



A megpengetett húr hangszínének fizikai háttere

Szerző:

Friedrich Dániel

NK: FHHGJO

Konzulensek:

Dr. Hegyi Dezső

Dr. Sipos András Árpád



2022. ősz

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék

Absztrakt

A dolgozatomban a hangszín fogalmát közelítem meg több oldalról. Vizsgálom fizikai, matematikai, zenei szempontból, párhuzamosan a hangszerkészítési elvekkel.

A bevezetőben az olvasó elé tárom személyes tapasztalataimat, főbb motivációimat az egyes tudományágak szintetizálása terén. Összegzem az előzményül szolgáló tanulmányaimat a hangszerkészítés, a hangszertervezés, [1] a zene, a matematika, az elméleti fizika [2] és az építészet vonatkozásában.

Bemutatom a hangszín fizikai vonatkozásait: a hullámegyenlet kezdetiérték-feladatának megoldásául szolgáló felharmonikusok amplitúdóinak arányait. [2], [3] Egy egyszerű modellen keresztül egy pengetett, kezdeti húralaknak képezem a Fourier-féle transzformáltját, és bemutatom, hogy a pengetés helyének függvényében hogyan változik a hangszín. Kapcsolatot teremtek számos példát elemezve ezen eredmény, és az előadói, hangszerkészítői gyakorlat között. Az elméleti eredményeket összevetem kísérleti mérésekkel.

A dolgozat utolsó, kitekintő szakaszában elemzem a hangszín általánosabb megközelítését. Alkalmazási lehetőséget keresek a mérnöki tudományokon belül, kitérek az épületek rezgéseinek vizsgálatánál [4] a kezdeti értékek, határfeltételek fontosságára.

[1] Grant O'Brian: Ruckers. A harpsichord and virginal building tradition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[2] L. D. Landau – E. M. Lifsic: Elméleti fizika. I. kötet. Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[3] Dr. Nagy Károly: Elméleti mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[4] Vértés György: Épületek dinamikája. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

A mellékelt ábrán a dolgozatom motivációját adó, saját készítésű hangszerem látható.



Abstract (english)

This work is mainly a treatise on the tone. I examine it in several point of view, for example musically, mathematically, physically, and in parallel the view of instrument making.

In the introduction I am going to tell my own experiences, observations, and my main motivations on the topic of synthetising of the other disciplines. I summarise my previous studies on the domain of instrument making [1], instrument design, music, theoretical physics [2] [3], mathematics and architecture.

I introduce the tone in regard of theoretical physics: I examine the ratio of the coefficients of the resolution of the initial condition of the partial differential equation of vibrating string. I constitute the Fourier-transformation [3] of a simple initial shape of a string, before of the instant of the plucking. I show how changes the tone as function of the place of plucking. I create a liaison between this phenomenon and the musical presentation and instrument making practice. I compare the theoretical resolutions with experimental measurement.

At the ending period of this work, I take an outlook for the more general constitution of the phenomenon of tone. I write about the importance of the initial and boundary conditions of the vibrational analyse of the buildings. [4]

[1] Grant O'Brian: Ruckers. A harpsichord and virginal building tradition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[2] L. D. Landau – E. M. Lifsic: Elméleti fizika. I. kötet. Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[3] Dr. Nagy Károly: Elméleti mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[4] Vértés György: Épületek dinamikája. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

Below you can see a photo about my own designed and fabricated instrument.



Tartalom

Absztrakt	1
Abstract (english)	2
Zenei jellemzők fizikai vonatkozásai	4
Hangszerek, előzmények.....	4
A hangszerem tervezése	7
A hangszer kivitelezése	8
Szakirodalmi áttekintés	11
A hangszerek kialakításának és a hangszínnek jellegzetességei.....	14
Elméleti fizikai modellek a húr rezgésének leírására.....	15
Pengetett húr – fizikai modell	17
Hullámegyenlet	17
Kezdeti feltételek.....	18
Hangszín fogalma.....	23
Felharmonikusok viszonya.....	23
Mérési eredmények	33
Virginálok hangszíne.....	40
Csembalók regiszterei	41
Mérnöki vonatkozások	42
Összegzés	47
Bibliográfia.....	48
Köszönetnyilvánítás	50

Zenei jellemzők fizikai vonatkozásai

Hangszerek, előzmények

Jelen dolgozatom a korábbi TDK munkám (2021 – Húros hangszer analitikus rezgés-vizsgálata) és a kapcsolódó érdeklődéseim mentén megszerzet ismereteimet foglalja össze. Két évtizede foglalkozom zenével, matematikával, fizikával. Jelen kutatás tárgyához a zenét tekintve a zongorajáték, a zeneelméleti tanulmányaim mellett a hangszerismeret, majd a hangszerkészítés útján indultam el. A későbbiekben az építész képzésben a tartószerkezetek vizsgálata, majd az itt megszerzett ismertek hangszerekre történő kiterjesztésének igénye lépett fel bennem. A matematika és a fizika módszereinek a hangszerek tervezésében, illetve tervezésük optimalizálásában való használata adta a fő motivációt.

Az alábbiakban röviden bemutatom a később vizsgáldásom elindítójának bizonyuló, magam által készített hangszeremet. Az alábbi hangszer egy kétoktávos virginál (a csembalóval rokon hangszer; míg a csembalónál a húrok iránya a billentyűkkel párhuzamos, a virginálknál azokra merőleges, a spinetteknél pedig diagonális [O'Brian 1990]).



1. ábra - a hangszerem előlnézete



2. ábra - a hangszerem felülnézete a húrokkal, híddal, díszített rezonátorlemezzel

A virginál készítését megelőzően, gimnazista koromban kezdtem építeni egy csembalót – ekkor még semmilyen asztalos- és hangszerkészítési ismerettel nem rendelkeztam. A szerkezeti kialakítást, tartószerkezeti méretezést intuitíve a zongoránk struktúrája alapján készítettem el, mindennemű méretezés és tervezés nélkül. Egyedül a billentyűzethez készítettem pontos szabásmintát, de tekintettel az asztalosmesterségbeli tudásom hiányára, a fűrészelés után nem sikerült a kívánt célt elérni. A 3. ábrán láthatók a csembaló billentyűi:



3. ábra - a megelőző, kísérleti csembalóm billentyűzetének elemei

A 4. ábrán az első hangszerkezdemény tartószerkezeti váza látható; szemmel láthatóak az illesztési pontatlanságok, a túlméretezett keresztmetszetek, illetve a rögzítési módok ötlet-



4. ábra – tartószerkezeti váz

szerű alkalmazásai. (L-acél, átmenőcsavar, szeg, csapolás). A sötétebb színű fakeret a billentyűzet tartóváza, a billentyűk tengelyeiként szolgáló acélpálcikákkal. Ez a hangszer nem készült el, de a munka során a famegmunkálás terén rengeteg tapasztalatot szereztem.

Később a Műszaki Egyetem Építészmérnöki Karán eltöltött három év, egy tervezőirodánál eltöltött két éves szakmai gyakorlat után műszaki területen való ismereteim is szélesedtek. Úgy éreztem, hogy mind a pontosság, mind a térlátás, mind a tervezés tekintetében fejlődtem annyit, hogy a tudásom az asztalosismeretek hiányában is közel elegendővé vált egy új hangszer készítéséhez. A hangszerkészítés ismét fontossá vált számomra. Eközben elkezdtem tanulmányozni a 16-17. századi csembalókat, és virginálokat: számos videót találtam a korabeli építési módszerekről, ezek közül egyet szeretnék kiemelni:



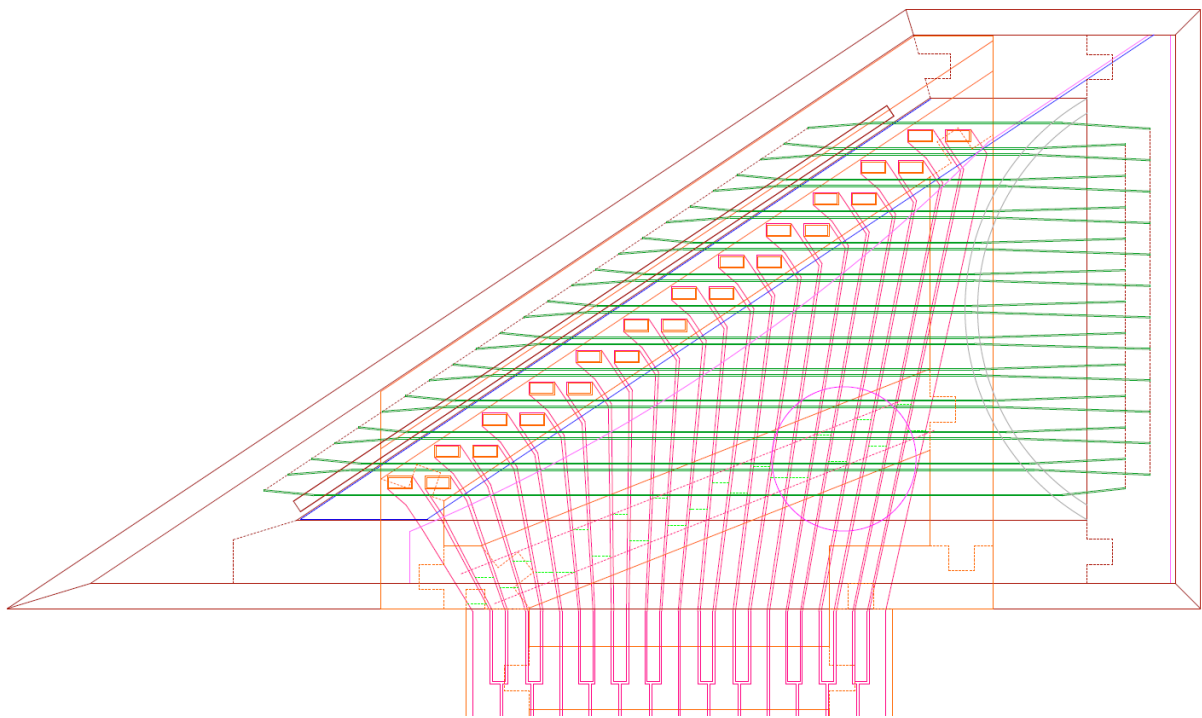
<https://www.youtube.com/watch?v=zuUqbdTDjcw>

melyben egy angol spinettet és hegedűt készítenek el autentikus szerszámokkal. Ezen kívül fő forrásul szolgált Grant O'Brian „A Harpsichord and Virginal Building Tradition” [O'Brian 1990] című, három kötetes, körülbelül ezer oldal terjedelmű doktori disszertációja. A szerző a

flamand Ruckers család közel egy évszázadig terjedő munkásságát, hangszereiknek műszaki elemzését tárja az olvasók elé. Ezen munka a szakmai ismereteken túl az angol szaknyelv elsajátítására is jó lehetőséget adott, hasonlóképp a francia nyelv tekintetében Couperinnek a 18. század elején kiadott „L’Art de toucher le clavecin” című munkája, mely inkább a hangszer korabeli alkalmazását, játéktechnikáit mutatja be. Megjegyzem: az akkori előadásmód jelentősen eltért a maitól.

A hangszerem tervezése

Az ismeretszerzést a hangszer vázlatainak rajzolása, majd Archicad-modelljének szerkesztése követte. Ugyan készült a hangszerről 3D-modell, a fő tervezés végig síkban történt, főleg alaprajzok rajzolása közben. A billentyű- és pengetőmechanikáról, illetve a húrok függőleges szögtöréseiről számos oldalnézeti vázlat is szükségessé vált később, a kivitelezés során.



5. ábra - a hangszerem CAD-terve

Rendkívüli nehézséget jelentett a megfelelő irányváltási szögek megtalálása, mely az axiálistól eltérő erőkomponensek ébredését szolgálja. Ezen erőkomponensek által feszül rá a húr a pozicionáló szegekre, melyek a pengetőmechanikához igazítják az egyes húrokat: a hangoló és akasztószegektől befelé, a hidakon található ezen elemek. (Az alábbi CAD-rajzon jól látható a zölddel jelölt húrok szögtörései a megfelelő helyzet elérése végett.)

A tervezési folyamat során (1-2 hét) a hangszer terve megközelítőleg 90%-ban elérte a végleges kialakításának állapotát. A kivitelezés (1-1,5 év) során körülbelül 10%-os módosítás történt, mely az építészeti tapasztalattal teljesen ellenkező, ott számos esetben gyakoriak voltak az újratervezések, jelentős, az épület alapvető kialakítását is változtató módosítások.

A hangszer kivitelezése

A kivitelezés az alaprajz 1:1-es léptékű nyomtatásával kezdődött (6. ábra) – a hangszer mintegy felépült az alaprajzára, hasonlóan egy kirakósjátékhoz. Az egyes elemeket kivágtam, majd a megfelelő pozícióban összeragasztottam őket az alaprajz felett – így a méretbeli pontatlanságok csupán milliméteres nagyságrendűek lettek. Így nem jelentkeztek a hibák halmozódásából adódó nagy pontatlanságok (hiszen mindig egy objektív, külső rajzhoz, nem a már meglévő szerkezethez viszonyítottam az újonnan elhelyezendő elem pozícióit).



6. ábra - A billentyűzet kerete a nyomtatott alaprajz felett (1,50 méter hosszú tekercs)

A 7. ábra a billentyűzetet mutatja (összevetve az 5. ábrán a CAD-rajzzal látható, hogy a billentyűk a hangszer belsejében a pengetési pozíciók elérése végett egymáshoz képest sugarasan szétnyílnak). A jobb alsó képen láthatóak a tengelykialakítások. A tengely egy fapálcikára ültetett fadóbozka, melynek belső része felfelé V alakban nyílik – így a fapálcika az alján szorul, és nem tud oldalra mozogni. Felfelé viszont a kiszélesedés végett engedi a megfelelő irányú, szögmértékben korlátozott billentést.



