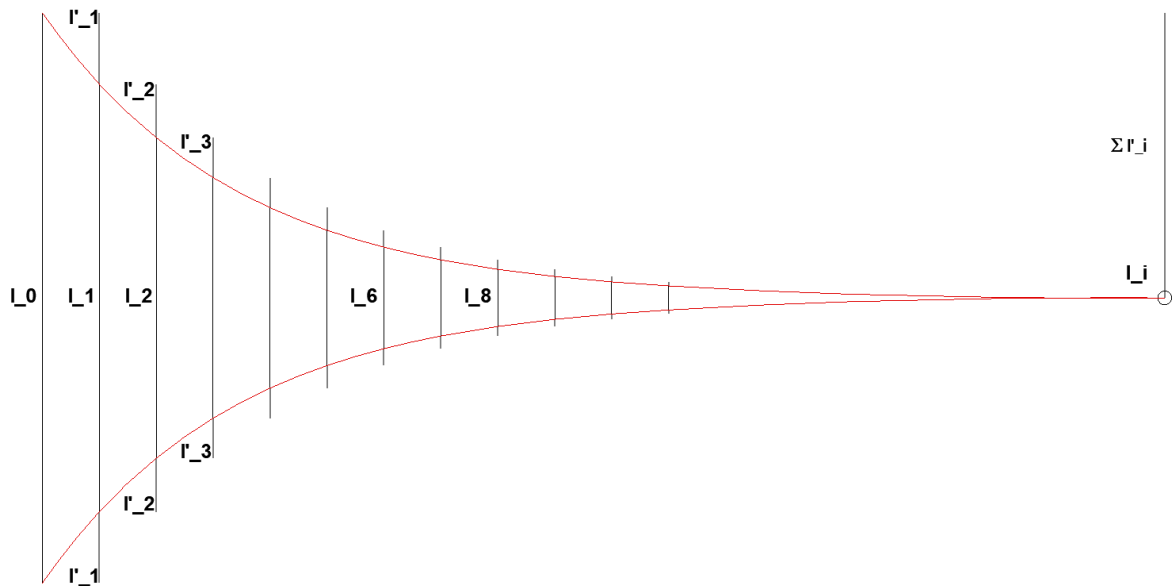
19. ábra: Tetraéder csonkolása, ha $\lambda=1/2$

Noha ezen vizsgálati mód szabályossá teszi a P_i sorozat fejlődését és így nagyban leegyszerűsíti metrikus tulajdonságainak vizsgálatát, azonban geometriai szempontból nem teljesen ellentmondásmentes, mert a P_0 poliédernek lehetnek olyan csúcsai, amelyekből háromnál több él indul ki. Ezek közül, ha hármát λ arány szerint csonkolunk, az általuk kijelölt három pont definiálja a csonkolás síkját, a negyedik (és

ötödik, ... stb.) élnek a λ arány által meghatározott pontja nem feltétlen esik már ebbe a síkba. A következő bekezdések egyes részei tehát csak akkor igazak a teljes poliéderre, ha $i \geq I$, vagyis a vizsgált poliéder már legalább egyszer csonkolt (vagy az összes csúcsának fokszáma 3).

3.1. A P_i sorozat élének fejlődése:

Állítás: A $P_i, i \rightarrow \infty$ sorozat esetén a határalakzat élének hossza 0.



20. ábra: P egy élének fejlődése a csonkolási ciklusok hatására

Igazolás: Az állítás igazolásához elegendő a P poliéder egy élének hosszváltozását vizsgálni, mivel a kiinduló hosszától függően ez a változás minden élre nézve azonos. Legyen a vizsgált él kiinduló hossza l_0 , a vágás utáni hossza pedig l_1, l_2, \dots, l_i , a vágási arány pedig $\lambda < \frac{1}{2}$. Amennyiben λ arány szerint vágjuk le a kiválasztott szakasz végeit, akkor a levágott külső szakaszok hossza $l' = l_0 * \lambda$, a középben maradó szakasz hossza pedig $l_1 = l_0 - 2\lambda * l_0 = l_0(1 - 2\lambda)$ lesz, a következő csonkolási lépésnél l_1 ugyanakkora hányada marad meg: $l_2 = l_1(1 - 2\lambda) = l_0(1 - 2\lambda)^2$. Hogyha pedig i -szer csonkoljuk a csúcsokat, akkor a középben maradó szakasz hossza $l_i = l_0(1 - 2\lambda)^i$. Mivel l_0 értéke konstans és $1 - 2\lambda < 1$ ezért a kifejezés határértéke:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} l_i = 0$$

