

Tudományos Diákköri Konferencia 2023

Alakevolúciós egyenlet használata  
membránfelületek számítására

Szondi Máté Álmos

Ötödéves építészmérnök hallgató

Témavezető: Dr. Sipos András Árpád  
egyetemi docens  
BME Morfológia és Geometriai Modellezés Tanszék  
HUN-REN-BME Morfodinamika Kutatócsoport



BME  
2023



# Absztrakt

A matematikában különböző felületek egzakt leírása, vizsgálata, illetve adott feltételeket kielégítő sima felületek létrehozása a differenciálgeometriai kutatások homlokterében áll. Az adott peremek közé kifeszülő szappanhártya alakját leíró minimálfelület alakját leíró differenciálegyenletet J. L. Lagrange fedezte fel 1768-ban a klasszikus variációszámítás módszereinek kidolgozása folyamán, azonban tényleges megoldásokat csak a következő évtizedekben írtak le. G. Monge bizonyította, hogy a rögzített peremek közé kifeszíthető, minimális felülettel rendelkező sima felület átlaggörbülete minden pontjában zérus [15]. A minimálfelületek általánosításaként tekintsük azokat a felületeket, amelyekre minden pontban az átlaggörbület és a Gauss-féle szorzatgörbület ugyanazon lineáris összefüggést elégíti ki. Ezen felületeket J. Weingarten vizsgálta először a XIX. század közepén [29, 26].

A dolgozatban egyrészt rámutatok arra, hogy a természetben megfigyelhető egyes kopási folyamatokat (pl.: folyómederben kopó szikla felülete) leíró egyirányú Bloore modell [2, 9] stacionárius megoldásai Weingarten felületek, és megfelelő feltételek esetén a természeti formák közel Weingarten tulajdonságúak. Másrészt, ahogy a minimálfelületek a dominánsan feszített szerkezet alakjával állnak összefüggésben, úgy a Weingarten felületek is megfeleltethetők adott terheket membrán feszültségekkel ellensúlyozó felületeknek. Azt találjuk tehát, hogy a természetben fellelhető formák membrán erőjátékú héjak geometriáját adják.

Kihasználva a fenti analógiát, dolgozatomban új formakeresési módszert mutatok be, mely evolúciós algoritmusként, a Bloore operátor szimulációjával állítja elő a minimálfelületet, illetve általános esetben a Weingarten felületet, rögzített peremek esetén. Rámutatok arra, hogy a téglalap alakú számítási tartomány esetén a Dirichlet peremek lehetnek inkompatibilisek a végső megoldással, ez a szerkezeti mechanikában a sarkok körül kialakuló ún. peremzavar matematikai magyarázata. A teljes, nemlineáris Bloore operátor szimulációja az erős nemlinearitás miatt nem minden esetben konvergens, azonban konvergencia esetén az elliptikus Monge-Ampère parciális differenciálegyenlet megoldását kapjuk eredményül.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1. Héjelméleti motiváció . . . . .	1
1.2. Minimálfelületek történeti motivációja . . . . .	2
<b>2. Matematikai és mechanikai háttér</b>	<b>4</b>
2.1. Differenciálgeometriai alapok . . . . .	4
2.1.1. Térgörbék és felületek görbülete . . . . .	4
2.1.2. Izotrópikus geometria . . . . .	6
2.2. A $K - H$ és $K^i - H^i$ síkok . . . . .	9
2.3. Lineáris Weingarten-felületek . . . . .	14
2.4. Mechanikai, héjelméleti alapok . . . . .	16
2.4.1. A membránhéjak egyensúlyáról . . . . .	16
2.5. A Monge-Ampère egyenlet . . . . .	19
2.6. A Bloore egyenlet . . . . .	20
<b>3. Modell és új eredmények</b>	<b>22</b>
3.1. A modell leírása . . . . .	22
3.1.1. Az $f_0$ kezdeti felület . . . . .	23
3.2. Új eredmények . . . . .	27
3.2.1. Numerikus kísérletek . . . . .	27
3.2.2. Kapcsolat a kopási folyamattal . . . . .	35
<b>4. Konklúzió</b>	<b>36</b>
4.1. Kérdések és további célok . . . . .	37
<b>5. Függelék</b>	<b>38</b>
5.1. Minimálfelületek . . . . .	38
<b>6. Köszönetnyilvánítás</b>	<b>44</b>
<b>Hivatkozások</b>	<b>45</b>

# 1. Bevezetés

A geometriában egyes felületek egyszerűségüknél fogva kitüntetett szereppel bírnak, például a gömb, a henger, a másodrendű felületek...stb. egyszerű összefüggésekkel megadhatóak. Ezek az elemi formák ritkán jelennek meg természeti folyamatok eredményeként, azaz a természetben gyakran bonyolultabb módon leírható felületeket találunk. Hasonlóan, az építészet területén kiemelt membrán felületek a belső feszültségeloszlást követve, összetett formák. Dolgozatom középpontjában az ún. lineáris Weingarten felületek vizsgálata áll. Ezeket felületeket az jellemzi, hogy bármely felületi pontjukban az átlaggörbület és a szorzatgörbület ugyanazon lineáris összefüggést elégíti ki. A dolgozatban rámutatok arra, hogy a természetben dominánsan egyirányú ütközésekből származó formák, elegendő kopási idő esetén, szolgálhatnak membránhéj fedések alakjaként. Továbbá módszert adok a Weingarten felületek számítására és a további kutatások számára fogalmazok meg nyitott kérdéseket.

## 1.1. Héjelméleti motiváció

A héjak és felületszerkezetek nagy múltra visszatekintő tartószerkezetek. A XX. század első felében széles körben használták őket, nagy élőmunka igényük miatt azonban a XX. század végére háttérbe szorultak. A héjépítés jeles képviselői voltak Félix Candela, Wilhelm Flügge, Pier Luigi Nervi, Frei Otto, valamint Magyarországon például Pelikán József. A héjak felhasználása széleskörű, például stadionok, hangárok, egyéb nagy fesztávú terek lefedéseként, de akár födémszerkezetek kiváltásaként is [17]. Előnyük, hogy a kedvező erőjáték (közel hajlításmentes keresztmetszet) miatt érdemben vékonyabb, anyagtakarékosabb módon lehetséges építeni. Hátrányuk az említett nagy élőmunka igény. Napjainkban a technika fejlődésével (pl.: robotizálás), valamint az előregyártás térnyerésével egyre több esetben alkalmaznak ismét héjszerkezetet. Korunk egyik jeles építésze, Marc Mimran például a Montpellier TGV állomás térlefedését oldotta meg előregyártott héjelemekből [16].

A dolgozatban említésre kerülő felületek mindegyike alkalmas a héjépítésre, mind-egyiknek más előnye van. A minimálfelületekben a feszültségeloszlás minden irányban és a felület minden pontjában azonos. Ennek az az előnye, hogy a héj kihasználtsága minden pontjában azonos. Ezeket a felületeket manapság leginkább előfeszített

sátorszerkezetek esetében szokták alkalmazni [8].

Héjelméleti szempontból mindenképp fontos mérföldkő, valamint magyar vonatkozása miatt is megemlíthetjük a *Pelikán-hártyákat*, melyeket Pelikán József a BME volt professzora fedezett fel. A Pelikán-hártyák olyan 'pszeudo-membrán' szerkezetek, melyeknél a feszültségeloszlás feltételét nem a metszeterőkre írjuk fel, hanem ezek vízszintes vetületeire, mégpedig úgy, hogy ezek legyenek azonos nagyságúak [19]. A Pelikán-hártyákat (1. ábra) leginkább alakkeresési feladatokban lehet alkalmazni. Lapos héjak esetében ez a módszer jól közelíti a valódi erőjátékot. A módszer leginkább kézi számításoknál jelentős, ugyanis így nagyban leegyszerűsödik a számítás.



1. ábra. A frecheni Keramion Múzeum vasbeton héjszerkezete, amely egy Pelikán-hártya.

## 1.2. Minimálfelületek történeti motivációja

A dolgozatban vizsgált Weingarten felületek felfoghatóak úgy, mint a minimálfelületek általánosításai. A minimálfelületek története az ókorig nyúlik vissza. Karthágó városát i. e. 814-ben alapították a föníciai Türosz városából érkező telepesek. A hagyomány szerint a várost Dido (vagy Elissa) alapította. De hogyan is kapcsolódik az ókor egyik legmeghatározóbb városa a minimálfelületekhez? A legenda szerint Dido királynő a numídiai Larbas királytól kért földet a letelepedéshez. Larbas vonakodva ugyan, de belement abba, hogy egy akkora földterületet adjon Didonak, amit egy ökör bőrével le tud keríteni. A leleményes királynő ekkor az ökör bőrét hosszú csíkokra vágta majd ezeket összekötve egy 4 km-es csíkot kapott, melyet félkör alakban terített le. A királynő intuitív módon találta meg az izoperimetrikus probléma megoldását az euklideszi síkon (2. ábra). Ez a probléma gyakorlatilag azt jelenti, hogy adott kerülettel rendelkező objektumok között keressük a legnagyobb területűt.



2. ábra. Dido az izoperimetrikus tételt használja földvásárláshoz.

Az ókori Görögországban elterjedt szokás volt, hogy a földek parcellázásánál a kerületeket mérték fel. Trója városában egy parcella 10200 lépés kerületű volt. A ravasz földmérők, akik ismerhették az izoperimetrikus probléma megoldását (heurisztikusan mindenképp), maguknak a legnagyobb parcellákat szánták. A turpisságra aratáskor derült fény, amikor a földmérők földjén termett termény aránya sokkal nagyobb volt, mint az átlag. Ezen legendák miatt arra következtethetünk, hogy az ókori görögök már foglalkoztak az izoperimetrikus problémával, valamint az arab matematikus Abu Jafar al-Khazin összefoglalta korának minden tudását az izoperimetrikus problémáról egyik művében. Az izoperimetrikus tételt a történelem során a legendákkal ellentétben bizonyítottan is használták. Nézzük meg a középkori városok városfalait. Megfelelően erős városfal építése nagy költséget jelentett mind nyersanyag felhasználás, mind munkaerő szintjén. Emiatt fontos volt, hogy egy adott területű várost minél kisebb kerületű városfallal tudjanak körülvenni. Így természetes módon adódik, hogy sok középkori városfal félkör, kör alakú (3. ábra).

A minimálfelületek napjainkban is a differenciálgeometriai kutatások homlokterében állnak, így érdemes lehet velük foglalkozni. Történetük messzire vezet vissza, ugyanis Leonard Euler 1776-ban fedezte fel az első minimálfelületet (a síkot leszámítva). A minimálfelületek kutatása koránt sem lezárt téma, ezt jól mutatják a közelmúltban felfedezett minimálfelületek. H. Blaine Lawson például 1970-ben megmutatta, hogy  $S^3$ -ban minden génuszra létezik minimálfelület [14]. A közelmúlt egyik legnagyobb minimálfelületekhez köthető felfedezése az volt, mikor Webernek, Hoffmannak és Wolfnak sikerült megtalálnia az első 1 génuszú minimálfelületet [28]. Ennek a felületnek egy különlegessége, hogy ez egy beágyazott minimálfelület, melynek egyik vége homeomorf a csavarfelület végével [3].



3. ábra. Köln városa a középkorban.

## 2. Matematikai és mechanikai háttér

Ez a fejezet a téma megértéséhez szükséges definíciókat és alapvető matematikai tételeket és mechanikai ismereteket foglalja össze.

### 2.1. Differenciálgeometriai alapok

#### 2.1.1. Térgörbék és felületek görbülete

**2.1. Definíció.** Legyen  $S \subseteq \mathbb{R}$  egy intervallum. Az  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizált görbe, ha  $\forall s \in S$ -re  $f'(s) \neq 0$  teljesül.

**2.2. Definíció.** Az  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  görbe sima, ha  $f \in C^\infty(S)$ , azaz  $f$  folytonosan végtelenszer differenciálható.

**2.3. Definíció.**  $F \subset \mathbb{R}^3$  reguláris felület, ha  $\forall P \in F$  pontjához létezik a  $P \in V \subset \mathbb{R}^3$  nyílt környezet és  $U \subset \mathbb{R}^2$  nyílt halmaz, hogy megadható egy  $\phi : U \rightarrow V \cap F$  differenciálható homeomorfizmus, ami immerzió. A  $\phi$  leképzést a felület paraméterezésének nevezzük.

A gömb jól ismert paraméterezése a hosszúsági és szélességi körök bevezetésével történik. Ekkor a pólusok kivételével a gömb bármely pontja egyértelműen beazonosítható a hosszúsági és szélességi fokok segítségével. A pólusokban viszont szingularitás lép fel, hiszen ezek hosszúsági adata nem egyértelmű. Ilyen értelemben a gömb a pólusok körüli tetszőlegesen kicsiny  $\Delta F_{\text{north}}$  és  $\Delta F_{\text{south}}$  felületdarabok eltávolításával tehető reguláris felületté.

**2.4. Definíció.** Az  $f$  parametrizált görbe egy tetszőleges pontjához tartozó  $k$  görbület az adott ponthoz tartozó simulókör  $R$  sugarának reciproka:  $k = 1/R$



**2.5. Definíció.** *Egy reguláris felület belső pontjaiban a felület normális irányát tartalmazó módon, egymásra merőleges irányokban metszve a metszősíkokon keletkező görbék görbülete  $\kappa_1$  és  $\kappa_2$ . Igazolható, hogy létezik legalább egy iránypár, ahol  $\kappa_1$  maximális és  $\kappa_2$  minimális. Ezen  $\kappa_1$  és  $\kappa_2$  görbületeket főgörbületeknek nevezzük.*

**2.1. Megjegyzés.** *Felületek esetében, amennyiben a  $P$  pont főgörbületeihez tartozó simulókört tartalmazó gömbök középpontja a felület eltérő oldalán található, akkor a főgörbületek előjele különböző. A főgörbület előjele az ún. alakoperátor bevezetésével egyértelműen definiálható, de jelen munkában erre nem térek ki.*

A reguláris felületek jól jellemezhetőek a főgörbületekből származtatott mennyiségek segítségével.

**2.6. Definíció.** *Egy  $F$  reguláris felület egy adott  $P$  pontjának  $K$  Gauss- vagy szorzatgörbületén a  $\kappa_1$  és  $\kappa_2$  főgörbületek szorzatát értjük:*

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \tag{1}$$

**2.7. Definíció.** *Egy  $F$  reguláris felület egy adott  $P$  pontjának  $H$  Minkowski- vagy átlaggörbületén a  $\kappa_1$  és  $\kappa_2$  főgörbületek átlagát értjük:*

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \tag{2}$$

**2.8. Definíció.** *Egy  $F$  reguláris felület egy  $P$  pontja umbilikus, amennyiben a főgörbületei megegyeznek, azaz  $\kappa_1 = \kappa_2$ .*

**2.9. Definíció.** *Amennyiben egy  $F$  reguláris felület minden  $P$  pontjára teljesül, hogy  $H = 0$ , akkor  $F$  egy minimálfelület.*

**2.10. Definíció.** *Amennyiben egy  $F$  reguláris felület minden  $P$  pontjára teljesül, hogy  $H = c$ , ahol  $c \neq 0$  valós szám, akkor  $F$  egy általánosított minimálfelület.*

A minimálfelületek részletes ismertetését, különböző definícióit és példáit a függelékben foglaltam össze. Ezek után tekintsük át, hogy hogyan tudjuk megkapni a főgörbületeket a  $H$  átlag és a  $K$  szorzatgörbület felhasználásával.

