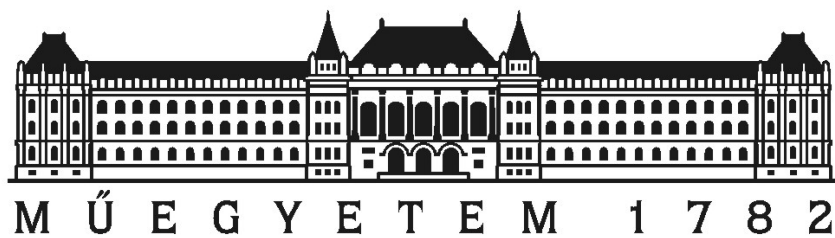


BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

# **Alakzatok egyensúlyi tulajdonságai az elnyújtottság függvényében**

Készítette: Eisenberger Viktória

Konzulens: Dr. Domokos Gábor



A dolgozat elkészítését az OTKA 104601-es kutatási témája támogatta.

## Absztrakt

A kőzetek alakfejlődésének vizsgálatában az egyik legalapvetőbb folyamat a kopás jelensége.

Hogyha ki tudnánk mutatni összefüggést a kopás és az egyensúlyi helyzetek számának alakulása között, nagy mérföldkő lenne, hiszen ezután az visszahathat a további kopás módjára, és így talán jobb rálátást nyerhetnénk erre a teljes, hosszabb folyamatra. A kopás során megfigyelhető, hogyan változik a kőzetek lapossága, illetve van olyan modell, amely közvetlen összefüggést mutat ki a súrlódás mértéke és a kövek lapossága között [1]. Ezért, mint könnyebben megfogható, és kísérletekkel jobban vizsgálható tulajdonság, most általánosan a laposságból szeretnénk következtetést levonni az egyensúlyi helyzetek számára vonatkozóan.

Dolgozatunkban egy síkbeli modellt vizsgálunk oly módon, hogy véletlenszerű alakzatok izoperimetrikus arányát és egyensúlyainak számát számítjuk. Modellünk diszkretizált íves alakzatokat vesz alapul, így ezeken nem csak az alapvető, poligonoknál értelmezett stabil egyensúlyokat vizsgálhatjuk, hanem az ívességéből következően két más fajta egyensúlyt is definiálunk [2].

Bemutatjuk, hogy affinitás hatására hogyan változik az izoperimetrikus arány, illetve az egyensúlyi helyzetek száma. A készített statisztikák alapján megfigyelést teszünk utóbbi kettő tulajdonság kapcsolatára, miszerint, statisztikus értelemben az egyensúlyi helyzetek száma az izoperimetrikus arány monoton függvénye.

Bár modellünk síkbeli, úgy gondoljuk, az eredmények inspirálhatják a 3 dimenziós vizsgálatokat is. Eredményeinket jó egyezést mutatnak kavicsok mérési adataiból számított értékekkel [3].

A számításokat MatLab programokkal végeztük, melyek működési elvét a dolgozat részletesen bemutatja.

## Irodalom

[1] Domokos, G., Gibbons, G.W., The evolution of pebble size and shape in space and time. *Proc. Roy. Soc. A* **468**, 2146, pp 3059-3079 (2012)

[2] Domokos, G., Lángi, Z., Szabó, T., On the equilibria of finely discretized curves and surfaces. *Monatshefte für Mathematik* **168** (3-4) 321-345

[3] Domokos, G., Sipos, A.Á., Szabó, T. and Várkonyi, PL. , Pebbles, shapes, and equilibria, *Mathematical Geosciences*, **42** (1), 29–47. (2010)

## Tartalomjegyzék

1. Bevezetés .....	4
2. Az algoritmus kifejtése .....	5
2.1. Az alakzatok halmazának létrehozása.....	5
2.1.1. Véletlenszerű alakzat felvétele .....	5
2.1.2. A transzformáció .....	6
2.2. A vizsgált tulajdonságok .....	6
2.2.1. Izoperimetrikus arány – <b><i>I</i></b> .....	6
2.2.2. Legkisebb oldalarányú befoglaló téglalap oldalaránya és szöge – <b><i>c, γ</i></b> .....	6
2.2.3. Egyensúlyi helyzetek száma .....	7
2.2.4. Poligonegyensúly - <b><i>Spol</i></b> .....	7
2.2.5. Szimmetrikus egyensúly - <b><i>Sszimm</i></b> .....	7
2.2.6. Sima egyensúly - <b><i>Ssima</i></b> .....	7
3. Statisztikák és eredmények.....	9
3.1.1. Az elnyújtottság szerinti statisztika.....	9
3.1.2. Az izoperimetrikus arány függvényében tekintett statisztikák.....	11
3.1.3. Az eredmények összevetése valós kövekről készült statisztikákkal .....	13
4. Összefoglaló .....	14
5. Irodalomjegyzék .....	14

## 1. Bevezetés

Ez az írás része egy hosszabb, kőzetek alakfejlődésével foglalkozó kutatómunkának, melyből a tavalyi évben már született egy TDK dolgozat [7]. Utóbbiban kőzetek aprózódásával foglalkoztunk, mely az alakfejlődés kiinduló lépésének tekinthető. Egy másik fontos részfolyamata az alakfejlődésnek a testek kopása. Kőzetek kopása esetén alapvetően két jelenséget különböztetünk meg, az ütközéses, illetve a súrlódásos kopást. Az ütközéses kopás viszonylag többet kutatott téma, melynek alapvető összefüggéseit már leírták, ám a súrlódásos kopásról jelenleg lényegesen kevesebbet tudunk.