Igazolás 2: Hasonlóan szemlélhető úgy is a folyamat, mintha a csonkolt szakaszok hosszainak összege épp az él hossza lenne. Az első vágásban levágott szakaszok hosszai

a következők: $l_1' = l_0\lambda = l_{i-1}\lambda$. A második vágásban az első vágás által középen meghagyott részről távolítjuk el λ -szoros arányú részeit: $l_2' = \lambda l_1 = \lambda l_0(1 - 2\lambda)$. Hasonlóan, a harmadik vágáskor az l_2 hosszú szakasz λ -szoros arányú részeit távolítjuk el: $l_3' = \lambda l_2 = \lambda l_0(1 - 2\lambda)^2$. Az i -edik vágáskor pedig $l_i = \lambda l_{i-1} = \lambda l_0(1 - 2\lambda)^{i-1}$ hosszú szakaszokat távolítunk el. Látható, hogy az l_i' sorozat értékei egy mértani sorozat tagjai, amelynek első tagja $\lambda * l_0$, kvóciense pedig $(1 - 2\lambda)$. Az állítás igazolásához az l_i' sorozat összegének $i \rightarrow \infty$ határértékét kell meghatározzuk. Figyelembe véve, hogy $(1 - 2\lambda) < 1$

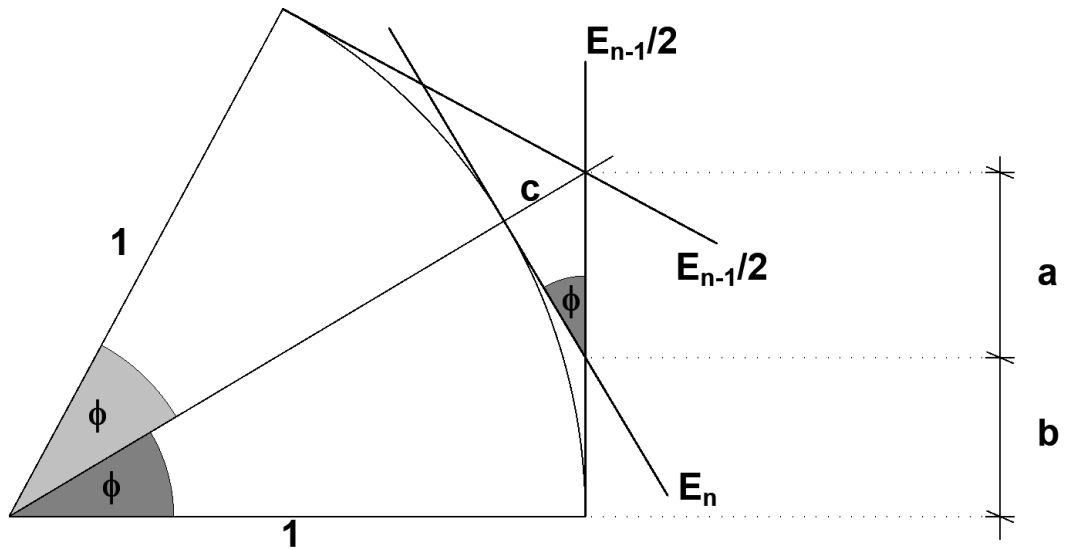
$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{l_i'} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\lambda l_0 \frac{(1 - 2\lambda)^i - 1}{(1 - 2\lambda) - 1} \right) = \frac{l_0}{2}$$

Az itt kapott érték az eredeti kiinduló élhossz fele. Mivel azonban a kiinduló élt mindkét végén csonkoljuk, az eltüntetett élhossz a két sorozat hosszainak összege, amely $2l_0/2 = l_0$, azaz maga az élhossz. Így azt mondhatjuk, hogy a kiinduló él hosszának határértéke 0.

3.2. A lapok határalakzatának alakja:

Állítás: A P_i sorozat lapjainak határalakzata kétoldali szimmetrikus csonkolással nem kör.

Igazolás: Annak, hogy kör legyen a határalakzat, feltétele, hogy minden élének megmaradó, vagyis középső pontja épp a kiinduló poligonba írható kör egy pontja legyen, vagyis minden létrejövő új szakasz a beírható kör érintője legyen.