**2.1. Állítás.** *Egy  $F$  reguláris felület  $\kappa_1$  és  $\kappa_2$  főgörbületei a következőképpen számíthatóak  $H$  és  $K$  ismeretében:*

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ \kappa_2 &= H - \sqrt{H^2 - K}. \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* Az (1) és (2) egyenletekben a  $\kappa_1$  és  $\kappa_2$  főgörbületeket ismeretlennek tekintve és az egyenletrendszert megoldva az állítás következik.  $\square$

**2.2. Állítás.** *Az  $F$  reguláris felület egy  $P \in F$  pontja umbilikus, akkor és csak akkor ha teljesül a következő összefüggés:*

$$H^2 - K = 0$$

*Bizonyítás.* Az (1) és (2) egyenletekben segítségével fejtsük ki az állításban szereplő összefüggést:

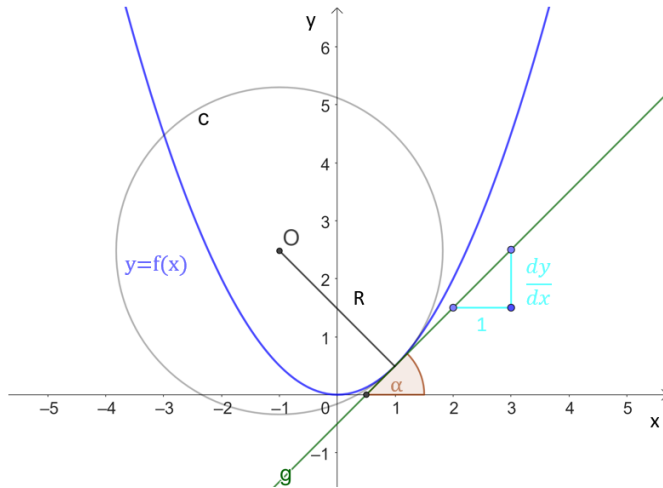
$$\begin{aligned} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^2 - \kappa_1\kappa_2 &= 0 \\ \frac{\kappa_1^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 - 4\kappa_1\kappa_2}{4} &= 0 \\ \frac{\kappa_1^2 - 2\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2}{4} &= 0 \\ \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ez csak akkor lehetséges, ha  $\kappa_1 = \kappa_2$ .  $\square$

### 2.1.2. Izotrópikus geometria

Ebben az alfejezetben ismertetem az ún. izotrópikus geometria alapjait. Az izotrópikus geometria olyan felületek vizsgálatában nyújt segítséget, ahol egy kitüntetett irány, esetünkben a függőleges irány, kiemelt szerepet játszik [22, 24]. Az izotrópikus geometriában a *távolság*, a *szög* és a *görbület* fogalma eltér az euklideszi geometriában megszokottól. Ezen fogalmakat a felület vízszintes síkra vett merőleges vetületéből származtatjuk. A legegyszerűbb egy ábrán szemléltetni a két geometria közötti eltérést (4. ábra).

Először tekintsük a  $y = f(x)$  függvény egy  $P$  pontjában az érintő irányát! Az egyik lehetőség, hogy az *érintő iránya* nem más, mint az érintő egyenese és a referencia tengely által bezárt  $\alpha$  szög. Másik lehetőség, hogy az érintő meredekségét  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$  tekintjük az érintő irányának (4. ábra). Az első lehetőséget vizsgálva arra juthatunk, hogy a  $k$  görbület az  $\alpha$  szög  $s$  ívhossz menti megváltozásával áll kapcsolatban, azaz  $k = \frac{d\alpha}{ds}$ . Ez nem más, mint az Euklideszi geometria 2.4. definícióval adott görbülete. Amennyiben az érintőt a meredekségével jellemezzük, akkor adódik, hogy a meredekség megváltozása, azaz a görbület nem más, mint  $\frac{d^2y}{dx^2}$ . A továbbiakban az



	Euklideszi geometria	Izotrópikus geometria
Érintő iránya	$\alpha$	$\frac{dy}{dx}$
Görbület	$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$	$\kappa^i = \frac{d^2y}{dx^2}$

4. ábra. Az érintő iránya és a görbület az Euklideszi és az izotrópikus geometriában.

izotrópikus mennyiségekre az  $(\cdot)^i$  jelölés utal. Ezek alapján egy  $y = f(x)$  síkgörbe  $k^i$  izotrópikus görbülete:

$$k^i = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

A konstrukcióból következik, hogy az izotrópikus geometria az Euler-Monge-féle alakban megadható (ún. explicit)  $F$  felületek vizsgálatára használható, azaz

$$F : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)). \quad (3)$$

Vezessük be az  $f(x, y)$  függvény  $M$  Hesse mátrixát:

$$M(f) := \begin{bmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{yx} f & \partial_{yy} f \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Érdemes megjegyezni, hogy az izotrópikus geometriában az  $M$  mátrix felel meg az Euklideszi térbe ágyazott, görbült felületet jellemző Weingarten leképzés mátrixának. Az  $M$  mátrixról tudjuk, hogy valós, szimmetrikus mátrix. Következik, hogy létezik legalább kettő, egymásra merőleges sajátvektora. Ezeket a továbbiakban *i-főirányoknak* hívjuk. Az  $M$  mátrix maximális és minimális sajátértékeit *i-főgörbületeknek* nevezzük, jelük:  $(\kappa_1^i, \kappa_2^i)$ . Ezen mennyiségek segítségével egy, a (3) összefüggéssel adott  $F$  felület izotrópikus átlag és Gauss görbülete származtatható:

**2.11. Definíció.** Az izotrópikus geometriában az  $F$  felület egy adott pontjának  $K^i$  Gauss- vagy szorzatgörbületén az  $M$  Hesse mátrix determinánsát értjük:

$$K^i = \det M = \partial_{xx}f\partial_{yy}f - (\partial_{xy}f)^2 = \kappa_1^i\kappa_2^i. \quad (5)$$

**2.12. Definíció.** Az izotrópikus geometriában az  $F$  felület egy adott pontjának  $H^i$  Minkowski vagy átlaggörbületén az  $M$  Hesse mátrix fél nyomát értjük:

$$H^i = \frac{1}{2}\text{Tr}(M) = \frac{1}{2}(\partial_{xx}f + \partial_{yy}f) = \frac{1}{2}\Delta f = \frac{1}{2}(\kappa_1^i + \kappa_2^i). \quad (6)$$

A 2.8., a 2.9., a 2.10. definíciók és a 2.1., 2.2. állítások az izotrópikus geometriában is értelmesek és érvényesek. Az egyértelműség kedvéért a  $H^i \equiv 0$  feltételt kielégítő felületet *i-minimálfelületnek*, a  $H^i \equiv \text{const}$  feltételt kielégítő felületet pedig *általánosított i-minimálfelületnek* nevezem a továbbiakban.

Egy, a (3) alakban megadható  $F$  felület Euklideszi geometria szerinti  $K$  és  $H$  görbületei az izotrópikus megfelelőik közötti kapcsolat a következő módokon adható meg:

**2.13. Definíció.** Egy  $F$  reguláris felület adott  $P$  pontjának  $K$  szorzatgörbülete a

$$K = \frac{\partial_{xx}f\partial_{yy}f - (\partial_{xy}f)^2}{(1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2)^2} = \frac{K^i}{(1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2)^2} \quad (7)$$

összefüggést követi.

**2.14. Definíció.** Egy  $F$  reguláris felület adott  $P$  pontjának  $H$  átlaggörbülete a

$$H = \frac{1}{2} \frac{\partial_{xx}f(1 + (\partial_y f)^2) - 2\partial_{xy}f\partial_x f\partial_y f + \partial_{yy}f(1 + (\partial_x f)^2)}{(1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2)^{3/2}} = \frac{H^i + \frac{1}{2}\nabla f \overline{M}(f) \nabla f}{(1 + (\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2)^{3/2}}$$

összefüggést követi, ahol

$$\overline{M}(f) := \begin{bmatrix} \partial_{yy}f & -\partial_{xy}f \\ -\partial_{xy}f & \partial_{xx}f \end{bmatrix}. \quad (8)$$

**Megjegyzés:** Az iménti két kifejezés jól mutatja, hogy amennyiben  $\partial_x f \rightarrow 0$  és  $\partial_y f \rightarrow 0$ , akkor  $K \rightarrow K^i$  és  $H \rightarrow H^i$ . Mérnöki értelemben ez azt jelenti, hogy a *lapos héjaknál* az izotrópikus geometria kis hibával közelíti az euklideszi geometria szerint számított alakjellemzőket. Ugyanakkor fontos kiemelni, hogy a dolgozatban az izotrópikus geometriára nem az euklideszi geometria approximációjaként tekin-

tek, hanem azt tetszőlegesen görbült felületekre is értelmezem és használom.

A  $K$  és  $H$ , illetve a  $K^i$  és  $H^i$  mennyiségek nem csak az egyes felületi pontokat jellemzik, hanem eloszlásuk a felület mentén jól jellemzi a felületet. Például, a gömb minden pontjában  $K$  és  $H$  egyaránt konstans mennyiségek. A dolgozatban elsősorban olyan felületeket vizsgál, ahol a  $K$  és  $H$ , illetve  $K^i$  és  $H^i$  a felület pontjaiban kiértékelve lineáris összefüggést követnek. Ezért vizsgálataim eredményét a  $K - H$ , illetve a  $K^i - H^i$  síkokon mutatom be.

## 2.2. A $K - H$ és $K^i - H^i$ síkok

Láttuk, hogy egy reguláris felületet minden pontjában jellemezhetünk a  $\kappa_1$  és  $\kappa_2$  főgörbületeivel. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a  $\kappa_1 \geq \kappa_2$  reláció teljesül. Először vizsgáljuk azt az esetet, ha  $\kappa_1 \geq 0$  és  $\kappa_2 \geq 0$ ! Ekkor tekintsük a főgörbületek számtani és mértani közepét! Jól ismert, hogy a számtani és a mértani közepek között fennáll a következő egyenlőtlenség, amit az alábbi levezetés is igazol:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} &\geq \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \\ \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right)^2 &\geq \kappa_1 \kappa_2 \\ \frac{\kappa_1^2 + 2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2}{4} &\geq \kappa_1 \kappa_2 \\ \frac{\kappa_1^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2}{4} &\geq 0 \\ \kappa_1^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 &\geq 0 \\ (\kappa_1 - \kappa_2)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség rendezése után azt kapjuk, hogy a bal oldalon egy teljes négyzet szerepel, mely mindig nagyobb egyenlő mint 0. Továbbá, azt találjuk, hogy az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $\kappa_1 = \kappa_2$ . A 2.7. és 2.6. definíciók alapján tehát

$$H \geq \sqrt{K}.$$

Amennyiben  $\kappa_1 \leq 0$  és  $\kappa_2 \leq 0$ , akkor a fenti érveléshez hasonló módon igazolható, hogy

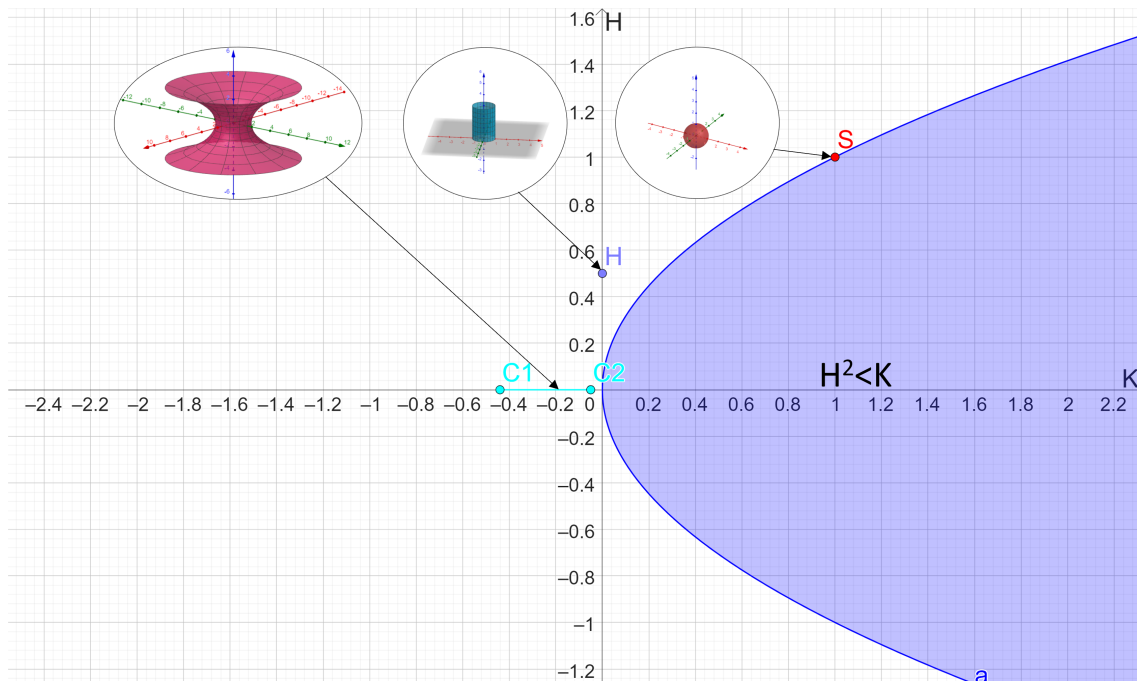
$$-H \geq \sqrt{K}.$$

Végezetül, legyen  $\kappa_1 > 0$  és  $\kappa_2 \leq 0$ , azaz  $K \leq 0$ . Ekkor elemi eszközökkel belátható, hogy az (1) és (2) egyenletek megoldása egy másodfokú egyenlet megoldását követeli meg. Ezen egyenlet diszkriminánsa bármely  $H \in \mathbb{R}$  és  $K < 0$  választása esetén pozitív, azaz létezik olyan  $\kappa_1 > 0$  és  $\kappa_2 \leq 0$ , ami a választott  $H$  és  $K$  értékeket adja.

Ezzel beláttuk, hogy a

$$P : H^2 = K$$

parabolán kívül a  $K - H$  és  $K^i - H^i$  síkok bármely pontja jellemezhet felületi pontot. A  $H^2 < K$  tartomány pontjainak pedig nem felelhet meg  $F$  egyetlen felületi pontja sem. Azt találjuk tehát, hogy a 2.8. definíció szerinti umbilikus pontok a  $P$  parabola mentén helyezkednek el, és a  $H^2 < K$  egyenlőtlenséggel jellemezhető tartományban nem lehet felületi pont. Ezt a tartományt a 5. ábrán és a további ábrákon lila szín jelöli. A fenti érvelés a  $H^i$  és  $K^i$  izotrópikus görbületekre hasonló módon vonatkozik.



5. ábra. A gömb, a henger és a katenoid a  $K - H$  síkon.

A  $K - H$  síkon minden reguláris felület egy zárt ponthalmaznak felel meg. Tekintsünk három egyszerű példát (lásd az 5. ábrán):

- Gömb. A gömb minden pontjában minden irány főirány, a simulókör sugara pedig minden esetben a gömb sugara. Így könnyen látható, hogy a  $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{R}$ . Ebből következik, hogy a gömb átlaggörbülete  $H = \frac{1}{R}$ , Gauss-görbülete pedig  $K = \frac{1}{R^2}$ . Egységgömb esetén  $R = 1$  miatt  $K_G = 1$  és  $H_G = 1$ . ábrázolva

a gömb minden pontját a  $K - H$  térben azt látjuk, hogy ezek mindegyike umbilikus, mind a  $P$  parabola  $(1, 1)$  pontjának felel meg.

- Hengerpalást. Egységsugarú hengert feltételezve az egyik főgörbület  $\kappa_1 = 1$ , a másik  $\kappa_2 = 0$ , mivel az egyenes alkotó simuló körének  $R$  sugara  $R = \infty$ . Ezáltal az átlaggörbülete  $H = \frac{1}{2}$ , a szorzatgörbülete pedig  $K = 0$ . Mivel ezen értékek a hengerpalást minden pontjában állandók így a hengerpalást a  $K - H$  síkon a  $(0, 0.5)$  pontnak felel meg. Ez nem esik rá a  $P$  parabolára, a pontok nem umbilikusak.
- Minimálfelület. A 2.9. definíció alapján egy minimálfelület a  $H = 0$  egyenesre eső szakasznak feleltethető meg. Az 5. ábrán a katenoidnak megfelelő ponthalmazt ábrázolom, az egyéb minimálfelületek ismertetése a függelékben található.

Minimálfelület			Minimálfelület-Umbilikus		
	U	N		U	N
A			A		
B			B		
C			C		

6. ábra. Különböző felületek osztályozása a  $K-H$  síkon.

Vegyük észre, hogy amennyiben egy felület egy ponttal jellemezhető a  $K - H$  síkon, akkor alapvetően két eset lehetséges:

- A felület csupa umbilikus pontból áll, mert rajta van a  $P$  parabolán (erre példa a gömb),
- A felületnek nincs umbilikus pontja, mert a  $P$  parabolán kívül helyezkedik el (erre példa a hengerpalást).