Mostanában több cikk foglalkozott ezzel a témával [4][5], s mi is a súrlódásos kopás vizsgálatához szeretnénk egy lehetséges modellt bemutatni, s tanulságokat levonni belőle.

Mint eddigi kutatásaink során is, az alakzatokat itt is alapvetően egyensúlyi helyzeteik számával próbáljuk jellemezni, s ennek fejlődését vizsgáljuk a többi tulajdonság függvényében.

Modellünk síkbeli, bizonyos szempontból véletlenszerű alakzatokat vizsgál, melyben kiszámítjuk az alakzatok jellemző tulajdonságait – egyensúlyok, laposság, - s ezek között próbálunk összefüggést megállapítani. Az eredményeket összevetjük valós kövek mérésére alapuló statisztikákkal. A megállapított összefüggésekből próbálunk következtetni a 3 dimenziós eset összefüggéseire is.

Az számításokat Matlab programozási nyelven hajtottuk végre, az algoritmust, melyet alkalmaztunk, alább részletesen kifejtjük.

## 2. Az algoritmus kifejtése

Először felvesszünk egy bizonyos szempontból véletlenszerű síkbeli modellt, majd ennek és affin transzformáltjainak tulajdonságait vizsgálva készítünk statisztikákat.

### 2.1. Az alakzatok halmazának létrehozása

#### 2.1.1. Véletlenszerű alakzat felvétele

Az alakzatot oly módon vesszük fel, hogy körvonala az alábbi Fourier-sor polárkoordináta-rendszerben való ábrázolása legyen. A körvonal folytonosságát garantálja, hogy a függvény  $2\pi$  hosszú ciklussal rendelkezik.

$$r(\varphi) = a_0 + a_1 \cos(\varphi) + a_2 \cos(2\varphi - \varphi_2) + a_3 \cos(3\varphi - \varphi_3) + a_4 \cos(4\varphi - \varphi_4) \\ + a_5 \cos(5\varphi - \varphi_5) + a_6 \cos(6\varphi - \varphi_6)$$

Ebben az egyenletben  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $\varphi$  a változó,  $\varphi_k$  véletlenszerű konstans  $[0, 2\pi]$  intervallumról,  $a_k$  pedig egy véletlenszerű konstans a

$$\left[0, \frac{1}{k^2 + 1}\right]$$

intervallumról.

Háromféle alakzattal dolgoztunk, a szerint, hogy az első 4, 5, illetve 6 Fourier-taggal számoltunk, de láthatjuk majd, hogy ez nem okozott különösebb különbségeket a kísérleti eredményekben.

**Lemma:** Amennyiben egy tag van, belátható, hogy az eredmény így módon megválasztott konstansok mellett konvex lesz.

#### Bizonyításvázlat:

Polárkoordináták esetén így számítjuk ki egy függvény előjeles görbületét:

$$\kappa(\theta) = \frac{r^2 + 2r'^2 + r \cdot r''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

mely az értéke abban az esetben lesz pozitív, ha a görbe konvex. Itt a mi esetünkben

$$r(\theta) = 1 + a_k \cos(k \cdot \theta),$$

melyet a  $\theta = \frac{\pi}{k}$  helyen vizsgálunk, hiszen itt a legnagyobb a függvény második deriváltja, azaz itt a legnagyobb a függvény „homorúsága”. Így a  $\kappa \geq 0$  egyenlőtlenségből levezethetjük, hogy az alakzat akkor lesz biztosan pozitív, ha

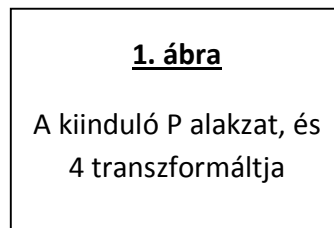
$$a_k \leq \frac{1}{1+k^2}.$$

Ez alapján választottuk meg  $a_k$ -k értékét, ám ebből még nem következik, hogy több Fourier-tag esetén is konvex lesz az alakzat. Ha több tag van, az adott  $a_k$ -k megfelelően nagyok, és a fáziseltolódásból adódóan pont egy helyre esnek a tagok „homorúbb” részei, kialakulhat konkáv alakzat is. Ezeket a vizsgálat során elvetjük.

Ezután az alakzatot diszkrétizáljuk, szög szerint egyenletes eloszlással, a  $2\pi$ -s intervallumot 100 egyenlő részre osztva. Az így kapott sokszög P.

### 2.1.2. A transzformáció

P alakzatot ezután a vízszintes tengelyre merőleges irányban megnyújtjuk  $1,1^\lambda$ -nal,  $\lambda$  fut -50...50-ig. ( $1,1^{50} \approx 117$ ) Ez az alakzat szempontjából véletlenszerű iránynak minősül, hiszen az összes használt Fourier-tagban szerepel véletlenszerű fáziseltolás. Ezekből a poligonokból alakul ki a vizsgálandó alakzatok halmaza. (**1. ábra**)



## 2.2. A vizsgált tulajdonságok

A laposságot kétféleképpen fogjuk vizsgálni, egyrészt az izoperimetrikus arányt, másrészt a legkisebb oldalarányú befoglaló téglalap oldalarányát számítjuk ki.

