

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖR DOLGOZAT

# A pókháló szerkezetének dinamikai vizsgálata

*Készítette:*

Budaházi Fanni

BME Építészmérnöki Kar III.



*Konzulens:*

Dr. Sipos András Árpád

BME Építészmérnöki Kar, Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

## Kivonat

A pókháló anyaga közismerten különleges. Vékonyágához képest – ami csupán körülbelül  $4\mu\text{m}$ , az emberi hajszál töredéke – rendkívül erős és rugalmas. A fehérje rost erősebbnek bizonyult, mint a vele megegyező mennyiségű acél, szakítószilárdsága nagyobb, mint a kevláré. Az anyag tulajdonságait precíz kísérleti eljárásokkal vizsgálják évtizedek óta, ehhez képest jóval kevesebb figyelmet kapott a háló geometriája, továbbá az a mozzanat, hogy a háló készítésének végén a pók a háló közepén "összerántja", azaz előfeszíti a hálót. A keresztespókfélék szövik a széles körben ismert, radiális és spirális szálakból szőtt hálót, ennek pontos alakja a fajtól csak kis mértékben függ. Mivel az evolúció során kialakult alak ennyire egységes, arra következtettünk, hogy ez az ideális elrendezés ahhoz, hogy a pók minél több táplálékot szerezzen. Hipotézisünk, hogy a radiális-spirális elrendezés optimálisabb szerkezet, mint a más struktúrájú, azonos mennyiségű anyagból készült megoldások. Ezen felül azt tételezzük fel, hogy az előfeszítés nagyban segíti a pókháló szálai együtt dolgozását. A hipotézist numerikus szimulációval vizsgáltam. A program a háló tömegét a szálak keresztezésénél lévő csomópontokba koncentrálja és az így előálló diszkrét mechanikai rendszerre a nem-lineáris mozgásegyenletet oldja meg. Egy, az irodalomban sikerrel alkalmazott háló modell viselkedését összehasonlítottam egy négyzethálós és egy véletlen elrendezésű hálóval. A vizsgálat során az előfeszített hálók csomópontjaiba csapódó rovarokat szimuláltam, elemezve, mennyire nyúlik meg a háló, valamint, hogy milyen mértékben vonódnak be a háló egyes részei a becsapódó bogár mozgási energiájának elnyelésébe. Az eredmények azt mutatják, hogy a pókháléhoz hasonló struktúrákban a szálakban egyenletesebb a megnyúlás eloszlása a többi vizsgált szerkezeténél. A becsapódás ereje tehát nem csak annak helyét, hanem szinte az egész hálót terheli, így az összes előfeszített szál részt vesz a becsapódási energia felvételében. Vizsgálataim eredménye egyértelműen mutatja a radiális-spirális elrendezés előnyét a többi vizsgált alakzattal szemben és az előfeszítés fontosságát.

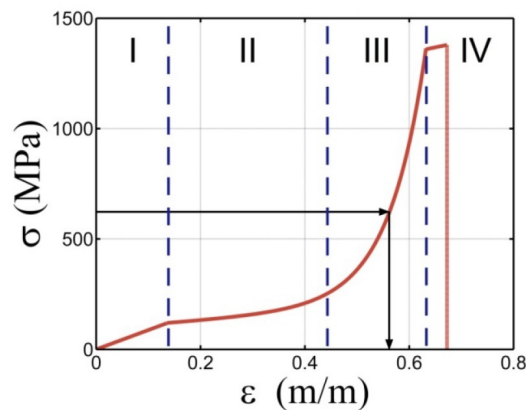
# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
1.1. A pókháló tulajdonságairól dióhéjban . . . . .	5
<b>2. Modell ismertetése</b>	<b>6</b>
2.1. A mechanikai modell . . . . .	7
2.2. A numerikus modell . . . . .	9
2.3. Verifikáció . . . . .	10
2.4. A vizsgált geometriai elrendezések . . . . .	11
<b>3. Eredmények</b>	<b>12</b>
3.1. A geometriai tulajdonságok érvényesülése a számítások során . . . . .	12
3.2. Az elsőfeszítés mértékének hatásai . . . . .	16
<b>4. Összefoglalás</b>	<b>22</b>
<b>Hivatkozások</b>	<b>24</b>

# 1. Bevezetés

A pókhálók régóta foglalkoztatják az embereket. A pókselymet számtalan vizsgálatnak vetették már alá, melyek során bebizonyosodott, hogy egy rendkívüli anyaggal van dolgunk. Az szinte ránézésre megállapítható, hogy a háló meglepően vékony, könnyű és tapintva ragacsos szálakból tevődik össze. Mérések szerint - pókfajtól függetlenül - az egyes szálak vastagsága körülbelül  $4\mu\text{m}$ , mely összehasonlítva egy általunk jól ismert példával – az emberi hajszállal, amely az esetek többségében  $60 - 80\mu\text{m}$  – kivételesen vékony. Ennek köszönhetően egy elkészült, körülbelül 25-100cm átmérő közötti háló tömege is mg nagyságrendű lesz.

A pókselymet további vizsgálatoknak is alávetették. Tesztelték többek között a húzószilárdságot, melynek során fény derült arra, hogy az anyag mérnök szemmel nagy nyúlások (30 – 35%) mellett is lényegében rugalmasan viselkedik. Nem túlzás azt állítani, hogy a pókselyem a természetben fellelhető legszívósabb, közel hiperelasztikus anyag, ráadásul egy szakaszon jó közelítéssel lineárisan rugalmasnak tekinthető feszültség-relatív megnyúlás diagramokkal jellemezhető.



1. ábra. Az ábrán a pókselyem feszültség-relatív megnyúlás ábrája látható. Az I. szakaszban, körülbelül 15%-os megnyúlásig az anyag lineárisan rugalmasan viselkedik. Ezt a II. szakaszban egy lágyulás követi kb. 45%-os megnyúlásig, majd kb. 65%-ig egy erős felkeményedés kíséri a III. szakaszban, mely végén a selyem eléri a szakítószilárdságát [1].

A vonatkozó biológiai és mérnöki szakirodalom a pókselyem anyagi tulajdonságait részletesen, sok kísérlettel dokumentálva tárgyalja. Jóval kevesebb figyelmet kapott a háló geometriájának vizsgálata. Dol-

gozatom alapvetése, hogy a pókháló egy, esetleges teherre (rovar becsapódása) optimalizált szerkezet, ahol nem csak a kiváló anyagtulajdonságoknak, hanem a geometriának és az előfeszítésnek is kiemelt szerepe van.

Ismert, hogy a pók számára sok energia előállítani a pókselyemet [2], például egyes pókfajok többek között úgy jutnak táplálékhoz, hogy más fajok hálóját fogyasztják el [3]. Ez alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy nagy valószínűséggel a radiális-spirális elrendezés nem véletlen. Mivel az anyag rendkívül értékes, így a pók vélhetően igyekszik a lehető legkevesebbet felhasználni, eközben pedig minél nagyobb területet lefedni, hogy növelje a zsákmányszerzés valószínűségét. Egyes tanulmányok szerint ráadásul a minél nagyobb tömegű táplálék befogása az optimális stratégia [4].

Ezen túl feltételezhető, hogy a háló konkrét geometriája is a hatékonyságból ered. A különböző fajok hálói között kevés eltérés észlelhető. Az egységesség feltehetően arra utal, hogy ez az elrendezés az eredményességéből adódóan maradt fent.

Kérdésként felmerülhet tehát az, hogy egyszerűen előállítás, vagy esetleg anyagtakarékosság szempontjából kedvezőbb-e a pók számára a kialakítás. Vagy tartószerkezeti szempontból is jobban teljesít egy ilyen struktúra?

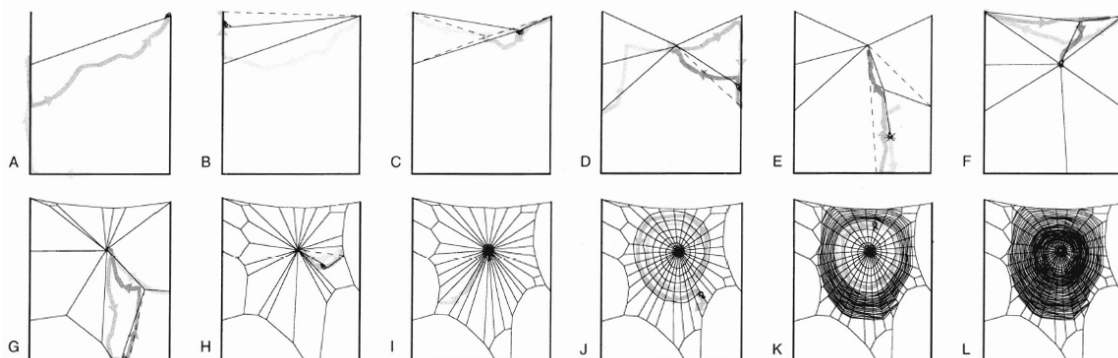
A dolgozatban különböző, a valóshoz többé-kevésbé hasonlító, előfeszített hálók dinamikai viselkedését vizsgálom, figyelve, hogy a jól ismert, sugaras-spirális elrendezés és mesterségesen előállított elrendezések esetén a háló egésze hogyan reagál a becsapódó teherre, valamint, hogy a különböző mértékű előfeszítések milyen hatással vannak a háló mozgására.