Amennyiben egy felületnek egyenes felel meg a  $K - H$  síkon, az osztályozás összetettebbé válik. Itt bevezetek egy, a  $K - H$  síkon található szakaszok osztályozására szolgáló módszert, amit táblázatban foglalkok össze. A táblázat három sorból és két oszlopból áll. Az oszlopok azt jelölik, hogy a felületnek létezik-e umbilikus pontja, vagy nem (U, N). A sorok pedig a felületekhez rendelhető szakasz  $e$  egyenesének viszonyát rögzítik a  $P$  parabolához képest. Az  $A$  esetben az  $e$  egyenes metszi, a  $B$

esetben érinti, a  $C$  esetben pedig elkerüli a parabolát. Az osztályozáshoz szükséges, hogy a felületet egy nem nullmértékű szakasz jellemezze a  $K - H$  síkon. Például egy umbilikus pont nélküli minimálfelületet az  $(A, N)$  osztályba tudunk sorolni, míg egy olyan minimálfelület, amelynek van a  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$  összefüggést kielégítő pontja az  $(A, U)$  osztályba sorolható.

Ezek után szemléltessük a különbséget az euklideszi geometria és az izotrópikus geometria között! Célunk olyan felületek konstruálása, melyek a  $K^i - H^i$  síkon ugyanott helyezkednek el, mint az 5. ábrán szereplő gömb, henger és katenoid a  $K - H$  síkon. Kezdjük a gömbnek megfeleltethető felülettel. A gömb minden pontja a  $K - H$  síkon az  $(1, 1)$  pontban található. Tehát egy olyan felületet kell konstruálnunk, melynek az izotrópikus és az euklideszi geometriában az átlag és szorzatgörbülete egyaránt 1 minden pontjában.

Legyen  $F_1$  a (3) összefüggésnek megfelelő felület. Elvárásaink a 2.11. és 2.12. definíciók szerint tehát

$$\begin{aligned} H^i &= \frac{1}{2}\Delta f = 1 & \wedge & & K^i &= \det(M) = 1 \\ \partial_{xx}f + \partial_{yy}f &= 2 & \wedge & & \partial_{xx}f\partial_{yy}f - (\partial_{xy}f)^2 &= 1 \end{aligned}$$

**2.3. Állítás.** *Az  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$  függvénnyel meghatározott  $F_1$  felület kielégíti az elvárásokat.*

*Bizonyítás.* Számoljuk ki a parciális deriváltakat!  $\partial_x f = x$ ,  $\partial_y f = y$ ,  $\partial_{xx}f = 1$ ,  $\partial_{yy}f = 1$  és  $\partial_{xy}f = 0$ . Ezekből következik, hogy:

$$H^i = 1 \quad \wedge \quad K^i = 1 \quad \forall (x, y) \in \text{Dom}f$$

□

Amennyiben a henger izotrópikus megfelelőjét keressük, akkor a (3) összefüggésnek megfelelő  $F_2$  felülettel szembeni elvárások:

$$\begin{aligned} H^i &= \frac{1}{2}\Delta f = \frac{1}{2} & \wedge & & K^i &= \det(M) = 0 \\ \partial_{xx}f + \partial_{yy}f &= 1 & \wedge & & \partial_{xx}f\partial_{yy}f - (\partial_{xy}f)^2 &= 0 \end{aligned}$$

**2.4. Állítás.** *Az  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y$  függvénnyel meghatározott  $F_2$  felület kielégíti ezen elvárásokat.*



*Bizonyítás.* Számoljuk ki a parciális deriváltakat!  $\partial_x f = x$ ,  $\partial_y f = 1$ ,  $\partial_{xx} f = 1$ ,  $\partial_{yy} f = 0$  és  $\partial_{xy} f = 0$ . Ezekből következik, hogy:

$$H^i = 1 \quad \wedge \quad K^i = 0 \quad \forall (x, y) \in \text{Dom} f$$

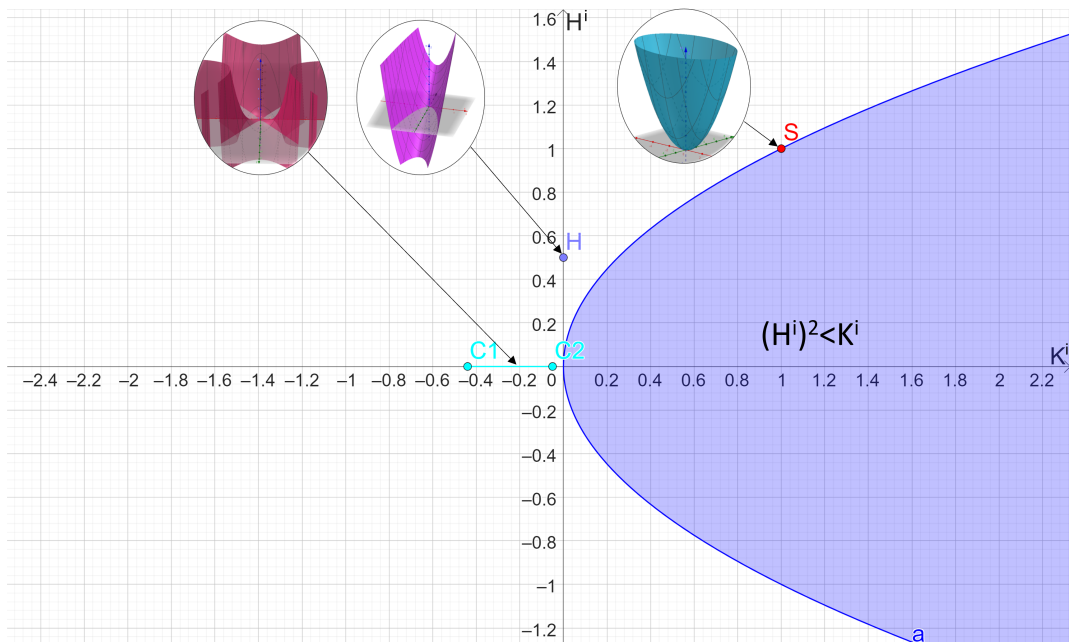
□

Végül keressük meg azt a felületet, amely megfeleltethető a katenoidnak. Egyszerűsítésként célunk egy vízszintes szakasz létrehozása a  $K^i - H^i$  síkon, következőképp:

$$H^i = \frac{1}{2} \Delta f = 0$$

$$\partial_{xx} f + \partial_{yy} f = 0$$

$$\partial_{xx} f = -\partial_{yy} f$$



7. ábra. A gömb, a henger és a minimálfelület megfelelői az izotrópikus  $K^i - H^i$  síkon.

**2.5. Állítás.** Az  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3$  függvénnyel meghatározott  $F_3$  felület kielégíti ezen elvárásokat.

*Bizonyítás.* Számoljuk ki a parciális deriváltakat!

$$\partial_x = \frac{1}{2}2xy = xy$$

$$\partial_y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}3y^2$$

$$\partial_{xx} = y$$

$$\partial_{yy} = 0 - \frac{1}{6}6y = -y$$

$$\partial_{xy} = x$$

Ezekből következik, hogy:

$$H^i = 0 \quad \forall (x, y) \in \text{Dom}f$$

□

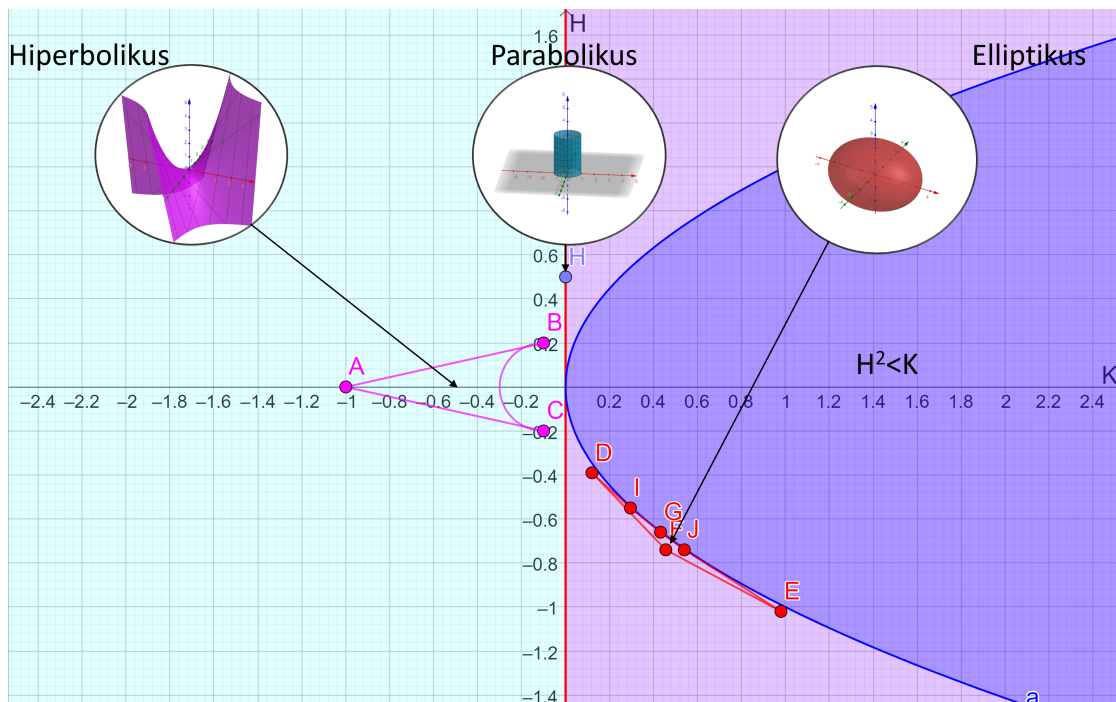
A három, imént konstruált felületet a 7. ábra mutatja be a  $K^i - H^i$  síkon.

**Megjegyzés:** A  $K - H$  sík alkalmas arra is, hogy a felületek jól ismert, szorzatgörbület szerinti osztályozását bemutassuk. A  $K < 0$  félsíkon a hiperbolikus, a  $K > 0$  félsíkon az elliptikus, míg a  $K = 0$  egyenesen a parabolikus felületek találhatók. Ezt a 8. ábrán mutatom be. Vegyük észre, hogy az izotrópikus és euklideszi geometriában a felületi pontok szorzatgörbületének előjele, így a felületi pontok osztályozása  $K$ , illetve  $K^i$  szerint megegyezik, ahogy azt a (7) összefüggés is mutatja.

A fentiek ismeretében adódik a  $K - H$ , illetve  $K^i - H^i$  síkok nem zérus meredekségű egyenesének megfelelő felületek bevezetése, amit a következő alfejezetben teszünk meg.

### 2.3. Lineáris Weingarten-felületek

A  $K - H$  síkon egyenesnek megfeleltethető felületek az úgynevezett Weingarten-felületek. Nevüket Julius Weingartenről kapták, arról aki először tanulmányozta őket. Kutatásai során jelentős eredményeket ért el. Belátta, hogy egy Weingarten-felület főgörbületeihez tartozó körök középpontjainak halmaza izometrikus egy olyan forgásfelülettel, amit az  $f(\kappa_1, \kappa_2) = 0$  görbületi összefüggés határoz meg [29, 30]. A Weingarten-felületek osztályozása és vizsgálata a mai napig sem zárult le. Felhasználásuk az alkalmazások szempontjából is jelentős. Például jelen dolgozat a membrán héjak elméletében játszott szerepükre mutat rá.



8. ábra. Felületek osztályozása a  $K-H$  síkon a pontjainak szorzatgörbületük szerint.

**2.15. Definíció.** Egy  $W$  reguláris felület Weingarten felület (a továbbiakban:  $W$ -felület), ha a  $(\kappa_1, \kappa_2)$  főgörbületei, valamint a  $H$  átlag és  $K$  szorzatgörbületük alapján a következőképp karakterizálhatók:

$$f(\kappa_1, \kappa_2) = 0 \quad \text{vagy} \quad g(H, K) = 0$$

ahol  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  elegendően sima, kétváltozós függvények. [20]

**2.16. Definíció.** Egy  $W$  reguláris felület lineáris Weingarten felület (a továbbiakban  $LW$  felület), ha a 2.15. definícióban  $g(.,.)$  lineáris, azaz  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  konstansokra a felület minden pontjában fennáll az

$$\alpha + \beta H + \gamma K = 0 \tag{9}$$

egyenlet [5].

**Megjegyzés:** Azok a felületek, melyeknek konstans a  $H$  átlaggörbület, azok mind  $LW$  felületek, hiszen  $\gamma = 0$  választással kielégítik a (9) egyenletet. Láttuk, hogy  $H \equiv 0$  esetén minimálfelületekről,  $H \equiv \text{const}$  esetben pedig általánosított minimálfelületekről beszélünk. Ennek nyomán gondolhatunk úgy az  $LW$  felületekre, mint a minimálfelületek egy további általánosítására.

Az előző fejezetben már bevezettem az izotrópikus geometriát. Ezek után termé-

szetes módon jön elő a kérdés, hogy érdemes-e az izotrópikus lineáris Weingarten felületekkel foglalkozni? A válasz a kérdésre az, hogy igen, mert az építészetben használt membrán felületek alakja függőleges teher alatt éppen egy izotrópikus lineáris Weingarten felület. Ezt a következő rész tárgyalja részletesen, előtte még szükséges a következő rögzítése:

**2.17. Definíció.** *Egy  $W$  reguláris felület izotrópikus lineáris Weingarten felület (a továbbiakban  $i$ -LW), ha  $a, b, c \in \mathbb{R}$  konstansokra a felület minden pontjában teljesül az*

$$a + bH^i + cK^i = 0 \quad (10)$$

*egyenlet [26].*

**Megjegyzés:** Amíg a minimálfelületek és az általánosított minimálfelületek csak A típusúak lehetnek a bevezetett osztályozás (6. ábra) szerint, addig az LW és  $i$ -LW felületek a táblázat bármely mezőjébe eshetnek.

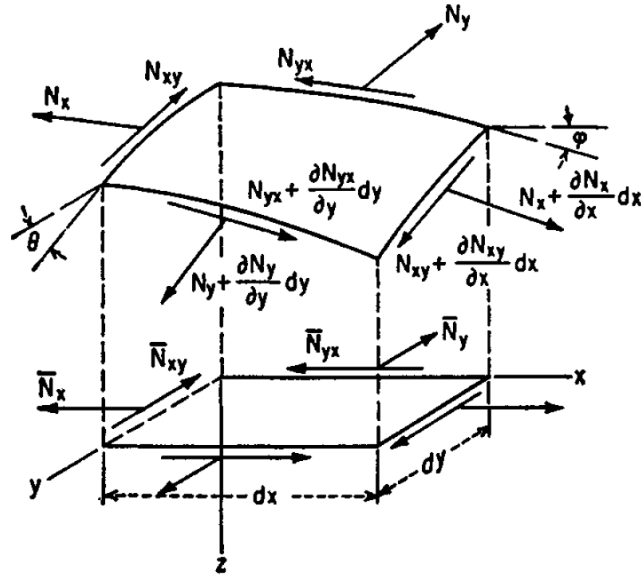
## 2.4. Mechanikai, héjelméleti alapok

Ebben a részben a membránhéjak alakját és az LW, illetve  $i$ -LW felületek kapcsolatát foglalom össze. Tekintsük először a héjszerkezeteket. *Héj* alatt egy olyan felületszerkezetet értünk, melynek vastagsága a többi kiterjedéséhez képest érdemben kisebb, térbeli középfelületük görbült. Terhük lehet a felületre merőleges, vagy adott irányú (pl.: gravitációs) teher. A terhek hatására a felület érintősíkjában normál- és nyíróerők, arra merőlegesen pedig nyíróerők, hajlító- és csavarónyomatékok ébrednek. Általános esetben tehát a héjak síkjukban tárcsaként, az érintősíkra merőlegesen pedig lemezként viselkednek, azaz a tér minden irányában van merevségük. A héjszerkezetek speciális csoportját jelentik a *hajlításmentes héjak*, vagy más néven *membránhéjak*. A membránhéjakon belül különös jelentőséggel bírnak a nyírásmentes *hártyafelületek*.