### 2.2.1. Izoperimetrikus arány – I

$$I = \frac{T * 4\pi}{K^2}$$

Az izoperimetrikus arányt az alakzat területéből és kerületéből számoljuk. Értéke azt mutatja, hogy az alakzat mennyire hasonlít a körhöz. Kör esetén az értéke 1, egyéb esetben a  $[0,1]$  intervallumra esik, minél laposabb egy alakzat, annál kisebb lesz I.

### 2.2.2. Legkisebb oldalarányú befoglaló téglalap oldalaránya és szöge – c, $\gamma$

Körbefordulva a  $[0, \pi]$  intervallumon, minden irányban megnézzük az adott iránnyal párhuzamos oldalú minimális befoglaló téglalap oldalarányát, oly módon, hogy

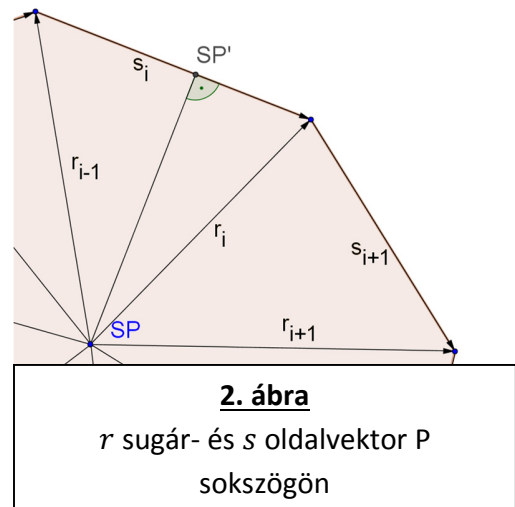
$$c_i = \min\left(\frac{a_i}{b_i}, \frac{b_i}{a_i}\right),$$

s ezek közül kiválasztjuk a legkisebbet, ez lesz c. Az a szög, amelynél ez a legkisebb  $c_i$  előfordult, lesz  $\gamma$ , azaz ez a vízszintes tengelytől való eltérés irányított szöge, értéke  $[0, \pi]$  között lehet.

### 2.2.3. Egyensúlyi helyzetek száma

Alakzatok egyensúlyi helyzetek számának számításához szükségünk lesz az alakzat konvex burkára, valamint súlypontjának helyzetére. Mivel csak konvex alakzatokkal foglalkozunk, a konvex burok adott, a súlypont helyét pedig kiszámítjuk. Ezután megfogalmazhatunk háromféle egyensúlyi helyzet definíciót aszerint, hogy sokszögeként, vagy íves alakzatként tekintünk rá.

A következő képletekben  $s_i$  az ábra szerint a sokszög egyik oldalát, míg  $r_i$  a súlypontból az oldal kezdőpontjába mutató sugarát jelöli. (**2. ábra**)



### 2.2.4. Poligonegyensúly - $S_{pol}$

Poligonegyensúly szerint akkor tekintem stabil egyensúlyi helyzetnek  $AB$  oldalt, hogyha az  $SP$  súlypont vetülete az  $AB$  oldal egyenesére az  $AB$  szakaszon belülre esne.

$$\langle r_i s_i \rangle \cdot \langle r_{i+1} s_i \rangle < 0$$

### 2.2.5. Szimmetrikus egyensúly - $S_{szimm}$

Íves alakzatok esetén vizsgálhatjuk azt, hogy mikor billenünk át azon a bizonyos ponton, amikor egy pontban az érintő merőleges a sugárra. Ennek megfelelője diszkrétizált alakzaton, ha a súlypontból a csúcsba mutató sugár és az oldal szögét vizsgáljuk:

$$\langle r_i s_i \rangle \cdot \langle r_{i+1} s_{i+1} \rangle < 0$$

### 2.2.6. Sima egyensúly - $S_{sima}$

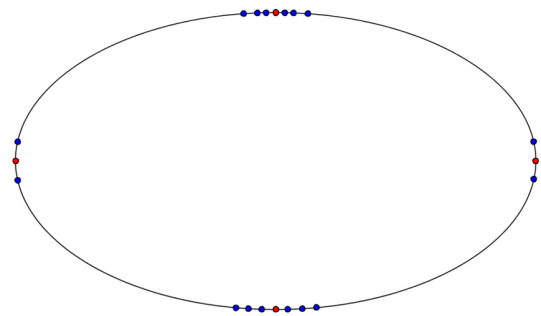
Ez a fajta egyensúly az alakzat kerülete mentén a sugár minimum és maximum értékeit találja meg.

$$(|r_{i+1}| - |r_i|) \cdot (|r_i| - |r_{i-1}|) < 0$$

Ezeknek az egyensúlyoknak a számát fogjuk vizsgálni az alakzatok körvonala mentén.