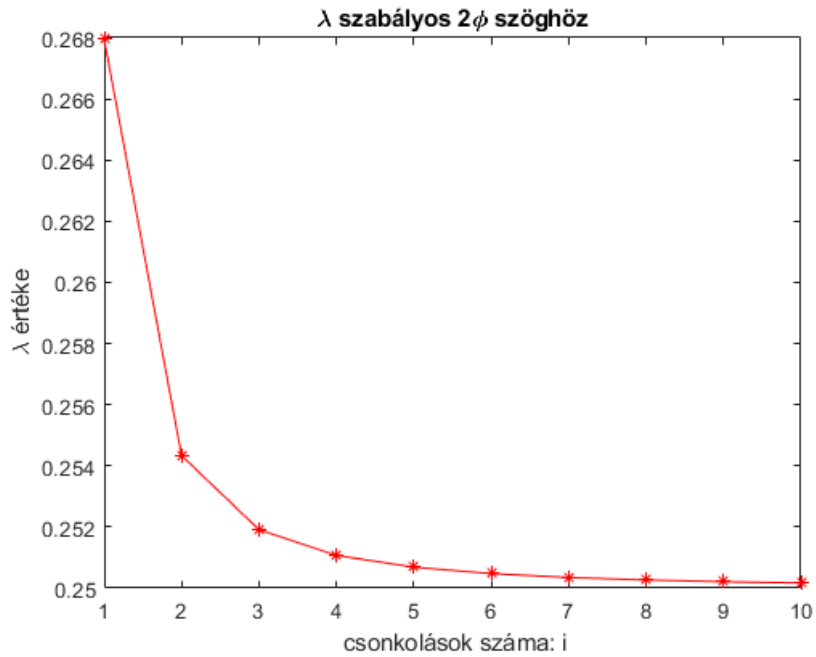


21. ábra: A lapba írható kör érintésének feltételeiről

A 21. ábrán egy a poliéder egy szabályos sokszög lapjába beírt egységsugarú kör 2ϕ szögére keressük a $2\lambda = a/(a+b)$ arányt (ahol $a+b = E_{n-1}/2$), amelyet az élből lemetszve, és a létrejött végpontokat összekötve szintén kört érintő szakaszt, és ϕ középponti szögű szabályos sokszöget kapunk. A nagy derékszögű háromszög egyik befogója az E_{n-1} felezőpontjához húzott sugár, a másik befogója pedig maga a fél él: $E_{n-1}/2$. E háromszög átfogója $1/\cos(\phi)$, melynek az egységkörön kívülre eső szakasza $c = 1/(\cos(\phi) - 1)$. A kis derékszögű háromszögben $a = (1/\cos(\phi) - 1)/\sin(\phi)$. Ezzel felírva a keresett arányt:

$$2\lambda = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{\text{tg}(\phi)} = \frac{\frac{1}{\cos(\phi)} - 1}{\sin(\phi) / (\cos(\phi))} = \frac{1 - \cos(\phi)}{\sin^2(\phi)} = \frac{1}{1 + \cos(\phi)}$$

A kapott eredmény ϕ -től függő érték, amely azt jelenti, hogy minden lépésben más λ arányt szükséges választani, hogy a lépés eredményeként szabályos sokszöget, a teljes folyamat eredményeként pedig kört kapjunk. (példaként négyzet lapból kiindulva a 21. ábra mutatja, hogy lépésenként a képletbe helyettesítve milyen ϕ érték hoz létre szabályos $(2n)$ -szöget.