### 2.4.1. A membránhéjak egyensúlyáról

Vizsgáljunk egy adott terhelés alatt membránhéjként viselkedő szerkezetet! Általános esetben egy  $2v$  vastagságú héjat a középfelületével adunk meg. Az  $[x, y]$  sík felett a középfelületet a  $z = f(x, y)$  függvény írja le. Membránhéjak esetében az egyensúlyt az érintősíkban fellépő normálerő és nyíróerő komponensek biztosítják [27]. Ezeket a középfelületen értelmezzük. Tekintsük a héj egy kis kiemelt elemét, melyre ható megoszló teher komponensei az  $xy$ -sík egységnyi területére vetítve rendre

$q_x, q_y, q_z$ . Követve a 9. ábra jelöléseit, az elem egyensúlyi egyenletei a következőként írhatók fel:



9. ábra. Feszültségek értelmezése egy felületdarabon. A [27] publikáció ábrája.

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} + q_x = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + q_y = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{N}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \bar{N}_{xy} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{N}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \bar{N}_{xy} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - q_z = 0. \quad (13)$$

Amennyiben csak függőleges teher hat a szerkezeten ( $q_x = q_y = 0$ ) és kihasználva, hogy  $\bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx}$ , következik, hogy az (11)-(13) egyenletrendszer a következő alakban írható:

$$\operatorname{div} \bar{N} = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{div}(\bar{N} \nabla f) = q_z. \quad (15)$$

Kihasználva a (14) összefüggést, a (15) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\bar{N}_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = q_z. \quad (16)$$

Követve [26] levezetését, tegyük fel, hogy az  $z = f(x, y)$  felület a (10) összefüggést követi. Megmutatjuk, hogy az

$$\bar{N} = -\frac{q_z}{2a}(bI + c\bar{M}(f)) \quad (17)$$

függvénnyel adott vetületi feszültségek kielégítik a (14) és (16) egyensúlyi egyenleteket, ahol  $I$  a  $2 \times 2$ -es egységmátrix és  $\bar{M}(f)$  a (8) összefüggés szerinti mátrix.

A vetületi egyensúly számítása a (17) vetületi erőkre:

$$\operatorname{div}\bar{N} = \operatorname{div}\left(-\frac{q_z}{2a}(bI + c\bar{M}(f))\right) = \operatorname{div}\left(-\frac{q_z c}{2a}(\bar{M}(f))\right) = -\frac{q_z c}{2a} \begin{bmatrix} \partial_{yyx}f - \partial_{xyy}f \\ -\partial_{xyx}f + \partial_{xxy}f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A nyomatéki egyensúly igazolása a (16) összefüggés alapján pedig:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= q_z, \\ -\frac{q_z}{2a}(b + c\partial_{yy}f)\partial_{xx}f - 2\frac{q_z}{2a}(c\partial_{xy}f)\partial_{xy}f - \frac{q_z}{2a}(b + c\partial_{xx}f)\partial_{yy}f &= q_z, \\ -a - \frac{b}{2}(\partial_{xx}f + \partial_{yy}f) - c(\partial_{xx}f\partial_{yy}f - \partial_{xy}f\partial_{xy}f) &= 0, \\ -a - bH^i - cK^i &= 0, \end{aligned}$$

ami éppen az i-LW felületet definiáló összefüggéssel, azaz a (10) egyenlettel egyezik meg. Azt találtuk tehát, hogy állandó, függőleges teherrel terhelt i-LW felület membránhéként viseli a terheit, belső erői a (17) összefüggést követik. Vegyük észre, hogy a megoldás  $c = 0$  esetén is érvényes. Ebben az esetben a felület nem más, mint az általánosított i-minimálfelület. A [26] publikáció alapján az általánosított i-minimálfelületek azonosak a Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék professzora után Pelikán-hártyának nevezett felületekkel [19].

**2.6. Állítás.** *Egy függőlegesen megoszló, állandó nagyságú  $q_z$  teherrel terhelt i-LW felület alakja nem függ a teher nagyságától, minden  $q_z \neq 0$  teherre membránhéként viselkedik.*

*Bizonyítás.* Az (14)-(15) egyensúlyi egyenletekből  $q_z$  kiemelhető, így azok  $q_z$  értékétől függetlenül teljesülnek, vagy nem teljesülnek.  $\square$

Érdemes megemlíteni, hogy amennyiben a  $q$  teher nem függőleges, hanem állandó hidrosztatikus nyomás, akkor az  $LW$  felület egyensúlyi megoldást ad [23]. Többek között az ebben a részben bemutatott mechanikai motiváció mutatja, hogy rögzített

peremekre illeszkedő LW és i-LW felületek számítása nem csak az elmélet, hanem a gyakorlat számára is fontos kérdés. Ennek nehézségére mutat rá a következő rész.

## 2.5. A Monge-Ampère egyenlet

A (valós) Monge-Ampère egyenlet egy nemlineáris, másodrendű parciális differenciálegyenlet (PDE), kétváltozós  $u(x, y)$  ismeretlen esetén az  $M(u)$  Hesse mátrix determinánsát tartalmazza. Jelölje  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  az  $u$  függvény értelmezési tartományát és  $\partial\Omega$  ennek határát!

**2.18. Definíció.** *A következő egyenletet, Monge-Ampère egyenletnek nevezzük:*

$$\begin{cases} \det M(u(x, y)) + p\Delta u(x, y) &= f(x, y) & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (18)$$

ahol  $p \in \mathbb{R}$  rögzített paraméter,  $f(.,.)$  és  $g(.,.)$  elegendően sima függvények,  $M(.)$  a Hesse-mátrixot jelöli és  $\Delta(.)$  a Laplace operátor [13].

**2.19. Definíció.** *Egy  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  klasszikus megoldása a Monge-Ampère egyenletnek, amennyiben kielégíti a (18) peremérték feladatot minden  $(x, y) \in \bar{\Omega}$ .*

Fontos kiemelni, hogy ellentétben a Dirichlet peremfeltétellel ellátott  $\Delta u = f(x, y)$  Laplace egyenlettel, az elliptikus Monge-Ampère egyenletnek Dirichlet peremfeltételek mellett sem feltétlenül létezik klasszikus megoldása. Amennyiben létezik, akkor sem garantálható, hogy ez az egyetlen megoldás.

A Monge-Ampère egyenlet számos helyen előfordul geometriai alkalmazások terén, a teljesség igénye nélkül ezek közül néhány példa: reflektor tervezési probléma, affin plateaui probléma, stb. Vegyük észre, hogy az i-LW felület és lényegében az LW felület számítása is, a Monge-Ampère egyenlet megoldását követeli meg. Az egyenlet nehézsége abban rejlik, hogy a (4) összefüggés szerint az  $M$  Hesse mátrix determinánsa a másodrendű deriváltak nemlineáris függvénye, és ezek egyben az egyenletben előforduló legmagasabb rendű deriváltak (azaz az egyenlet nem alakítható át kvázi-lineáris PDE-té). Monge-Ampère egyenlet megoldásainak klasszifikációja, illetve megbízható numerikus eljárások fejlesztése a mai napig aktívan kutatott terület.

Egy lehetséges módszer az elliptikus Monge-Ampère típusú differenciálegyenletek megoldásának numerikus approximációjára a [6] cikkben bővebben bemutatott ún. nyeregponthoz formulációs eljárás alkalmazása iteratív Lagrange közelítéssel. A szerzőpárosnak egy másik, kis numerikus hibával rendelkező megoldási módszere a legkisebb négyzetekkel történő közelítés [7]. További megoldási módszerek (véges diffe-

renciák módszere, iteratív megoldás Poisson egyenletek sorozataként) pedig az [1] cikkben található.

Az irodalmi példákkal szemben dolgozatomban egy olyan megoldási irányt javaslok, amelyben egy időfüggő evolúciós egyenlet stacionárius megoldásaként állnak elő a peremük mentén adott, de egyébkét ismeretlen LW és i-LW felületek. Az alkalmazni kívánt evolúciós egyenletet a következő rész mutatja be.

## 2.6. A Bloore egyenlet

A morfológia területén a felületek időbeni változását gyakran a reguláris  $F$  felület tetszőleges  $P$  pontjában vett  $n$  normális irányú  $v$  sebességgel adják meg. Egyes fizikai folyamatokban a  $v$  sebesség a felület  $K$  és  $H$  görbületeinek függvénye. Az evolúciós egyenlet, valójában egy PDE, egyszerű alakban tehát így írható:

$$v = f(H, K),$$

ahol az  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , elegendően reguláris függvényt szokás *kopási törvénynek* is nevezni. Kavicsok kopását vizsgálva F.J. Bloore általánosította W. J. Firey modelljét [12]. Bloore modelljében a  $v$  kopási sebesség a  $K$  és  $H$  görbületek lineáris függvénye, azaz

$$v = c_1 + c_2H + c_3K,$$

ahol  $c_1, c_2$  és  $c_3$  rögzített (kopási modellekben nemnegatív) valós számok [2].

A Bloore egyenlet egy gömbbel homeomorf  $K$  test kopását írja le, alkalmas például véges méretű részecskékkel koptatott kavicsok alakfejlődésének vizsgálatára [18]. A [9, 25] cikkekben egy olyan modellt mutatnak be, amely valós geofizikai kontextusban írja le lamináris áramlással koptatott sziklák kopási folyamatát. A modell a Bloore egyenletet olyan módon írja fel, hogy az az egyirányból érkező ütközések koptató hatását approximálja. Ekkor az  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  értelmezési tartomány feletti  $z = f(t, x, y)$  függvény időfejlődését a következő PDE határozza meg:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = c_1 + c_2H(f) + c_3K(f). \quad (19)$$

Ezt az egyenletet megfelelő kezdeti és peremfeltételekkel ellátva az *egyirányú Bloore folyamat* definiálja.

**2.20. Definíció.** Az  $\Omega$  tartomány felett értelmezett azon  $F$  felületet, amely minden  $(x, y) \in \Omega_a$  pontjában kielégíti a  $c_1 + c_2H + c_3K = 0$  összefüggést a (19) egyirányú



*Bloore egyenlet* stacionárius megoldásának *nevezzük*.

Mint látjuk, az egyirányú Bloore egyenlet stacionárius megoldása a (9) egyenlettel definiált LW felület  $\Omega$  felett,  $\alpha = c_1, \beta = c_2, \gamma = c_3$  megfeleltetés mellett.

Analóg módon, az izotrópikus geometria egyirányú Bloore egyenlete a következő PDE segítségével adható meg:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} := c_1 + c_2 H^i(f) + c_3 K^i(f). \quad (20)$$

Ezen egyenlet stacionárius megoldása nem más, mint a (10) egyenlettel definiált i-LW felület  $\Omega$  felett,  $a = c_1, b = c_2, c = c_3$  megfeleltetés mellett.

### 3. Modell és új eredmények

Mint láttuk, a minimálfelületek, az általánosított minimálfelületek és a lineáris Weingarten felületek kiemelt szerepet játszanak nem csak a geometria, hanem a membránhéjak elméletében is. Ezért lényeges kérdés ezen felületek numerikus előállítására. Célunk rögzített peremek közé illeszthető LW és i-LW felületek közelítő számítása. Az irodalomban több módszer is található erre a célra, de nem tudunk olyan megoldásról, ami alakevolúció segítségével állítana elő lineáris Weingarten felületeket. A következőkben egy ilyen módszert mutatok be.

#### 3.1. A modell leírása

Munkánk során csak négyzetes  $\Omega$  értelmezési tartománnyal dolgoztunk, ezért jelölje  $\Omega_a$  a  $2a$  oldalú, origó középpontú négyzetet, azaz  $\Omega_a := [-a, a] \times [-a, a]$ . A négyzet határát jelölje  $\partial\Omega_a$ ! Az  $\Omega_a$  tartomány felett definiált  $f_0$  felületből indulunk ki, és azt az egyirányú Bloore egyenlettel (a (19), vagy a (20) számú egyenlet) fejlesztjük. Formálisan mind a klasszikus, mind az izotrópikus feladat megadható a következő alakban:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} & = F(\nabla f, \nabla^2 f) & f(t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega_a \\ f(0, x, y) & = f_0(x, y) & f_0(x, y) \in \Omega_a \\ f(t, x, y)|_{\partial\Omega_a} & = G(x, y)|_{\partial\Omega_a} \end{cases} \quad (21)$$

ahol  $f_0$ ,  $F(\cdot, \cdot)$  és  $G(\cdot, \cdot)$  elegendően reguláris függvények. A 2.6. alfejezet szerint a (21) kezdeti-peremértékfeladat stacionárius megoldásait keressük. Az idő szerinti diszkretizálást az implicit Euler séma használatával hajtjuk végre. Legyen  $\delta t$  elegendően kicsiny, pozitív, rögzített konstans. A numerikus eljárás konvergenciájának javítása végett célunk, hogy az Euler séma használatakor az egyenlet bal oldalán egy elliptikus, lineáris operátor szerepeljen. Ezért az egyenlet mindkét oldalából kivonjuk az  $\frac{1}{2}c_2\Delta f$  tagot. Ekkor két, egymást követő időlépés  $f^{t+1}$  és  $f^t$  megoldásai között a numerikus módszer a következő módon teremt kapcsolatot:

$$\frac{f^{t+1} - f^t}{\delta t} - \frac{1}{2}c_2\Delta f^{t+1} = F(f^t, \nabla f^t, \nabla^2 f^t) - \frac{1}{2}c_2\Delta f^t.$$

Átrendezve:

$$f^{t+1} - \frac{1}{2}c_2\Delta f^{t+1} \delta t = f^t + F(f^t, \nabla f^t, \nabla^2 f^t) \delta t - \frac{1}{2}c_2\Delta f^t \delta t.$$

Így az összefüggés bal oldalán található a  $(t + 1)$ -edik időpillanathoz tartozó ismeretlen, a jobb oldalon pedig ismert mennyiségek. Olyan megoldást keresünk, ami kielégíti a feladat peremfeltételeit. A megoldást a MATLAB-hoz [11] fejlesztett Chebfun Toolbox [10] operátor szintaxisának használatával számítjuk. A Chebfun a függvényeket csonkolt Csebisev sorokkal reprezentálja.

A kifejlesztett kódban két különböző differenciálegyenletet tudunk megoldani. Az első az izotrópikus feladat megoldását keresi, azaz a (20) összefüggés alapján írhatjuk, hogy  $F(f^t, \nabla f^t, \nabla^2 f^t) = c_1 + c_2 H^i(f^t) + c_3 K^i(f^t)$ . Rendezve:

$$f^{t+1} - \frac{1}{2}c_2 \Delta f^{t+1} \delta t = f^t + c_1 \delta t + c_3 K^i(f^t) \delta t.$$

Vegyük észre, hogy az izotrópikus esetben a  $H^i$  átlaggörbületnek megfelelő tag teljes egészében az egyenlet bal oldalán található. A 2.11. definíció nyomán tehát a következő egyenletet szimuláljuk:

$$f^{t+1} - c_2 \frac{1}{2} \Delta f^{t+1} \delta t = f^t + c_1 \delta t + c_3 (f_{xx}^t f_{yy}^t - f_{xy}^t f_{xy}^t) \delta t \quad (22)$$

$f^t$  és a peremfeltételek ismeretében ez az egyenlet  $f_{t+1}$ -re megoldható.