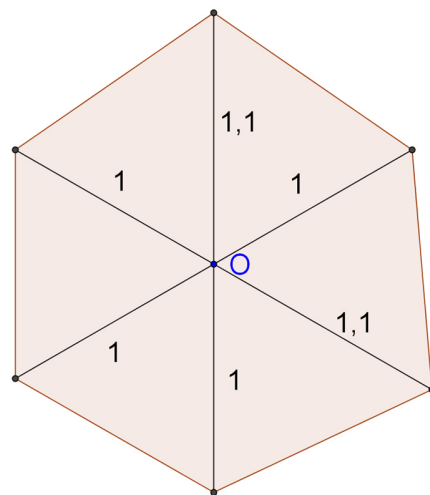
E három között a különbséget két egyszerű példán mutatom be:

Az **3. ábrán** látható ellipszisnek, mint zárt síkgörbének, 2 stabil és 2 instabil egyensúlyi helyzete van. Ha azonban diszkretizált poligonként vizsgáljuk, akkor a diszkretizálás finomságától, módszerétől, és kiindulópontjától függően ennél jóval több poligonegyensúlya lehet. Ezek a poligonegyensúlyok ( $S_{pol}$  – kék pontok) úgynevezett falkákban helyezkednek el, az  $S_{sima}$ , illetve  $S_{szimm}$  egyensúlyok környezetében, melyekből továbbra is 4 darab lesz ( - piros pontok.)



**3. ábra**  
Egyensúlyi helyzet falkák egy ellipszisen

Az **4. ábra** egy olyan mesterségesen előállított helyzetet ábrázol, ahol mindhárom típusú egyensúlyi helyzet száma különbözik. Annyira nem torzítottuk el a hatszöget egy szabályos hatszöghöz képest, hogy ne legyen minden oldal poligonegyensúly szempontjából stabil egyensúlyi helyzet, azaz  $S_{pol} = 6$ . Ahhoz pedig nem elég nagyok a különbségek, hogy a szimmetrikus egyensúlyal érzékeljük, mivel a vizsgált szögek mindenhol hegyesszögek lesznek, tehát  $S_{szimm} = 0$ . A sima egyensúly minden kis ki-be ugrást érzéklni fog, ilyen szempontból érzékenyebb, mint a szimmetrikus egyensúly, így a minimumokat és maximumokat számolva  $S_{sima} = 3$ -at kapunk. Ily módon például lehet különböző mindhárom egyensúly száma is.



**4. ábra**  
Speciálisan megválasztott hatszög, melyen a háromféle egyensúly száma eltér

Hangsúlyozzuk, hogy ez egy mesterségesen kialakított helyzet, a diszkretizálás finomsága miatt a sima és a szimmetrikus egyensúly vizsgálataink során általában meg fog egyezni. Az is figyelemre méltó, hogy ezek az egyensúlyok általában párban jelennek meg, hiszen az egymás utáni értékek szorzatának az előjelét vizsgáljuk, körbemenve a poligonon. Ennél a példánál azért fordulhatott elő a 3-as érték, mivel a szorzatok ebben a mesterséges környezetben 0 –t adtak, ezt ki lehetne küszöbölni, hogy erre az alakzatra is 4-et kapjunk eredményül – hiszen ez tükrözné jobban a görbének tekintett alakzat egyensúlyainak számát – ám a véletlenszerű alakzatok esetén ez a számítási mód is ugyanolyan megfelelő értéket fog adni.



### 3. Statisztikák és eredmények

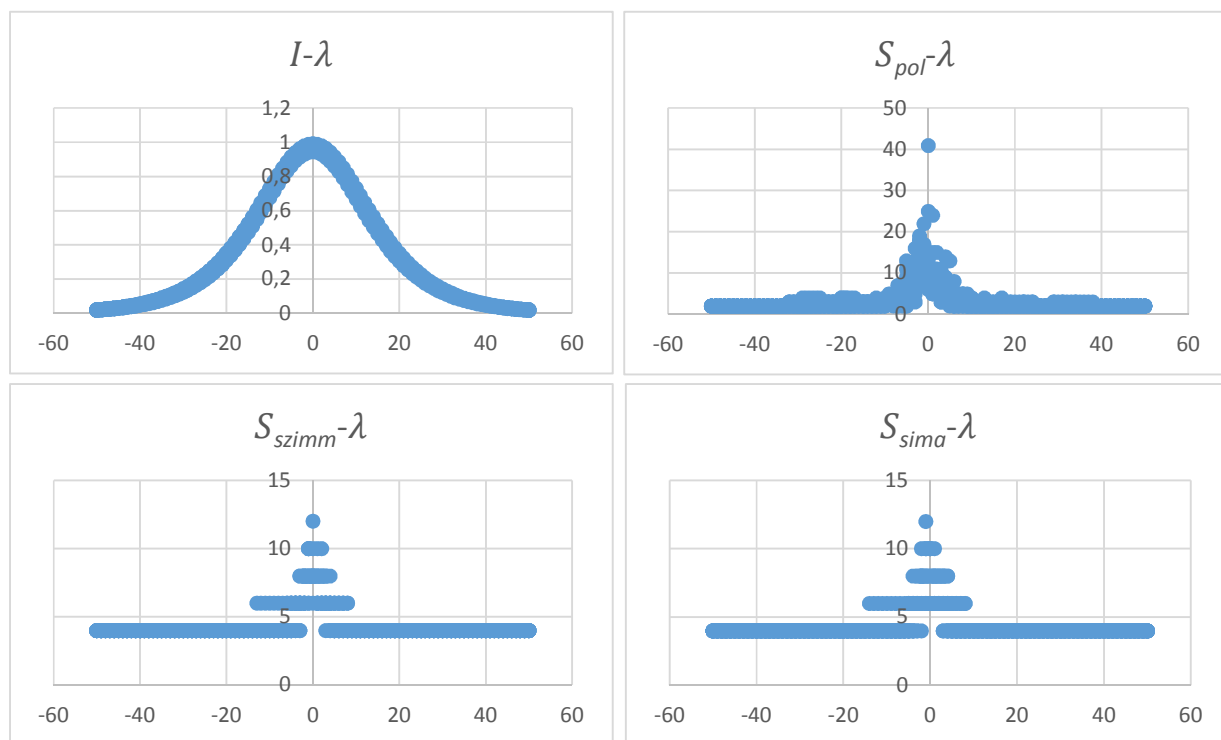
A statisztikákat három külön esetre készítettük el, amikor az első 4, 5, illetve 6 Fourier-taggal számítottuk a kiindulási alakzatunkat. Mindegyik esetben 1000 darab véletlen alakzatot generáltunk, melyekből 4 Fourier tag esetén 537 darab, 5 tag esetén 254, míg 6 tag esetén 118 volt konvex. A konvex alakzatokat használtuk csak tovább. Ezek, illetve darabonként 100 affin transzformáltjuk alkotja a vizsgált alakzatok halmazát.