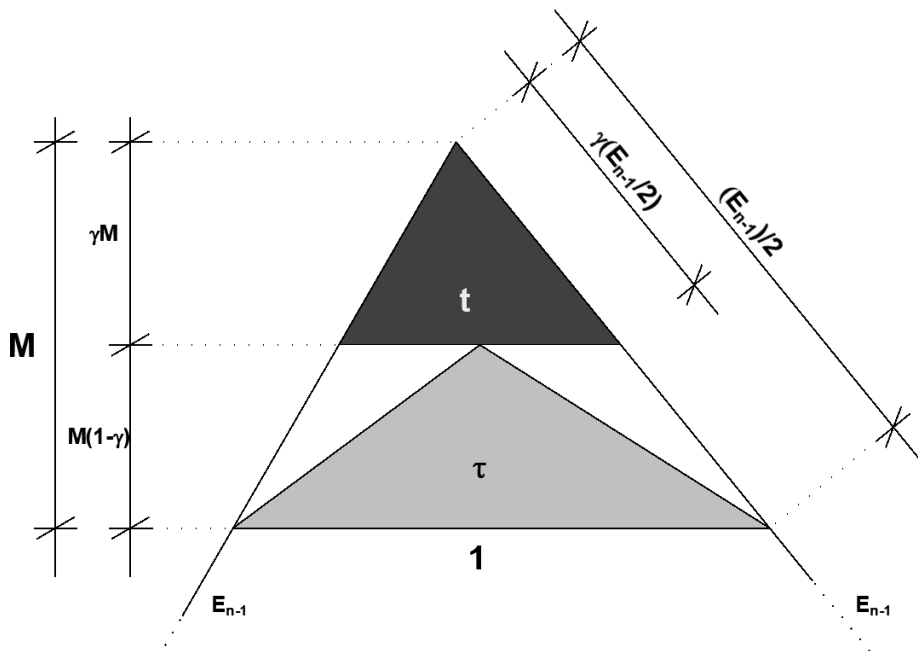


22. ábra: Négyzetből szabályos 2^{i+1} -szöget generáló aránysorozat

Megjegyzés: a 3.2. állítás eredményeként kapott képlet határértéke, ahogy $\phi \rightarrow 0$,
 $\lim_{\phi \rightarrow 0+0} \lambda = 1/4$ mivel $\cos(0) = 1$. Ez az eredmény szemmel követhető a 22. ábrán is.

3.3. A lapok határalakzatának területéről:

Állítás: A lapok területének határértéke meghatározható a λ arány ismeretében.



23. ábra: Az eltávolított területek számítása egy csúcs egy környezetében

Igazolás: A határalakzat területének meghatározásához alkalmazhatunk egy külső és egy belső közelítést. A határalakzatot kívülről maga a csonkolási sor közelíti, belülről pedig az élek megmaradó pontjaira, vagyis a felezőpontjaira feszített sokszög területe. Ha a lapnak egy levágott csúcsát szemléljük (23. ábra), a világosszürke (τ) alapja köti össze a korábbi élek felezőpontjait, a harmadik csúcsa pedig az újonnan létrejövő élen helyezkedik el. Legyen a nagy háromszög területe $T_0 = 1 * M$, ekkor a sötétszürke háromszög területe $t_0 = M * (2\lambda)^2$ és a világosszürke háromszög területe $\tau_0 = M * (1 - 2\lambda)$, a bennmaradó két fehér háromszögé pedig $T_0 - t_0 - \tau_0 = M * (2\lambda - (2\lambda)^2)$. A következő csonkoláskor a fehér háromszögek lesznek a nagy háromszögek, amelyeket a külső és a belső közelítés az előző arányok szerint oszt szét.

A sötétszürke és világosszürke háromszögek területei egy-egy mértani sorozat tagjai, amelynek kiinduló elemei t_0 és τ_0 , míg a fehér háromszögek területarányai a kvócienseket adják:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= (1 - 2\lambda)T_0, & q_\tau &= 2\lambda * (1 - 2\lambda) \\ t_0 &= (2\lambda)^2 T_0, & q_t &= 2\lambda * (1 - 2\lambda) \end{aligned}$$

Ezen sorozatok végtelen csonkolásra összegezve $S_\tau = \frac{1-2\lambda}{1-2\lambda+(2\lambda)^2} T_0$ és $S_t = \frac{(2\lambda)^2}{1-2\lambda+(2\lambda)^2} T_0$. Az eredményül kapott sorozathatárértékek összege épp az eredeti befoglaló háromszög területét (T_0) adják.

A t_i sorozat összegképlete épp az “elkopott” részét adja meg az eredeti háromszögnek, tehát a kiinduló nagy háromszög határalakzatának végleges területe az eredeti terület (T_0) és S_t különbsége:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = (T_0 - S_t) = T_0 \left(1 - \frac{(2\lambda)^2}{1 - 2\lambda + (2\lambda)^2} \right) = T_0 S_\tau$$

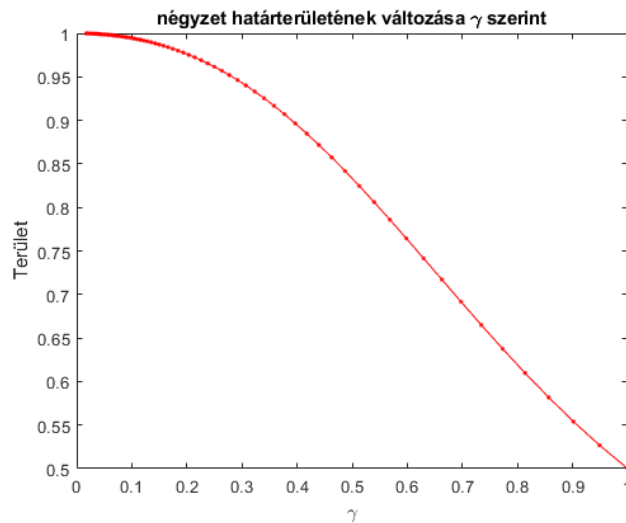
Megjegyzés: Hogyha ismert, hogy a teljes lap éleinek felezőpontjaiból alkotott poligon területének mekkora az aránya a teljes lap területéhez képest, akkor az itt prezentált képlet segítségével meghatározható a lap területének $i \rightarrow \infty$ határértéke.