A második megoldási lehetőség a klasszikus, egyirányú Bloore egyenletet szimulálja, azaz az izotrópikus Gauss- és Minkowski-görbületeket lecseréljük az euklideszi párjaikra. Tehát  $F(f^t, \nabla f^t, \nabla^2 f^t) = c_1 + c_2 H(f^t) + c_3 K(f^t)$ . Ezzel a megoldandó feladat érdemben bonyolódik, hiszen az átlaggörbület nem egyezik meg az  $\frac{1}{2}c_2 \Delta f$  kifejezéssel és az egyenletnek nincs olyan lineáris része, ami a bal oldalra átvihető lenne. Ezért a numerikus módszer a következő egyenleten alapul:

$$f^{t+1} - \frac{1}{2}c_2 \Delta f^{t+1} \delta t = f_t + c_1 \delta t + c_2 H(f^t) \delta t + c_3 K(f^t) \delta t - \frac{1}{2}c_2 \Delta f^t \delta t, \quad (23)$$

ahol  $H(f^t)$  és  $K(f^t)$  az euklideszi átlag és szorzatgörbületet jelenti  $f^t$  függvényében, és  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

### 3.1.1. Az $f_0$ kezdeti felület

Az előző részben szereplő numerikus módszert a dolgozatomban való vizsgálódás során mindig ugyanazon  $f_0$  testből kiindulva kezdjük futtatni. Ez a test egy fél-ellipszoid. A választásnak több oka van. Egyrészt az ellipszoid egy másodrendű felület, ezáltal különböző programokban egyszerűen ábrázolható. Jól paraméterezhető,

tengelyarányait könnyen tudjuk változtatni ráadásul több geometriai tulajdonsága egyszerűen meghatározható. Másrészt, az ellipszoid választását indokolja, hogy az osztályozási rendszerünkben fontos szerepet kapnak az umbilikus pontok és az ellipszoid umbilikus pontja könnyen számítható. Tekintsük egy valós ellipszoid általános egyenletét:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ahol  $a, b, c \in R^+$ , valamint  $a, b, c$  az ellipszoid féltengelyeinek hosszait jelölik. Alakítsuk át a fenti egyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{c^2} &= 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \\ z^2 &= c^2 - c^2 \frac{x^2}{a^2} - c^2 \frac{y^2}{b^2} \\ f_0 = z &= \sqrt{c^2 - c^2 \frac{x^2}{a^2} - c^2 \frac{y^2}{b^2}} \end{aligned}$$

Mivel a négyzetgyökvonásnál csak a pozitív gyököt vesszük figyelembe, így megkaptuk annak a fél ellipszoidnak az egyenletét, amit a numerikus kódban használni fogok. A féltengelyeink hosszai legyenek rendre:

$$a = 2.0, \quad b = 2.5, \quad c = 5.0$$

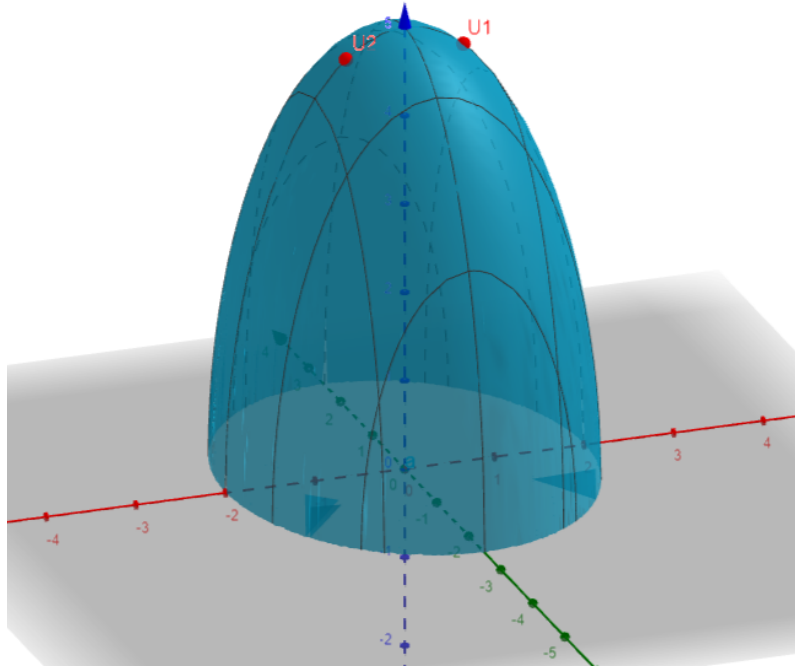
**3.1. Tétel.** *Minden valós ellipszoidnak létezik legalább négy umbilikus pontja.*

*Bizonyítás.* A [21] publikáció tartalmazza. □

Amennyiben egy ellipszoid féltengelyeire igaz a következő összefüggés:  $c > b > a$ , akkor az ellipszoid umbilikus pontjainak  $(x^u, y^u, z^u)$  koordinátáját megkaphatjuk a következőképp [21]:

$$x^u = \pm a \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}, \quad y^u = 0, \quad z^u = \pm c \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}$$

Mivel euklideszi geometriában ismerjük, hogy hol található egy ellipszis umbilikus pontja, ráadásul tudható, hogy legalább négy található az ellipszisünkön, természetesen adódik a kérdés, hogy izotrópikus geometriában is ugyanazok lesznek-e az umbilikus pontok, valamint, hogy a számuk megegyezik-e?



10. ábra. Az  $f_0$  függvény: egy félellipszoid, a felület  $U_1$  és  $U_2$  umbilikus pontjait pirossal jelöltem.

A 2.2. állítás alapján tekintsük a következő összefüggést:

$$(H^i)^2 - K^i = 0$$

Fejtsük ki a tagjait definíció szerint:

$$(H^i)^2 = \left(\frac{1}{2}\Delta f\right)^2 = \frac{1}{4}(\partial_{xx}f + \partial_{yy}f)^2 = \frac{1}{4}((\partial_{xx}f)^2 + 2\partial_{xx}f\partial_{yy}f + (\partial_{yy}f)^2)$$

$$K^i = \partial_{xx}f\partial_{yy}f - (\partial_{xy}f)^2$$

Összegezve az előzőeket a következő állítást kapjuk:

**3.1. Állítás.** *Egy  $F$  reguláris felület egy  $P \in F$  pontja izotrópikusan umbilikus, ha teljesül a következő összefüggés:*

$$\frac{1}{4}((\partial_{xx}f)^2 + 2\partial_{xx}f\partial_{yy}f + (\partial_{yy}f)^2) - \partial_{xx}f\partial_{yy}f + (\partial_{xy}f)^2 = 0 \quad (24)$$

*Bizonyítás.* A 2.2. állításból és a fenti levezetésből triviálisan következik.  $\square$

A numerikus kísérleteink során szükségünk lesz a felületünk adott pontjaiban az

átlag és szorzatgörbületeire mind euklideszi, mind izotrópikus geometriában, ehhez szükségünk van a felületünk parciális deriváltjaira:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \sqrt{c^2 - c^2 \frac{x^2}{a^2} - c^2 \frac{y^2}{b^2}} \\
\partial_x f &= \frac{1}{2} \left( c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{-2c^2 x}{a^2} \right) \\
\partial_y f &= \frac{1}{2} \left( c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{-2c^2 y}{b^2} \right) \\
\partial_{xx} f &= \frac{-1}{4} \left( c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{b^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{-2c^2 x}{a^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{-2c^2}{a^2} \right) \\
\partial_{yy} f &= \frac{-1}{4} \left( c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{b^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{-2c^2 y}{b^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{b^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{-2c^2}{b^2} \right) \\
\partial_{xy} f &= -\frac{1}{4} \left( c^2 - \frac{c^2 x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{b^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{-2c^2 y}{b^2} \right) \left( \frac{-2c^2 x}{a^2} \right)
\end{aligned}$$

Numerikus kísérleteink során szeretnénk megfigyelni az umbilikus pontoknak a formaevolúcióját. Ehhez szükséges, hogy a felület umbilikus pontjai rajta legyenek a vizsgált felületdarabon. Helyettesítsük be az  $a = 2$ ,  $b = 2.5$   $c = 5$  értékeket a 3.1. tételt követő összefüggésekbe:

$$x^u = \pm a \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}, \quad y^u = 0, \quad z^u = \pm c \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}} \quad (25)$$

Melyet kiértékelve az általunk vizsgált félellipszoidon megkapjuk két umbilikus pontnak a koordinátáját.

$$x_{1,2}^u = \pm \frac{\sqrt{21}}{7}, \quad y_{1,2}^u = 0, \quad z_{1,2}^u = \frac{25\sqrt{7}}{14}$$

Izotrópikus geometriában az umbilikus pontok koordinátáit a 24. egyenlet megoldásaként kapjuk. Az  $f_0$  felületre megoldva az egyenletet, a következő koordinátákat kapjuk:

$$x^{iu} = 0, \quad y_{1,2}^{iu} = \pm 1.5, \quad z^{iu} = 4$$

Az izotrópikus umbilikus pontok kiszámításához a Maple programot használtam. Vegyük észre, hogy az euklideszi esetben az umbilikus pontok az  $XZ$ , izotrópikus esetben az  $YZ$  síkon helyezkednek el.

## 3.2. Új eredmények

### 3.2.1. Numerikus kísérletek

A numerikus kísérletekben az a célom, hogy az adott fél ellipszoidból különböző tulajdonságú felületeket hozzak létre. Ezeket  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  együtthatók megfelelő megválasztásával tudom elérni. Az  $f_0$  ellipszoidból kiindulva három célra fogok fókuszálni:

#### 1. eset:

Ebben a feladatban a célom az, hogy (i-)minimálfelületekhez, azaz  $H \equiv 0$ , illetve  $H^i \equiv 0$  jellemzőjű felületekhez tartson a felületevolúció. Ez geometriai tulajdonságában azt jelenti, hogy a felület átlaggörbülete 0, szorzatgörbülete pedig negatív. A (9) és (10) egyenleteket vizsgálva észrevehetjük, hogy ha  $c_1 = c_3 = 0$  és  $c_2 \neq 0$ , akkor a stacionárius megoldásra teljesül, hogy  $H \equiv 0$  euklideszi, illetve  $H^i \equiv 0$  izotrópikus esetben.

#### 2. eset:

A következő feladatban általánosított (i-)minimálfelületeket szeretnénk gyártani. Láttuk, hogy ezek a  $K - H$ , illetve  $K^i - H^i$  terekben a  $H = c$ , illetve  $H^i = c$  egyeneseknek felelnek meg, ahol  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . A (9) és (10) egyenleteknek akkor, és csak akkor létezik ilyen megoldása, ha a  $c_1, c_2 \neq 0$ ,  $c_3 = 0$  és  $c_1/c_2 = -c$  teljesül. A szimulációkban a  $c_2 = 1$  és  $c_1 = -c$  értékeket használtuk.

#### 3. eset:

Az LW és i-LW felületek számításához szükséges, hogy a  $c_2$  és  $c_3$  együtthatók 0-tól különböző számok legyenek. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $c_2=1$ . A szimulációkban  $c_3$  mellett  $c_1$  értékét is zérustól különböző értékre vettem fel.

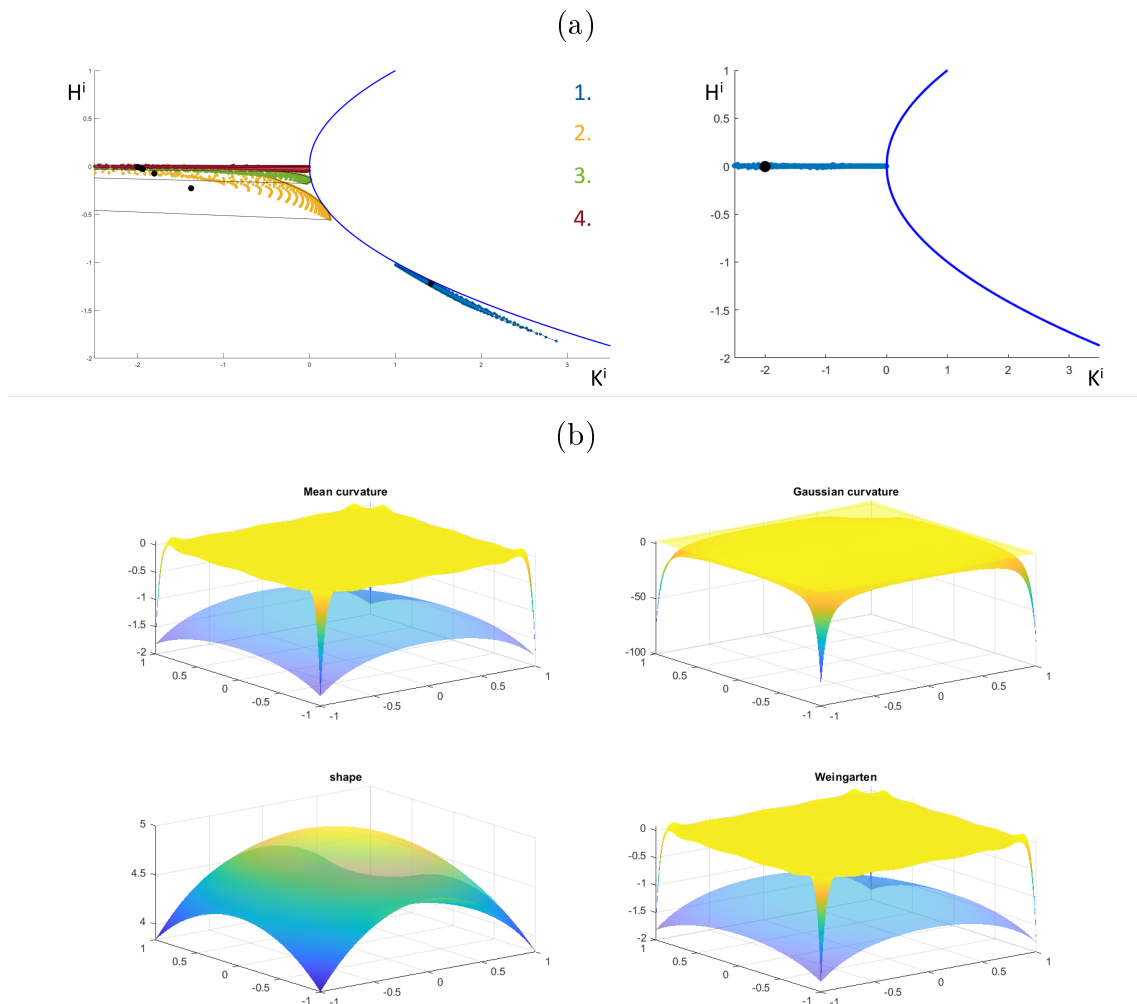
Összhangban a 2. fejezet definícióival, a különböző felületek elnevezését euklideszi és izotrópikus geometriában  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  együtthatók függvényében a 1. táblázatban foglalom össze.

	Euklideszi geometria	Izotrópikus geometria
$c_1, c_3 = 0, c_2 \neq 0$	Minimálfelület	I-minimálfelület
$c_3 = 0, c_1, c_2 \neq 0$	Általánosított minimálfelület	Általánosított i-minimálfelület
$c_2, \neq 0, c_3 \neq 0, c_1 \in \mathbb{R}$	Lineáris Weingarten (LW) felület	Izotrópikus Lineáris Weingarten (i-LW) felület

1. táblázat. Felületek elnevezése az euklideszi és izotrópikus geometriában a  $c_1, c_2, c_3$  együtthatók szerint.

Először vizsgáljuk az izotrópikus eseteket!

### i-minimálfelület



11. ábra. (a)  $i$ -minimálfelület evolúciója a  $K^i - H^i$  síkon és a felület végső állapota. (b) A  $i$ -minimálfelület, átlag-, szorzatgörbülete, alakja, valamint eltérése a  $i$ -Weingarten felülettől. A (b) részben az átlátszó felületek a kezdeti, a tömör felületek a végállapotot jelzik.