7. ábra - A billentyűzet



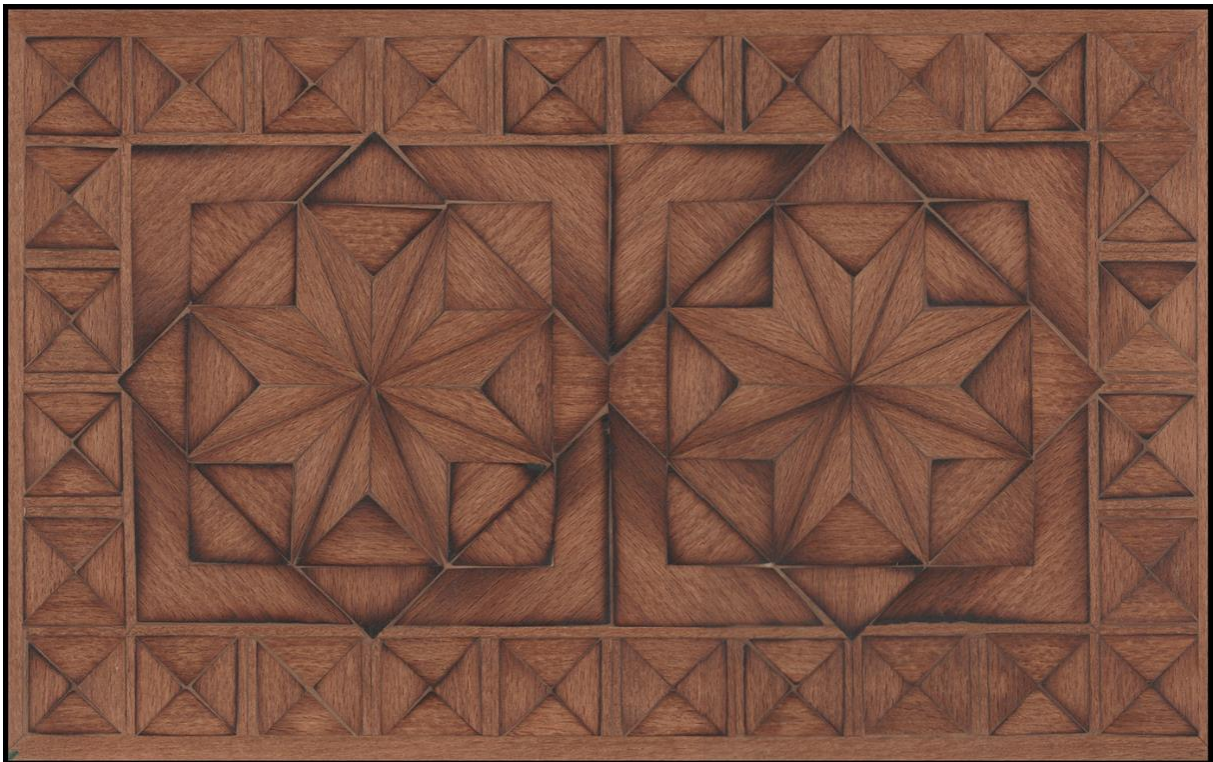
8. ábra - A pengetőmechanika



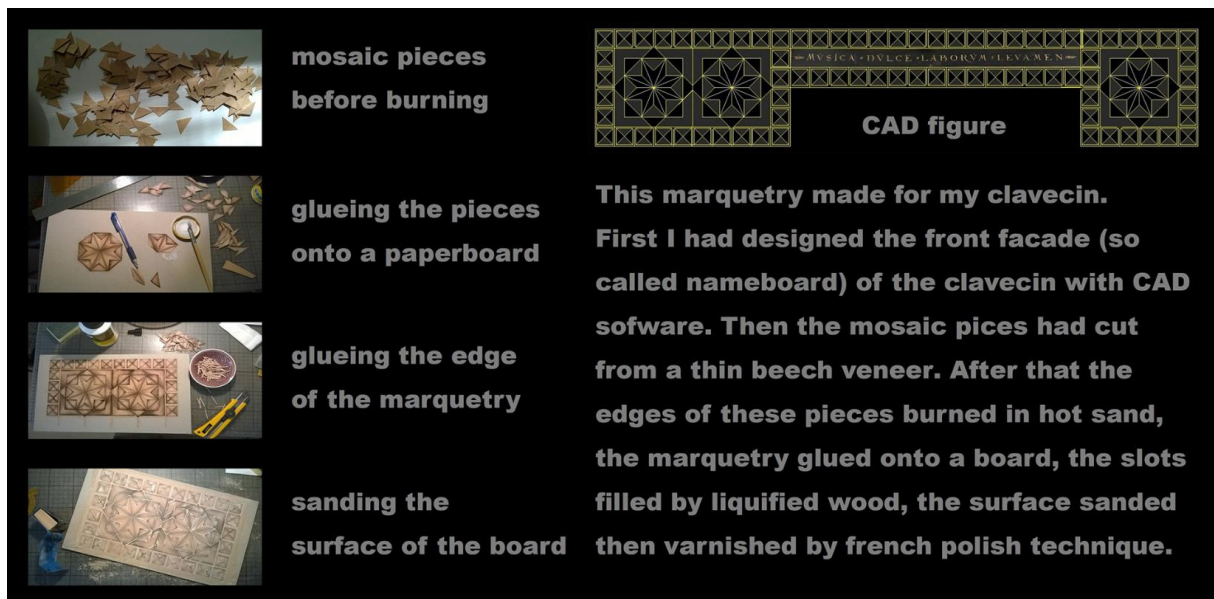
9. ábra - Két pengető-ugró

A 8-9. ábrán a pengetőmechanizmusok láthatók, a 8-on az a hangszerben, a helyükön, az 9-en a hangszerből két elem kiemelten. A billentés hatására ezen ugrók felemelkednek. Az alsó csavar egyrészt a visszaeséshez szolgáló tömeget adja, másrészt a függőleges finompozicionálást segíti. A felső részen látható a pengető tollszár, mely egy tengelynek köszönhetően felfelemozgáskor megpengeti a húrt, visszaeséskor pedig kikerüli azt. Utóbbi mozgás után az eredeti pozíciót a felső, mozgó rész egy húrból készített rugó által éri el.

Tekintettel arra, hogy a dolgozat tárgya főként elméleti fizikai vizsgálódás, a hangszer készítésének inkább a dolgozatban megoldandó probléma megtalálásában, a figyelmem ideirányításában volt szerepe, így részletes elemzést a szerkezeti kialakításról nem adhatok. Egyedül még a dekorációra szeretnék röviden kitérni – személyes okokból, mert erre büszke vagyok. A rezonátorlemezen tussal készült nonfiguratív mintázat található, a hangszerdoboz széle pedig bükkfafaurnérből készült intarzia, úgynevezett marketéria – mely egy mozaiktechnikát jelent.



10. ábra - Az oldallap marketéria-burkolata



11. ábra - A marketéria készítésének bemutatása a portfóliómban

A 10-11. ábra részlet a Behance felületén található portfóliómból; az ott található projektek közül egyik a hangszer marketériaburkolatának kialakítását közli, bemutatva az egyes munkafolyamatokat:

https://www.behance.net/dnielfriedrich?tracking_source=search_users%7Cdaniel%20friedrich

(Itt a „Marquetry” című projekt veendő figyelembe.)

Szakirodalmi áttekintés

A hangszer elkészültét követően folytattam az építészeti tanulmányaimat, illetve érettségire felkészítő fizikaórákat adtam – így kerültem közelebb a zene mellett a fizikához, matematikához. Több szakkönyvet is olvastam ebben az időszakban (itt főként Landau-Lifsic és Nagy Károly elméleti fizika könyveit, Budó Ágoston Mechanikáját, Kísérleti fizikáját; illetve geometria terén a szemléletemre jelentősen hatott Lánosz Kornél A gemoetria i térfogalom fejlődése című könyve). Főként a mechanika elméleti leírása foglalkoztatott, hogy ugyanazon jelenségeket, hogy lehet különböző formalizmusokkal megragadni.



12. ábra - A forrásul használt könyveim részlete

A mechanika elméleti tárgyalásánál

- a virtuális munka, illetve d'Alembert elvével, a Gauss-féle legkisebb kényszer elvével foglalkoztam,
- a Lagrange-féle I. és II. fajú egyenletekkel, erre épülően Hamilton variációs elvével, a kanonikus egyenletekkel és transzformációkkal,
- a Poisson-féle zárójeles mennyiségekkel, fázisterekkel, Liouville-téllével, illetve a variációszámítás határképletével;
- a rugalmasságtan miatt külön tanulmányoztam a folytonos anyageloszlású terekre a Hamilton-elv használatát, és a Lagrange-féle sűrűséget.

Ezt követően szerettem volna a különböző területen lévő ismereteimet ötvözni. Először csak a zenét és matematikát szintetizáltam; írtam egy zeneelméleti könyvet. Ebben a könyvben a hangszeres improvizációhoz fejlesztettem egy utat, mely az egyes harmóniak alkalmazását a kezdők számára leegyszerűsítetten, bizonyos matematikai permutációkként jeleníti meg.

<https://www.behance.net/gallery/138726135/DOZEN-OLD-DANCES>

A hivatkozáson (Behance-portfólió) megtekinthető a könyvről készült rövid összefoglalóm, a 13. ábrán egy oldal látható belőle.

KÉTSZÓLAMÚ DALLAMOK

E könyvben jól együtthangzónak - konzonánsnak - nevezzük kétszólamú szerkesztés esetén azokat a hangpárokat, amelyek az alábbi kottapéldában találhatók. Fogalmazhatunk úgy is, hogy a hármashangzat hangjaiból választunk ki két-két hangot, ezeket nyilvánítjuk konzonánsnak. Mivel a basszusban nem megyünk a legtöbb esetben c alá és a felé, a szopránban c' és a' között maradunk, így a két hármashangzathoz kifolyólag kétszer kilenc párt kapunk. A zenében természetesen a konzonancia fogalma nagy mértékben tágabb ennél, e fejezet a kezdő improvizátoroknak segíti. Ezek a kombinációk kézben tartható mennyiségű elemeket tartalmaznak.

d-moll hármashangzat konzonáns páirjai c-dúr hármashangzat konzonáns páirjai

Az alábbi felsorolásban útmutatást találhatunk arra, hogy az egyes kombinációkat milyen esetben használhatjuk. Az, hogy a d-moll vagy a c-dúr kombinációból választunk, az csak a dallam függvénye; viszont, kevésbé lenne változatos a zene, ha az egyik túlsúlyba kerülne.

1	üres oktáv	nyitásnál, zárásnál
2	tercviszony	telt hangzású, így ezt a nyitás, zárás kivételével bárhol alkalmazhatjuk
3	üres kvint	akkor használjuk csak, ha a dallamív megköveteli, máskor kerüljük
4	szext	a második eset fordítása, alkalmazása hasonló
5	terckettőzés	kerüljük el, csak végszükség esetén alkalmazzuk
6	második terc	kevésbé jellemző, mint a második eset; dallam közben használhatjuk
7	üres kvart	a harmadik eset fordítása, szintén próbáljuk elkerülni
8	második szext	a hatodik eset fordítása, dallam közben használhatjuk
9	kvintkettőzés	az ötödik esethez hasonló szigorral kerüljük

A következő oldalon a szólamvezetésre mutatok példákat. Első lépésben itt csak ütemvonal nélküli dallamívek sorozata következik; itt csak az együtthangzásra, és a dallamra figyeljünk! Azért, hogy ne legyen elsőre túl nehéz a feladatunk, a motívumok, motívumpárok szólamvezetését csak később mutatjuk be. Figyeljük meg, hogy a szólamok mozoghatnak párhuzamosan, az egyik maradhat egy helyben, míg a másik elmozdul, illetve ellenmozgást is végezhetnek. Nézzük meg, hogy a fenti táblázat mely páirjai fordulnak elő gyakran, melyek ritkábban, vessük össze a d-moll és c-dúr kombinációk arányát, illetve vizsgáljuk, hogy vannak-e jellemző fordulatok - például, hogy általában 1-es párról indulunk és 1-esre zárunk!

E munka elkészültével, illetve miután a „Fa tartószerkezetek konstruálása” tantárgy keretein belül elemeztem a hangszerem szilárdságtani vonatkozásait (kísérleti fizika eszközeivel), kezdtem bele az előző TDK-dolgozatomba. E munka a húrok, és lemezek hullámzását vizsgálja, analitikus közelítést ad egy húrhoz kapcsolt rezonátorlemez hangjának meghatározására. A dolgozat főként az elméleti ismeretek összegzését adta, és a további kutatás számára adott lehetőséget.

A hangszerek kialakításának és a hangszínek jellegzetességei

A következőkben, elérkezve jelen vizsgálódásomig, bemutatom, hogy egy húr esetében a hangszín hogyan módosul a megszólaltatás módjának függvényében. Kapcsolatot teremtek a mérnöki tudományokkal: kitekintésként vizsgálom, hogy egy épület „hangszínének” változása mennyiben módosíthatja az egyes tönkrementeli módokat.

Vizsgáljuk a hangszert zenei szempontból! Így a hangszer egy eszköz, melyen a zene által kívánt hangokat meg tudjuk szólaltatni. Az eszköztől megköveteljük, hogy képes legyen a kívánt hangot az előírt hangmagasságban elvárt ideig, hangerővel, illetve hangszínnel létrehozni. Kísérleti fizikai szempontból ehhez rendre megfelelő rezgési (hullámzási) frekvencia szükséges (melynek a logaritmusaként értelmezzük a hangmagasságot), illetve rezgési amplitúdó (az ezzel összefüggő levegőbeli nyomásváltozásoknak szintén logaritmikus függvénye a hangerőt jellemző decibel skála). Valamivel összetettebb kérdés az úgynevezett felharmonikusoknak az aránya, mely a hangszínnel kapcsolatos. A dolgozatom ez utóbbi témában keres összefüggéseket.

Építészeti és asztalosmesterségbeli szempontból több vonatkozásban is vizsgálhatjuk a hangszert. A hangszer felépítését tekintve áll egy hangot adó elemből (például zongora és gitár esetén a húrok és a húrok rezgését létrehozó mechanizmus, illetve a húrok rezgését erősítő rezonáns), a hangot adó elem tartószerkezeti vázából, illetve a váz külső burkolatából. Itt röviden megemlítem, hogy tartószerkezeti megközelítésben a keretnek el kell viselnie a húrok jelentős feszítőerejét, illetve az ehhez képest elenyésző szerkezeti önsúlyt. (Zongora esetében a feszítőerők összege a 60 kN mértéket is elérheti, míg önsúlya nem haladja meg a 5 kN-t.)

Az előző dolgozatom (2021, Húros hangszer analitikus rezgésvizsgálata) elkészítése során vizsgáltam a húrok, lemezek hullámfüggvényeit, azok kezdő- és határfeltételeit. Itt számos jelenséget arra a munkára alapozok, az ottani eredményeket ezen dolgozatban alapul veszem; bizonyos egyenletek eredményeit már adottnak tekintem – melyek már a klasszikus mechanikában amúgy is kidolgozott elméletek). E fejezetben deduktív magyarázatot adok a hangszínváltozás elméleti megállapítására a pengetés helyének függvényében. A későbbiekben a kapott eredményeket kísérleti mérésekkel vetem össze, illetve áttekintem az eredmények épületekre való kiterjesztésének lehetőségeit.

Képzelnünk el különböző hangszereket, melyeken húrok, lemezek helyezkednek el! Fedezzük fel a hasonlóságot a gitár, csembaló, további pengetősök; zongora, marimba, dobok; illetve hegedű, oboa, egyéb vonósok és fúvósok között! A közös vonások kettős szintűek: első szinten az első két csoport hangszerei azonosak a tekintetben, hogy a megszólalást követően a húrok, lemezek, membránok *szabadon zengenek*, az utolsó csoportban viszont a hangképzés *folyamatos fúvást*, illetve *vonóhúzást* igényel. Második szinten az első két csoport között érdemes különbséget tenni: míg az elsónél a zengő részt (húr, lemez, membrán) a *kezdő pillanatban* ütés éri, a második csoport húrjai a nyugalmi helyzetből kitérésre kerülnek.

Elméleti fizikai modellek a húr rezgésének leírására

Miután intuitíve észrevettük a különbségeket, gondoljuk át, hogy a kiemelt kulcsszavaknak milyen vonatkozásai vannak a differenciálegyenletek elméletében! A szabadon zengés során egyértelmű, hogy a rendszert leíró differenciálegyenlethez vezető hatásfukcionál (Lagrange-függvényből képzett funkcionál) nem tartalmaz a rendszer saját potenciális energiáján túl külső tér hatásából eredő potenciális energiát, így a variációs számítás végrehajtása után az egyenletben nem jelenik meg a másodrendű időderiváltat tartalmazó, és a másod- (lemezeknél negyed) rendű deriváltat tartalmazó függvényen kívül szabad függvény.

Más a helyzet viszont az utóbbi csoportnál: ott megjelenik egy, a külső hatásból (vonóhúzás, fúvás) eredő tér- és időfüggő potenciális energia. Ezen energiát a tér (húrtengely) egy pontján, a tengelyre merőlegesen (erőátadás helyén) a diszlokáció mértéke szerint Taylor-sorba fejtve

$$U_e(x, t) \approx U_e(0, t) + x \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (1.)$$

(U az energia, x az elmozdulás, t az idő) az első tagot elhanyagolhatjuk, tekintettel arra, hogy egy *bevezethető másik* időfüggvény teljes deriváltjának tekinthető, így a Lagrange-függvényből elhagyható. A második tagban található parciális derivált ellentétje, vektoranalitikai vonatkozásban egy *potenciáltér negatív gradiense*; fizikai értelemben pedig a hangszerre ható külső erő (gerjesztőerő, *kényszererő* $\gg v \cdot$ *rezgéseknél kényszerrezgés, hullámnál forrásfüggvény, inhomogén hullámegyenlet* \ll - vonóhúzás, fűvás). Ez értelemszerűen tekinthető egy adott helyen az idő tetszőleges függvényének $F(t)$ -nek. [Landau-Lifsic 1988.]

Az alábbi videóban látható a hegedűhúr gerjesztett hullámozása:



<https://www.youtube.com/watch?v=6JeyiM0YNo4>

A lassítás miatt jól látható, ahogy a hullám oda-vissza halad, melyet a hullámegyenlet d'Alembert-féle megoldása szemléltet:

$$\psi(x, t) = U(x - ct) + V(x + ct) \quad (2.)$$

(ψ a hullámfüggvény, U, V valós függvények, c fizikai tartalma a terjedési sebesség) [dr. Nagy 1989.]

Vajon a második szinten lévő különbséget hogyan írhatjuk le? A válasz a kezdeti feltételek milyenségében rejlik. Tegyük fel, hogy az Euler-Lagrange egyenlet kezdeti feltételeit

$$\psi(x, 0) = F(x), \quad (3.)$$

$$\left. \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial t} \right|_{t=0} = G(x) \quad (4.)$$

alakban írjuk elő; értelemszerűen az első a kezdeti diszlokációt, a második a kezdeti sebességet leíró függvény.