Az eredmény szemléltetésére példa lehet a legtöbb ábrán szereplő négyzet kiinduló lapként. Hogyha a kezdeti négyzet területe 1, akkor a kezdeti élek felező pontjait

összekötő négyzet területe $1/2$. Vonjuk ki a teljes lap kezdeti területéből az elkopott részt. Ebből a $\lambda = \frac{1}{4} \rightarrow 2\lambda = \frac{1}{2}$ arányt behelyettesítve

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{i,négyzet,1/4} = 1 - \frac{1}{2} * \left(\frac{\frac{1^2}{2}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right) = \frac{5}{6}$$

A behelyettesítést további λ értékekre elvégezve kapjuk a következő grafikont kapjuk:

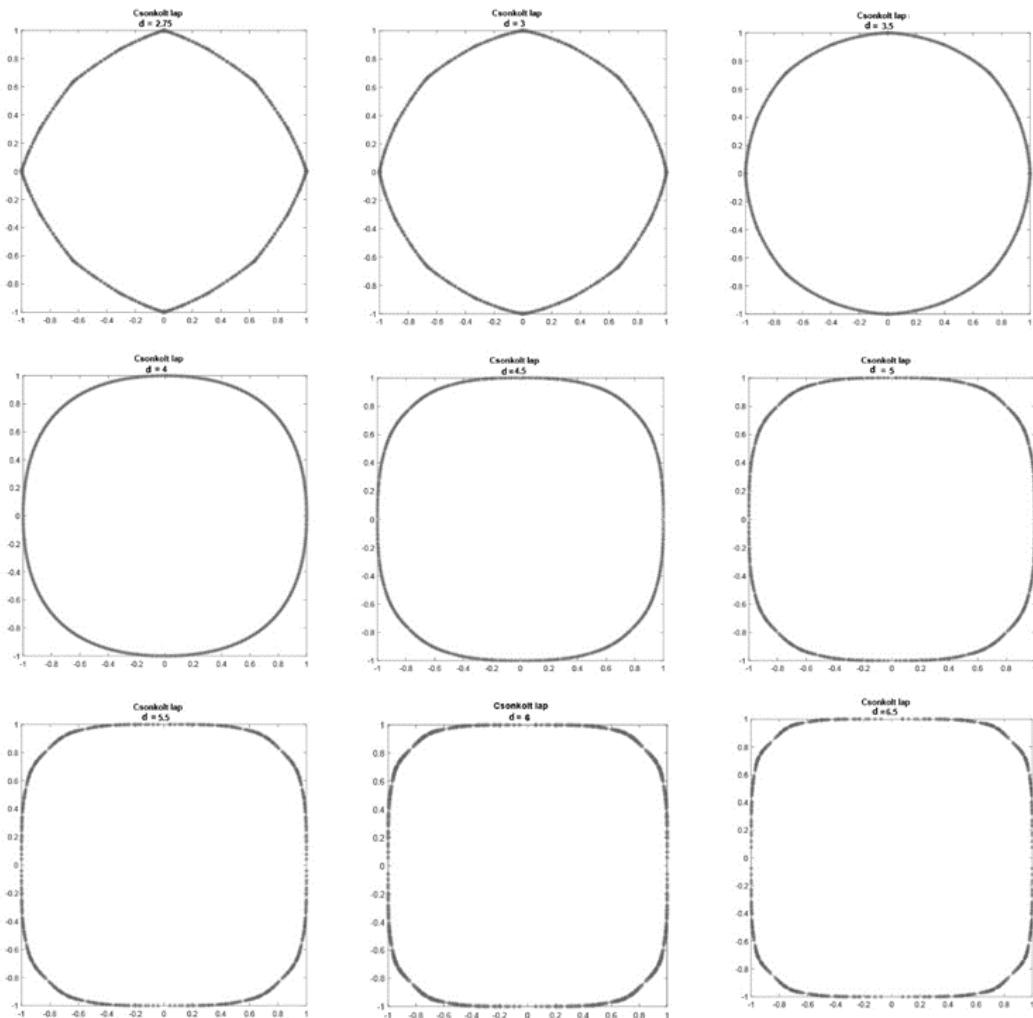


24. ábra: Négyzet lap területének változása λ függvényében

A 24.ábrán jól szemléltethető, hogy amennyiben $\lambda \rightarrow \frac{1}{2}$ ($2\lambda \rightarrow 1$) akkor a határalakzat területe tulajdonképp az eredeti élfelező pontokat összekötő poligon területe marad. Ellenben, hogyha $\lambda \rightarrow 0$, akkor az határalakzat területe tart az eredeti négyzet területéhez.

Megjegyzés: Az oldallapok végleges alakja függ λ értékétől. A 25. ábrán prezentált ábrason jól látszik, hogy egy négyzetből kiindulva, ahogy λ csökken és a teljes eddig bemutatott testfejlődés egyre inkább P_0 lapjainak sarkainak környékére korlátozódik, az eredeti élek egyre hosszabb idő alatt tűnnek el, a két él közötti szögváltozás nagy része szintén az eredeti csúcs környékén található. Emellett megfigyelhetjük, hogy ahogy d értéke csökken, vagyis λ értéke nő, az eredeti lapok közötti szögváltozás jelentős része periodikusan oszlik szét az eredeti élek között, így a határalakzat csúcsokra emlékeztető részekkel bír. E két irányvonal között kb. a $\lambda=1/4$ arányhoz tartozó határalakzaton figyelhetjük meg a leginkább folyamatos ívet, ennek a legkisebb az ívet körbejárva a görbület változása.