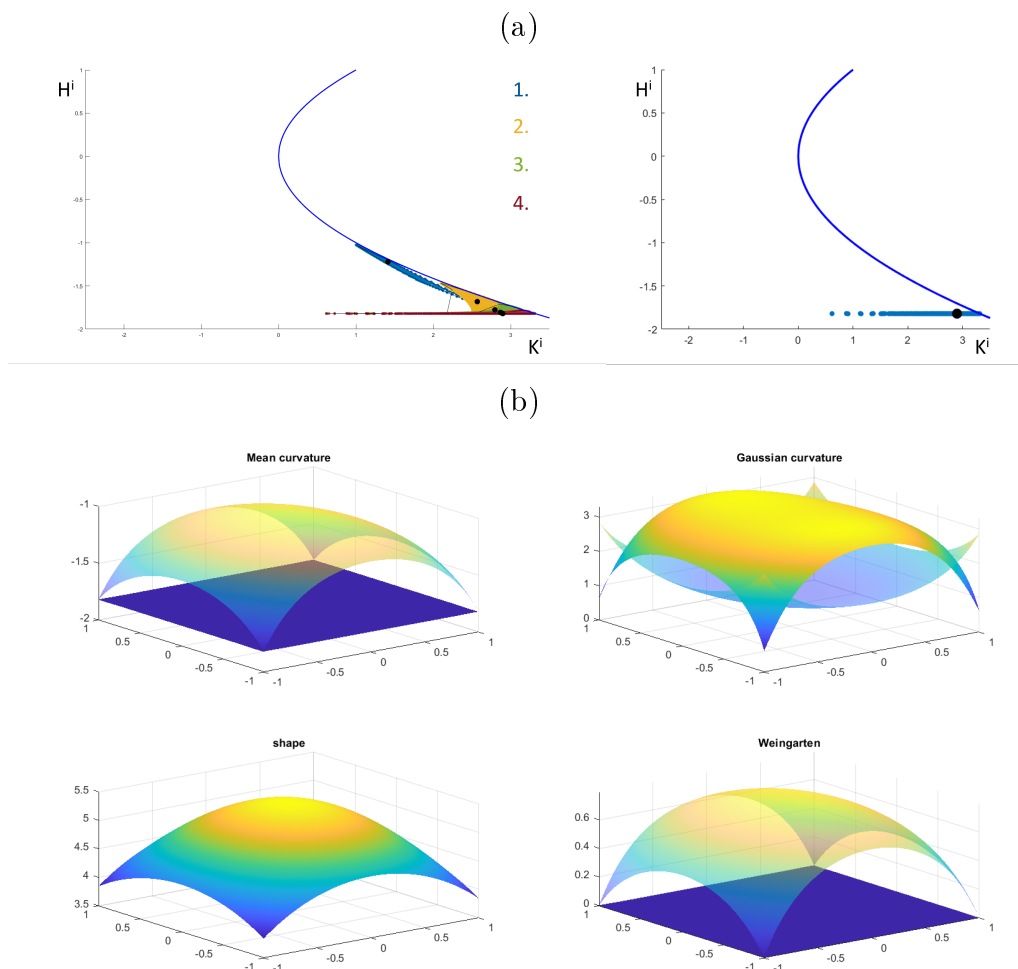
A futtatást a  $(c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 0)$  paraméterekkel végeztem. Tekintsük a 11(a) ábrát! Az (a) ábra mindkét részábráján a  $K^i - H^i$  síkon ábrázolom a  $P$  parabolát. A bal oldalon a színekkel jelölt ponthalmazok az evolúció egy-egy állapotához tartozó felületeknek felelnek meg úgy, hogy az  $\Omega_a$  tartományt sűrűn diszkretizálva minden pontban kiértékeltem a  $(K^i, H^i)$  értékeket. A kék ponthalmaz a kezdeti állapotot (félellipszoid) jelöli, az evolúció köztes állapotait a sárga és a zöld, a végső állapotot



a piros ponthalmaz jelöli. A végső állapot a modellben a  $T = 5$  időpontnak felel meg, itt a felület érdemben már nem változik, numerikus értelemben stacionáriusnak tekinthető. A sorrendet a bal felső ábrán különböző színnel jelölt számok is jelzik. A fekete pontok a színes ponthalmazok súlypontját mutatják. Az ábra (a) részének jobb oldala a bal oldali ábrán 4-essel jelölt végállapotot mutatja. Jól látható, hogy a 4-es ponthalmaz pontjai a  $H = 0$  egyenes mentén helyezkednek el, és  $K \leq 0$ . Azok a pontok, melyeknek az átlaggörbülete nem 0, azok a sarkok környezetében helyezkednek el és az ott keletkező *peremzavar* miatt nem tudják felvenni az azonosan 0 értéket. A peremzavar oka, hogy a (21) kezdeti-peremértékfeladat az  $\Omega_a$  tartomány minden peremén Dirichlet peremfeltételt ír le, így a sarkokban számított  $H^i$  átlaggörbülete a peremfeltételek által rögzített, nem változhat. Mivel az  $f_0$  kezdeti alak  $H^i(\pm a, \pm a)$  átlaggörbülete a sarkokban nem zérus, így az említett peremzavar fellép. Tekintsük a 11(b). ábrát! Itt mind a négy részábrán a halvány felület mutatja a kezdeti  $f_0(x, y)$ , a vastagabb pedig a végső  $f(5, x, y)$  állapotot. A (b) ábra bal felső részén a  $H^i$  átlaggörbülete, a jobb felső részén a  $K^i$  szorzatgörbülete, a bal alsó részén felület tényleges alakja, a jobb alsó részén pedig a stacionárius állapottól, azaz a Weingarten tulajdonságtól való eltérés látható. Megfigyelhető, hogy a felület átlaggörbülete a sarkoktól eltekintve 0, ez az említett peremzavar jelensége. Ugyanez megfigyelhető a Weingarten felülettől való eltérésnél is. Ha a felület alakját, valamint a  $K^i - H^i$  síkon lévő ponthalmazt tekintjük, akkor jól látható, hogy hiperbolikus felületet kaptunk eredményül.

### Általánosított i-minimálfelület

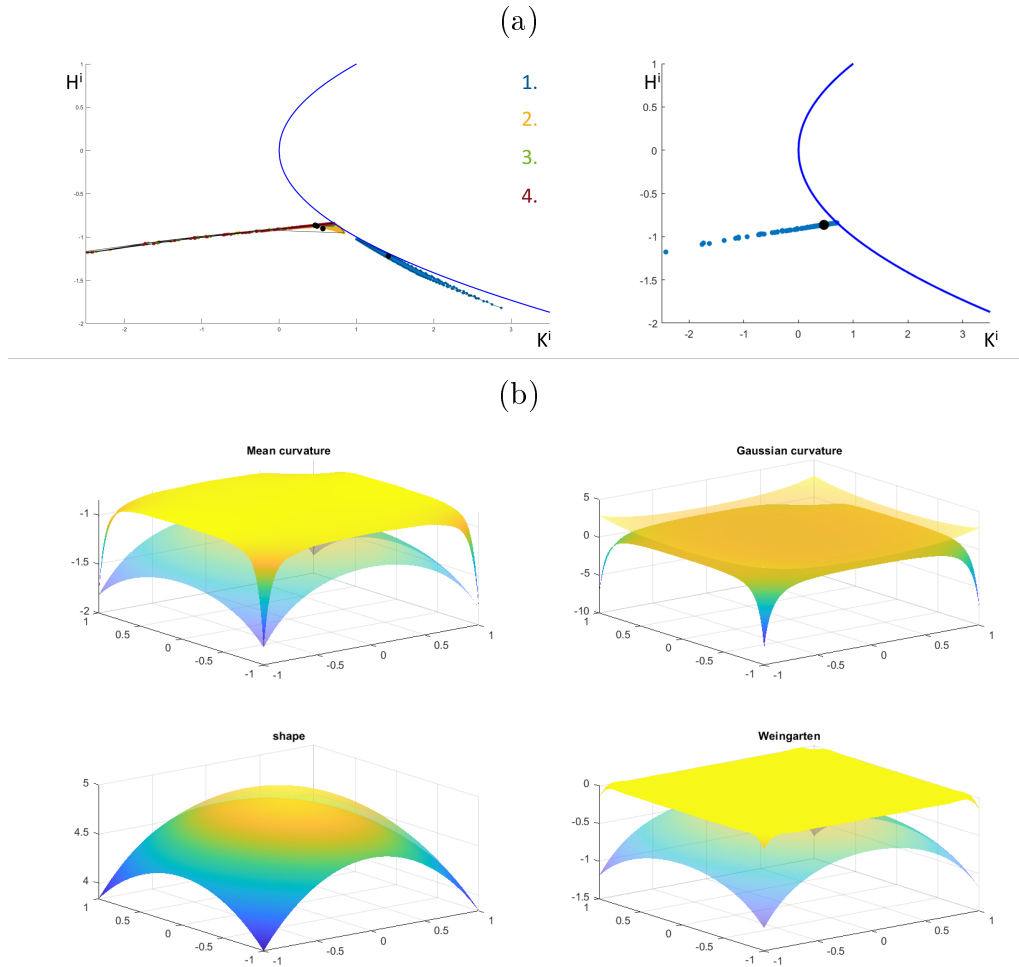
A 2. esetnek megfelelően az együtthatók legyenek  $(c_1, c_2, c_3) = (1.8204, 1, 0)$ .  $c_1$  értéket úgy választottuk meg, hogy az  $f_0$  felület sarokpontjaiban felvett  $H^i$  átlaggörbületek ellentettjét vettük. Ekkor nem fog fellépni a peremzavar jelensége se az átlaggörbületnél, se a Weingarten felülettől való eltérésben. A 12. ábrán láthatjuk, hogy az i-általánosított minimálfelület minden pontja a konstans  $H^i = \frac{-c_1}{c_2} = -1.8204$  egyenesen található, valamint minden pontja elliptikus. Érdeemes megfigyelni, hogy maga a végső eredmény csak kis mértékben tér el az eredeti alaktól. További vizsgáldás tárgya lehet, hogy  $c_2 = 1$  és rögzített  $f_0$  kiindulási alak mellett mely  $c_2$  érték minimalizálja a két felület eltérését jellemző L2 normát  $(\int_{\Omega_a} (f(T) - f_0)^2 d\Omega)$ .



12. ábra. Általánosított  $i$ -minimálfelület evolúciója a  $K^i - H^i$  síkon és a felület végső állapota. (b) Az általánosított  $i$ -minimálfelület, átlag-, szorzatgörbülete, alakja, valamint eltérése a  $i$ -Weingarten felülettől. A (b) részben az átlátszó felületek a kezdeti, a tömör felületek a végállapotot jelzik.

### **$i$ -LW felület**

Az együtthatók legyenek  $(c_1, c_2, c_3) = (0.9102, 1, -0.1)$ . Ekkor, várakozásainkkal összhangban, a stacionárius felület  $(K^i, H^i)$  ponthalmaza egy lineáris függvény grádjára illeszkedik. Amennyiben  $c_2 = 1$ , akkor az egyenes meredekségét a  $c_3$  együttható határozza meg. A 13(a) ábrán láthatjuk, hogy az eredményül kapott  $i$ -LW felületnek egyaránt vannak elliptikus és hiperbolikus pontjai, a 13(b) ábrán pedig megfigyelhető a peremzavar, valamint látható, hogy sikerült egy  $i$ -LW felületet létrehozni. A bevezetett osztályozás szerint az eredmény egy (A,U) típusú felület.



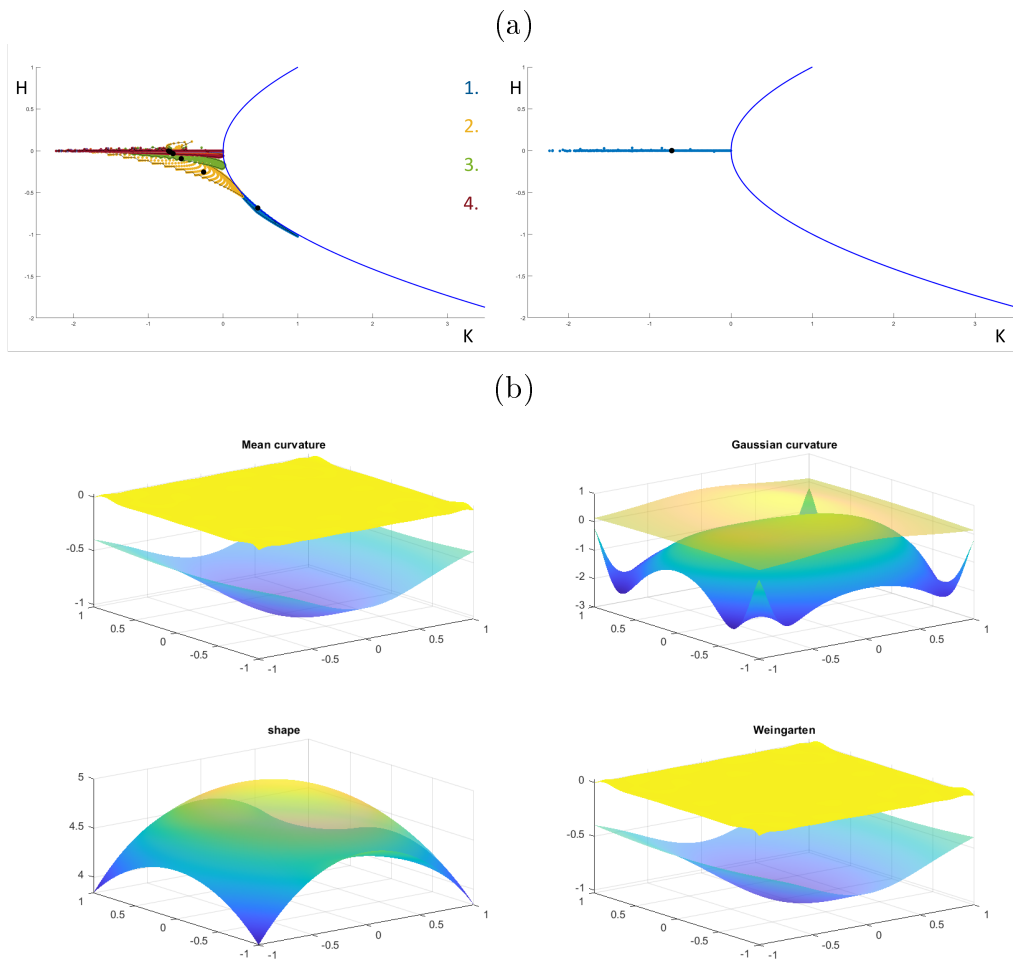
13. ábra.  $i$ -LW felület evolúciója a  $K^i - H^i$  síkon és a felület végső állapota. (b) Az  $i$ -LW felület átlag-, szorzatgörbülete, alakja, valamint eltérése a  $i$ -Weingarten felülettől. A (b) részben az átlátszó felületek a kezdeti, a tömör felületek a végállapotot jelzik.

A következőkben térjünk át az euklideszi geometriának megfelelő felületek számítására!

### Klasszikus minimálfelület

Az együtthatók legyenek  $(c_1, c_2, c_3) = (0, 1, 0)$ . A felület ebben az esetben is hiperbolikus, a pontjai a 14(a) ábrán látható módon a  $H = 0$  egyenesen találhatók. A sarkok környékén itt is fellép peremzavar, ámbár sokkal kisebb mértékű, mint az izotrópikus esetben. Ennek oka, hogy az átlaggörbület az Euklideszi esetben függ az  $f$  függvény vegyes deriváltjaitól, így a Dirichlet peremek nem rögzítik  $H$  értékét a sarkokban. A kismértékű peremzavar jelensége a 14(b) ábrán megfigyelhető. Jól látható, hogy a minimálfelületek esetén csak az átlaggörbület konstans zéró értékű,

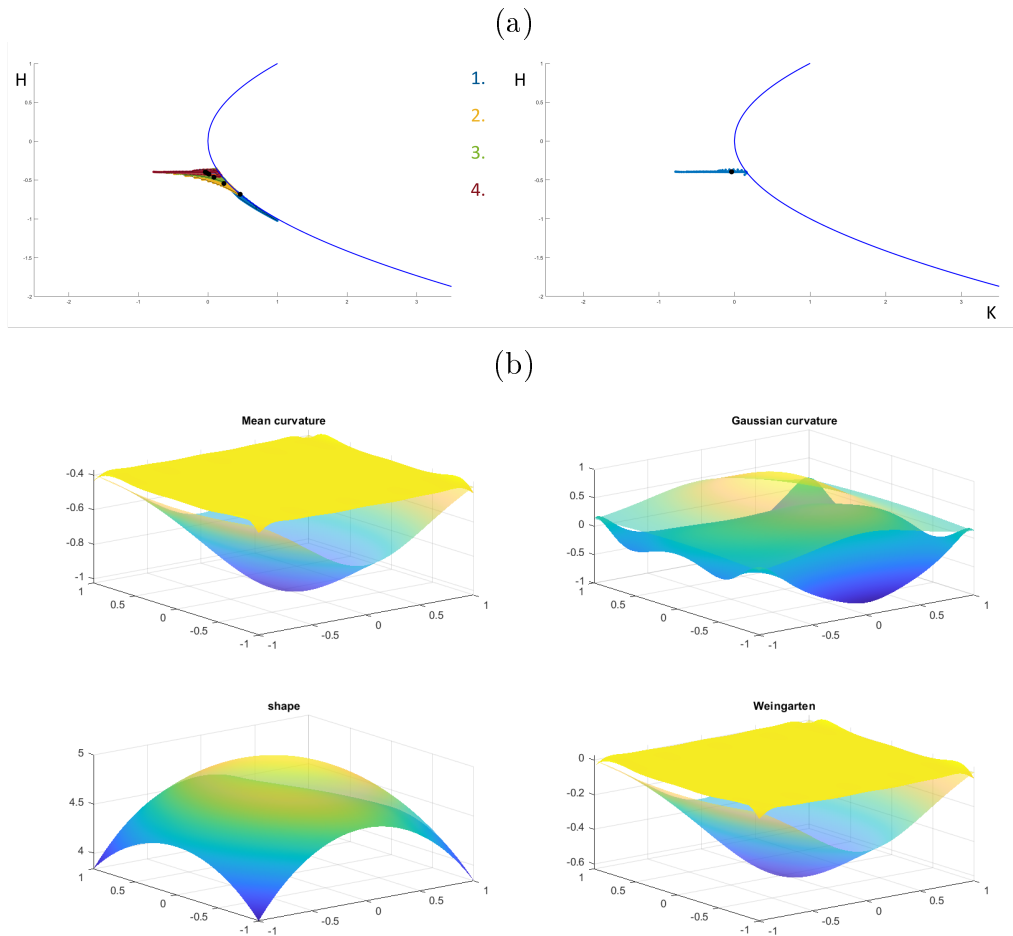
a szorzatgörbület változik a felület mentén.