A dolgozat második fejezetében ismertetem az alkalmazott mechanikai modellt és a számítások során tett egyszerűsítéseket is megindoklom. A harmadik fejezetben a számítási eredményeket mutatom be. Itt egyértelműen megállapítható a jól ismert elrendezés előnye a többi, vizsgált topológiával szemben. A dolgozatot összefoglalás zárja. A részletes ismertetés előtt a következő alfejezet egy rövid biológiai kitekintést tartalmaz a téma hátterének felvázolására.

## 1.1. A pókhálók tulajdonságairól dióhéjban

A pókháló eredete érdekes, és máig nem teljesen tisztázott kérdés. A fosszíliak tanúsága szerint 100 millió évvel ezelőtt (azaz a dinoszauruszokkal egyidőben) már biztosan több, hálót készítő pókfaj létezett [15]. Jelenleg több tízezerre tehető az ismert pókfajok száma. A szakirodalom visszatérő megjegyzése, hogy minden jel arra mutat, hogy a háló anyaga és szerkezete a kialakulása után csak kis mértékben változott, azaz a szerkezet olyannyira bevált, hogy 100 millió év környezeti változásai sem hoztak lényeges módosulást. Újabb, genetikai tanulmányok szerint egyes pókfajok idővel feladták a háló készítést (és más módon szereznek zsákmányt) [9], ami indirekt módon szintén a háló szerkezetének optimális voltára utal.

A háló készítési sorrendje a következő: először egy keret készül el a pók számára szilárdnak tekintett tárgyak között. Ekkor még az elrendezés véletlenszerűnek tűnik, nem vehető ki egyértelműen, melyik szál milyen szerepet fog szolgálni (a 2. ábrán A-F). Ezt követően egyértelművé válik, melyek a radiális szálak. A pók egyre sűrűbben teszi le ezeket, ezzel együtt sűrűbbé is téve a struktúrát (G-I). Következő lépésként az állat egy ritkás spirális szálakat sző, mely ideiglenes merevítésként szolgál, valamint a közlekedést segítik elő (J). Ezután kezdődik a spirális szálak létrehozása a háló szélétől a közepe felé (K,L), jelentősen sűrűbben, mint az előbbi ideiglenes szálaké. Radiális és spirális szálak között minőségbeli különbségek lehettek fel. Míg a radiális szálak a stabilitást szolgálják, a spirálisok a préda elkapása céljából jönnek létre. Ennek következménye az, hogy az előbbiek erősebbek, az utóbbiak kevésbé erősek, ellenben rendkívül ragacsosak.



2. ábra. A pókháló készítésének menete [5]

A háló készítésének utolsó lépése a radiális szálak megfeszítése. Ekkor a pók a középpontba megy, ahol

a sugárirányú szálak találkoznak, majd a lábaival maga felé húzva ezeket a szálak megfeszítésre kerülnek. Látni fogjuk, hogy a feszítésnek meghatározó szerepe van a háló mechanikai viselkedése szempontjából.

Az ilyen típusú pókhálók - néhány ritka esettől eltérően - függőleges, vagy ahhoz nagyon közeli síkban készülnek. Ennek oka az, hogy az ezeket szövő pókok zsákmányai nagyrészt rovarok, melyek többet repülnek vízszintesen, mint függőlegesen, valamint a függőleges háló nagyobb valószínűséggel és több ideig tudja megtartani a zsákmányt [6]. A pók így az ő mozgásuk irányára merőleges struktúrával hatékony módját fejlesztette ki a vadászatnak.

A rovar a háló felé repülve a sűrűn szőtt spirális szálaknak köszönhetően nagy valószínűséggel beleütközik legalább egy ragacsos szálba. Ettől a pillanattól a rovar és a hálónak az a pontja, melybe becsapódott együtt mozog, ezzel kinyúlásra készítve a pókselymet. Amennyiben a préda elég kis tömeggel rendelkezik a háló anyaga nem szakad el, ehelyett miután eléri a kitérés maximumát, a rugalmasságából adódóan elindul visszafelé és néhány ilyen periódus után a csillapítás következtében megáll.

## 2. Modell ismertetése

Kísérletek alapján [11] a pókselyem lineárisan rugalmas anyagként (kis hiba mellett) jól modellezhető. Követve az irodalmat, az 1. ábra II. szakaszán elhelyezkedő  $\varepsilon_u = 0,35$  maximális megnyúlási értékkel számolunk. Ezen a szakaszon, ahogyan az ábrán is megfigyelhetjük, az anyag még rugalmasan viselkedik, modellünkben a II. szakaszra jellemző nemlinearitástól eltekintünk, a  $\varepsilon = 0,35$  pontot az origóval összekötve közelítünk. Az anyag Young-modulusa így  $E = 5,0GPa$ , szakítószilárdsága  $f_y = 1,75GPa$ . Mivel az anyag praktikusán összenyomhatatlan, a Poisson-együtthatója  $\nu = 0,5$  értékű a modellben. Az anyag sűrűsége  $\rho = 1250kg/m^3$ , a szálak jellemző átmérője körülbelül  $3-5\mu m$ , így a vonalmentén eloszló tömeg  $\mu \approx 1,57 \cdot 10^{-8}kg/m$ . Ezen adatok alapján a nyúlási merevség  $EA = 6,3 \cdot 10^{-2}N$ . A háló anyagi csillapítását szintén kísérleti eredmények alapján ismerjük [7]. Értékét a modellben sebességfüggőnek tekintjük, a továbbiakban a háló anyagának disszipációja  $C = 2,5 \cdot 10^{-5}Ns/m$ .

Az irodalomban fellelhető mérési eredmények szerint a pókselyem anyagi tulajdonásai meglepően állandóak, a modellben az anyagjellemzők kismértékű szórásától ezért eltekintünk, azokat a fennt rögzített várható értékükkel vesszük figyelembe.

A pókháló által megfogott rovarok tömege  $0,1 - 1,0g$  között váltakozik, sebességük pedig körülbelül  $v_0 = 1,0 - 3,0m/s$  [14]. Az irodalom szerint a cél a minél nagyobb tömegű bogár befogása a háló sérülése nélkül. Ezért számításainkban  $m = 1,0g$  becsapódó tömeggel számolunk,  $v_0 = 1,0m/s$  mellett.

## 2.1. A mechanikai modell

Mivel a hajlítási merevség a szál átmérőjének harmadik, nyúlási merevsége pedig első hatványával arányos, a fonal kis átmérője miatt a hajlítási merevséget elhanyagoljuk. A háló belső,  $N$  csomópontját csuklóként modellezzük. A peremeken nem megengedett a mozgás, az itt elhelyezkedő csomópontok számát jelölje  $B$ !