A háromféle halmaz a legtöbb esetben azonos statisztikai eredményeket hozott, ezért általában csak egy grafikonon fogjuk bemutatni mindhárom eset viselkedését. Ahol mégis különbség volt, azt külön megemlítjük.

#### 3.1.1. Az elnyújtottság szerinti statisztika

Ebben az esetben  $\lambda$ , azaz a nyújtási paraméter függvényében vizsgáljuk a többi tulajdonságot.

Az **5. ábra**  $I$ - $\lambda$  diagramja megmutatja, hogy az izoperimetrikus arány valóban az alakzat laposságától függ, hiszen minél jobban elnyújtjuk az alakzatot, annál kisebb lesz az izoperimetrikus arányuk. Ily módon a grafikon maximuma a  $\lambda = 0$  hely közelében lesz, a maximum értéke alulról közelíti az 1-et. A kiinduló alakzatok esetén a mért adatok mindig a  $(0,97; 1)$  intervallumon belülre estek. Ahogy  $|\lambda|$  nő,  $I(\lambda)$  tart a 0-hoz.



**5. ábra** Pontdiagramok az elnyújtottság függvényében

Az **5. ábra**  $S_{pol}-\lambda$  diagramján ugyanígy az elnyújtás függvényében mutatjuk be a poligonegyensúlyok számát, s megláthatjuk, hogy ez a grafikon is a 0-nál tetőzik, és a legelnyújtottabb poligonoknál van a minimuma. Ahogy  $\lambda$  tart a végtelenbe,  $S_{pol}$  látszólag a 2-höz tart, mivel ez a poligonegyensúlyok minimális száma.

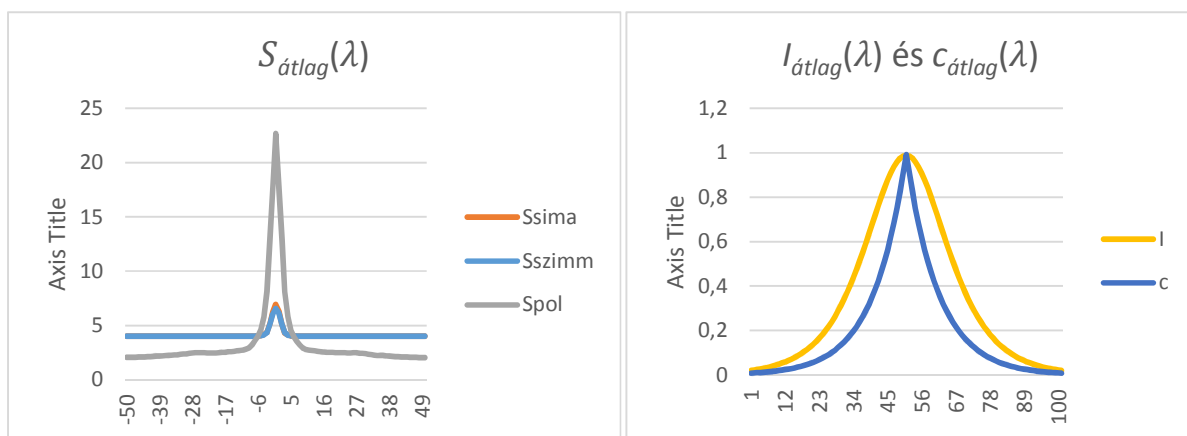
Ez alapján az ábra alapján az a sejtésünk, hogy alkalmasan megválasztott átlagolás mellett az  $S(\lambda)$  függvény lefutása hasonló az  $I(\lambda)$  függvény lefutásához, vagyis egyetlen maximummal rendelkezik, és ez a maximum a  $\lambda = 0$  közelében van.

A két grafikon hasonló trendjéből következtethetünk arra, hogy a kettő adathalmazt érdemes lenne összevetni, mivel valami összefüggés is lehet köztük, ezért később vizsgáljuk e két tulajdonság kapcsolatát.

Ezekhez hasonlóan vizsgáltuk a szimmetrikus, illetve a sima egyensúlyok számának alakulását (**5. ábra**  $S_{szimm}-\lambda$  és  $S_{sima}-\lambda$  grafikon) is, de mivel az alakzatok egyszerűségéből és simaságából fakadóan ezek soha nem értek el 12-nél nagyobb értéket, ezért ezek kevésbé látványos grafikonokat eredményeznek. Az előző kettő eredményre jellemző trend ezeken is megfigyelhető. Mivel az ilyen típusú egyensúlyok száma természetes esetben minimum 4, ezért ezek az ellaposodó alakzatoknál a 4 értékhez fognak tartani.