14. ábra. Minimálfelület evolúciója a  $K - H$  síkon és a felület végső állapota. (b) A minimálfelület, átlag-, szorzatgörbület, alakja, valamint eltérése a Weingarten felülettől. A (b) részben az átlátszó felületek a kezdeti, a tömör felületek a végállapotot jelzik.

### Általánosított minimálfelület:

Az izotrópikus esethez hasonlóan  $c_1$  együttható értékét az  $f_0$  függvény  $\Omega_a$  tartomány sarkában felvett  $H$  értéke alapján határoztam meg. Ez az euklideszi geometriában nem garantálja, hogy a peremzavar egyáltalán nem lép fel. Legyenek az együtthatók  $(c_1, c_2, c_3) = (0.39644, 1, 0)$ . Ekkor a stacionárius felület pontjai a  $H = -c_1$  egyenes mentén helyezkednek el (15(a) ábra). Az ettől való eltérés a peremzavarral magyarázható, mely a 15(b) ábrán látható. Ezen az ábrán érdemes megfigyelni a felület Gauss-görbületét! Jól látható, hogy ez nem állandó, hanem minden pontban változik. A 15(a) ábrán láthatjuk, hogy ennek az általánosított minimálfelületnek vannak hiperbolikus és elliptikus pontjai is.

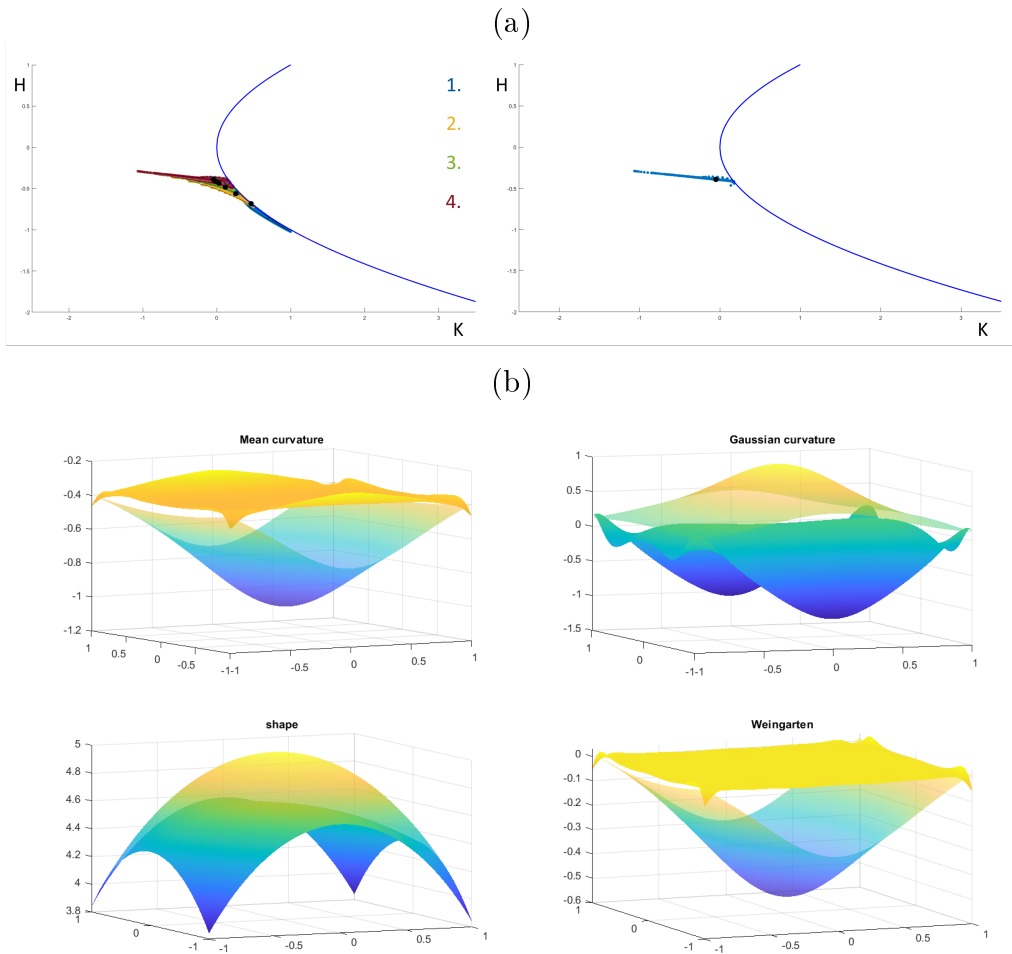


15. ábra. Általánosított minimálfelület evolúciója a  $K - H$  síkon és a felület végső állapota. (b) Az általánosított minimálfelület, átlag-, szorzatgörbülete, alakja, valamint eltérése a Weingarten felülettől. A (b) részben az átlátszó felületek a kezdeti, a tömör felületek a végállapotot jelzik.

### Lineáris Weingarten felület:

Végül tekintsük a lineáris Weingarten felületet! Az együtthatók legyenek:  $(c_1, c_2, c_3 = 0.39644, 1, 0.1)$ . Ekkor a stacionárius felület a  $K - H$  ponthalmaza egy lineáris függvény grádjára illeszkedik. Az eredményül kapott LW-felületnek egyaránt létezik hiperbolikus és elliptikus pontja, ezeket a (16(a)) ábra mutatja, hiszen az eredményül kapott egyenes metszi a  $K = 0$  helyen felvett  $H$  tengelyt. A 16(b) ábrán láthatjuk, hogy a kismértékű peremzavartól eltekintve sikerült egy, az adott peremekre illeszkedő LW felületet meghatározni.

A bemutatott példák mindegyike a bevezetett osztályozás szerint az (A,U) osztályba tartozik. Ez vélhetően összefügg a peremek megválasztásával és azzal, hogy magasabb  $c_3$  értékekre az eljárás nem konvergens. A kifejlesztett numerikus módszer tapasztalatom szerint a minimálfelületet és az általánosított minimálfelületet



16. ábra. Lineáris Weingarten felület evolúciója a  $K - H$  síkon és a felület végső állapota. (b) A lineáris Weingarten felület, átlag-, szorzatgörbülete, alakja, valamint eltérése a Weingarten felülettől. A (b) részben az átlátszó felületek a kezdeti, a tömör felületek a végállapotot jelzik.

jelentő megoldásokhoz, azaz  $c_3 = 0$  esetben, mindig konvergál. A konvergencia az izotrópikus esetben vélhetően bizonyítható, hiszen ott a kétdimenziós hővezetési egyenletet oldjuk meg. Numerikus tapasztalataink azt mutatják, hogy asmenyiben  $|c_3|$  elegendően kicsiny (kb.  $|c_3| < 0.5|c_2|$ ), függetlenül  $c_3$  előjelétől, a módszer szintén konvergens. Azonban nagy  $|c_3/c_2|$  értékekre divergenciát tapasztalunk. Ez vélhetően az alakfejlődési modell sajátja, mivel a divergenciát jelentő felületi pontok a peremekhez, és elsősorban a sarkokhoz közel keletkeznek. Egyelőre annyit tudunk megfogalmazni, hogy a nemlineáris esetben a peremfeltételek, és vélhetően az  $f_0$  kezdeti alak megválasztása is hatással van eljárás konvergenciájára. Ez további kutatást igényel.

### 3.2.2. Kapcsolat a kopási folyamattal

Említettem, hogy a Bloore egyenlet természeti kopási folyamat leírására szolgál. A [9] cikkben rámutattak arra, hogy a folyókban álló szikladarabokat az egyirányú Bloore folyamat koptatja (17. ábra). Mint láttuk, ennek a folyamatnak a stacionárius megoldásai az LW felületek. A modell egydimenziós,  $f(t, x)$  függvényre felírt változatára a [9] publikáció igazolta a stacionárius megoldások lokális stabilitását és numerikusan globális konvergenciát tapasztaltak.



17. ábra. A folyóban kopó szikla alakja LW felülethez tart [9].

A kopási folyamat és a héjak formakeresését a nemlineáris PDE szempontjából elsősorban a peremfeltételek különbözősége választja el. A *formakeresési feladatban* a fejezetben látott Dirichlet peremet érdemes előírni (illetve esetleg a szimulációkban látott peremzavar megszüntetésére időben változó, a peremzavar mértékétől függő Dirichlet perem jöhet szóba). A kopási folyamatban ezzel szemben az  $\Omega_a$  tartomány, ami a szikla függőleges, folyó irányára merőleges síkban lévő vetületével azonos, három oldalát érdemes Neumann peremekkel ellátni, ami megfelel annak, hogy a szikla folyófenékkal nem érintkező részei lekerekednek. A negyedik, a folyófenékkal érintkező perem pedig Dirichlet perem.

Amennyiben a szikla elegendően hosszú ideig kopott, azt várjuk, hogy alakja közel LW. Ezen alak hidrosztatikus nyomásnak kitett membránhéjak formájaként szolgálhat. Az elméleti levezetésben ugyan nem szerepel, de sejtjük, hogy *lapos héjakra* az LW és az i-LW felületek közel esnek egymáshoz. Ilyen módon a koptatott szikla, amennyiben lapos, illetve a szikla felületének egy része szolgálhat i-LW felületek modelljeként, vagy akár az ebben a fejezetben bemutatott algoritmus  $f_0$  felületeként függőleges megoszló teherrel terhelt membránhéjak előállításához. Az, hogy létezik-e olyan egyszerű alakban megadható  $T$  transzformáció, ami egy LW felületet leíró  $f(x, y)$  függvényt egy i-LW felületet leíró  $g(x, y)$  függvénybe visz, további kutatás tárgyát képezheti.

## 4. Konklúzió

Dolgozatomban bemutattam egy új módszert, amely az egyirányú Bloore operátor szimulációjával állít elő rögzített peremek mellett izotrópikus és euklideszi értelemben vett minimálfelületeket, általánosított minimálfelületeket és lineáris Weingarten felületeket. Bevezettem egy új osztályozási rendszert, mely a lineáris Weingarten és izotrópikus lineáris Weingarten felületeket a nekik megfelelő egyenesek  $K^i - H^i$  és  $K - H$  síkokon vett helyzete és az umbilikus pontok létezése alapján osztályozza. Az izotrópikus lineáris Weingarten felületek egyenletesen megoszló, függőleges teher alatt, a klasszikus Weingarten felületek az állandó hidrosztatikus nyomás alatt membránhéjként viselik a terheket. Az alakevolúciós eljárás alkalmas ilyen héjak alakjának meghatározására.



18. ábra. Kapcsolat a membránháj alakja és a természeti forma között.

Rámutattam arra, hogy egyes természeti kopási folyamatokat leíró egyirányú Bloore modell stacionárius megoldásai szintén Weingarten felületek, elegendően hosszú ideig kopásnak kitett felületek közel Weingarten tulajdonságúak. A fenti eredmények alapján ezen kopott felületek alakja szolgálhat membránhéjak formájaként. Ilyen módon szoros kapcsolatot találtam a természetben lejátszódó alakevolúciós folyamat stacionárius megoldása és a membránháj szerkezetek alakja között.

Az elvégzett munka koránt sem teljes. A TDK készítése során számtalan, nyitott kérdés merült fel, ezeket a következő alfejezetben gyűjtöttem össze.



## 4.1. Kérdések és további célok

- (1) Az  $f(t, x, y)$  függvényt fejlesztő Bloore folyam alatt milyen feltételek esetén teljesül a stacionárius (LW, és i-LW) megoldások lokális stabilitása?
  
- (2) Mely  $c_1, c_2, c_3$  együtthatókra konvergens a modellben szereplő kezdeti-peremérték feladat? Függ-e ez a peremfeltételektől, az  $\Omega$  értelmezési tartomány alakjától és az  $f_0$  kezdeti függvénytől?
  
- (3) Adott peremek között függőlegesen terhelt izotrópikus lineáris Weingarten (i-LW) felület egyedi-e?
  
- (4) Hogyan viselkednek az umbilikus pontok az evolúció folyamán? Születnek-e, szűnnek-e meg umbilikus pontok?
  
- (5) Létezik-e az ismert példákat leszámítva konstans Gauss-görbületű és változó átlaggörbületű felület, azaz létezik-e olyan felület, ami a  $K - H$  síkon egy függőleges egyenes? Ha igen, hogyan kell módosítani az algoritmust, hogy ezt számítani lehessen (a jelzett eset a  $c_2 = 0$  paraméternek felel meg, ekkor a jelenlegi implementáció mindig divergens)?
  
- (6) Szorosan kapcsolódik az előző kérdéshez a Monge-Ampère egyenlet megoldhatóságának vizsgálata alakevolúciós modellek használatával.
  
- (7) Létezik-e konstans izotrópikus Gauss-görbületű felület olyan esetben, ha átlaggörbülete nem azonos minden pontban? Milyen mechanikai tulajdonságokkal rendelkezik egy ilyen felület?
  
- (8) A peremzavar vélhetően a sarkos értelmezési tartomány következménye. Numerikus modell átalakítása olyan módon, hogy az egységkör értelmezési tartományon lehessen a numerikus kísérleteket végrehajtani.

## 5. Függelék

### 5.1. Minimálfelületek

A differenciálgeometriai szakirodalmat olvasva azzal szembesülhetünk, hogy a minimálfelületekre számos (legalább nyolc) egymással ekvivalens definíciót találhatunk. A teljesség igénye nélkül én most ezek közül néhányat említenék meg.

**5.1. Definíció.** *Egy  $M \subset \mathbb{R}^3$  felület minimálfelület, akkor és csak akkor, ha bármely  $p \in M$  pontnak létezik egy környezete, amely területe minimális a határához képest.*

**5.2. Definíció.** *Egy  $M \subset \mathbb{R}^3$  felület minimálfelület, akkor és csak akkor, ha minden  $p \in M$  pontjában az átlaggörbülete azonosan 0.*

**5.3. Definíció.** *Egy  $M \subset \mathbb{R}^3$  felület minimálfelület, akkor és csak akkor, ha lokálisan kifejezhető a következő egyenlet megoldásfüggvényének ( $u = u(x, y)$ ) gráfként:*

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} \quad (26)$$

**5.4. Definíció.** *Egy  $M \subset \mathbb{R}^3$  felület minimálfelület, akkor és csak akkor, ha ha kritikus pontja a terület funkcionálnak minden kompakt variációra.[4]*

**5.5. Definíció.** *Egy konformális immerzió  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  minimál, akkor és csak akkor, ha kritikus pontja a Dirichlet energiának az összes kompakt variációra, vagy ezzel ekvivalensen bármely  $p \in M$  pontjának létezik olyan környezete melynek energiája minimális a határához képest.*

Fizikai szempontból vizsgálva az átlaggörbület függvénye egy homogén membránnak, a membrán két oldalán azonosan egyenlő egy nem nulla konstanssal, mely egyenlő a felület két oldalán fellépő nyomáskülönbséggel (Laplace-Young egyenlet)[15]. Amikor a nyomáskülönbség zérus, akkor a membránnak nulla az átlaggörbülete. Ebből következik, hogy a szappanhártyák (kivéve a szappanbuborékok) a legegyszerűbb fizikai realizációja a minimálfelületeknek.

**5.6. Definíció.** *Egy  $M \subset \mathbb{R}^3$  felület minimálfelület, akkor és csak akkor, ha minden  $p \in M$  pontjának van olyan  $D_p$  környezete amely azonosan egyenlő az egyetlen ideális szappanhártyával, melynek határa  $\partial D_p$ .*

**5.1. Állítás.** *Minden minimálfelület Gauss görbülete a degenerált esetektől eltekintve negatív.*

*Bizonyítás.* Induljunk ki a minimálfelületek átlaggörbületes definíciójából. Esze-

rint a minimálfelület átlaggörbülete minden pontjában nulla. Ez akkor lehet csak, ha mindkét főgörbülete 0 (ez a síkot adja vissza), vagy ha a főgörbületek egymás ellentettjei. Amennyiben a második lehetőség áll fent, úgy a szorzatgörbületük negatív.  $\square$

**Megjegyzés:**

A minimálfelületek nem degenrált esetben hiperbolikus felületek.