A háló merevsége az előfeszítésből és a nagy alakváltozások miatt nem elhanyagolható geometriai nem-linearitásból adódik. Az előfeszítés fontos tényező, látni fogjuk, hogy nélküle a kezdeti (érintő) merevségi mátrix szinguláris. A háló az  $[xy]$  síkban fekszik, középpontjával az origóban. A belső csomópontokat 1-től  $N$ -ig tetszőleges sorrendben számozzuk. A perempontokat  $(N + 1)$ -től  $(N + B)$ -ig szintén sorszámmal látjuk el. Kizárólag  $z$  irányú mozgást engedünk meg, a  $t$  időpillanatban a belső csomópontok függőleges helyzetét az  $N \times 1$ -es  $z(t)$  oszlopvektor tárolja. Legyen

$$\hat{z}_i(t) := \begin{cases} z_i(t), & \text{ha } 1 \leq i \leq N \\ 0, & \text{ha } N + 1 \leq i \leq N + B. \end{cases} \quad (1)$$

A háló tömegét a csomópontokba koncentráljuk, egy csomópontban a teljes háló tömeg  $1/N$  részét vesszük figyelembe. Így lesz a  $M$  tömeg mátrix  $N \times N$ -es, diagonális mátrix. Ha az  $i$ . és  $j$ . csomópontok előfeszített szállal vannak összekötve, melynek a megnyúlása  $\varepsilon_0$ , akkor a  $V_{ij}(t)$  belső erő függőleges komponense a  $t$  időpontban az  $i$ . és  $j$ . csomópont között a geometriai elrendezésből adódóan az alábbi módon számítható



ki:

$$\begin{aligned}
V_{ij}(t) &= EA \frac{\sqrt{(\hat{z}_i(t) - \hat{z}_j(t))^2 + l(i, j)^2} - l(i, j)(1 + \varepsilon_0)^{-1}}{l(i, j)(1 + \varepsilon_0)^{-1}} \frac{\hat{z}_i(t) - \hat{z}_j(t)}{\sqrt{(\hat{z}_i(t) - \hat{z}_j(t))^2 + l(i, j)^2}} = \\
&= EA \left( \frac{1 + \varepsilon_0}{l(i, j)} - \frac{1}{\sqrt{(\hat{z}_i(t) - \hat{z}_j(t))^2 + l(i, j)^2}} \right) (\hat{z}_i(t) - \hat{z}_j(t)) = \\
&= k_{ij}(t)(\hat{z}_i(t) - \hat{z}_j(t)), \tag{2}
\end{aligned}$$

ahol  $l(i, j)$  az  $i$ . és  $j$ . csomópont közötti (vetületi) távolság az  $[x, y]$  síkban a megfeszített állapotban, továbbá  $k(i, j)$  jelöli a merevséget és  $1 \leq i, j \leq N + B$ . Ha az  $i$ . és  $j$ . csomópont nem csatlakozik egymáshoz, akkor  $V_{ij}(t)$  és így  $k_{ij}(t)$  is természetesen zérus bármely  $t$ -re. A fenti képlet tartalmazza a geometriai nemlinearitást ( $k_{ij}(t)$  függ az elmozdulás aktuális értékétől) és a feszítésből származó merevséget.  $\varepsilon_0 = 0$  esetén a képlet a feszítetlen háló nemlineáris merevségét adja. A fentiek alapján  $\hat{K}(\hat{z})$  nemlineáris merevségi mátrix a következő alakban adható meg

$$\hat{K}_{i,j}(t) = \begin{cases} k_{ij}(t), & \text{ha } i \neq j \\ \sum_{i=1}^{N+B} -k_{ij}(t), & \text{ha } i = j. \end{cases} \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$  és  $\hat{z}_i \rightarrow \hat{z}_j$  esetén  $k_{ij}(t) \rightarrow 0$  következik, azaz feszítés nélkül a kezdeti állapotban a merevség hiányos, a merevségi mátrix pedig szinguláris.

Azáltal, hogy a határon elhelyezkedő csomópontok helyhez kötöttek, a szabadsági fok megegyezik  $N$ -nel. A redukált merevségi mátrixot (a határpontokhoz tartozó oszlopok és sorokat eltávolítva)  $K(z)$ -vel jelöljük. Természetesen ez egy  $N \times N$ -es, szimmetrikus mátrix. Ugyanilyen módon a csillapítást időtől függetlennek tekintjük és a csomópontokhoz rendeljük. Ahogy korábban említettük, a  $C$  csillapítási mátrix diagonális elemei  $C(i, i) = 2.5 \cdot 10^{-5}$ -el egyenlőek.

A modellben a rovar a háló egy tetszőleges,  $n_0$  jelű belső csomópontjába csapódik be ( $1 \leq n_0 \leq N$ ) a  $t = 0$  időpillanatban,  $v_0$  sebességgel. Ekkor tömege hozzáadódik a háló  $n_0$  csomópontjának tömegéhez, így a teljes tömegmátrix  $M = M_0 + m_1 e_{n_0} \otimes e_{n_0}$ , ahol  $\otimes$  a diadikus szorzatot jelöli és  $e_{n_0}$  egy  $N \times 1$ -es vektor egyetlen 1-essel az  $n_0$  pozícióban. Célunk a becsapódás során fellépő legnagyobb nyúlások elemzése (a lineárisan rugalmas anyagmodell miatt ez egyenértékű a legnagyobb feszültségek elemzésével). Ehhez a nemlineáris dinamikai egyenlet numerikus szimulációjára van szükségünk. A szimulálni kívánt,

másodrendű, közönséges differenciálegyenlet-rendszer tehát:

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + K(z)z = 0, \quad (4)$$

ahol az egyértelmű megoldáshoz szükséges kezdeti feltételek:

$$z(0) \equiv 0, \quad (5)$$

$$\dot{z}(0) = 0 + v_0 e_{n0}. \quad (6)$$

## 2.2. A numerikus modell

A számítások során a csomópontokban értelmezett mennyiségeket  $(N + B) \times 1$  méretű vektorokban tároljuk olyan módon, hogy előre vesszük a belső csomópontokat, ezeket sorrendben követik a külső csomópontok. A numerikus szimulációhoz a (4) egyenlet időbeni diszkrétizációja szükséges (a modellfeltevések miatt a szerkezetet térben már diszkrétizáltuk, hiszen a hálót a csomópontjaira tudtuk redukálni). Jelölje  $\Delta t$  a numerikus séma időlépését, az egymás utáni lépéseket indexelje  $q$ ! Egyszerű Euler-diszkrétizáció esetén a pozíció és a sebesség léptetése a

$$z_{q+1} = z_q + \dot{z}_q \Delta t, \quad (7)$$

$$\dot{z}_{q+1} = \dot{z}_q + \ddot{z}_q \Delta t \quad (8)$$

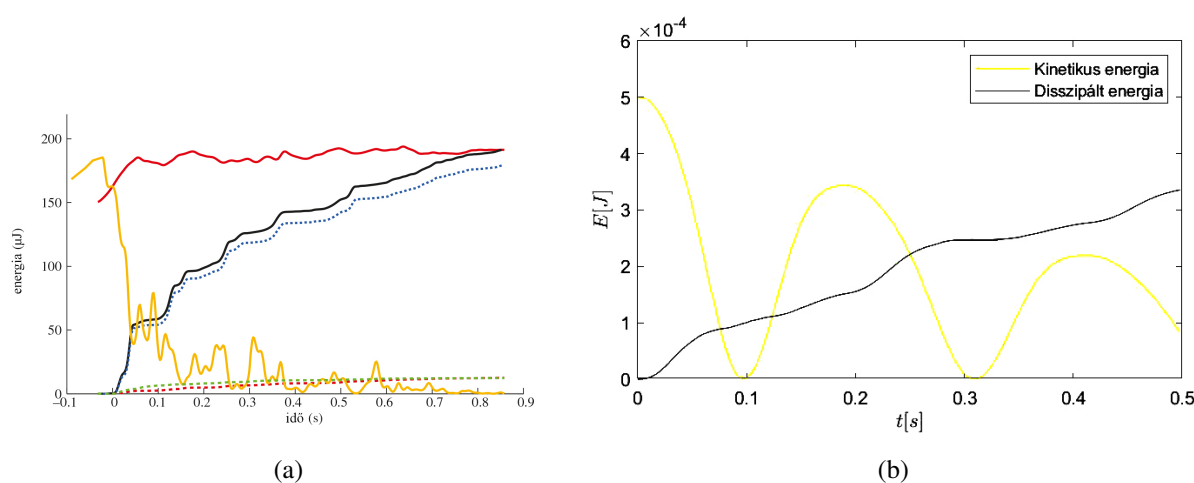
szabálynak tenne eleget. Azonban ismert, hogy az Euler-séma csak nagyon kis időlépésekkel lenne konvergens. Ez esetünkben különösen kritikus, hiszen a háló nagyon alacsony tömege miatt az  $M$  tömegmátrix közel szinguláris, a feladat rosszul kondicionált. Ezért a számítási algoritmusban a Newmark- $\beta$  módszer egy továbbfejlesztett változatát, a HHT- $\alpha$  módszert implementáltuk [16]. Sajnos, ez a megoldás továbbra is nagyon kicsi,  $\Delta t \approx 10^{-7} - 10^{-9}$  nagyságú időlépéseket tett szükségessé.

Végül a MATLAB beépített, közönséges differenciálegyenlet megoldó algoritmusát használtuk a számítások elvégzéséhez. Az `ode15s.m` függvény alkalmasnak bizonyult a közel szinguláris probléma számításához. Az algoritmus az időlépéseket olyan módon választja meg, hogy az eljárás konvergenciája ne vesszen el.