Képzeld el az első csoport elemeit, például egy gitárt! Ujjunkkal a húrt kimozdítjuk a nyugalmi helyzetből, majd a húrt magára hagyva engedjük hullámozni. Impulzust (mely kifejezhető a sebesség lineáris kombinációjaként) nem adunk a hangszernek. Így fizikai szempontból a rendszernek a kezdeti diszlokációja nem zérus függvényként (a modellben később lineáris- és konstansfüggvények összetételeként) jelenik meg. Az időderiváltat tartalmazó feltétel viszont minden pontban eltűnik. Az alábbi linken jól megfigyelhető a gitárhúron végigvonuló transzverzális hullám:



<https://www.youtube.com/watch?v=8YGQmV3NxMI>

A második csoport esetében gondoljunk egy zongorára, melynek kalapácsa a kezdeti pillanatban megüti a húrt, ezáltal impulzust ad át, viszont modellezzük az ütközést tökéletesen rugalmas ütközésként, így a megszólaltatás pillanatában vissza is pattan a húrról, így kezdeti diszlokációk nem jelentkeznek. Ez esetben az impulzus függvényeként előírható kezdeti sebességek adják a második feltételt ezen hangszereknél. Az alábbi videóban megfigyelhető különböző lassításokban a zongorahúr hullámzása:



<https://www.youtube.com/watch?v=3--vzkWoynM>

Pengetett húr – fizikai modell

Hullámegyenlet

A vizsgáldóság tárgyát most a gerjesztőerő és kezdeti impulzus nélküli, kezdeti diszlokációval leírható hangszerek képezik. A rezgő húr hatásfüggvényének stacionárius pontjához tartozó Euler-Lagrange-féle parciális differenciálegyenlet formálisan

$$\mathbf{O}\psi(x, t) = 0 \quad (5.)$$

alakban írható, ahol \mathbf{O} a

$$\mathbf{O} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (6.)$$

differenciáloperátort jelzi, és az operátorban szereplő v mennyiség a húrban a hullám terjedési sebessége (nem tévesztendő össze az egyes pontok transzverzális rezgésének sebességével, melyet a hullámfüggvény időderiváltja ad meg a tengely egyes pontjaiban). A fenti differenciálegyenlet kapcsán a Fourier-féle transzformáció, és egy másik lehetséges út – a disztribúcióelmélet, Green-függvény alkalmazásáról a bibliográfiában található irodalom. [Farkas 1964, R. Critescu – G. Marinescu 1969.]

Az 5. egyenlet megoldásához vizsgáljuk a differenciálegyenlet úgynevezett karakterisztikus egyenletét, így az

$$\mathbf{O}\psi = \lambda\psi \quad (7.)$$

sajátérték-probléma megoldása után, figyelembe véve azon határfeltételeket, hogy a diszlokációknak minden időpillanatban a húrvégeken el kell tűnni; illetve az Euler-féle azonosságokat kihasználva, komplex együtthatójú exponenciális függvényekről trigonometrikus függvényre áttérve, a hullámfüggvény

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1,n} \cos \omega_n t + a_{2,n} \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (8.)$$

alakban írható. ω_n az úgynevezett körfrekvencia, n a felharmonikus száma, L a húrhossz, a pedig a Fourier-együtthatók (fizikailag a felharmonikusok amplitúdói).

Kezdeti feltételek

Az adott fizikai problémát leíró partikuláris megoldást keresve, kezdeti feltételeinket illesszük a pengetett húrokhoz:

$$\psi(x, 0) = F(x), \quad (9.)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, 0) \right|_{t=0} = G(x) = 0 \quad (10.)$$

(Értelemszerűen az első függvény a kezdeti diszlokáció, az időderiváltat tartalmazó függvény pedig a kezdeti sebesség térfüggvénye.) Vizsgáljuk meg a nem eltűnő, jelen terminológiában még formális $F(x)$ függvényt, hogy tudjuk közelíteni a húr alakjának leírásához! Tegyük fel, hogy a húr három szakaszból áll: középen egy vízszintes szakaszból, ahol a pengető-eszköz a húrt érinti, illetve ettől jobbra, és balra egy-egy lineáris szakaszból (14. ábra). Így állítsuk elő $F(x)$ függvényt három lineáris függvény összegeként:

$$F(x) = \sum_{i=1}^3 f_i(x), \quad (11.)$$

ahol

$$f_i(x) = m_i x + b_i \quad (12.)$$

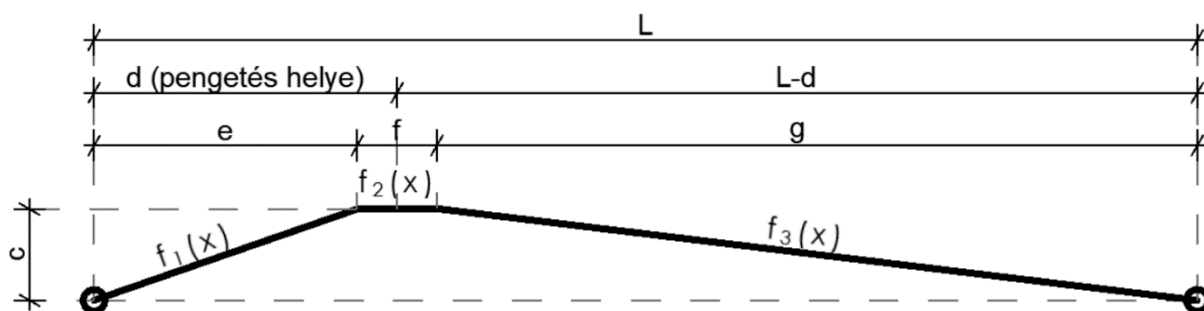
alakú függvények.

Az $F(x)$ értelmezési tartományának szakaszaihoz rendeljük hozzá az indexeket, mégpedig

$$i = 1, \text{ ha } x < e, \quad (13.)$$

$$i = 2, \text{ ha } e \leq x \leq e + f, \text{ és } \quad (14.)$$

$$i = 3, \text{ ha } x > e + f. \quad (15.)$$



14. ábra - A húr matematikai modellje

Határozzuk meg a 14. ábrán látható paraméterek felhasználásával az m , b együtthatókat! Geometriai úton belátható, hogy

$$m_1 = \frac{c}{e}, \quad b_1 = 0 \quad (16.)$$

$$m_1 = 0, \quad b_1 = c \quad (17.)$$

$$m_1 = \frac{c}{g}, \quad b_1 = \frac{lc}{g}, \quad (18.)$$

ahol

$$e = d - \frac{1}{2}f, \quad (19.)$$

$$g = l - d - \frac{1}{2}f. \quad (20.)$$

Így előállt a keresett $F(x)$ függvény, szakaszokból felépítve. Számunkra viszont ez még zenei szempontból nem jellemzi a hullámot. Ismeretes, hogy a zenei hangszín fogalma az egyes felharmonikusok egymáshoz viszonyított hangerejének függvénye. Fizikai értelemben ezeket az egyes felharmonikusokhoz tartozó amplitúdókkal, matematikai értelemben Fourier-együtthatókkal tudjuk leírni. Így képezzük az $F(x)$ függvény Fourier-féle transzformáltját!

Ismeretes, hogy a hullámfüggvény Fourier-féle, végtelen dimenziójú trigonometrikus bázison előállított megoldása

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1,n} \cos \omega_n t + a_{2,n} \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (21.)$$

$$a_{1,n} = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(nk_1 x) F(x) \quad (21.)$$

$$a_{2,n} = 2 \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(nk_1 x) G(x) \quad (22.)$$

$$k_n = nk_1 = n \frac{\pi}{L} \quad (23.)$$

$$\omega = \omega_n = 2\pi\nu_n = n \frac{v\pi}{l} \quad (24.)$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho A}}. \quad (25.)$$

Az eddig definiálatlan együtthatók közül k jelen esetben egydimenziós hullámvektor, ν a rezgésszám, T a húrban fellépő feszítőerő, A a húr keresztmetszete, ρ a fajlagos tömege.

Itt megjegyzem, hogy a Fourier-együtthatók meghatározása azon elv szerint történik, hogy a skaláris szorzat definíciója a folytonos függvényekre kiterjesztésre került; a végtelen dimenziójú bázisfüggvények (jelen esetben trigonometrikus függvények) ortogonálisak, azaz skalárszorzatuk egyenlő a Weierstrass-szimbólummal (értsd, azonos futóindexre egységelemet, különbözőkre zérust adnak), így a skalárszorzatnál felírt egyenlőség miatt a különböző indexű tagok integráljai eltűnnek, és egyesével meghatározhatók az együtthatók. Röviden megemlítem, hogy itt a

$$(f, g) = \int f^* g dx \quad (26.)$$

azonosságról van szó, melynél a baloldal formális kifejezése f és g függvény skalárszorzatát jelzi, f^* pedig f komplex konjugáltját (értelemszerűen a komplex kitevőjű függvények és a trigonometrikus függvények között kapcsolat áll fenn). Részletes leírást lásd Nagy Károly Kvantummechanika című könyvének függelékében.

Láthatjuk, hogy itt a $a_{1,n}$, $a_{2,n}$ együtthatók közül mi csak az 1-es indexűekre fogunk zérustól különböző értéket kapni. Kihasználva az integrálás additivitási, illetve a szorzás disztributivitási tulajdonságát (mondhatni a Fourier-transzformáció lineáris operátor voltát), illetve $F(x)$ fentiekben ismertetett felbontását,

$$a_{1,n} = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{x=L} dx \sin(nk_1x) F(x) \quad (27.)$$

függvényt

$$a_{1,n} = \sum_{i=1}^3 \frac{2}{L} \int_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} dx \sin(nk_1x) f_i(x) \quad (28.)$$

alakban is írhatjuk (fontos megjegyezni, hogy az integrálási határok az egyes alfüggvények értelmezési tartományához igazodnak), így

$$a_{1,n} = \sum_{i=1}^3 a_{1,n,i}, \quad (29.)$$

ahol

$$a_{1,n,i} = \frac{2}{L} \int_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} dx \sin(nk_1x) (m_i x + b_i). \quad (30.)$$

Felhasználva a geometriai egyenleteket, a fenti skaláris szorzat futóindex szerint kifejtve, majd átrendezve

$$a_{1,n,1} = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{x=e} dx \sin(nk_1x) \left(\frac{c}{e}x\right), \quad (31.)$$

$$a_{1,n,2} = \frac{2}{L} \int_{x=e}^{x=z} dx \sin(nk_1x) (c), \quad (32.)$$

$$a_{1,n,3} = \frac{2}{L} \int_{x=z}^{x=l} dx \sin(nk_1x) \left(\frac{c}{g}x + \frac{lc}{g}\right) \quad (33.)$$

alakokat ölti, ahol

$$z = e + f \quad (34.)$$

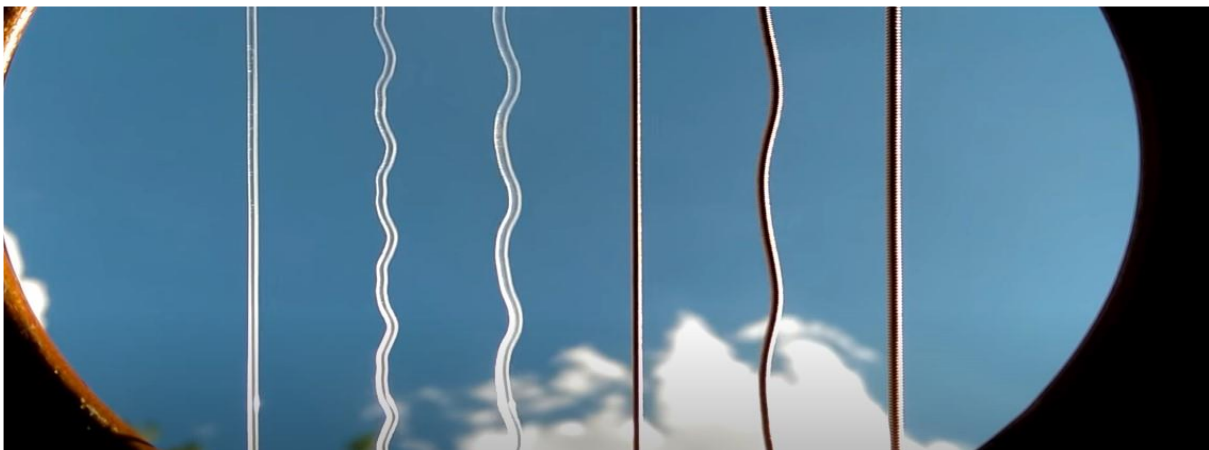
Ezen integrálok közül a második közvetlenül számítható, tekintettel arra, hogy konstans szerepel multiplikátorként, a másik kettőnél a parciális integrálás szabálya szerint számolhatunk:

$$a_{1,n,1} = \frac{2c(\sin nk_1 e - nk_1 e \cos nk_1 e)}{l(nk_1)^2 e} \quad (35.)$$

$$a_{1,n,2} = -\frac{2c(\cos nk_1 z - \cos nk_1 e)}{lnk_1} \quad (36.)$$

$$a_{1,n,3} = -\frac{2c \sin nk_1 z - (nk_1 z + nk_1 l) \cos nk_1 z - \sin nk_1 l + 2nk_1 l \cos nk_1 l}{gl(nk_1)^2} \quad (37.)$$

Ezen amplitúdókhoz kifejezéseit összevetve e és g paraméternek a pengetés helyétől, d -től mért távolságától való függésével, megkapjuk az egyes felharmonikusok amplitúdójának függvényét a pengetés helyétől.



15. ábra - gitárhúr hullámai (<https://www.youtube.com/watch?v=XOCGb5ZGEV8>)



16. ábra - Gitárhúr hullámai (<https://www.youtube.com/watch?v=XOCGb5ZGEV8>)

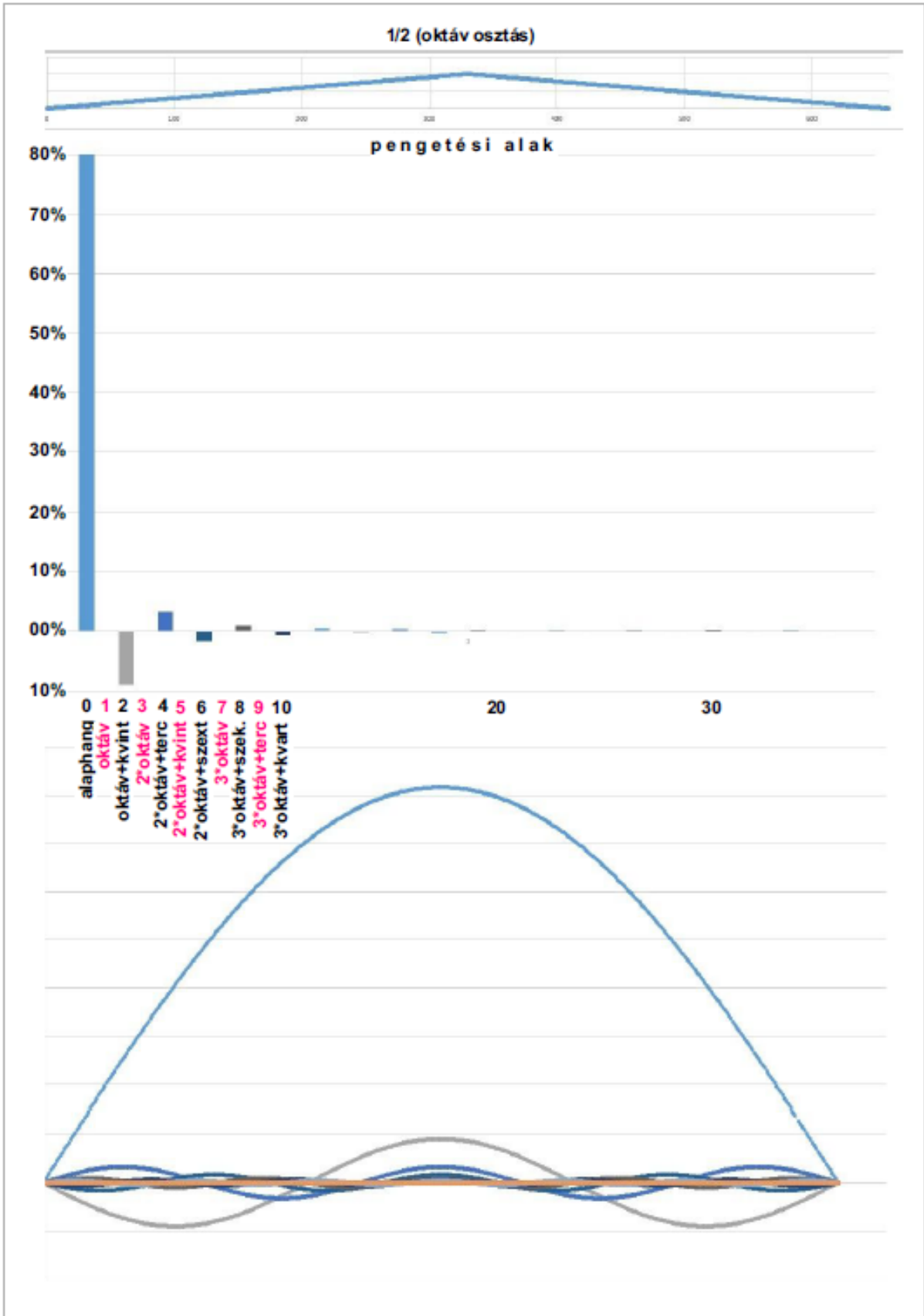
A 15-16. ábrán jól látható a gitárhúron végig vonuló transzverzális hullám.