Ez az érték nem véletlen, hiszen a 3.3-as pontban bemutatott indoklás szerint, ahogy nő a csonkolási szám, úgy a $\lambda=1/4$ arány esetén a létrejövő új élek hossza épp a szabályos sokszögek élhosszaihoz közelítenek. Vagyis minél többször csonkoljuk az oldallap csúcsait ezen arány szerint, egyre „tökéletesebb” ívet kapunk.



25. ábra: Négyzet lap határalakzatai $\lambda=1/d$ szerint

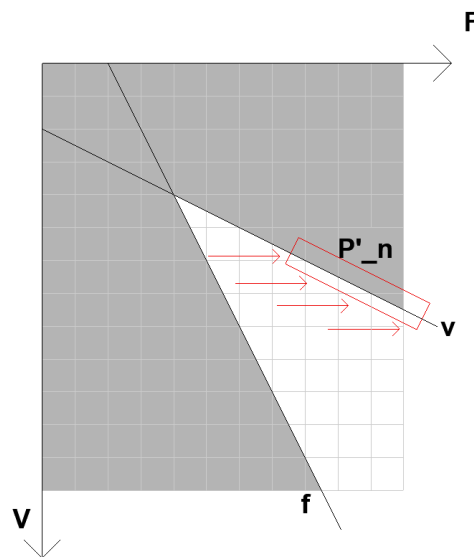
4. A DUÁLIS SOROZAT BEMUTATÁSA

4.1. A P'_i duális sorozat:

Definíció: Legyen P_0 egy konvex poliéder, lapjainak száma F_0 , csúcsainak száma V_0 és éleinek száma E_0 . Első lépésként illesszünk P_0 minden lapjához egy-egy olyan kicsi gúlát, hogy az így keletkező P'_1 poliéder, amely lapjainak, csúcsainak és éleinek száma rendre F'_1 , V'_1 és E'_1 , szintén konvex maradjon. A P'_2 poliédert P'_1 minden lapjához

gúlát illesztve kapjuk. Az így létrejövő poliéderek lapjaihoz újabb és újabb kis gúlák illesztésével áll elő a P'_i poliéder, amely P_0 minden lapjához i -szer illesztett tetraéderekkel áll elő, és mely lapjainak, csúcsainak és éleinek számát rendre az F'_i, V'_i és E'_i szimbólumokkal jelöljük..

Megjegyzés: A gúlák tulajdonságai miatt a P'_i sorozatban létrejövő új lapok mind háromszögek, tehát a P'_i sorozat $i \geq 1$ tagjai szimpliális poliéderek. Így a P'_i sorozat $i \geq 1$ tagjaira egyenlőségként teljesül a 2.3-as pontban bemutatott $b: F \geq \frac{1}{2}V + 2$ feltétel, hiszen ezen poliédereknek már minden lapja háromszög. Így jutunk a P'_i sorozathoz rendelt (F'_i, V'_i) számpárokat tartalmazó, a háromdimenziós poliéderekhez rendelt rácsponthoz tartományát határoló egyeneshez, amely $v: F = 2V - 4$.