Az irodalomban többféle modellezését láthatjuk a pókhálók viselkedésének. Előfordulnak az itt használatnál bonyolultabb és egyszerűbb változatok is, illetve az általunk implementált modellt is több esetben használták. A hiperelasztikus anyagként való modellezés nagy valószínűséggel pontosabb eredményekkel szolgálna, viszont jóval bonyolultabb. Ehelyett az előzetesen tárgyaltra esett a választás, mert könnyen alkalmazható és jól közelíti az irodalomban található mérési tapasztalatokat.

## 2.3. Verifikáció

Az irodalomban a részletesen dokumentált numerikus eredmények ritkák, ezért az implementált modellt egy, kísérleti munkával [18] vetem össze.



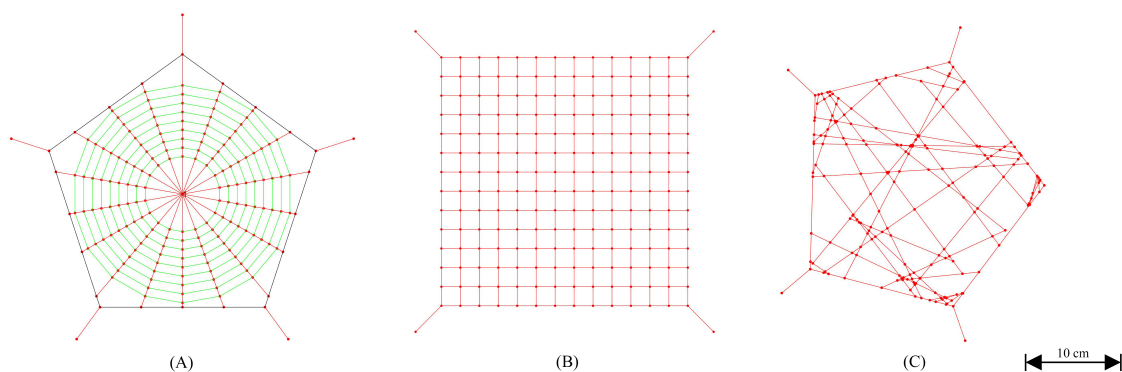
3. ábra. A (a) ábrához tartozó cikk [18] írói összesen nyolc, a pókokkal laboratóriumi körülmények között szövettett hálót vizsgáltak. A hálót mesterséges lövedékekkel bombázták és képkalkotó eljárás segítségével következtettek a becsapódó tömeg mozgási energiájára (sárga görbe) és a háló által disszipált energiára (fekete görbe). A piros görbe a rendszer teljes energiája, ami a várakozásnak megfelelően közel állandó. A (b) ábrán az implemantált modellben számított mozgási (sárga) és disszipált energia látható (fekete). Vegyük észre, hogy numerikus modell helyesen adja vissza a disszipált enrgia kísérletben megfigyelt lépcsős viselkedését!

A 3.(a) ábra több kísérlet átlagát mutatja, ezekben egy  $98\text{mg}$  tömegű,  $180\mu\text{J}$  kinetikus energiával rendelkező lövedék csapódik vízszintesen egy pókhálóba. A téglatest formájú, balsafa lövedékeket  $3\text{m/s}$ -os sebességgel,  $0.5\text{m}$ -ről lőtték a hálóba. A sárga vonal a zsákmány kinetikus energiáját, a fekete a háló által

elnyelt összes energiát jelöli. Sajnos, a háló pontos geometriáját nem közölték, ezért egy általános, spirális háló szimulációját hasonlítom a kísérleti eredményekhez. Az én számításom során készült (b) ábra jól látható hasonlóságot mutat az (a) ábrával. Itt a vonalak színe ugyanazt jelöli, mint az (a) ábrán. Megfigyelhető, ahogyan a disszipált energia időbeli változásának jellege nagyon hasonló a két ábrán. Ez a hasonlóság arra enged következtetni, hogy az általam használt szimuláció jól működik, hiszen tükrözi valós hálóval végzett kísérleti eredményeket.

## 2.4. A vizsgált geometriai elrendezések

A kutatás feltevése szerint a pókhálók valós, jellegzetes elrendezése tartószerkezeti szempontból jobban teljesít az ezt tipikusan érő hatásokra, mint geometriailag más elrendezésű struktúrák. A hipotézis vizsgálata céljából három, különböző topológiájú háló szimulációját készítettem el. Ezeket a 4. ábrán mutatom be.



4. ábra. A szimuláció során használt különböző geometriai elrendezések

Az (A) jelű háló egy korábbi cikkben [17] felállított keretézéssel készült struktúra. Az ötszög alakú keret 5, rövid szállal kapcsolódik a külvilághoz. Ez nagyban hasonlít a valós hálók elrendezéséhez, valamint a cikk szerint a keretnek jelentős szerkezeti szerepe is van. Mivel az irodalomban többen is használták ezt a formát, mint tipikus alakzatot, én is ezt tekintem a valódi háló geometriai elrendezésének. A (B) elrendezés vízszintes és függőleges szállai négyzetes hálót alkotnak, mely az ember által talán leglogikusabbnak tűnő szerkezet. Ebben az elrendezésben 4, rövid száll biztosítja a háló rögzítését. Végül pedig a (C) egy véletlenszerűen rendezett szállak alkotta háló, amelyet az (A) struktúrában használt ötszög és annak rögzítő szállai kereteznek. A készítés elve, hogy a program a keret mentén véletlenszerűen kijelöl két pontot, majd ezeket egy szállal összeköti. A keretek csúcspontjaiba csatlakozó szállak a valós háló tárgyakhoz való rögzítését

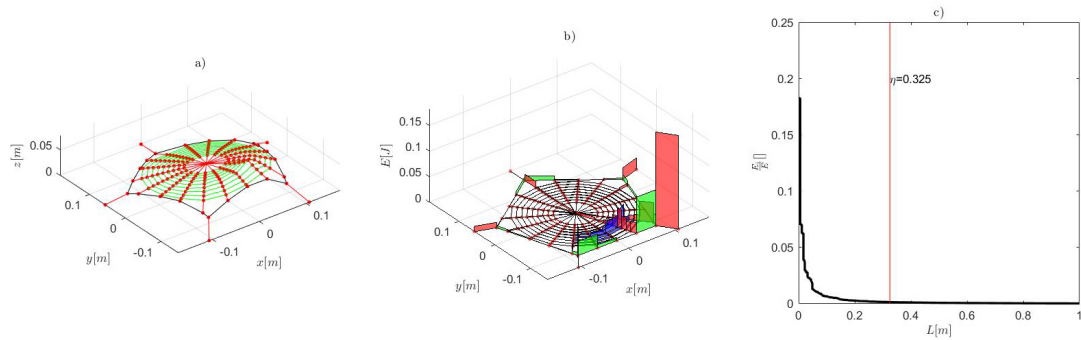
hivatott modellezni. A három elrendezés által elfoglalt terület a megfelelő összehasonlíthatóság miatt közel azonos, a szálak közötti területek ellenben nem egyenletesek a hálók között és az egyes hálókon belül sem mindenhol. Szintén egyezik a hálókhoz felhasznált anyagmennyiség. Ez azért fontos, mert ahogyan korábban részleteztem, a pók számára a pókselyem rendkívül értékes. A számításokat minden geometriai elrendezéshez elvégeztük a következő előfeszítések mellett:  $\varepsilon_0 \in \{10^{-4}, 10^{-3}, 0.01, 0.02, 0.05\}$ , ahol a (B) és a (C) háló mindegyik szálát, az (A) háló esetében pedig csak a radiális szálakat tekintettük feszítettnek. Minden szimulációból készült egy, a háló közepéhez közeli és egy, a háló széléhez közeli becsapódást modellező futás.