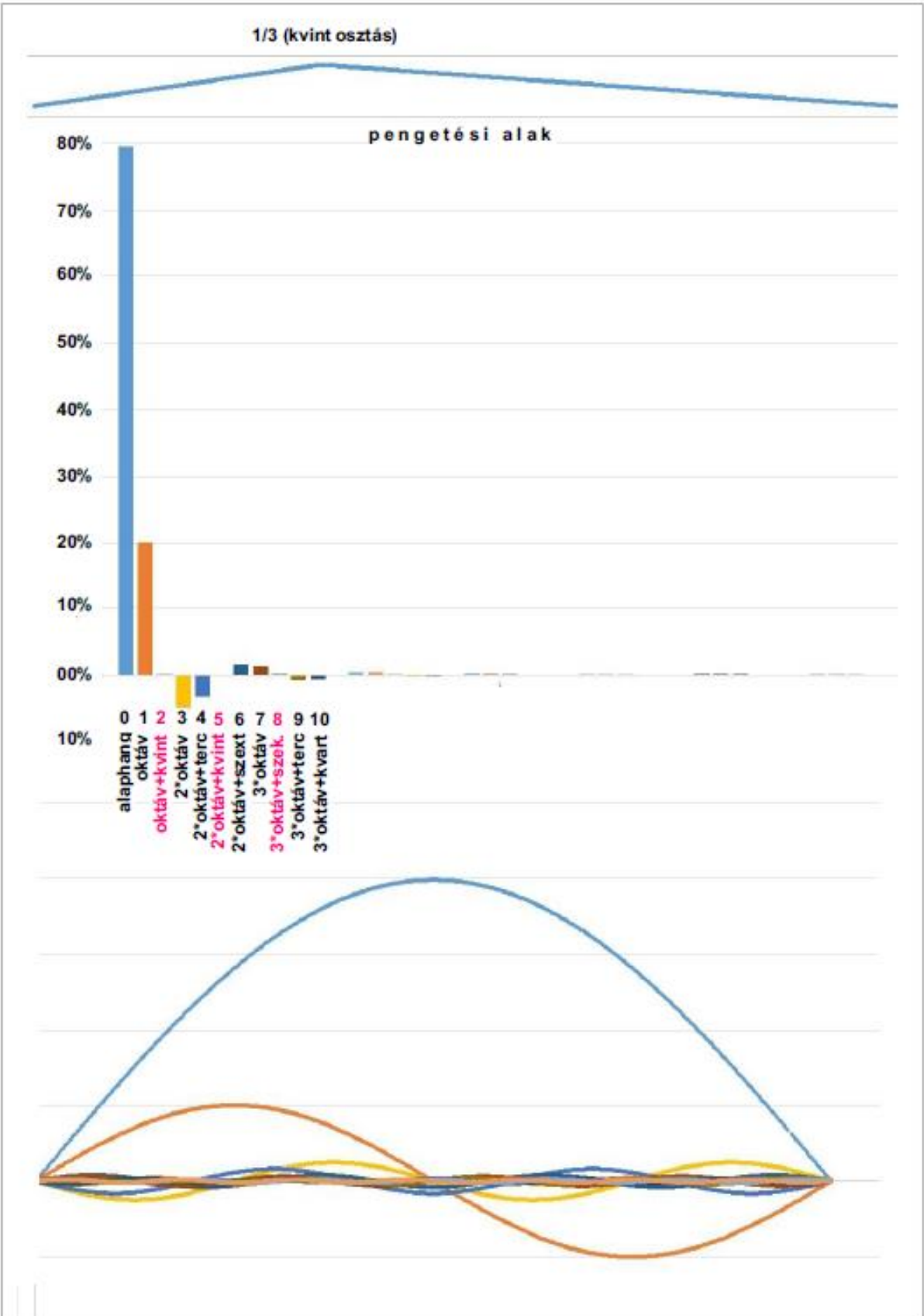
Hangszín fogalma

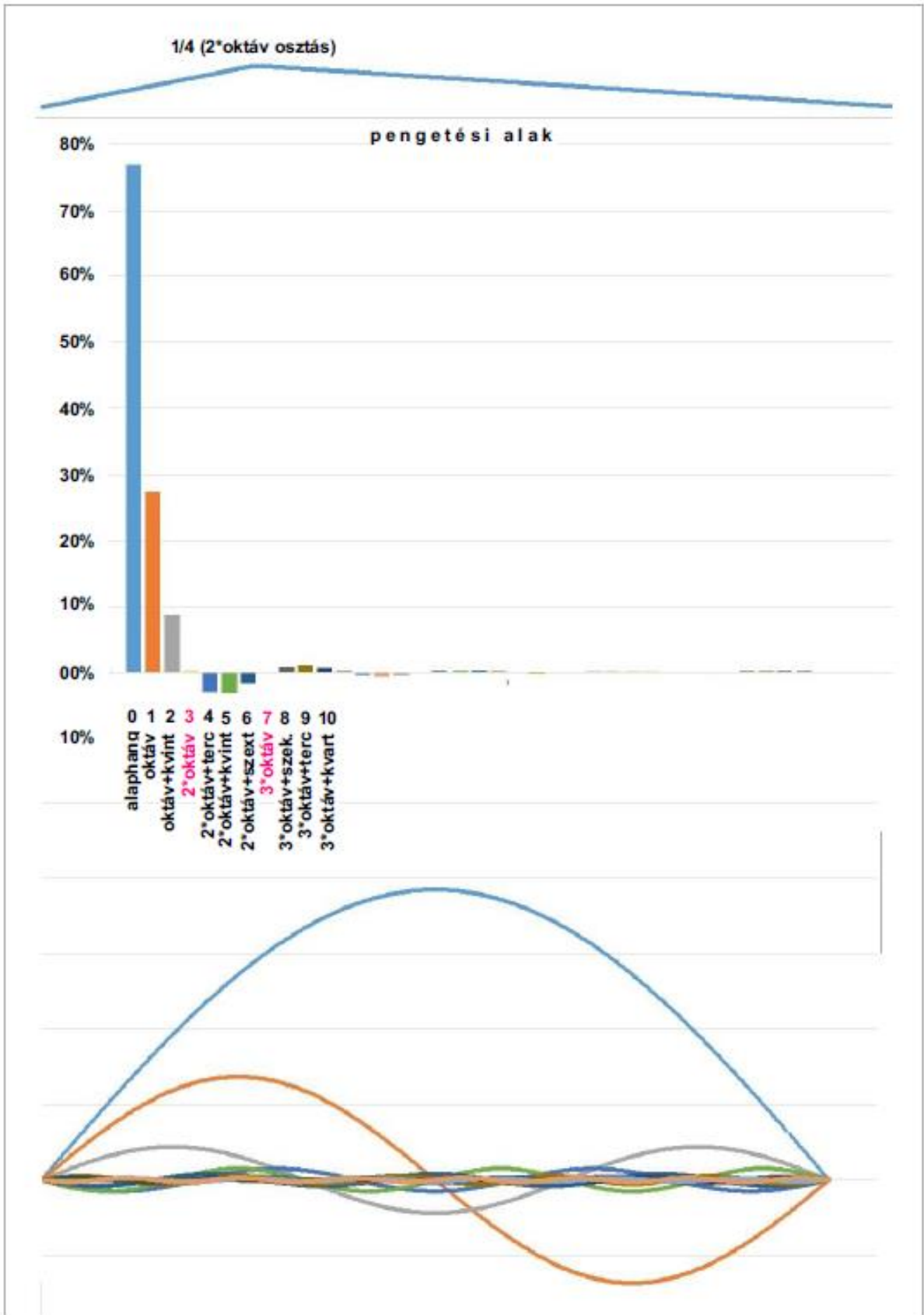
Felharmonikusok viszonya

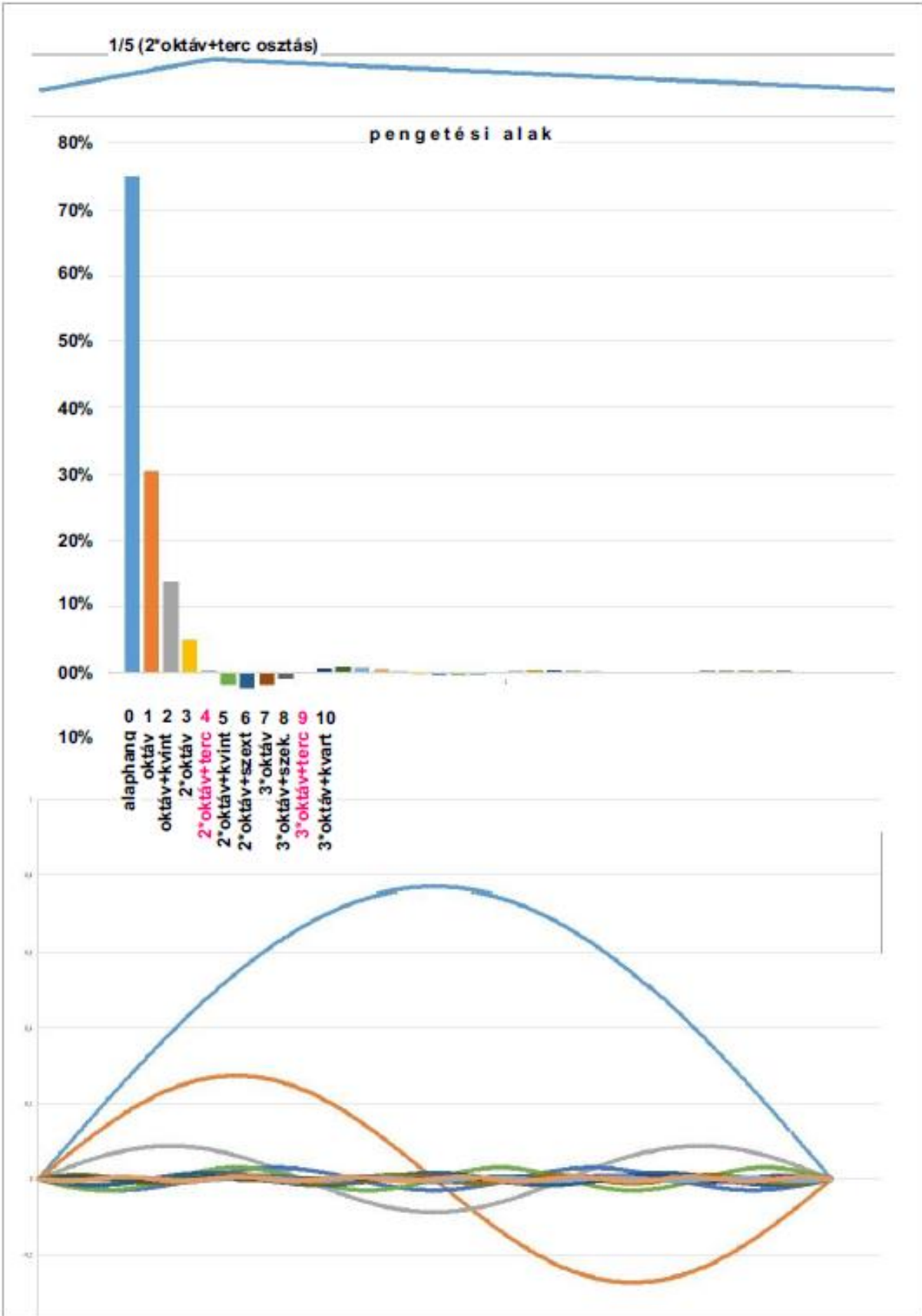
Fontos, hogy zenei szempontból is lássuk ennek a jelentőségét. Az alaphang és felharmonikusok amplitúdóinak sorozatához rendeljük a hangszín fogalmát. Egy tökéletesen befo-gott, hajlítási merevség nélküli, ideális húr hangszíne így kizárólagosan a pengetés helyének függvénye. Hangszereknél ennél bonyolultabb a kérdés, arra a későbbiekben térek ki.

Hogyan jellemezhetjük szavakkal a hangszínt? Képzeljük el, hogy a húrt középen pen-getjük meg, így a pengetési arány $\frac{1}{2}$. Mint látható a következő oldalakon, ez azt eredményezi, hogy az alaphang erősen szól, a páratlan felharmonikusok (1.: oktáv, 3.: két oktáv, 5.: két ok-táv+kvint, stb [Keszler, 2015]) eltűnnek, csupán a párosok hangzanak (2.: oktáv+kvint, 4.: két oktáv+terc, 6.: két oktáv+szext). Az is szembetűnő, hogy az amplitúdók nagyon gyorsan kon-vergálnak a nullához. Ez egy kerek, telt, lágy hangzást eredményez, hiszen az alaphang (ami mélyebb) szól jelentős hangerővel, a többi, magasabb hang, ami éles hangzást adhatna, elenyé-sző járulékkal szerepel csupán. Ahogy a pengetés helyét közelítjük a húrvéghez, egyre erőse-bek, és így észlelhetőek lesznek a magasabb felharmonikusok, ezért egyre élesebbé válik a hangszín.