A szimmetrikus és a sima egyensúlyok esetén egyébként eltértek a 4, 5, illetve 6 Fourier-taggal számított eredmények, annyiban, hogy az első 4 Fourier-tag esetén 8, 5 esetén 10, illetve 6 tag esetén 12 volt a legnagyobb előforduló egyensúlyok száma, mind sima, mind szimmetrikus egyensúlyok vizsgálatánál.

Ugyanezeket az értékeket aztán átlagolva, függvényként is ábrázoltuk, így I és C kapcsolata (**6. ábra**), valamint a háromféle egyensúly viszonya (**7. ábra**) jobban megfigyelhető.



### 3.1.2. Az izoperimetrikus arány függvényében tekintett statisztikák

Az **8. ábrán** látható pontdiagramon a poligonegyensúlyok előfordulását ábrázoljuk az izoperimetrikus arány függvényében. Ezen elég erős összefüggést láthatunk, ezért kirajzoljuk az izoperimetrikus arány függvényében a stabil egyensúlyi helyzetek számának átlagos értékét is. (**9. ábra**)

Ugyanígy megvizsgáltuk a sima, illetve szimmetrikus egyensúlyok átlagos értékeit is, s ezeket ugyanezen a grafikonon ábrázoltuk. (**9. ábra**)

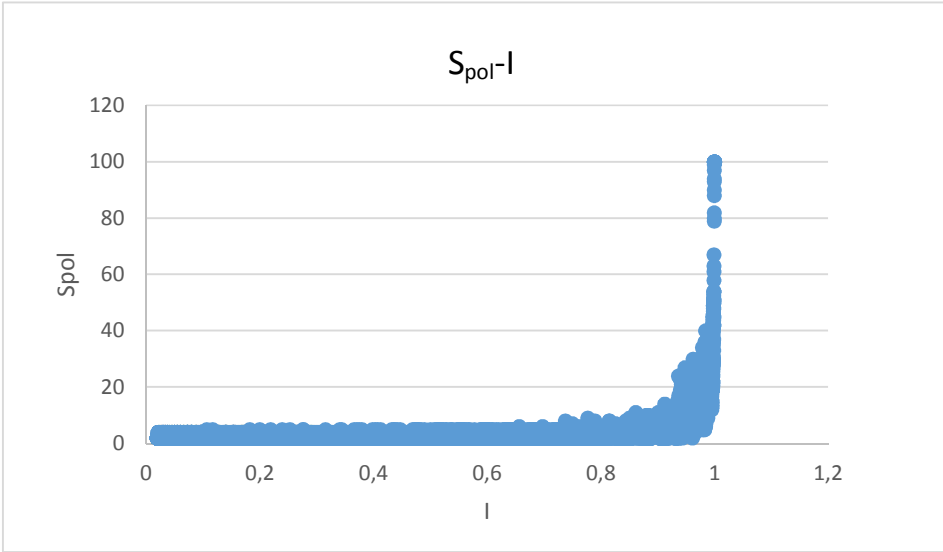
Ez alapján azt a sejtést fogalmazhatjuk meg, hogy  $S$  (bármely típusú) statisztikus értelemben az izoperimetrikus aránynak monoton függvénye, azaz minimuma az  $I = 0$  helyen van, maximuma pedig ahol  $I$  tart az 1-hez.

Ekkor a statisztika alapján úgy tűnik, hogy az általunk választott alakzathalmazra  $S_{pol}$  maximuma valahová 19 és 20 közé esik. ( $S_{pol,max} \approx 19,6$ )

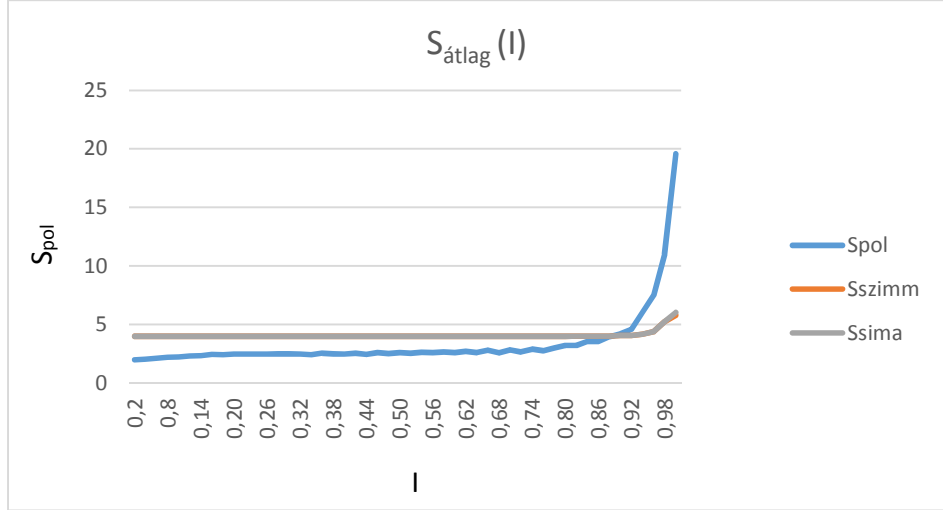
$S_{szimm}$  szimmetrikus egyensúly, illetve  $S_{sima}$  sima egyensúly maximuma a különböző módon generált alakzatok esetén enyhén eltér, még hozzá oly módon, hogy minél több Fourier-tag szerepel benne, annál nagyobb lesz az átlagos érték maximuma. Érdekes továbblépés lenne több Fourier-taggal is megnézni, hogy ez valóban egy ilyen trendet jelent-e, vagy csupán a véletlen műve. Annyi mindenesetre elmondható, hogy maximumuk jelen esetben az  $[5, 7]$  intervallumon belülre esik, s a sima egyensúly maximuma mindig nagyobb a szimmetrikus egyensúlyénál, ezzel is igazolva azt, hogy ez egy érzékenyebb vizsgálatot jelent.