### 3. Eredmények

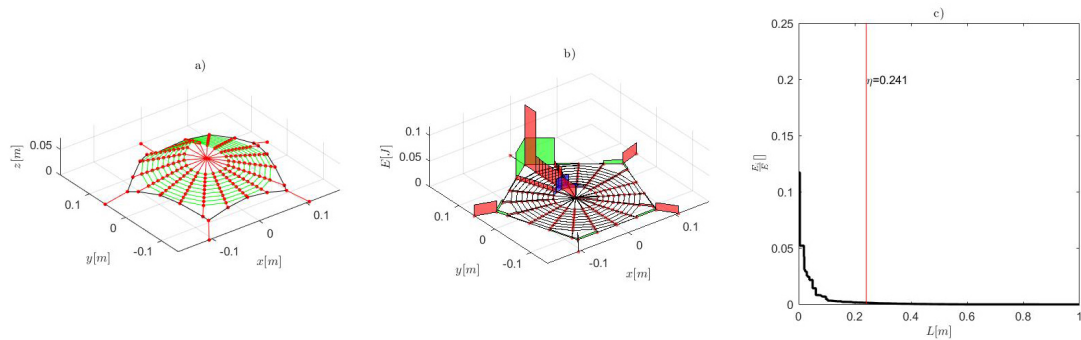
#### 3.1. A geometriai tulajdonságok érvényesülése a számítások során

Az ismertett modellel és geometriával való számítások során igazolást nyertek a kutatás hipotézisei. A geometriát illetően, a leghatékonyabbnak az (A) struktúra bizonyult. Mind a három geometriájú hálót két különböző becsapódási pontban szimuláltam – egy pont a hálók közepéhez közel, egy a perifériához közelebb helyezkedik el. A számítási eredményeket összefoglaló ábrák bal oldalán a háló a becsapódás hatására bekövetkező legnagyobb kitérése látható. A középső részen, a belső erő ábrákhoz hasonló módon, az egyes szálakban a legnagyobb kitérés állapotában a becsapódás hatására tárolt rugalmas energia nagysága látható. A jobb oldali ábrán a szálakat a bennük tárolt rugalmas energia szerint sorba állítva ábrázolom a relatív rugalmas energiát (ami az adott szálban tárolt rugalmas energia viszonyítva a teljes rugalmas energiához). A vízszintes tengelyen a szálak relatív hosszukkal szerepelnek, ami az adott szál hossza viszonyítva a teljes szálhosszhoz. A piros függőleges vonal és a  $\mu$  szám azt mutatja, hogy a teljes hálóhossz hányad része viseli a rugalmas energia 90%-át. Alacsony  $\mu$  érték esetén a becsapódás energiáját néhány szál veszi fel, ami szerkezeti szempontból hátrányosnak mondható. Minél magasabb a  $\mu$  értéke, annál több szála a hálónak részt vesz az energia elnyelésében.

Az alábbi ábrákat eredményező számításokat nagyon kis  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$  előfeszítés mellett végeztem. Mint láttuk, ez szükséges a numerikus megoldó működéséhez, azonban mérnöki értelemben egy ilyen háló már feszítésmentesnek tekinthető.



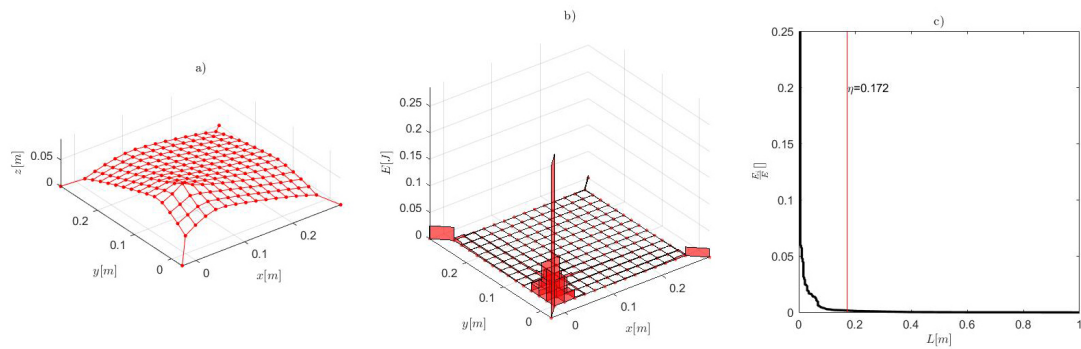
(a) A háló széléhez közelebb becsapódó zsákmány szimulációja



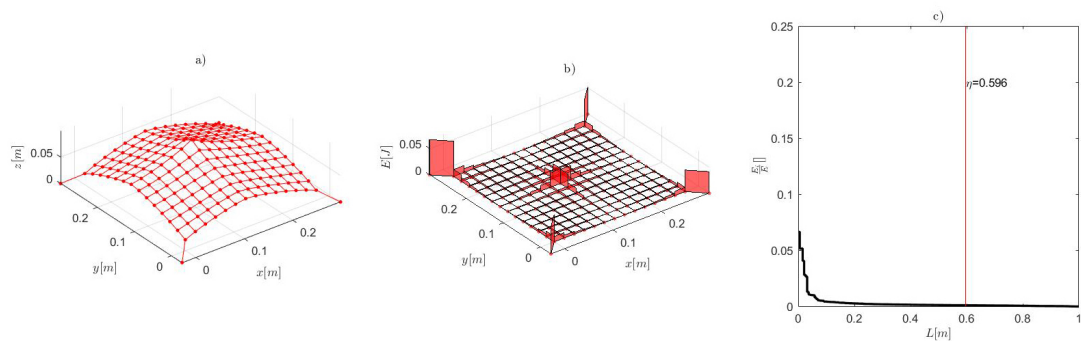
(b) A háló közepéhez közelebb becsapódó zsákmány szimulációja

### 5. ábra. Az (A) háló számításai

Az 5. ábráról leolvasható, hogy energia elnyelés szempontjából, az (A) elrendezés esetén kedvezőbb, ha a háló széléhez közel csapódik be a zsákmány mert ekkor valamivel magasabb  $\mu$  értéke. Természetesen azonban, mivel a becsapódás bárhol megtörténhet, az egész hálónak jól kell teljesíteni. Ez ebben az esetben megtörténik, a két grafikon között itt a legkisebb a különbség a számított  $\mu$  értékekben.



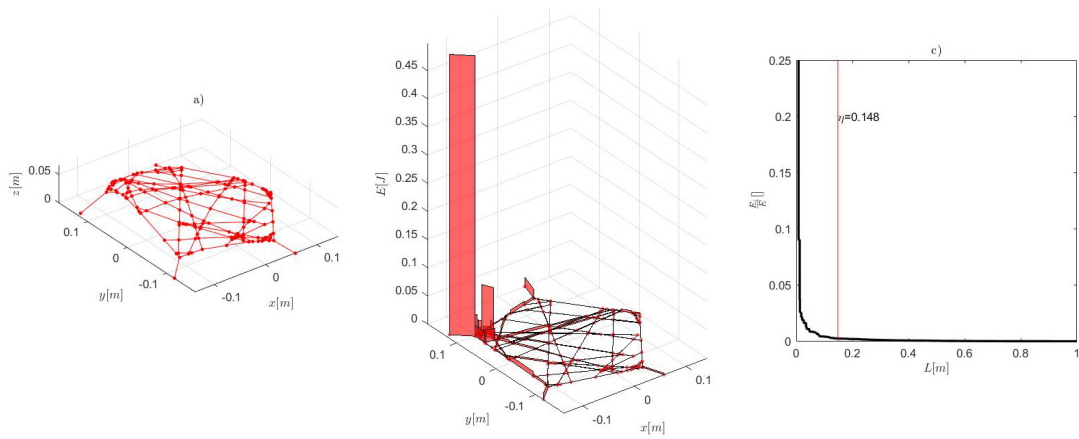
(a) A háló széléhez közelebb becsapódó zsákmány szimulációja



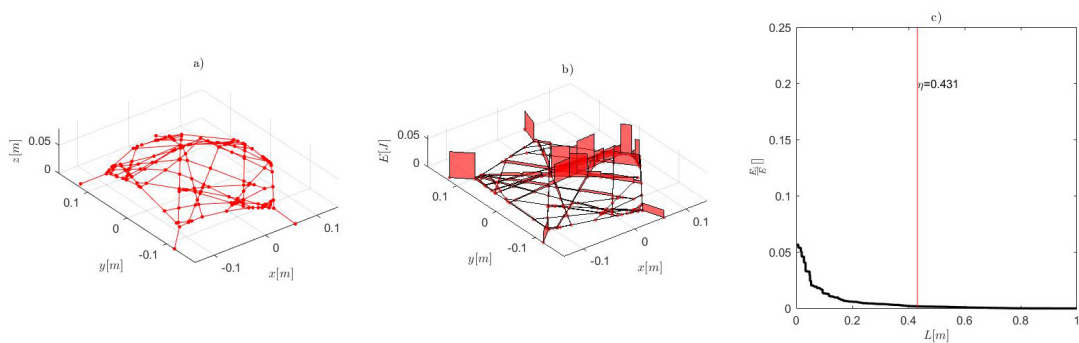
(b) A háló közepéhez közelebb becsapódó zsákmány szimulációja

### 6. ábra. A (B) háló számításai

A 6. ábrán látható, hogy a négyzetes elrendezése esetén ugyan a közepéhez közel a szálak nagyobb része vonódik be az energiaelnyelésbe, mint az előző esetnél, ez az elrendezés jelentősen gyengébben teljesít a szélekhez közeli becsapódás esetén.