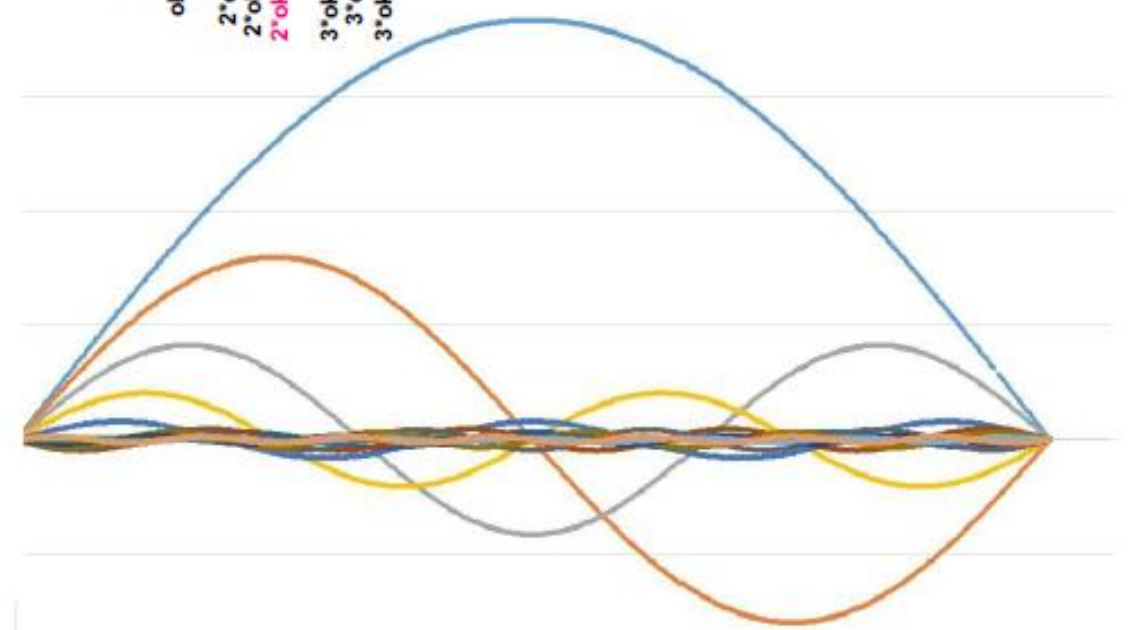
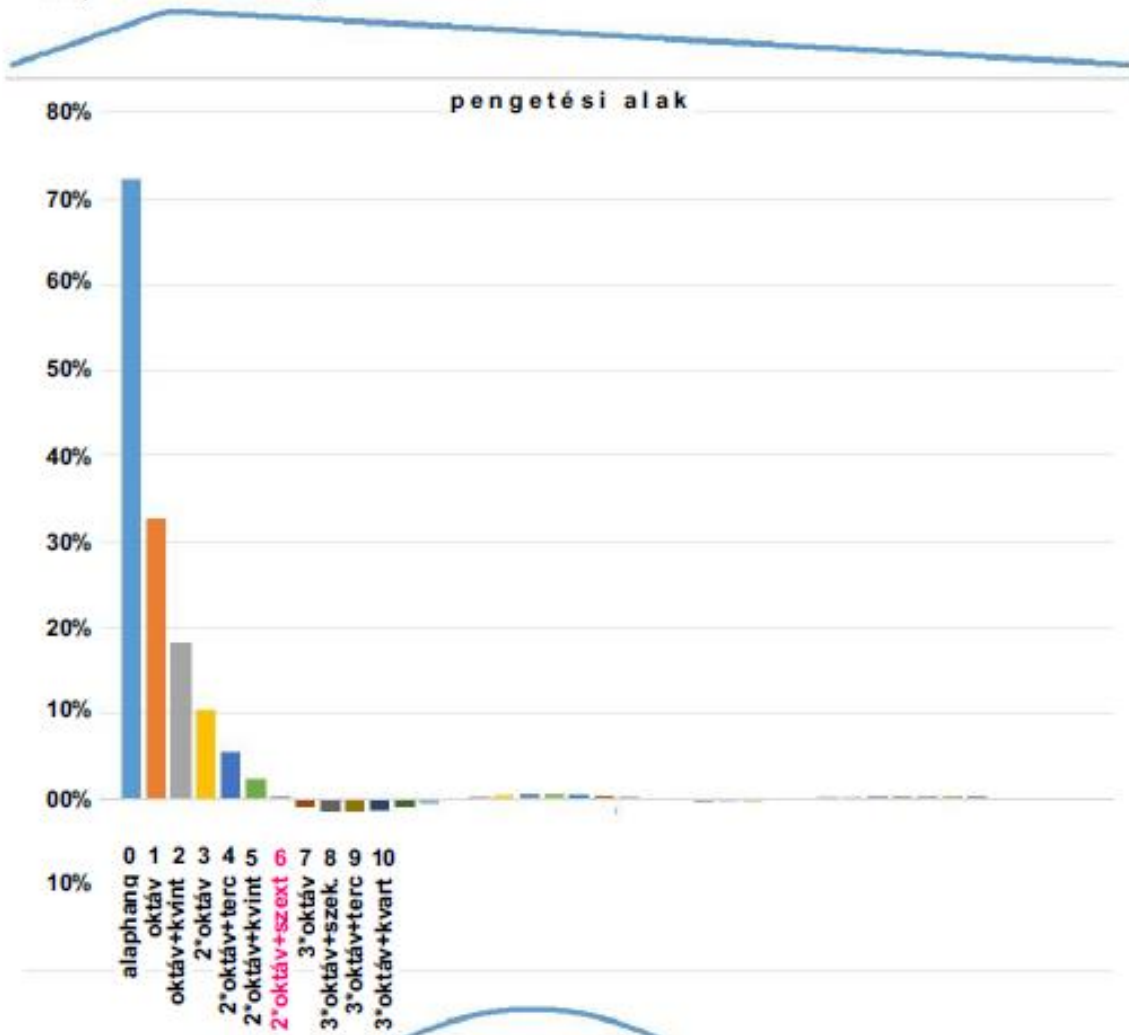


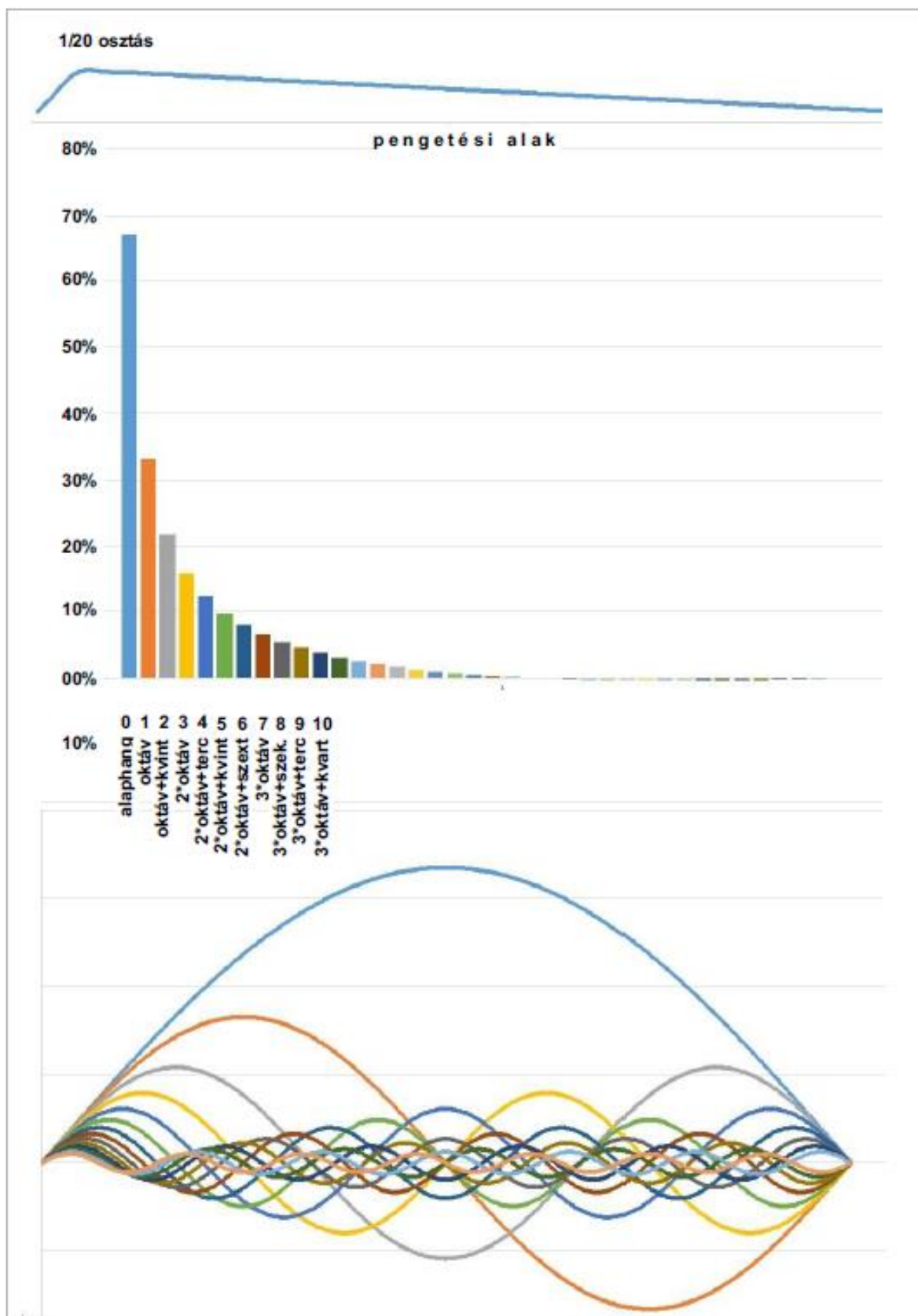


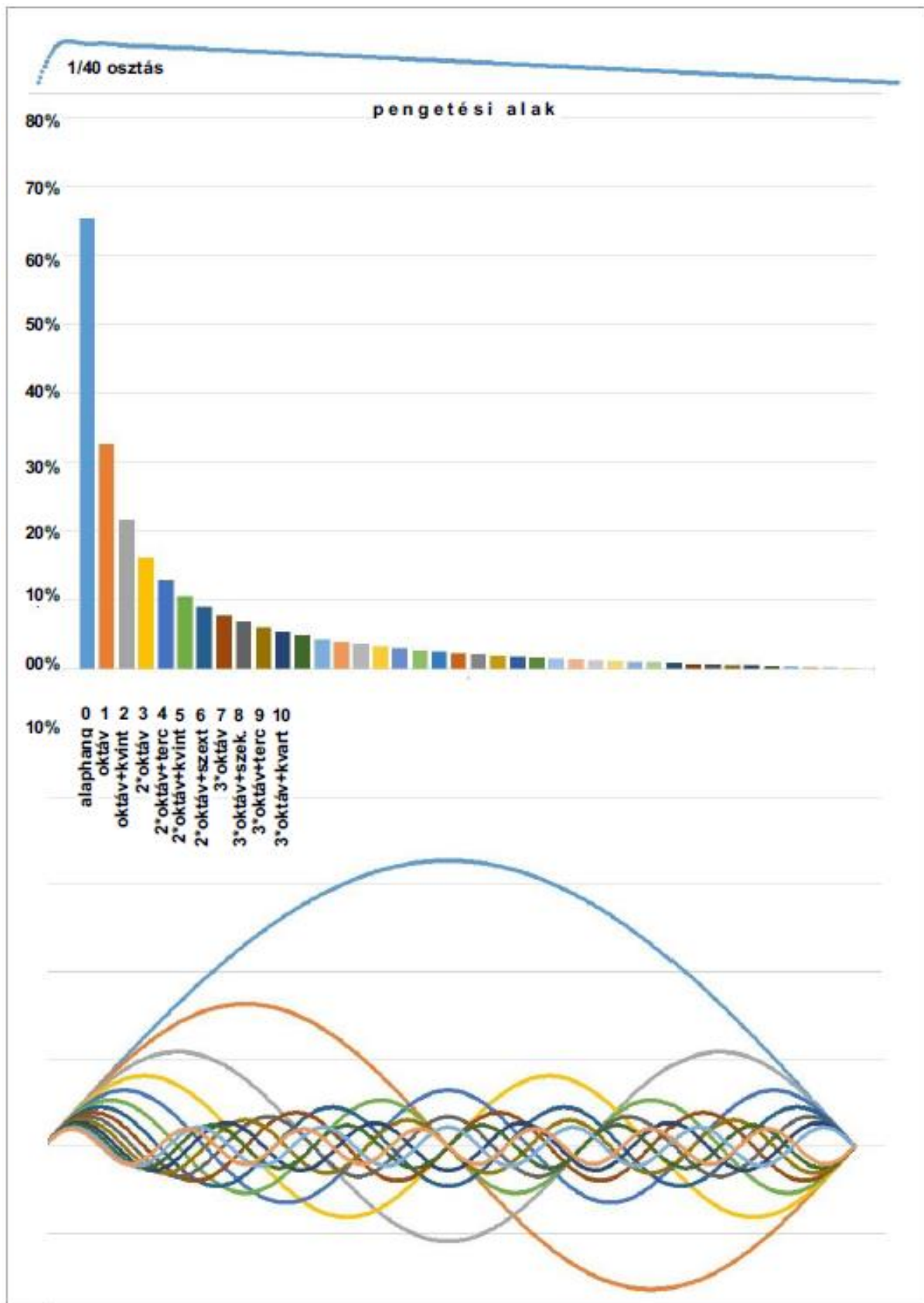


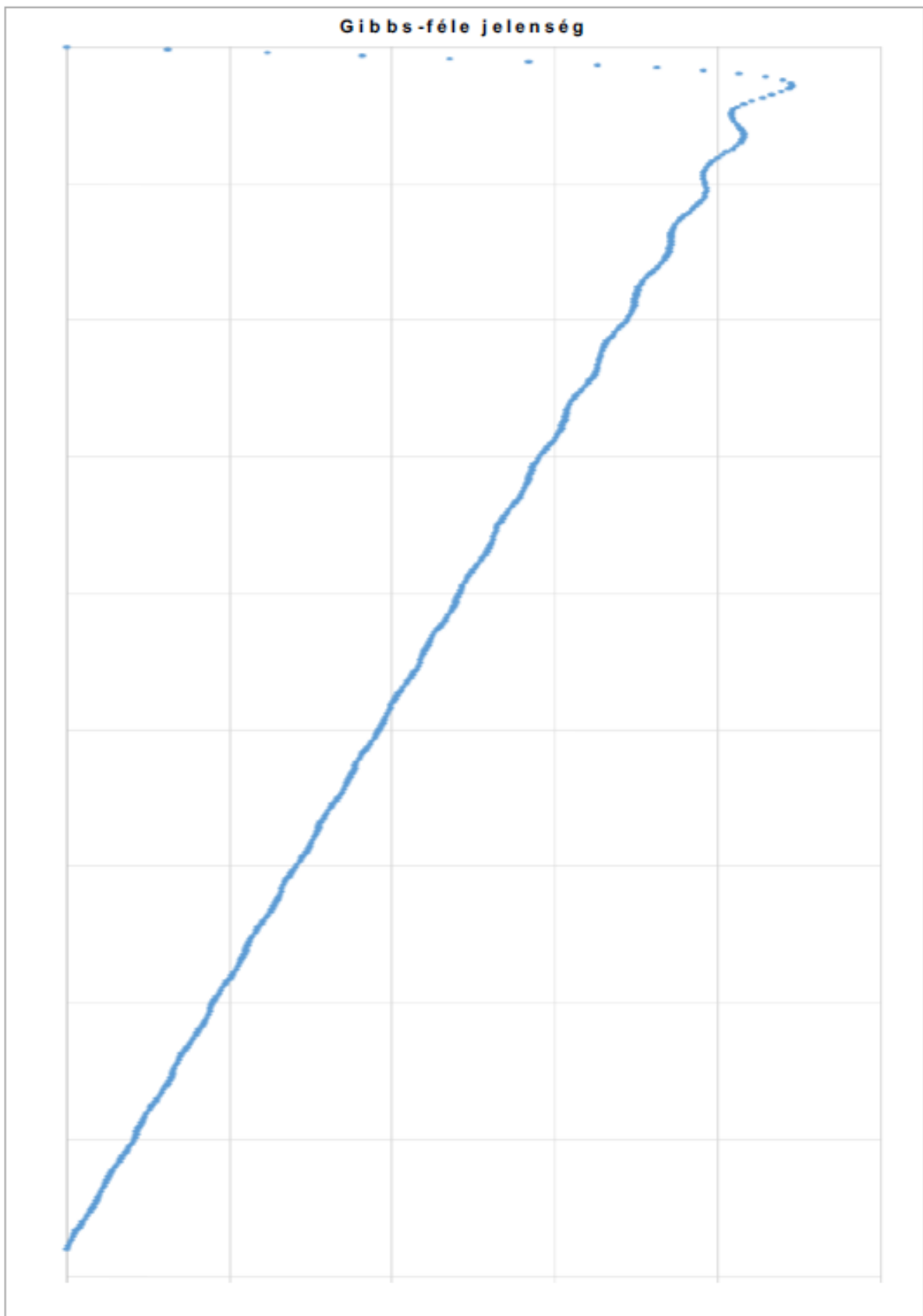


1/6 (2°oktáv+kvint osztás)







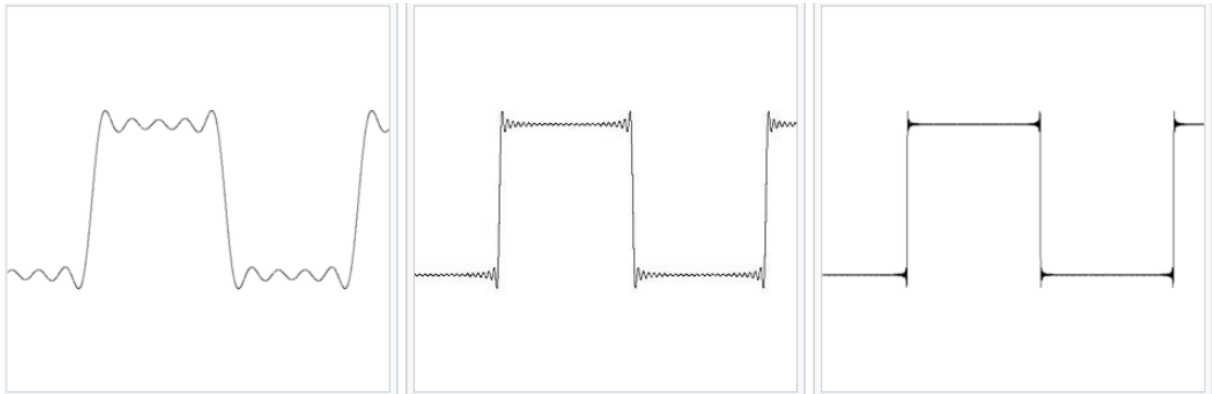


...