Mivel az izoperimetrikus arány és  $c$  oldalarány is az alakzat laposságát írja le, elég szoros a közöttük lévő kapcsolat, várható, hogy valamilyen módon korrelálnak, ezért ezt is megvizsgáltuk. Az izoperimetrikus arány függvényében kirajzoljuk  $c_{\text{átlag}}$ -ot. (**10. ábra**)

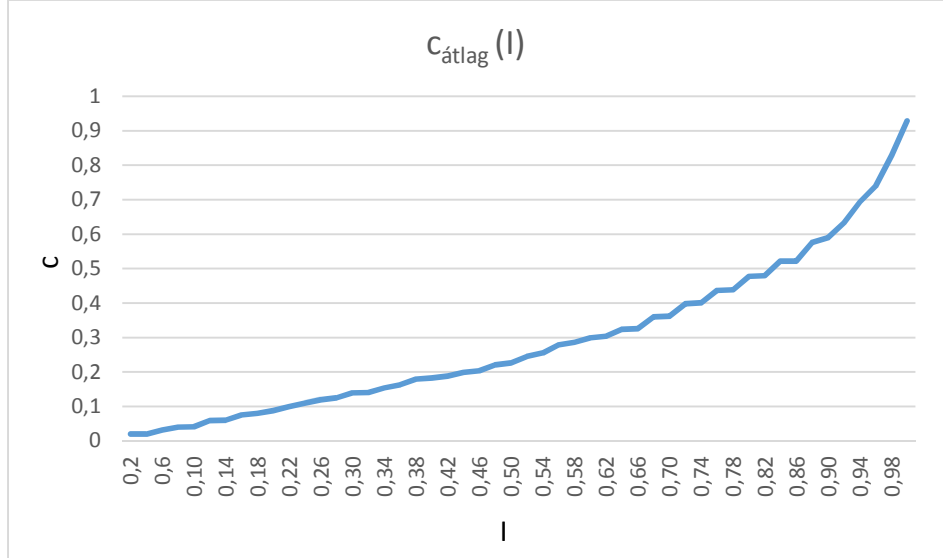
Ezen látható, hogy  $c_{\text{átlag}}(I)$  monoton növekvő függvény, mindkettő tulajdonság a  $[0,1]$  intervallumon értelmezhető, így ezt a függvényt is itt értelmezzük. Látható, hogy a maximum, ahol  $c_{\text{átlag}}(I) = 0$  az  $I = 0$ -ban, míg a minimum, azaz  $c_{\text{átlag}}(I) = 1$  az  $I = 1$ -ben található.



**8. ábra**  
 $S_{pol} - I$   
 pontdiagram



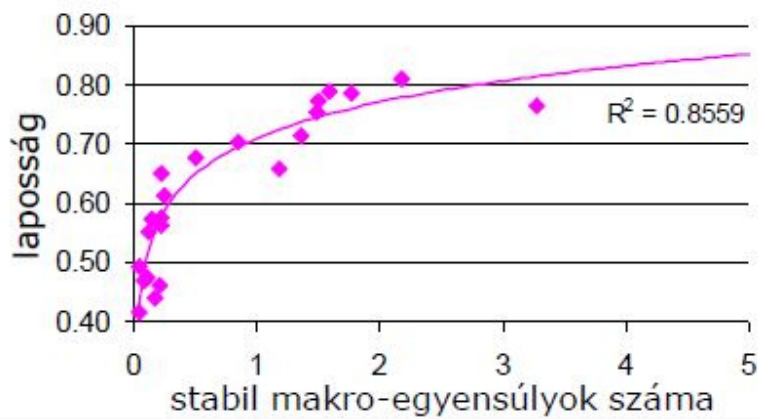
**9. ábra**  
 Az egyensúlyi  
 helyzetek átlagos  
 értékei az  
 izoperimetrikus  
 arány  
 függvényében



**10. ábra**  
 c legkisebb  
 oldalárányú  
 befoglaló téglalap  
 oldalárányok  
 átlaga az  
 izoperimetrikus  
 arány  
 függvényében