(a) A háló széléhez közelebb becsapódó zsákmány szimulációja



(b) A háló közepéhez közelebb becsapódó zsákmány szimulációja

## 7. ábra. A (C) háló számításai

Ahogy a 7. ábrán megfigyelhetjük, a (C) háló esetében az eredmény az előző kettő között van. Itt azonban az egyes szálak megnyúlása jelentősen nagyobb lehet, ez pedig a háló sérüléséhez vezethet.

Ezen felül fontos megjegyezni, hogy ha bármely háló esetén a középponttól és a kerettől egyenlő távolságra lévő pontokat összekötve gondolatban elfelezzük a háló területét, a középpontot tartalmazó terület szignifikánsan kisebb, mint a kerethez közelebbi pontok. Tehát a zsákmánynak számottevően több esélye van a széléhez közelebb becsapódni. Ezt figyelembe véve a háló hatékonyságát jobban jellemzi a szélén végzett vizsgálat. Ennek fényében értékelhető igazán, hogy a sugaras-spirális elrendezés teljesítménye bármely becsapódásnál közel azonos, azonban valamivel jobban teljesít akkor, ha a háló széléhez közel érkezik a zsákmány. A másik kettő, mesterségesen kitalált elrendezés viselkedése fordított, pont abban a helyzetben, azaz a szélekhez közeli becsapódásban teljesítenek gyengébben, ami nagyobb valószínűséggel



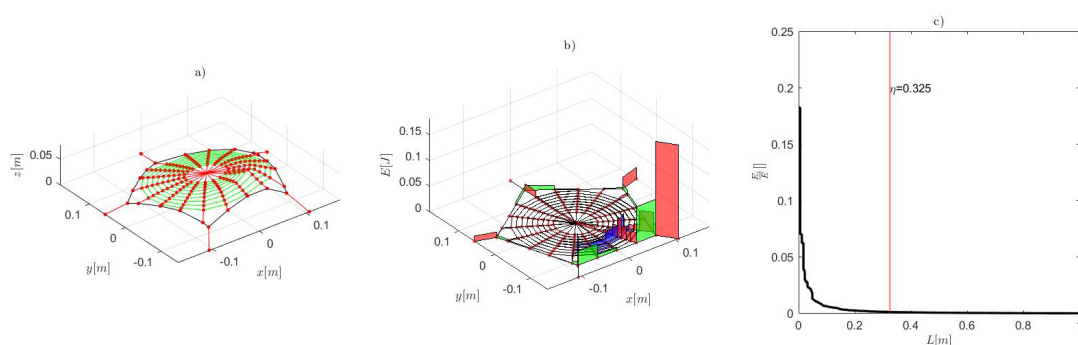
következik be. Ez alapján állítjuk, hogy a spirális-sugaras elrendezés mechanikai szempontból optimálisabb a másik két elrendezésénél.

### 3.2. Az előfeszítés mértékének hatásai

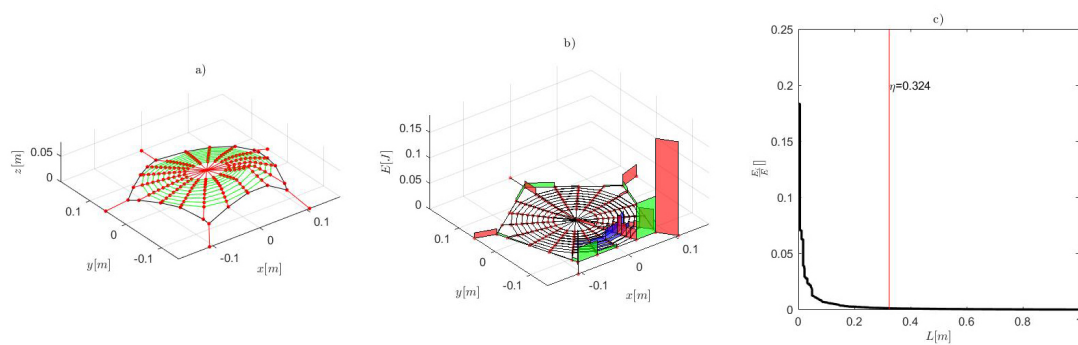
Az előfeszítés értékének változásából adódó különbségek vizsgálatához az (A) hálóval végeztem számításokat. A háló széléhez és középpontjához közelebb eső becsapódás esetén 5-5 értékkel számoltam:

$$\varepsilon_0 \in \{10^{-4}, 10^{-3}, 0.01, 0.02, 0.05\}$$

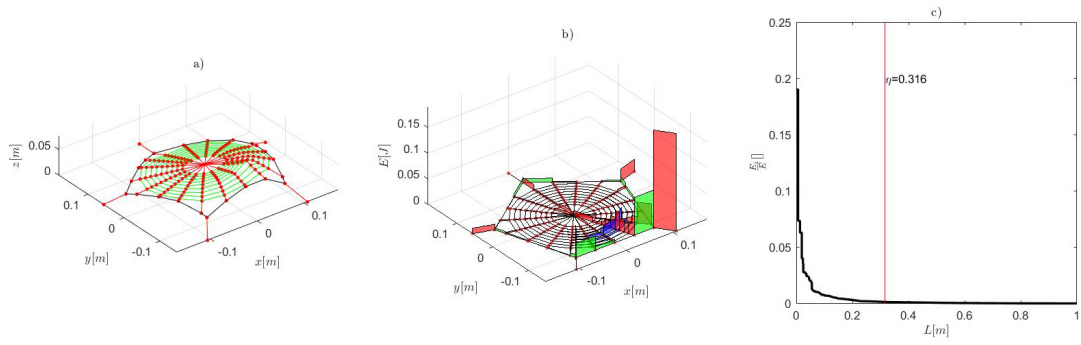
#### A háló széléhez közelebbi becsapódás



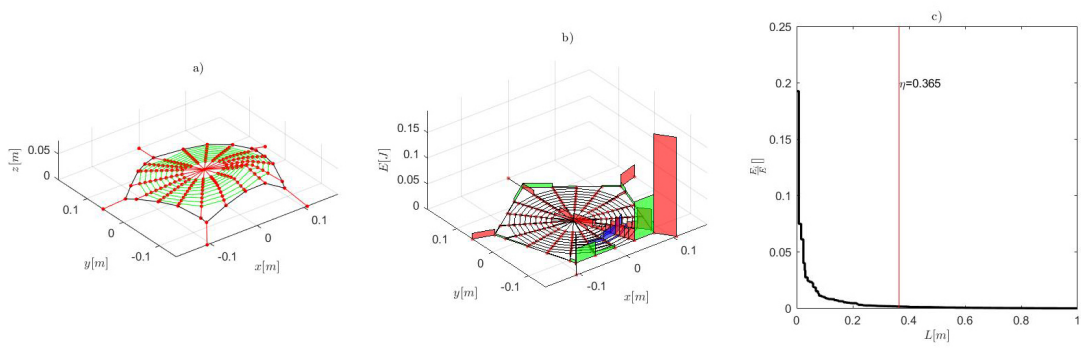
8. ábra.  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$