Jól látható, hogy a vizsgált tartományban a Gibbs-féle jelenség nem számottevő. Ez alatt a nem folytonos függvények transzformációja során, a töréspontoknál létrejött hibát (oszcillációt) értjük. Amikor egy függvényt Fourier-sorral közelítünk numerikusan, véges számú tagnak az összegéből képezzük a függvényt. Ez a 17. ábrán látható hibákat eredményezheti (bal oldalt 10, középen 50, jobb oldalt 250 felharmonikus összege). A dolgozatomban alkalmazott Excel-táblázat 243 harmonikus összegét tartalmazza, és a húr hossz a saját tengelye mentén 400 részre lett osztva. Így a számítás 97200 adatot generál.

A jelenség részletes matematikai leírása nyomon követhető az alábbi hivatkozáson:

<https://www.muszeroldal.hu/assistance/gibbs.html>



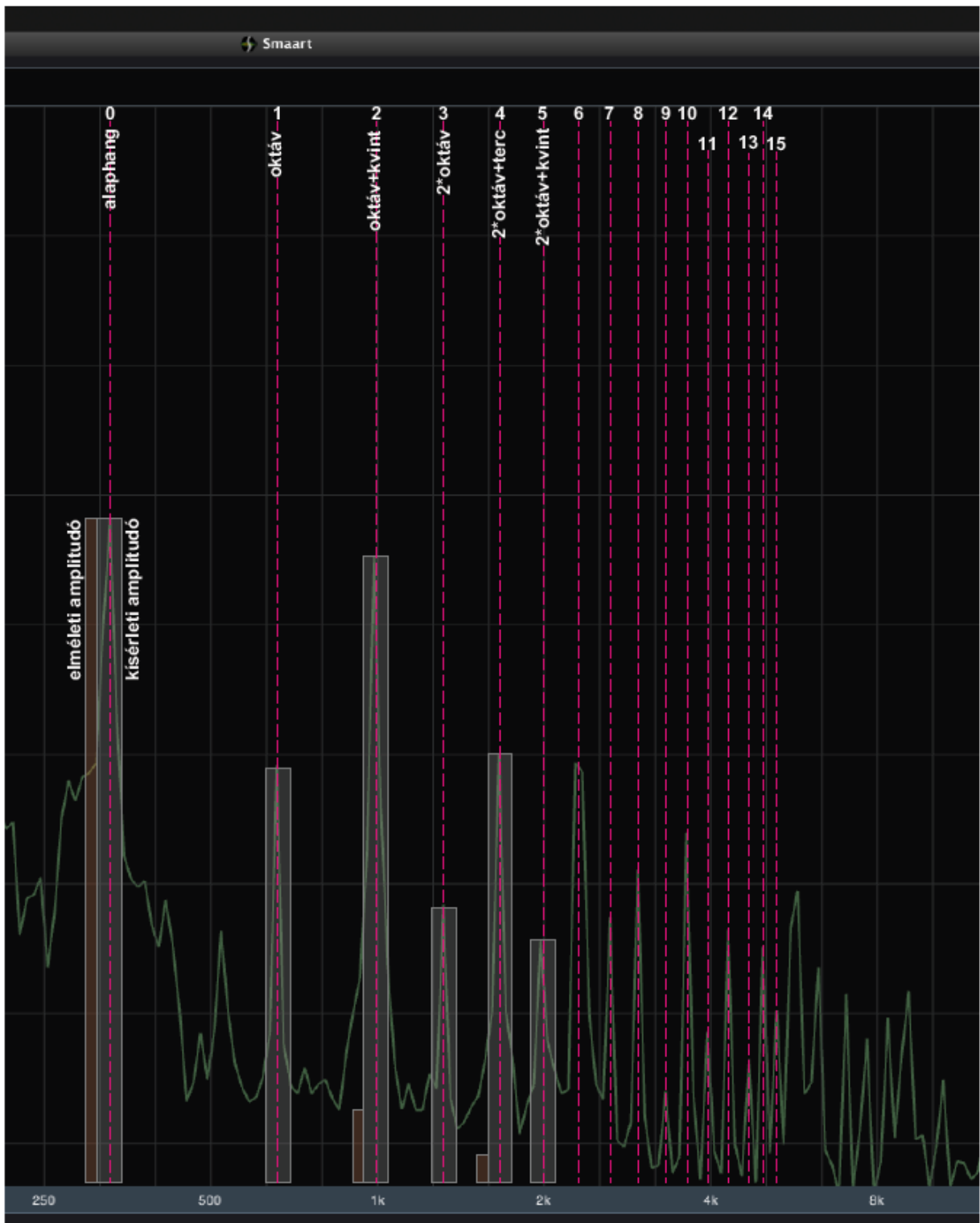
17. ábra - Gibbs jelenség négyzetjelnél

Értelemszerűen egy húrt nem közvetlenül a végénél pengetünk meg, így az $1/20$ -os, $1/40$ -es osztások a valóságban már nem reálisak, így ezekben a tartományokban jelentkező oszcilláció nem vezet ki a modellből. Csembalóknál gyakori volt az $1/7$ -es osztás, amely felhangokban dús hangszínt adott, de nem annyira, hogy zavaróan éles, vagy a nehézkes pengetés miatt túlzottan nazális hangzást adjon.

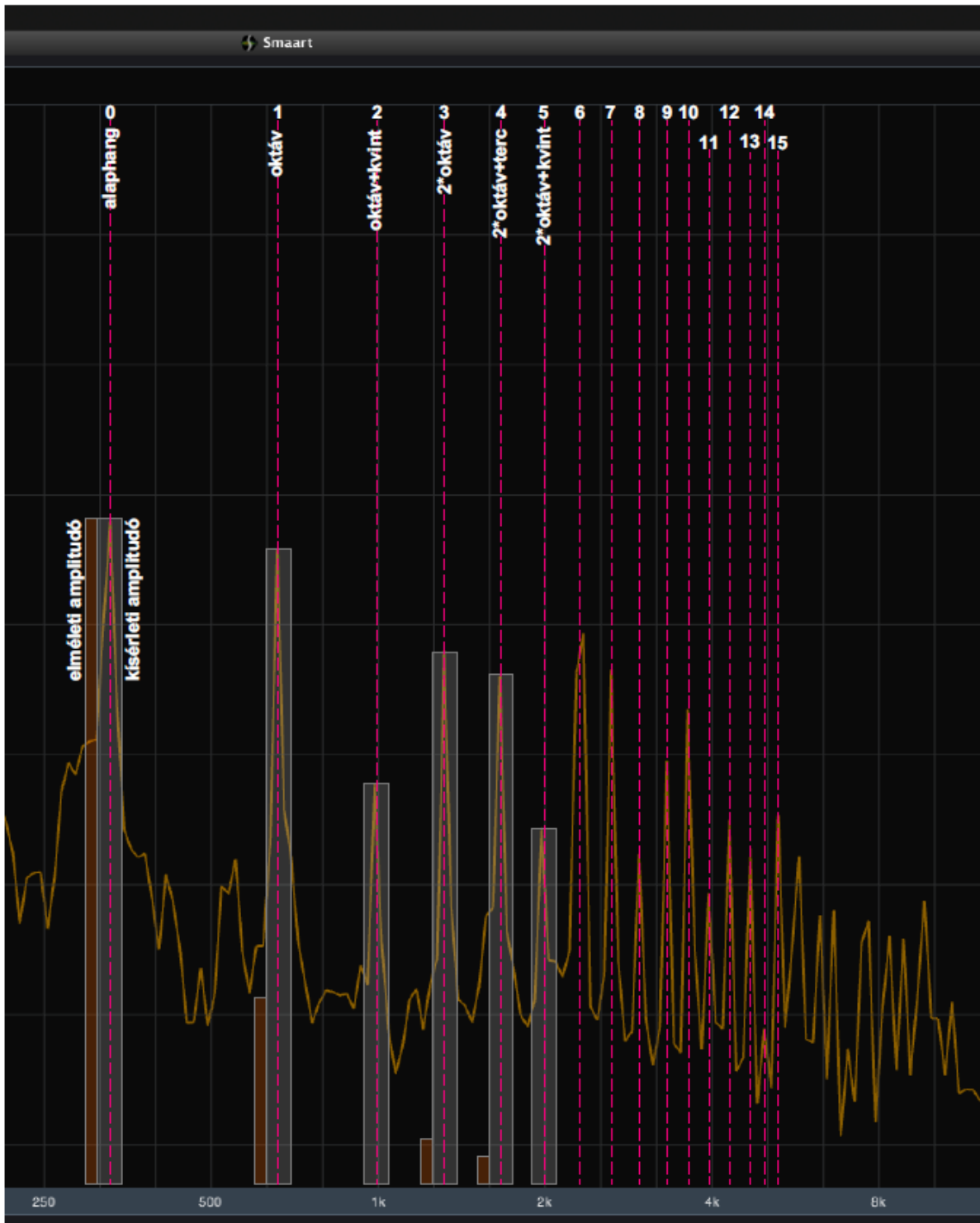
Alább látható egy kivágat az analitikus megoldás numerikus módon történő ábrázolásának általam alkalmazott módjáról. A Fourier-transzformációt követően 0-tól 1-ig $0,0025$ -ös lépésként beosztásorozatot hoztam létre (lsd: tartó-oszlop), emellett létesítettem az x -cellát, ahol a 0-1 intervallumot transzformáltam a 0- L intervallumra, ahol L a húr hossz, jelen képen 660 mm. Az ezt követő oszlopokban meghatároztam a térfüggvény egyes trigonometrikus bázisokhoz tartozó értékeit, a felharmonikusok képét, ez jelen táblázatnál a 243. felharmonikusig terjed. Utolsó oszlopban ezeket adtam össze, és az eredmény jól közelíti a húr alakját. A képen km az m -edik hullámvektorra vonatkozik, am1-am3 az m -edik felharmonikushoz tartozó

Előző dolgozatomban részletesen vizsgáltam egy kapcsolt húr- és lemezmodellt. Az eredmények között látható volt, hogy a függvény rendkívül összetett, a húr bázisához képest (mely „kétszer megszámlálhatatlanul végtelen”), négyfajta bázisfüggvény kompozíciójából áll (megjelennek a hiperbolikus függvények), melyeknek egyenként végtelen felharmonikusai vannak. Fontos megemlíteni, hogy az egy egyszerű, homogén, izotróp, négyzetes lemez volt, csupán hajlítófeszültségekkel, a nyírófeszültségek elhanyagolásával. Ezzel szemben egy gitár nem homogén, nem izotróp; a teste pedig meglehetősen bonyolult alakzatú. Érthető tehát, hogy a spektrumában az elméleti görbe szerint nem várt értékek is megjelennek.

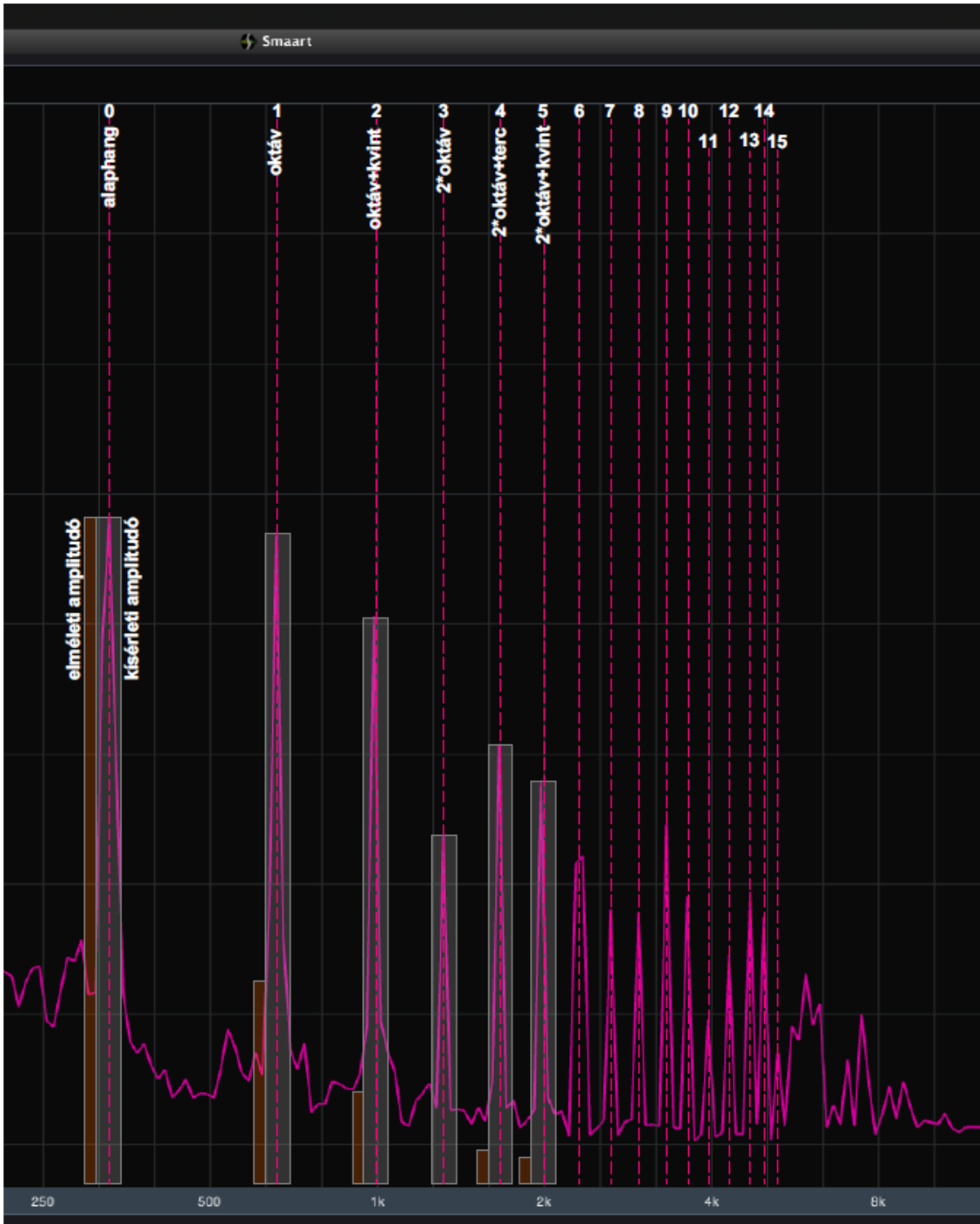
Az alábbi ábrákon közlöm a középén, $1/3$ -nál, $1/4$ -nél megpengetett húrok spektrumát. A 21. ábra a húr vége felé történő pengetéssel jött létre, a 22. ábra pedig szinte a megfogási pontnál került megszólaltatásra. A magentaszínű szaggatott vonal jelzi a lokális amplitúdómaximumokhoz tartozó frekvenciaértékeket, melyen jól láthatóan a felharmonikusok. A könnyebb értelmezhetőség kedvéért az adott amplitúddal egy oszlopot állítottam minden egyes értékekhez. Mellette balra található az elméleti érték a mérés léptékében; a transzformáció úgy történt, hogy alaphang amplitúdója egyezzen meg mindkét rendszerben. A felharmonikusoknál így könnyen érzékelhető az eltérés. Ahol hiányzik az elméleti oszlop, ott értelemszerűen annak az érték zérus. Csupán az első pár felharmonikus lett oszloppal ábrázolva – ezek a legmeghatározóbbak a hangszín tekintetében, hiszen ezeknek van nagy amplitúdója, ezeket halljuk leginkább füllel.