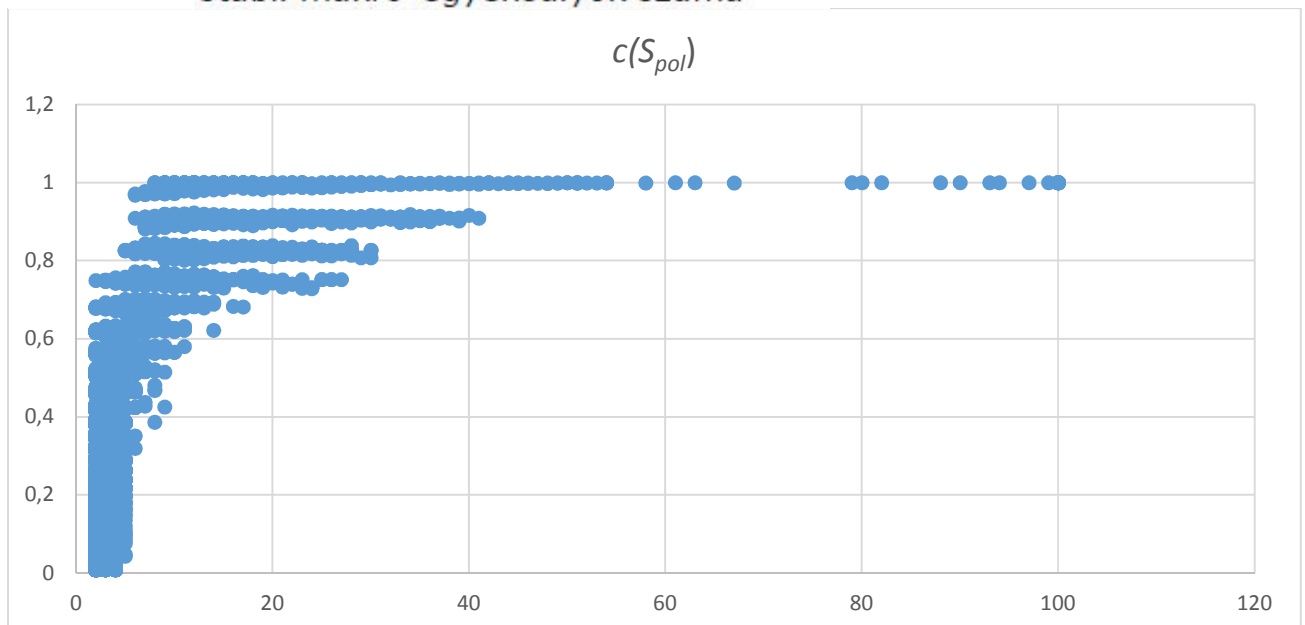
### 3.1.3. Az eredmények összevetése valós kövekről készült statisztikákkal

Egy korábbi TDK dolgozatban [6] már vizsgálták kövek, illetve síkbeli alakzatok hasonló tulajdonságait. A **11. ábrán** és látható, hogy bár a két grafikon jellege és léptéke teljesen más, a trend nagyon jól megfigyelhető rajta.



**11. ábra**

Köveken mért mérési adatokból készült statisztika (fent), valamint a síkbeli kísérletek eredményeiből készült hasonló jellegű  $c(S_{pol})$  statisztika (lent).



## 4. Összefoglaló

Beláthattuk tehát, hogy érdemes két dimenziós vizsgálatokkal vizsgálni a kopás folyamatát, mivel sok érdekes és inspiráló eredményt adott a síkbeli modell, amelyeket aztán felhasználhatunk később a valós köveken való kísérletezés során.

Az eredmények többsége azonban csupán megfigyelés volt, további munkával talán beláthatóak lennének határozottabb összefüggések is síkbeli alakzatokra, s később ez még inkább hozzá tudna járulni a három dimenziós kutatáshoz.

Ahol össze tudtuk vetni az eredményeket kövek mérési adataival, ott meglepően jó egyezést kaptunk.

Megfigyelést tettünk olyan tulajdonságok összefüggéseire, amelyek szintén értelmezhetőek térben, valós köveken is, így folytatva a munkát, lehet, hogy ki tudnánk mondani korrelációt ezekre a tulajdonságokra. Így például a kövek laposságának és egyensúlyi helyzeteinek kapcsolatát is jobban definiálhatnánk, talán egy lépéssel közelebb jutva a követ kopásának, s így teljes alakfejlődésének megértéséhez.

## 5. Irodalomjegyzék

- [1] Domokos, G., Gibbons, G.W., The evolution of pebble size and shape in space and time. *Proc. Roy. Soc. A* **468**, 2146, pp 3059-3079 (2012)
- [2] Domokos, G., Lángi, Z., Szabó, T., On the equilibria of finely discretized curves and surfaces. *Monatshefte für Mathematik* **168** (3-4) 321-345
- [3] Domokos, G., Sipos, A.Á., Szabó, T. and Várkonyi, PL. , Pebbles, shapes, and equilibria, *Mathematical Geosciences*, **42** (1), 29–47. (2010)
- [4] Domokos, G., Lángi, Z., On static equilibria and isoperimetric ratio of affine families of convex bodies. [arXiv:1410.5181](https://arxiv.org/abs/1410.5181)
- [5] Domokos, G., Lángi, Z., On global equilibria of finely discretized curves and surfaces. [arXiv:1410.5176](https://arxiv.org/abs/1410.5176)
- [6] Szabó Tímea, Egyensúly és morfológia: Skálák szétválása kavicsok geometriájában. TDK dolgozat 2009, BME Szilárdságtani és tartószerkezeti tanszék
- [7] Eisenberger Viktória, A síkbeli aprózódás egy lehetséges modellje. TDK dolgozat 2013, BME Szilárdságtani és tartószerkezeti tanszék