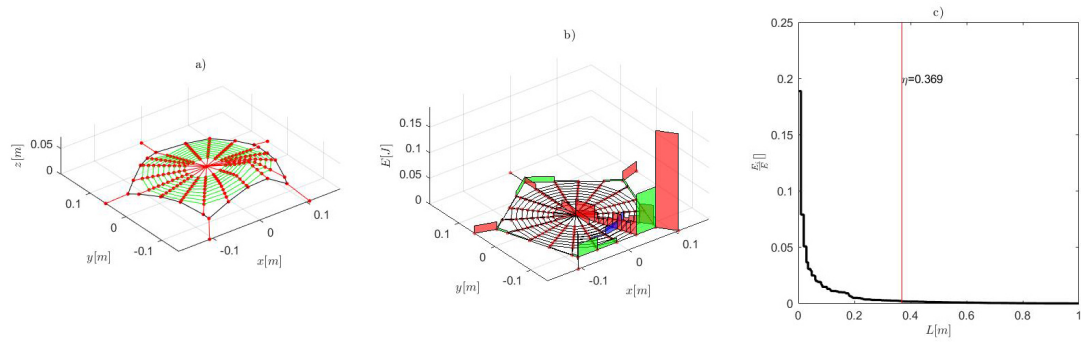
9. ábra.  $\varepsilon_0 = 10^{-3}$



10. ábra.  $\varepsilon_0 = 0.01$



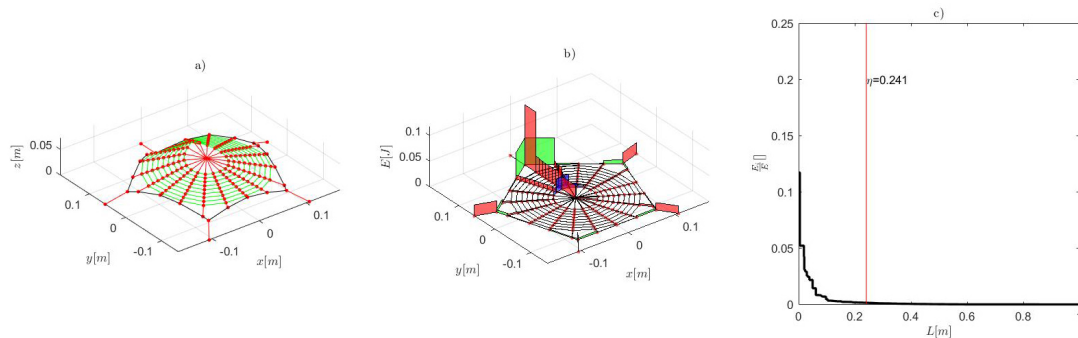
11. ábra.  $\varepsilon_0 = 0.02$



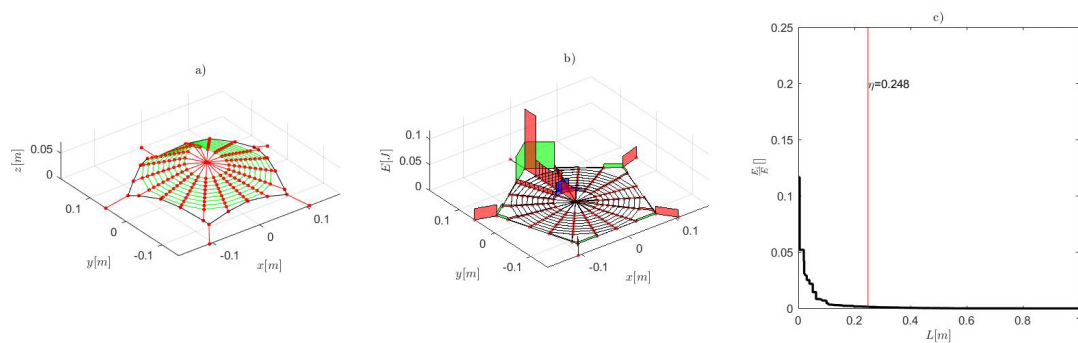
12. ábra.  $\varepsilon_0 = 0.05$

A 8-12. ábrasorozaton megfigyelhetjük, ahogyan a háló keretéhez közelebb becsapódó zsákmány esetében az energiaelnyelés 90%-ában résztvevő szálhossz arány kevéssé változik:  $\eta_{0.05} - \eta_{10^{-4}} = 0.369 - 0.325 = 0.044$ , azaz az előfeszítés mértéke alig befolyásolja az együttdolgozás mértékét.

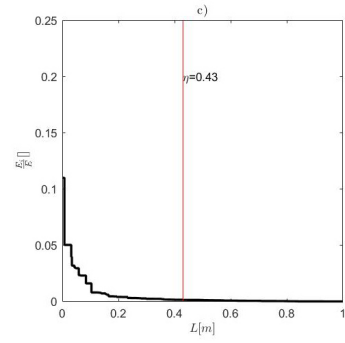
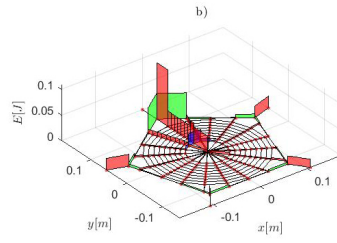
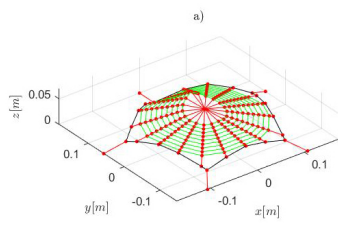
## A háló közepéhez közelebbi becsapódás



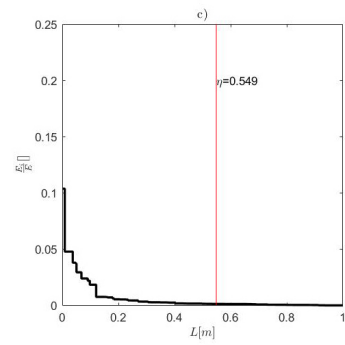
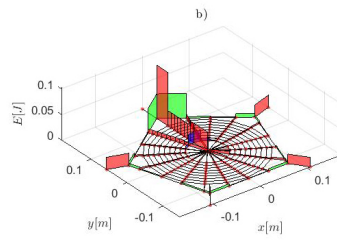
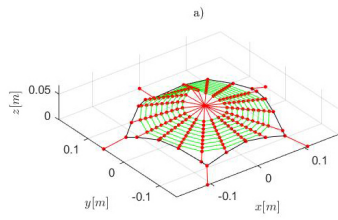
13. ábra.  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$



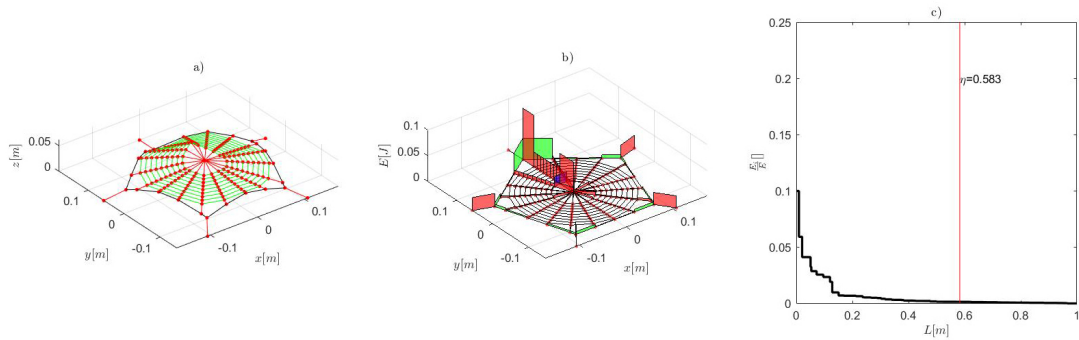
14. ábra.  $\varepsilon_0 = 10^{-3}$



15. ábra.  $\varepsilon_0 = 0.01$



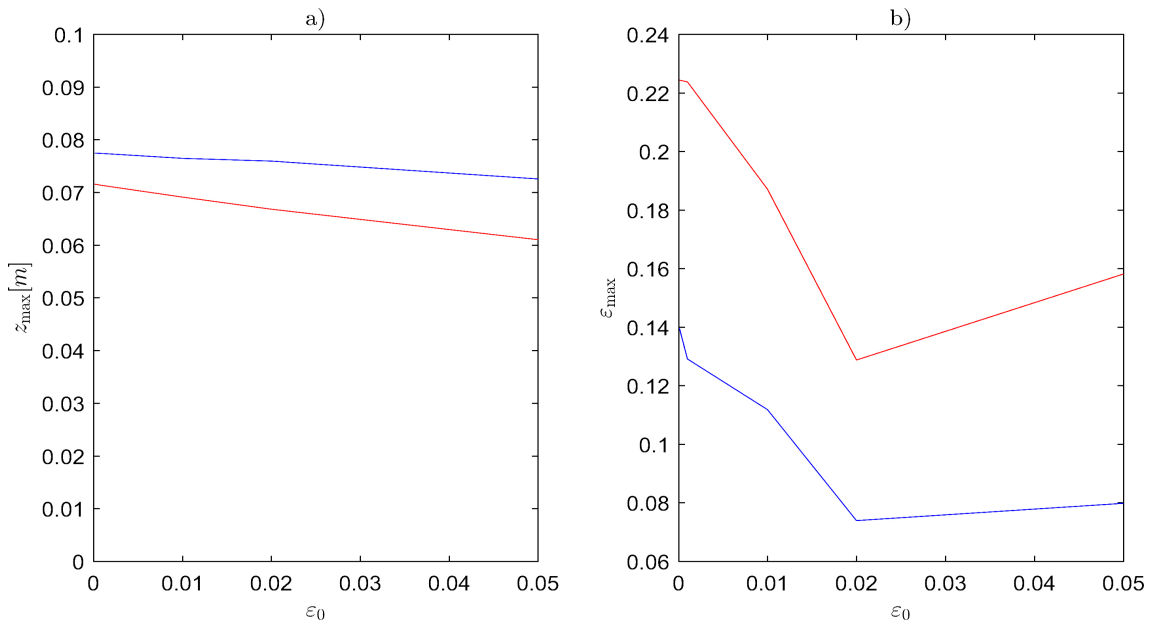
16. ábra.  $\varepsilon_0 = 0.02$



17. ábra.  $\varepsilon_0 = 0.05$

A háló szélén történő becsapódással szemben, a 13-17. ábrán egyértelműen látható, hogy az előfeszítés mértéke a középpont körüli becsapódás esetében sokkal nagyobb hatással bír. A különbség itt egy nagyságrenddel nagyobb:  $\eta_{0.05} - \eta_{10^{-4}} = 0.583 - 0.241 = 0.342$ .