26. ábra: P'_i sorozat az F - V osztályok között

4.2 A P'_i sorozat lapjainak, csúcsainak és éleinek számát leíró függvények:

Állítás: A P'_i sorozat F'_i, V'_i, E'_i értékeit leíró függvények a következők:

$$E'_i = 3^i * E_0$$

$$V'_i = 3^{i-1} * E_0 + 2$$

$$F'_i = 2 * 3^{i-1} * E_0$$

Igazolás: A P'_i -t definiáló algoritmus minden lap helyére egy csúcsot illeszt. Így $V'_i = F'_{i-1} + V'_{i-1}$, ez az érték, felhasználva az Euler formulát [8], $V'_i = E'_{i-1} + 2$. Az eredeti lapok helyén annyi új oldal keletkezik, ahány él határolja a lapokat. Mivel minden él két laphoz tartozik, ezért $F'_i = 2 * E'_{i-1}$. E két értéket visszahelyettesítve az

Euler tételbe az $E'_i = F'_i + V'_i - 2 = E'_{i-1} + 2 + 2 * E'_{i-1} = 3 * E'_{i-1} = 3^i * E_0$ egyenlőséghez jutunk. Ezzel kifejezve az F'_i és V'_i értékeket:

$$V'_i = 2 * 3^{i-1} * E_0$$

$$F'_i = 2 * 3^{i-1} * E_0$$

$$E'_i = 3^i * E_0.$$

4.3. P'_i „alosztályai”:

Definíció: Nevezzünk a P'_i sorozat P'_i és P'_{i+1} poliéderek közötti első alosztályának egy olyan poliédert, amely P'_i egy lapjához illesztett gúla hozzáadásával jön létre. Ha P'_i egy további lapjához is gúlát illesztünk (vagyis egy olyan laphoz, ami nem az első alosztály létrehozásakor keletkezett), egy P'_i és P'_{i+1} poliéderek közötti második alosztályhoz jutunk. Hasonlóan, hogyha P'_i egy lapját kivéve minden lapjához illesztünk gúlákat, akkor a $(F'_i - 1)$ -edik alosztályhoz jutunk. Két alosztályt az különböztet meg egymástól, hogy létrehozásához hány laphoz illesztettünk gúlát.

4.4. A P'_i sorozat alosztályainak helyzete az F - V síkon:

Állítás: A P'_i sorozat $i \geq 1$ tagjai közötti alosztályok a v egyenes minden P'_i és P'_{i+1} közötti celláját kitöltik.

Igazolás: A v egyenes (4.2 Állítás: $v: F = \frac{1}{2}V + 2$) meredeksége $\frac{1}{2}$. Mivel egész számokon értelmezett függvényről van szó, ahhoz, hogy az egyik cellájából a következőbe lépjünk, a lapok számának kettővel kell növekedni, míg a csúcsok számának eggyel.

Ha egy laphoz egy tetraédert illesztünk (4.1 miatt csak ezt tudunk), akkor ez a művelet a csúcsok számát eggyel növeli (az alaplap három csúcsa korábbi lapokhoz illeszkedik, csak a tetraéder csúcsa képez új csúcst), a lapok száma kettővel növekszik (a tetraéder alapja eltakarja a poliéder egy lapját, de három új lap jön létre), az élek száma pedig hárommal nő (az eredeti laphoz illeszkedő éleken kívül három éle van a tetraédernek). Vagyis egy tetraéder illesztéséből származó csúcsszám- és lapszám-változás épp azonos az egyenesen keresett értékekkel.

ÖSSZEGLZÉS:

Dolgozatomban bemutattam a csonkolás definícióját, amely nem más, mint S. Redner és P.L. Krapivsky kopásmodelljének geometriai megfeleléje. A csonkolási lépések által létrehozott P_i poliédersorozat elemeinek kombinatorikus tulajdonságairól megállapítottam, hogy $F_i - V_i$ osztályokba sorolva, a 3-dimenziós konvex poliéderekre vonatkozó Steinitz-tétel szerinti lehetséges osztályait tartalmazó síktartomány egy határoló egyenese hordozza a P_i sorozat $i \geq 1$ tagjait, amelyek egyszerű poliéderek: csúcsaik fokszáma 3. Megmutattam, hogy P_i lapjainak és csúcsainak száma kifejezhető a kiinduló P_0 poliéder élei számának ismeretében, hogy a csonkolási ciklusok számának növekedésével létrejövő új lapok rendszere fraktálokra jellemző tulajdonságokat mutat, és hogy ezen új lapok átlagos csúcsszámának határértéke 6.