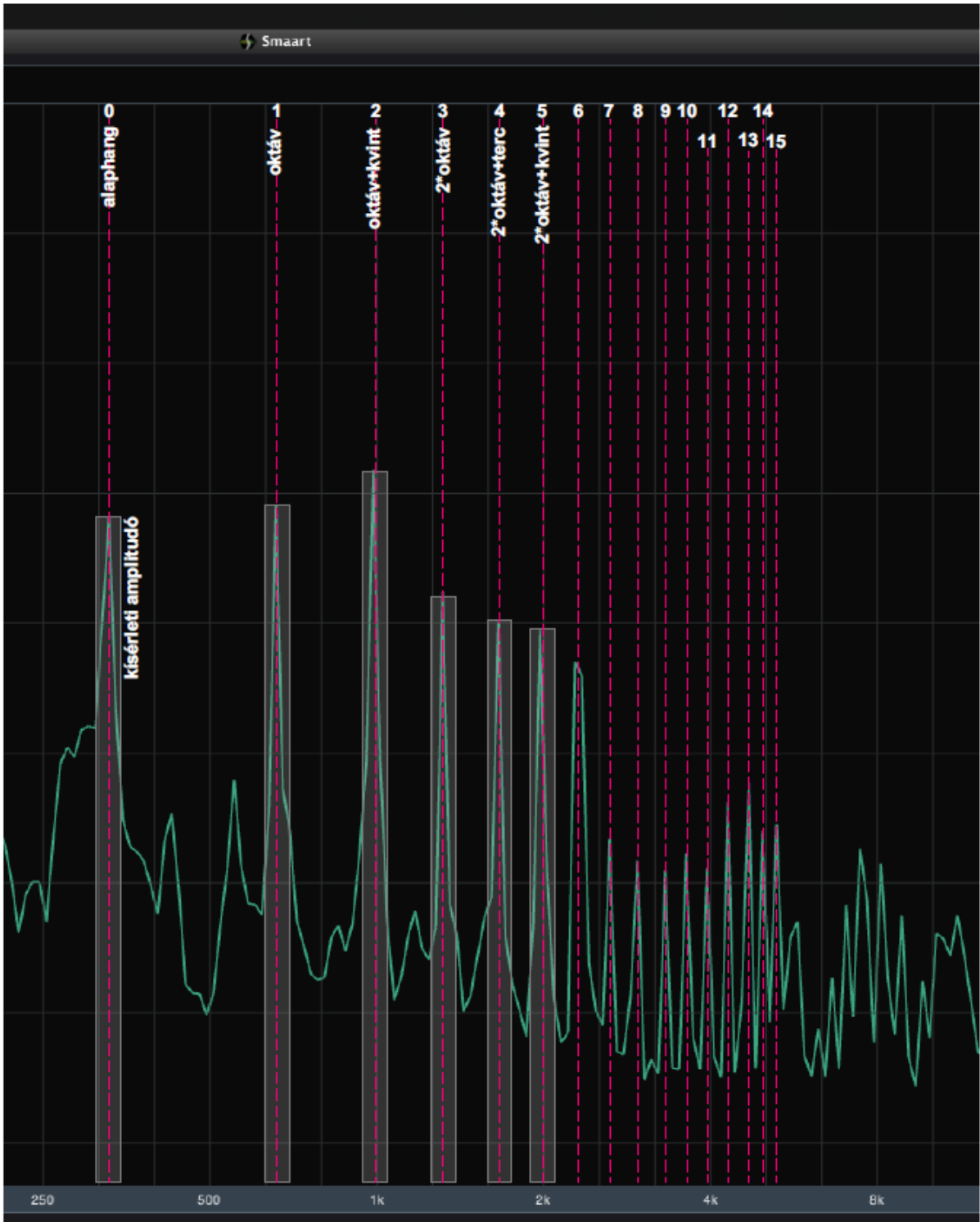
18. ábra - középen pengetett gitár



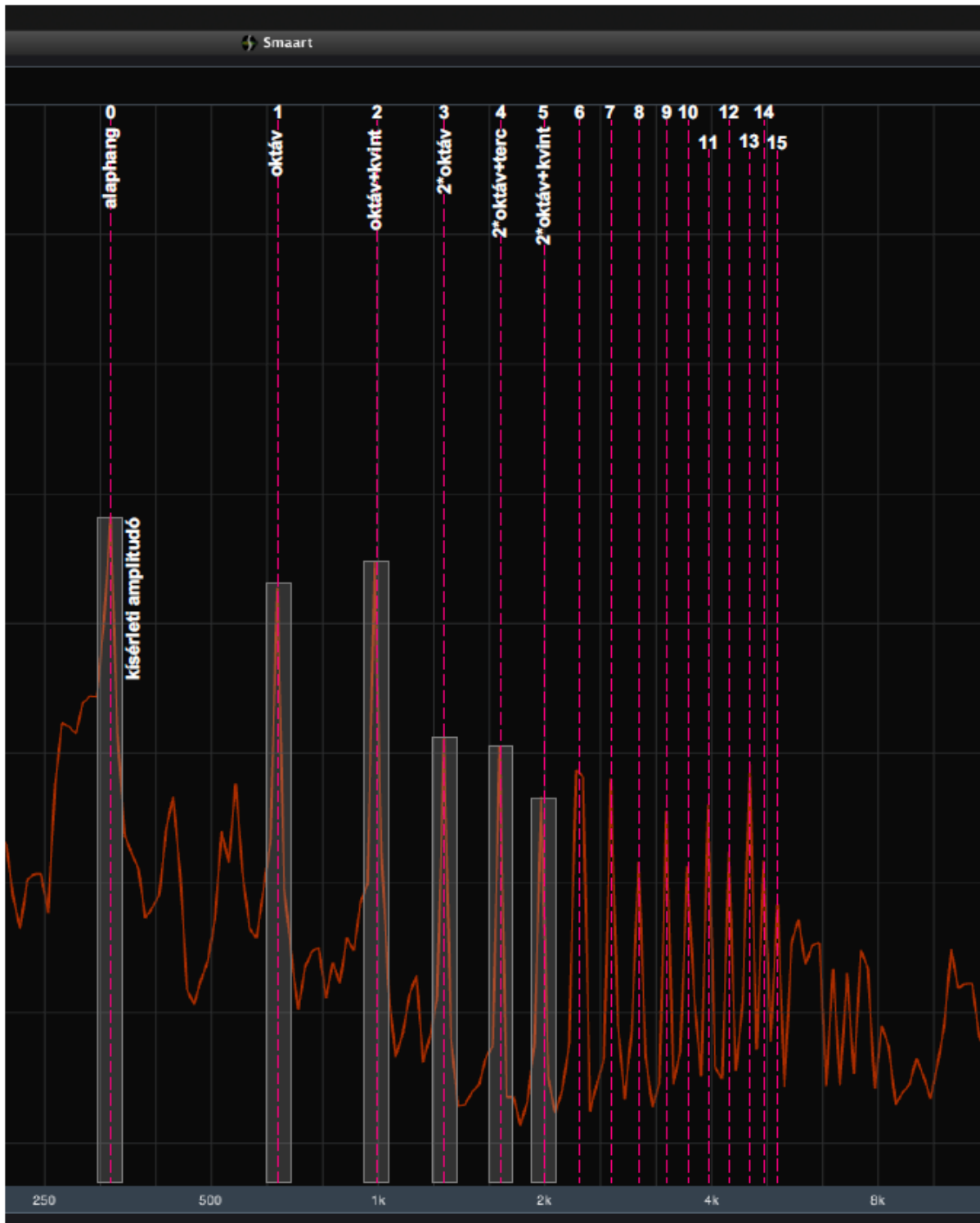
19. ábra - 1/3-nál pengetett gitár



20. ábra - 1/4-nél pengetett gitár



21. ábra - kis arányszámnál pengetett gitár



22. ábra - közvetlenül a végénél pengetett gitár

Említésre méltó, hogy a továbbiakban érdemes lehet az eredményeket egy újabb transzformációval illetni. A fül ugyanis azonos amplitúdójú, különböző frekvenciájú hangok erősségét máshogy érzékeli, így, ha a hangszint szeretnénk jellemezni, érdemes lenne egy operátorfüggvénnyel megszorozni a spektrumot, amely az emberi észleléshez közelítené az értékeket –

hiszen a zenei hangszín fogalma a valóságban ehhez kötött. Ezen túlmenően a hangszín, illetve a zene érzékelése mindig relatív, helyzetfüggő, főként az az idő tájt hallott más zenei ingerekhez képest értékeljük. Párhuzamot lehet vonni a színek érzékelése és a hangszín érzékelése között: ha ugyanazon színt egy telítetlen, pasztell-szín mellé társítjuk, sokkal harsányabbnak érezzük, mintha egy erős alapszín mellett jelenne meg. Így a fent közölt objektivitás inkább fizikai jelentőségű; a valóság ennél sokkal árnyaltabb, és szubjektívebb – továbbá az adott hangszínhez fűződő viszonyulásmódunkat az adott pillanatban az énállapotunk is befolyásolja.

A hangszerek külön helyen történő pengetése az előadóművészi gyakorlatban alkalmazott módszer a kívánt hangszín elérésének érdekében.

Virginálok hangszíne

Az alábbi hivatkozáson két virginál nevezetű hangszer látható. Az egyik, úgynevezett spinett



<https://www.youtube.com/watch?v=BV9Z-RmETvQ>

megszóltatási pontjai a híd környezetében találhatóak, míg a másoknak, úgynevezett muselar-virginálnak,



<https://www.youtube.com/watch?v=Xi5rEM3M2XA>

ettől távolabb. Érzékelhető, hogy a másodiknak sokkal kerekesebb, lágyabb hangja van.

A reneszánsz-kori muselar-típusú virginálok esetében a mai fülnek meglehetősen szokatlan hangzás elérése is lehetséges volt, itt a húrvégekhez kis kampókat érintettek, mely hatására erősen vibráló hangzás jött létre. A kampók alkalmazása nélkül:



<https://www.youtube.com/watch?v=K7Lb26CDyVs> ,

A kampók alkalmazásával:



<https://www.youtube.com/watch?v=upuSmATdpvs>).

Az alábbi elérési úton található videóban 1:56-nál történik a váltás:



<https://www.youtube.com/watch?v=KgybEd8W1m8>

Csembalók regiszterei

A csembalókon, hogy a játékmódot színesebbé tegyék, különböző regisztereket használtak. Egyrészt ez azt is jelentette, hogy a billentyűzethez több húrsor tartozott, melyeket ki-be lehetett kapcsolni egy mechanizmus segítségével, viszont azt is, hogy egy húrsorhoz több pengetőmechanika tartozhatott. A pengetők közül volt, ami közelebb helyezkedett el a húrlábhoz, volt, ami távolabb. Értelemszerűen más hangszínt eredményeztek.

Példaként nézzük a németalföldi Ruckers család által készített flamand csembalót! A rezonátorlemezen lévő bal oldali híddhoz az úgynevezett 8' (8 láb, korabeli flamand nyelven voet) húrsor, a láb az egyik, referenciaként választott húrnak a hossza, a jobbra lévő híd a 4' (négyláb) húrsorhoz tartozik [O'Brian, 1990.]. Nem vizsgáltam meg történeti szempontból ezt a kiválasztott hangszert, így az alábbiakban írtakat a korszakban rendszerint alkalmazott elveinek megfelelőnek feltételezem, az általános ismereteim szerint jellemzem. Feltételezem ez alapján, hogy kettő nyolcláb, és egy négyláb regiszter volt. Értelemszerűen a négyláb regiszter egy oktávval magasabban szól, mint a nyolcláb (hiszen, ha fele a hullámhossz, kétszerese a frekvencia). Vajon akkor mi értelme van két ugyan olyan hangmagasságú (itt a nyolcláb duplázott) húrsort létrehozni? Egyrészt, a hangerőt lehetett módosítani azzal, hogy mindkettő be volt-e kapcsolva, vagy csak az egyik – ugyanakkor a pengetés helye is máshol volt, így az egyik nyolcláb húr más hangszínnel szólt, mint a másik. Így tudták a barokk korszakban a hangszínt rendkívül változatossá tenni.



<https://www.youtube.com/watch?v=gw8iYtccRnQ>



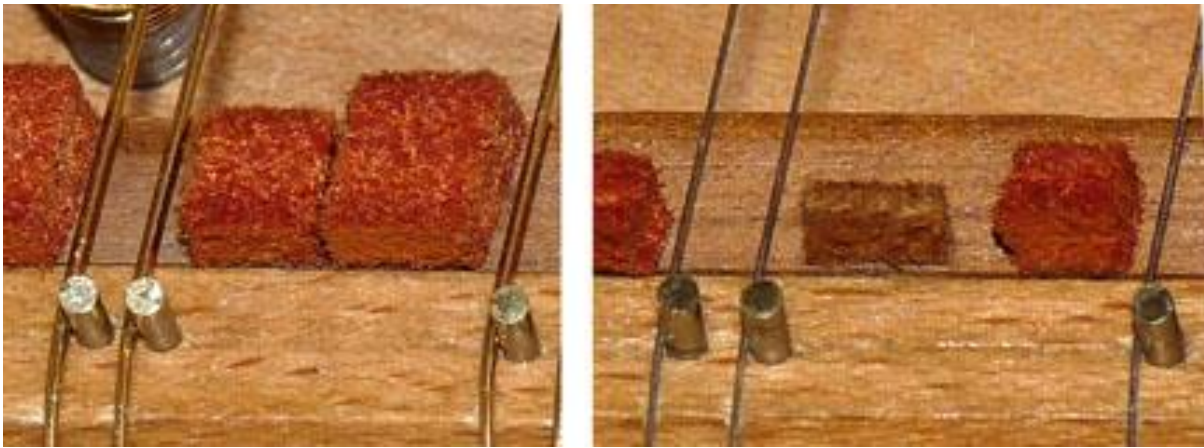
23. ábra - Ruckers-csembaló felülnézete

A barokk csembalóknak egy másik, a felharmonikusok befolyásolásával történő hangszínmódosítási lehetőségét is bemutatom. Gyakori volt az úgynevezett lantregiszter alkalmazása – ennek bekapcsolásával a húr végén egy bőrdarab ért a húrokhoz. A bőrdarab szélességének megfelelő hullámhosszú (azaz a kishullámhosszú, sokadik számú felharmonikusok, magas hangok) elfojtásra kerültek, így bársonyos, lágy hangja lett a hangszernek:

<https://youtu.be/gw8iYtccRnQ?t=225>

(itt 3:45-től alkalmazza a lantregisztert, 4:30-nál pedig visszavált az eredeti hangszínre).

A 24. ábrán láthatóak a bőrdarabok (jelen csembalónál filccel helyettesítve) kikapcsolt (húrhoz nem hozzáérő állapotban):



24. ábra - filc a lantregiszterhez

MéRNÖKI VONATKOZÁSOK

Ahhoz, hogy a jelenségnek egyéb, építészeti alkalmazási módjait megtaláljuk, és újdonságként alkalmazhassuk, gondoljunk arra, hogy mi történik egy statikai rezgésvizsgálat során! A földemek, egyéb és épületszerkezetek rezgésvizsgálata gyakorta kimerül a sajátrezgés számításában – mind az analitikus úton levezetett, szabványokban szereplő képletek, mind a végeselem-mo-dellek esetében. Mit jelent ez matematikailag? Azt, hogy a differenciálegyenletek általános megoldása határfeltételekhez lett igazítva (a határfeltételek kvantálják a szeparációs állandót), viszont az időfüggés esetében a megoldások általánosak maradnak, kezdeti feltételekkel nem foglalkoznak ezen elméletek.

A határfeltételek (a szorzatalakú megoldás térfüggvényének peremfeltételei, az azokhoz tartozó integrációs állandók meghatározása) jellemzően a szerkezetek rögzítési környezeteire

vonatkoznak – például egy zászlórúd talajba történő befogásakor előírhatjuk, hogy a térfüggvény talajkörnyezeti diszlokációja zérus értéket vegyen fel, hasonlóan a befogási merevsége miatt a térfüggvény saját változói szerinti első deriváltjai is. Mellékfeltételek adódhatnak további pontokra (például a diszlokáció korlátozása egy adott magasságon, ha a talajba történő befogás mellett lehorgonyzás is megjelenik).

Ezen túl viszont nagy jelentősége lenne annak, hogy a kezdeti feltételekhez illesztett partikuláris megoldásokkal számoljunk (időfüggvény integrációs állandóinak meghatározása), vagy más esetekben gerjesztőfüggvény jelenjen meg a differenciálegyenletekben! Hiszen az eddig alkalmazott elméletek ugyanazt a hatást feltételezik akkor, ha egy labda pattog a terem bizonyos pontján, mintha egy targonca vándorolna egy bizonyos nyomvonalon fel-alá. Pedig a szerkezet válaszában eltérő hatások jönnek létre, más lesz a fődém hangereje, hangszíne. Nyilván, itt ez a kevésbé fontos szempont; lényegesebb, hogy ezzel párhuzamosan a használatot befolyásoló, más módon érzékelhető rezgések is egészen mások lesznek.