Vegyük észre, hogy a szimulációk alapján létezik egy ideális előfeszítési érték, aminél a  $\mu$  értéke a széleken és a közepén történő becsapódás esetén azonos. Az elvégzett szimulációk alapján ez az érték valamivel  $\varepsilon_0 = 0.01$  alatt található. A becsapódás hatására történő megnyúlás egyenletességéhez a háló különböző pontjai között szükség van tehát az előfeszítésre. Azonban minél nagyobb ennek az értéke, annál valószínűbb, hogy a háló sérül az ütközés következtében fellépő jelentős nyúlások miatt. Ezért a nyúlások szempontjából is megvizsgáljuk az előfeszítés hatását a hálóban.



18. ábra. Az a) ábrán a maximális kitérés szerepel az előfeszítés függvényében, a b) ábrán a relatív megnyúlás az előfeszítés függvényében. Mindkét ábrán a piros szín a közép-  
 jelű, a kék a szélre történő becsapódást jelöli az (A) jelű, sugaras-spirális elrendezésű háló esetében.

A 18 a) ábrán észrevehető, hogy a kitérésre nincs számottevő hatással az előfeszítés mértéke. A b) ábra ellenben mutatja, hogy a maximális relatív megnyúlás egyértelműen érzékeny rá. A háló épsége szempontjából előnyös az alacsony relatív megnyúlás, ami világosan az  $\varepsilon_0 = 0.02$ -nél következik be.

Számítási eredményeink alapján arra jutottunk, hogy a háló ideális előfeszítése  $\varepsilon_0 = 0.01$  és  $\varepsilon_0 = 0.02$  közötti érték. Sajnos, kísérleti eredménnyel ezt nem tudjuk alátámasztani, azonban a 4. ábrán hivatkozott publikáció [18] kiemeli, hogy a radiális-spirális elrendezésben a spirális szálakban tárolt belső energia szinte elhanyagolható a sugaras szálak rugalmas energiájához képest. Ez megegyezik az előfeszített hálókon kapott eredményeinkkel.

## 4. Összefoglalás

Kutatásom során a kapott szimulációs eredmények alátámasztják azt a kezdeti feltevést, hogy a pókháló nem csak anyaga, de struktúrája miatt is jól teljesítő szerkezet. Más geometriával rendelkező hálókkal összehasonlítva előfeszítés nélkül is lényegesen jobban érvényesül az együttdolgozás, amit egy új együttműködéssel ( $\mu$ ) jellemeztem. A négyzetes és a véletlenszerű elrendezése a kerethez közeli becsapódás esetén

sokkal gyengébben teljesített, a középponthoz közel pedig erősen. Ezzel szemben a sugaras-spirális pókháló ugyan kevésbé szerepelt jól a középpont közelébe csapódó zsákmány esetén, a széléhez közelebb viszont a többi hálónál egyértelműen alkalmasabbnak bizonyult.

Ezen túl felfedezhető, hogy a sugaras-spirális elrendezés esetén a két különböző becsapódási hely eredményei kevésbé térnek el egymástól, mint a másik két vizsgált struktúránál. Ilyen értelemben a pókháló szerkezete emlékeztet a mérnöki gyakorlatban preferált egyenszilárdságú szerkezetekre, a becsapódás helyétől függetlenül hasonlóan viselkedik, azaz anyagfelhasználása optimálisnak mondható.

Az elvégzett szimulációk azt is megmutatták, hogy a háló radiális szálaiban fellelhető előfeszítés nagy hatással van az energia elnyelésének eloszlásában. A szinte feszítetlen hálóban kevésbé fellelhető az együtdolgozás jelensége, míg a túl feszes háló jobban dolgozik együtt, hajlamosabb azonban a szálak elszakadására. A dolgozat alapján egy elméleti előrjelezést is tehetünk: a valódi pókhálóban az előfeszítés mértéke valahol  $\varepsilon = 0.01$  és  $\varepsilon = 0.02$  között várható. Azaz a két véglet között sikerült egy olyan tartományt találni, melyben egyaránt megvan az együtdolgozás előnye és a relatív megnyúlás szempontjából is optimális. Ennek kísérleti igazolása egy izgalmas jövőbeni feladatnak ígérkezik.



## Hivatkozások

- [1] N. M. PUGNO, S. W. CRANFORD, M. J. BUEHLER: Synergetic Material and Structure Optimization Yields Robust Spider Web Anchorages, *Small Journal*, **16**, (2013), 2747–2756.
- [2] L.RÖMER, T. SCHEIBEL: The elaborate structure of spider silk, *Prion*, **2**(4), (2008), 154-161.
- [3] T. MIYASHITA, Y. MAEZONO, A. SHIMAZAKI: Silk feeding as an alternative foraging tactic in a kleptoparasitic spider under seasonally changing environments, *Journal of Zoology*, **262**(3), (2004), 225-229.
- [4] S. ZSCHOKKE: Form and function of the orb-web, *European Arachnology 2000*, (2002), 99-106.
- [5] S. ZSCHOKKE: Early stages of orb web construction in *Araneus diadematus* Clerck, *Revue Suisse De Zoologie*, (1996), 709-720.
- [6] W.G. EBERHARD: Effects of orb web orientation and spider size on prey retention, *Bull.Br.arachnol.Soc.* (1989) **8**(2), 45-48.
- [7] J. ALENCASTRE, C. MAGO, R. RIVERA: Determination of energy dissipation of a spider silk structure under impulsive loading, *Front. Mech. Eng.*, **10**(3), (2015), 306-310.
- [8] Y. AOYANAGI, K. OKUMURA: Simple Model for the Mechanics of Spider Webs, *Phys. Rev. Lett.*, **104**, (2010), 038102.
- [9] J.E. Bond, N.L. Garrison, C.A. Hamilton, R.L. Godwin, M. Hedin, I. Agnarsson: Phylogenomics Resolves a Spider Backbone Phylogeny and Rejects a Prevailing Paradigm for Orb Web Evolution *Curr. Biol.*, **24**, (2014), 1765-1771.
- [10] N.S. HA, Q.T. TRUONG, N.S. GOO, H.C. PARK: Relationship between wingbeat frequency and resonant frequency of the wing in insects, *Bioinspir. Biomim.*, **8**, (2013), 046008.
- [11] F.K. KO, J. JOVICIC: Modeling of Mechanical Properties and Structural Design of Spider Web, *Bio-macromolecules*, **5**, (2004), 780-785.
- [12] L.H. LIN, D.T. EDMONDS, F. VOLLRATH: Structural engineering of an orb-spider's web, *Nature*, **373**, (1995), 146-148.

- [13] Z. QIN, B.G. COMPTON, J.A. LEWIS, M.J. BUEHLER: Structural optimization of 3D-printed synthetic spider webs for high strength, *Nature Communications*, **6**:7038, (2015), DOI: 10.1038/ncomms8038
- [14] A.T. SENSENIG, S.P. KELLY, K.A. LORENTZ, B. LESHER T.A. BLACKLEDGE: Mechanical performance of spider orb webs is tuned for high-speed prey, *J. Exp. Biology*, **216**, (2013), 3388-3394.
- [15] <https://www.earthlife.net/chelicerata/web-evolve.html>
- [16] H. P. GAVIN: Numerical Integration in Structural Dynamics, *Duke University, CEE 541. Structural Dynamics*
- [17] A. SOLER, R. ZAERA: The secondary frame in spider orb webs: the detail that makes the difference *Sci. Rep.* **6**31265; doi: 10.1038/srep31265 (2016).
- [18] A. T. SENSENIG, K. A. LORENTZ, S. P. KELLY, T. A. BLACKLEDGE: Spider orb webs rely on radial threads to absorb prey kinetic energy, *J. R. Soc. Interface*, **9**(73): 1880–1891. (2012), doi:10.1098/rsif.2011.0851