A dolgozat második részében a csonkoló algoritmus olyan speciális eseteit vizsgáltam, amelyben a csonkolt poliéder éleit a csonkolási algoritmus egy rögzített λ arány szerint szeli. Az így kapott poliéderekről bemutattam, hogy éleik hosszának határértéke a csonkolások (i) darabszámának növekedtével 0-hoz tart. Megmutattam, hogy nem létezik olyan rögzített λ érték, amely a csonkolások során kör vagy szabályos sokszög oldallapokat hozna létre, végül bemutattam, hogy a λ aránytól függően az eredeti oldallapok mekkora része tűnik el a csonkolások során.

A dolgozat végén bemutattam a kombinatorikai szempontból duális folyamatot, amely szimpliciális poliédereket hoz létre a P_0 kezdeti poliéder lapjaihoz ismételtén gúla illesztésével. E sorozatról megmutattam, hogy az általa létrehozott P'_i poliéderek lapjainak és csúcsainak száma kifejezhető a kiinduló poliéder élei számának ismeretében, továbbá azt, hogy a P'_i sorozat $i \geq 1$ tagjai a 3-dimenziós konvex poliéderekre vonatkozó Steinitz-tétel szerinti tartományának egy határoló egyenesére kerülnek.

A dolgozat eredményei csupán szemelvények a csonkolási és a tetraéder-illesztési algoritmusok által létrehozott testek tulajdonságairól: további vizsgálatok eszközölhetők elsősorban a röviden bemutatott P'_i sorozat metrikus és kombinatorikai tulajdonságairól, a P_i sorozat fraktál jellegű tulajdonságairól és annak további metrikus tulajdonságairól is.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS:

Köszönöm a dolgozat készítése során nyújtott folyamatos, támogató szakmai vezetést konzulenseimnek dr. Domokos Gábor és dr. Lángi Zsolt tanár uraknak. Szintén köszönöm keresztapámnak Bálint Péternek lelkesítését, bátorítását és segítségét.

Felhasznált irodalom:

- [1] Redner, Krapivsky, *Smoothing a rock by chipping*, Physical Review E, 75 031119, (2007)
- [2] Herdtle, Hassan Aref, *Relaxation of fractal foam*, Philosophical Magazine Letters, Vol 64, issue 5, 335-340, (1991)
- [3] Roshchina V, Sang T, Yost D, *Compact convex sets with prescribed facial dimensions*, 2016 Matrix Annals, Springer, Cham, Svájc, Vol 1; 167-175 (2018)
- [4] Durian, Bideaud, Düringer, Schroder, Thalmann, Marques, *Shape and Erosion of Pebbles*, Physical Review E, Vol 75, issue 2, 021301, (2007)
- [5] Steinitz, Ernst, *Polyeder und Raumeinteilungen*, Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Band 3, pp. 1–139, (1922)
- [6] Steinitz, *Über die Eulersche Polyederrelationen*, Arch. Math. Phys, 11: 86-88, (1906)
- [7] Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, New York: W. H. Freeman, p 170, (1983)
- [8] Euler, *Elementa doctrinae solidorum*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Vol 4, pp 109–140, (1758)

[9]

Ábrajegyzék

Ábrák forrása, saját ábrához felhasznált program neve:

1. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	4
2. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	5
3. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	5
4. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	7
5. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	7
6. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	8
7. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	9
8. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	9
9. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	11
10. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	12
11. ÁBRA: MS EXCEL.....	13
12. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	15
13. ÁBRA: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3577043	15
14. ÁBRA: [2] FIG 1.....	16
15. ÁBRA:ARCHICAD 22.....	16
16. ÁBRA: SAJÁT ÁBRA.....	17
17. ÁBRA:ARCHICAD 22.....	17
18. ÁBRA: [3] FIG 7.....	18
19. ÁBRA: AUTOCAD 2019.....	18
20. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	19
21. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	21
22. ÁBRA: MATLAB 2019.....	22
23. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	22
24. ÁBRA: MATLAB 2019.....	24
25. ÁBRA: MATLAB 2019.....	25
26. ÁBRA: ARCHICAD 22.....	26