Legegyszerűbb esetben tekintsünk egy nagyon hosszú, és karcsú acélgerendát (melyet tudunk húrként (harmonikus megoldás), és nem rúdként (biharmonikus megoldás) modellezni! [Landau-Lifsic, 1988.] Feltételezzük, hogy bizonyos helyen bizonyos kezdősebességű (impulzusú) ütés éri, innét meg tudjuk határozni az előzőekben közölt elmélet alapján, hogy a felharmonikusok közül melyik lesz jelentős, melyik nem – mikor melyiket kell a méretezés során figyelembe venni; a környező szerkezetek rezonanciavizsgálata esetén, mint továbbadódó gerjesztőhatás, mire érdemes méretezni. Természetesen ez egy egyszerű, hipotetikus eset, a gyakorlatban az épületeknél a feszített húrok alkalmazása elenyésző, viszont a harmonikus helyett biharmonikus egyenletek (rudak, lemezek hullámozása) kezdeti feltételhez illesztése után reális problémákra is választ kaphatunk.

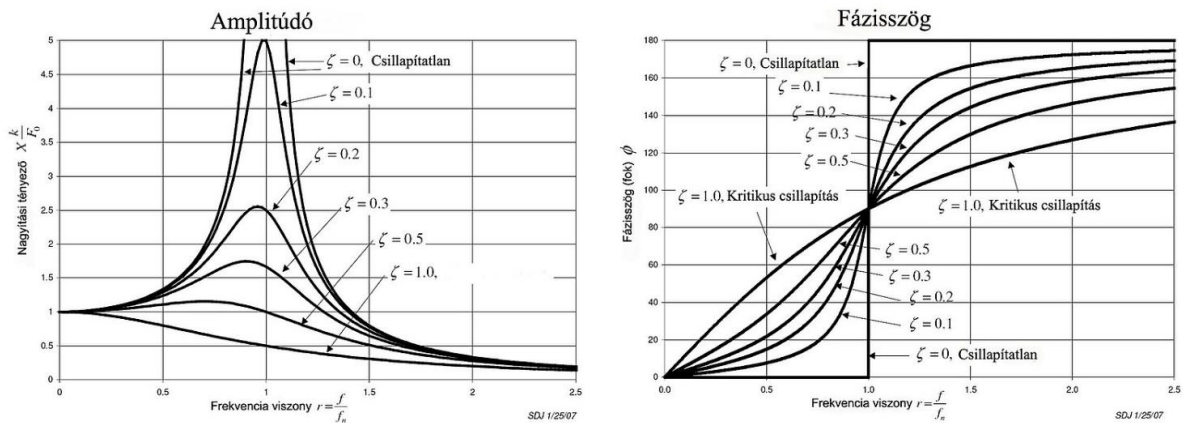
Másik érdekes jelenség a rezonancia kérdésköre. Mérnöki vonatkozásokban a rezgést okozó gépek, dinamikus használat (táncsterem, edzőterem), szélhatás, földrengés, használatból eredő hatás (harangláb) esetében szembesülünk vele. Pusztán matematikailag szemléltetem a jelenséget, és pár gyakorlatias építészeti megoldást mutatok rá. Vizsgáljuk a

$$\mathbf{O}x(t) = P_0 e^{i\omega t} \quad (38.)$$

inhomogén differenciálegyenletet, ahol $x(t)$ a nyugalmi helyzettől mért diszlokáció az idő függvényében, a jobboldal az időnek egy tetszőleges periodikus függvénye, az \mathbf{O} operátor pedig

$$\mathbf{O} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + c \frac{\partial}{\partial t} + k \quad (39.)$$

alakú. A megoldás vonatkozó elméleti fizikakönyvekben megtalálható; a megoldásnál vizsgáljuk azt, hogy bizonyos csillapítások esetén, hogy változik a nagyítási tényező (mely megmutatja, hogy adott frekvencia esetén az amplitúdó hányszorosa a közel statikusnak – nagyon lassúnak – tekintett gerjesztőerő által okozott amplitúdónak). Itt megjegyzem, hogy a nagyon lassú, statikusnak tekintett gerjesztőerő alatt azt kell érteni, hogy a csillapítás miatt szinte megegyezik a homogén megoldásfüggvény kezdeti diszlokációhoz vagy impulzushoz illesztett változatával, hiszen amíg a következő löket érkezik, addigra a csillapítás miatt mintegy eltűnik a hatása, és a mozgásnak mintegy előlről kell kezdődnie, így nem tekinthető halmozódónak a gerjesztőhatás.



25. ábra - gerjesztett, csillapított rezgés [Vértes, 1976]

Azt látjuk, hogyha a gerjesztőfüggvény rezgésideje közelít a sajátrezgésidőhöz, és a csillapítás tart a zérushoz, a dinamikus tényező a végtelenbe tart. (Egészen pontosan az amplitúdómaximum nem az 1 értéknél található; megoldva a $dA_0/d\omega=0$ egyenletet, láthatjuk, hogy az $\omega/\omega_0=[1-c^2/(2m^2\omega_0^2)]^{1/2}$ helyen, mely az 1-től kissé eltolva jelentkezi, ω_0 értelemszerűen a gerjesztés nélküli körfrekvencia. Gyakorlatilag viszont kicsiny az eltérés a csillapított és csillapítatlan rezgés maximumhelye között, így az egységnyi viszonzszámot alkalmazhatjuk gyakorlati példánknál.) Kissé elemezve ezen összefüggést, beláthatjuk, hogyha nagy (kritikus) a csillapítás, akkor nem jelentkezik ugrás a nagyítási tényezőben, viszont minél kisebb a csillapítás, annál jelentősebb a változás, így az építészetileg mechanizmusnak tartott labilis, túlhatározott szerkezetek a legveszélyesebbek, és minél inkább határozatlan egy tartó, és minél merevebbek

a kapcsolatok, annál kevésbé jelentkezik a rezonancia veszélye. Megemlítem, hogy a modellben a csillapítás viszkózus, így energia tekintetében egy disszipációs függvényként jelenik meg, és az előző mondatot helyesbítendő, szeretnék kitérni arra, hogy a kapcsolati mód tekintetében ugyan igaz, hogy a határozatlanság segít, viszont a kapcsolatoknál az úgynevezett félmerev, energiadisszipációt okozó kapcsolatok még inkább elősegítik a rezonancia veszélyének leküzdését.

A 25. ábrának a jobboldalát tekintve láthatjuk, hogy a harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés is harmonikus rezgés lesz, de azzal nem szinkronban mozog. Az eltérés a fázisszöggel jellemezhető.

Gyakorlati alkalmazások terén megemlítem, hogy például a magas haranglábaknál a rezonancia elkerülése miatt bonyolultabb merevítőrendszert készítettek (határozatlan szerkezetek, félmerev kapcsolatokkal, jelentős energiadisszipációval). Hasonlóképp, a rezonancia elkerülése végett a tartó ágasfának a sajátfrekvenciájának egy bizonyos értéket meg kell haladnia, így a magassága korlátozott.

Másik érdekes eset: földrengés esetén a rezonancia hatásának épületre gyakorolt hatásának csökkentésére a japán pagodákban gyakorta alkalmaztak egy több emeleten végigvonuló ingát, mely az épülettel együtt rezgésbe kerülve, energiadisszipáció révén csökkentette az épület rezgését. Az alábbi videón látható a működési elve egy modellen keresztül, a 26. ábrán pedig keresztmetszet található a pagodákról.

<https://www.youtube.com/watch?v=CUJfEcWN6VQ>

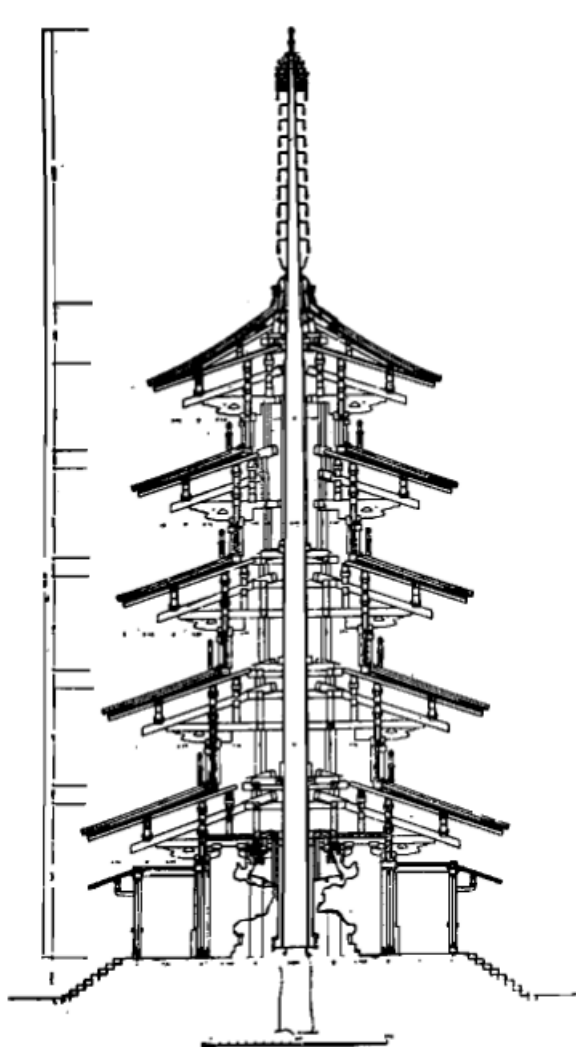


Fig. 1 Section of the five-storied pagoda at Horyu-ji Temple, Nara,

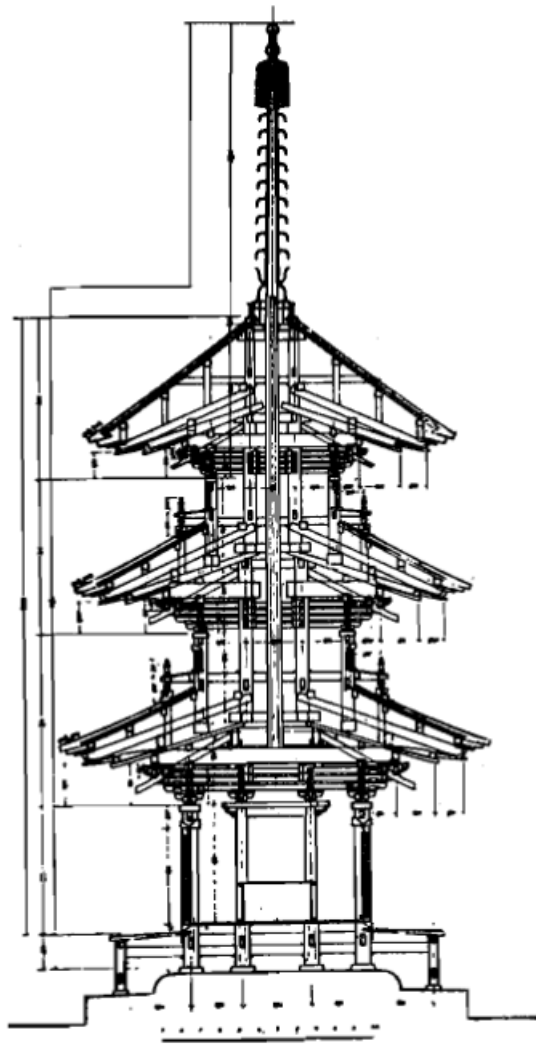


Fig. 2 Section of the three-storied pagoda at Sammyo-ji Temple, Toyokawa-shi, Aichi.

26. ábra – japán pagoda metszete Bulletins - Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University (1960), 40: 1-15

Összegzés

Dolgozatomban a célkitűzésnek megfelelően széles spektrumú ismeretanyagot igyekeztem szintetizálni, igyekeztem különböző érdeklődési köreim, és tanulmányaim között kapcsolatot teremteni. Vizsgáltam, hogy a zenei hangszín fogalma milyen fizikai mennyiségekkel írható le egyszerűsített modellek esetén; az elméleti számításokat kísérlettel, illetve a hangszerkészítői és előadóművészi gyakorlattal vettem össze.

A kísérleti eredmények azt mutatták, hogy az egyszerűsített modellhez képest eltérően viselkednek a hangszerek, tekintettel arra, hogy a csatlakozó elemek rezonanciája, illetve csillapító hatása, illetve az interferenciák jelentősen módosíthatják az eredményeket. Ugyanakkor az eltérések mögött világosan kirajzolódott, hogy az elméleti megoldások, ha ugyan különböznek is, mégis korrelálnak a mérésekkel. Hangszerek terén pedig a kezdeti feltételek által történő hangszín-módosítást intuitíve évszázadok óta alkalmazzák. Erre számos videópéldát soroltam fel a dolgozatomban, a leírást szemléletessé téve.

Kitekintésként a hangszín összefüggéseit általánosítottam; épületek rezgésvizsgálatának lehetséges, további szempontjait hangsúlyozva. Későbbi dolgozataimban szándékomban áll ezt a kérdéskört tovább tanulmányozni. A TDK dolgozatom az eredmények felmutatása mellett segített a már megszerzett ismereteimet elmélyíteni, mely lehetővé tette számomra az egyik szakkollégiumban zenei-matematikai-fizikai előadás- és workshop-sorozat szervezését. Ezen alkalmakon építészhallgatókhoz igyekeztem közelebb hozni a fizikai gondolkodást, illetve hangszerek, bútorok intarzia-díszjeinek készítését próbálhatták ki a segítségemmel a résztvevők.

Bibliográfia

Grant O'Brian: Ruckers. A harpsichord and virginal building tradition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Keszler Lőrinc: Klasszikus összhangzattan. EMB, 2015.

L. D. Landau – E. M. Lifsic: Elméleti fizika. I. kötet. Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

L. D. Landau – E. M. Lifsic: Elméleti fizika. VII. kötet. Rugalmasságtan. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

Dr. Nagy Károly: Elméleti mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

V. Sz. Vlagyimirov: Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

Vértes György: Épületek dinamikája. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

Budó Ágoston: Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

Dr. Gáspár Gyula: Mátrixszámítás. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1963.

Pach Zs. Pálné – Frey Tamás: Vektor- és tenzoranalízis. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1960.

R. Critescu – G. Marinescu: Bevezetés a disztribúcióelméletbe és alkalmazásába. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1969.

Dr. Farkas Miklós: Speciális függvények. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1964.

Dr. Nagy Károly: Elméleti fizikai példatár I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

Láncos Kornél: A geometriai térfogalom fejlődése. Gondolat, Budapest, 1976.

Dr. Nagy Károly: Elektrodinamika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

Szőkefalvi – Gehér – Nagy: Differenciálgeometria. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

Simonyi Károly: Elméleti villamosságtan. Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.

Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

Dr. Pelle Béla: Geometria. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

Dr. Dávid Gyula: Rezgések és hullámok. Előadássorozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Fizikus Szak, 2020. tanév

Dr. Fekete István: Matematika és számítástechnika 2. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

R. P. Feynman – Mai Fizika. 1., 4., 5., 6. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.

Császár Ákosné: Vektoranalízis. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1997.

Fazekas Ferenc: Többváltozós függvények és differenciálásuk. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.

Fazekas Ferenc: Taylor-sorok. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953. Fazekas Ferenc: Többváltozós függvények integrálása. Tankönyvkiadó, Budapest, 1953.

Fazekas Ferenc: Parciális differenciálegyenletek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1958.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni

dr. Hegyi Dezső (konzulens)

dr. Sipos András Árpád (konzulens)

segítségét a konzultációk, illetve

Karakai Máté (mérnök hallgató)

segítségét a mérés elvégzésének tekintetében.

A dolgozat elkészítéséhez a könyveken túl elméleti háttérrel nyújtott

dr. Dávid Gyula (fizikus)

ELTE-n tartott Rezgések és hullámok, vektorszámítás, matematikai módszerek a fizikában című előadássorozata, mely Youtube-on „dgy egyetemi előadásai” című csatornán található meg.

A nyelvi lektorálásban

dr. Fata Hortenzia (anya)

segített.

Friedrich Dániel,

Budapest, 2022. 09. 25.