• **Katenoid:**

A katenoid egy felület a 3 dimenziós euklideszi térben, ami a láncgörbének a saját vezéregyenese körüli elforgatásával jön létre. A síkot leszámítva ez volt a legelsőként felfedezett minimálfelület. Leonard Euler 1744-ben látta be a katenoidról, hogy minimálfelület. Érdekessége, hogy a síkon kívül ez az egyetlen forgásfelület, ami minimálfelület is.

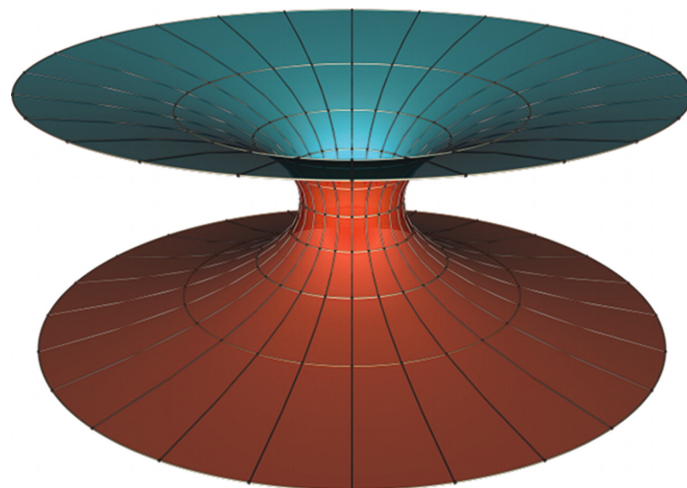
A katenoid a klasszikus Descartes-féle koordináta-rendszerben az alábbi paraméterezett egyenletekkel definiálható:

$$x = \cosh(s)\cos(t)$$

$$y = \cosh(s)\sin(t)$$

$$z = s,$$

$$\text{ahol } s, t \in \mathbb{R}$$



19. ábra. Katenoid

**5.2. Állítás.** *A csavarfelület és a katenoid egymással homeomorf felületek*

**5.1. Bizonyítás.** *Mivel a katenoid, valamint a csavarfelület is része az úgyne-*

vezett Bonnet családnak, így a katenoid hajlítással átvihető egy rész csavarfelületbe, nyújtás nélkül. Vagyis létezik olyan folytonos egybevágósági transzformáció bármely katenoid esetén, amely egy rész csavarfelületre képez és amelynek deformációs családjának minden eleme minimálfelület.

- **Helikoid:**

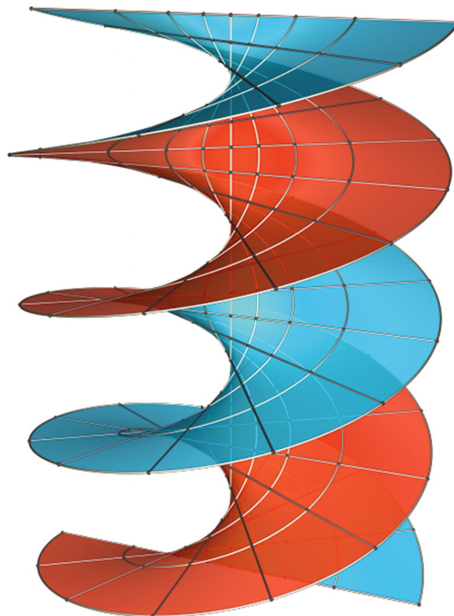
A helikoid a katenoid után másodikként felfedezett minimálfelület. Jean Baptiste Meusnier írta le 1776-ban, de már Arkhimédész is ismerte. Szűkebb értelemben véve a csavarfelület egy egyenes tengely mentén egyenletes sebességgel haladó és a tengely körül egyidejűleg egyenletes szögsebességgel forgó, a tengelyre merőleges egyenes által sűrolt felület. A pontnak ezt a mozgását csavarmozgásnak nevezzük. A generáló egyenes minden pontja csavarvonalat ír le, tehát a csavarfelület minden pontján át fektethető egy csavarvonal, ami a csavarfelületre illeszkedik. A csavarfelület a Descartes-féle koordináta-rendszerben a következő paraméterezett egyenlettel írható le:

$$x = s \cos(a * t)$$

$$y = s \sin(a * t)$$

$$z = t,$$

$$\text{ahol } s, t, a \in \mathbb{R}$$



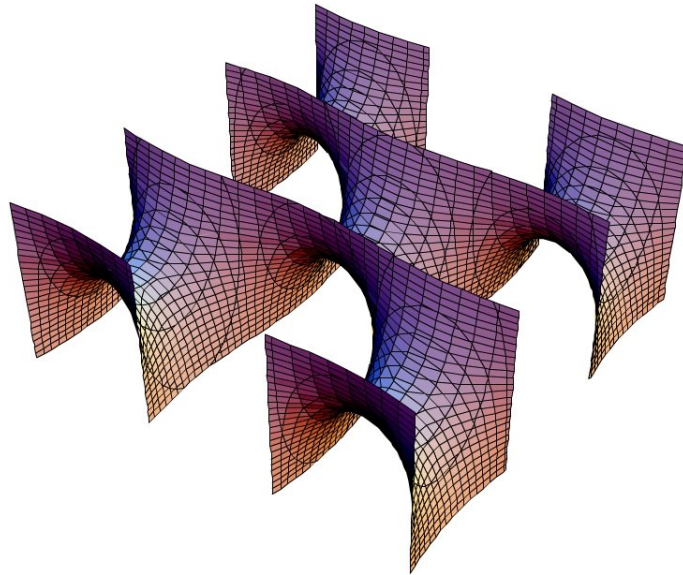
20. ábra. Helikoid egy vízszintes síkokkal metszett darabja

**5.3. Állítás.** *A csavarfelület és az  $\mathbb{R}^2$  sík egymással homeomorf felületek.*

*Bizonyítás.* A csavarfelület paraméteres előállításában, csökkentjük az  $a$  értékét nulláig. Minden  $a$  értékhez más csavarfelület tartozik, a csökkentéssel egyre kisebb meredekségű csavarfelületet kapunk, míg végül 0-ban teljesen síkká torzul. Emiatt a síkot degenerált csavarfelületként is lehet értelmezni.  $\square$

- **Scherk-féle minimálfelületek:**

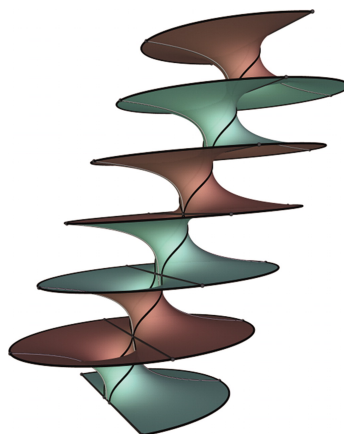
Meusnier után Heinrich Scherk volt a következő ember, aki példákat tudott felmutatni a minimálfelületekre. 1834-ben két teljesen beágyazott minimálfelületet írt le. Az első példája egy kétszeresen, a második pedig egy egyszeresen periodikus felület. A katenoid és a csavarfelület után Scherk felületei voltak a harmadikként felfedezett nem triviális minimálfelületek. Érdekesség, hogy a két felület egymás konjugáltja.



21. ábra. Scherk-féle minimálfelület

- **Riemann-féle minimálfelületek:**

A Riemann-féle minimálfelületeket Bernhard Riemann írta le először 1867-ben. Riemann példái kétparaméteres családja a teljes periódusú minimálfelületeknek, ahol a paramétereket tekinthetjük úgy, mint a nyakak mérete, valamint mint a két szomszédos tartomány egymással bezárt szöge. Amikor a paraméterek degenerálódnak, akkor kétfajta struktúrát tudunk előállítani. Léteznek olyanok, amelyek olyanok, mintha katenoidokat egymásra ragasztanánk és olyanok is, amelyek két egymással ellentétes irányú helikoidnak felelnek meg, melyek szintén össze vannak ragasztva és a tengelyük párhuzamos.

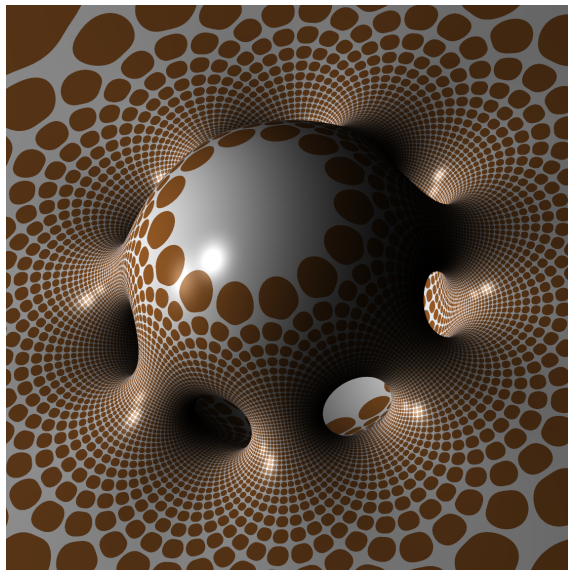


22. ábra. Riemann-féle minimálfelület

- **Tórusz-szerű minimálfelületek:**

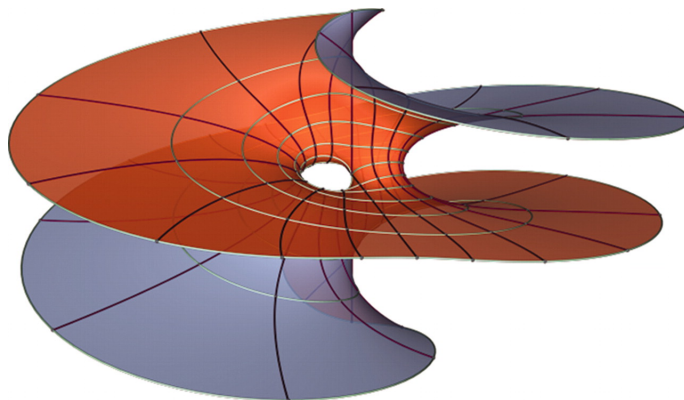
A Riemann-példák bemutatása után térjünk át a tórusz szerű minimálfelületek vizsgálatára. William Kingdon Clifford (1845-1879) tudott példát mutatni egy "lyukas" minimálfelületre, amit utána Clifford szalagként neveztek el.

H. Blaine Lawson 1970-ben megmutatta, hogy  $S^3$ -ban minden génuszra létezik minimálfelület [14].



23. ábra. Lawson-féle minimálfelület

Az első 1 génuszú minimálfelületet 2005-ben sikerült felfedeznie Webernek, Hoffmannak és Wolfnak. Ennek a minimálfelületnek a különlegessége, hogy ez egy beágyazott minimálfelület, melynek vége homeomorf egy helikoid végével.[3]



24. ábra. Egy génuszú minimálfelület

## 6. Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Sipos András Árpádnak, a folyamatos segítségét a dolgozat elkészültében, melyet mind az elméleti, mind a programozási kérdésekben nyújtott.



## Hivatkozások

- [1] Jean-David Benamou, Brittany D Froese, and Adam M Oberman. Two numerical methods for the elliptic monge-ampere equation. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 44(4):737–758, 2010.
- [2] FJ Bloore. The shape of pebbles. *Journal of the International Association for Mathematical Geology*, 9:113–122, 1977.
- [3] Tobias H Colding and William P Minicozzi. Shapes of embedded minimal surfaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(30):11106–11111, 2006.
- [4] Tobias H Colding and William P Minicozzi II. Minimal surfaces and mean curvature flow. *arXiv preprint arXiv:1102.1411*, 2011.
- [5] AV Corro, W Ferreira, and K Tenenblat. Ribaucour transformations for constant mean curvature and linear weingarten surfaces. *Pacific journal of mathematics*, 212(2):265–297, 2003.
- [6] Edward J Dean and Roland Glowinski. Numerical solution of the two-dimensional elliptic monge–ampère equation with dirichlet boundary conditions: an augmented lagrangian approach. *Comptes rendus. Mathématique*, 336(9):779–784, 2003.
- [7] Edward J Dean and Roland Glowinski. Numerical solution of the two-dimensional elliptic monge–ampère equation with dirichlet boundary conditions: a least-squares approach. *Comptes rendus. Mathématique*, 339(12):887–892, 2004.
- [8] Eszter Feher Dezso Hegyi, Orsolya Gaspar. *Special loadbearing structures*. TERC, 2022.
- [9] Gábor Domokos, Gary W Gibbons, and András A Sipos. Circular, stationary profiles emerging in unidirectional abrasion. *Mathematical Geosciences*, 46:483–491, 2014.
- [10] Tobin A Driscoll, Folkmar Bornemann, and Lloyd N Trefethen. The chebop system for automatic solution of differential equations. *BIT Numerical Mathematics*, 48:701–723, 2008.
- [11] Tobin A Driscoll, Nicholas Hale, and Lloyd N Trefethen. *Chebfun guide*, 2014.
- [12] W. J. Firey. Shapes of worn stones. *Mathematika*, 21(1):1–11, 1974.

- [13] Cristian E Gutiérrez and Haim Brezis. *The Monge-Ampere equation*, volume 44. Springer, 2001.
- [14] H Blaine Lawson Jr. Complete minimal surfaces in  $S^3$ . *Annals of Mathematics*, pages 335–374, 1970.
- [15] William Meeks III and Joaquín Pérez. The classical theory of minimal surfaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48(3):325–407, 2011.
- [16] Marc Mimram, Michele Bonera, Gregory Barrau, and Patrick Mazzacane. Roofing of montpellier-south of france tgv station. In *Proc., Int. Conf. on Ultra-High Performance Fiber Reinforced Concrete*, edited by F. Toutlemonde and J. Resplendino, pages 837–856, 2017.
- [17] Pier Luigi Nervi and Paolo Desideri. *Pier Luigi Nervi*. JSTOR, 1982.
- [18] T. Novák-Szabó, A. A. Sipos, S. Shaw, D. Bertoni, A. Pozzebon, E. Grottoli, G. Sarti, P. Ciavola, G. Domokos, and D. J. Jerolmack. Universal characteristics of particle shape evolution by bed-load chipping. *Sci. Adv.*, 4(3), 2018. Article number: eaao4946.
- [19] J Pelikan and D Eng. Membrane structures. In *Proc of the Second Symp. on Concrete Shell Roof Construction, Teknisk Ukeblan, Oslo*, 1958.
- [20] Davide Pellis, Martin Kilian, Helmut Pottmann, and Mark Pauly. Computational design of weingarten surfaces. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 40(4):1–11, 2021.
- [21] Daniel Poelaert, Joachim Schniewind, and Frank Janssens. Surface area and curvature of the general ellipsoid. *arXiv preprint arXiv:1104.5145*, 2011.
- [22] Helmut Pottmann and Yang Liu. Discrete surfaces in isotropic geometry. In *Mathematics of Surfaces XII: 12th IMA International Conference, Sheffield, UK, September 4-6, 2007. Proceedings 12*, pages 341–363. Springer, 2007.
- [23] C Rogers and W.K Schief. On the equilibrium of shell membranes under normal loadinf. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2038):2449–2462, 2003.
- [24] H Sachs. Isotrope geometrie des raumes, friedr. *Vieweg & Sohn, Braunschweig*, 1990.
- [25] András A Sipos, Gábor Domokos, Andrew Wilson, and Niels Hovius. A discrete random model describing bedrock profile abrasion. *Mathematical Geosciences*, 43:583–591, 2011.

- [26] X Tellier, C Douthe, O Baverel, and L Hauswirth. Designing funicular grids with planar quads using isotropic linear-weingarten surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 264:112028, 2023.
- [27] Stephen Timoshenko, Sergius Woinowsky-Krieger, et al. *Theory of plates and shells*, volume 2. McGraw-hill New York, 1959.
- [28] Matthias Weber, David Hoffman, and Michael Wolf. An embedded genus-one helicoid. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(46):16566–16568, 2005.
- [29] Julius Weingarten. Ueber eine klasse auf einander abwickelbarer flächen. 1861.
- [30] Julius Weingarten. Ueber die flächen deren normalen eine gegebene fläche berühren. 1863.