

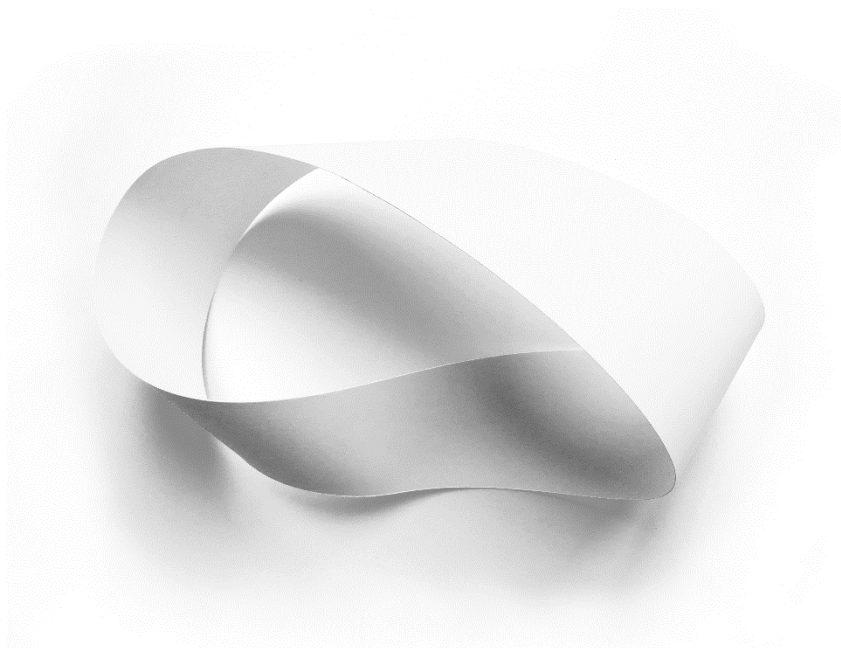


A Möbius-szalag alakjáról

Készítette: Englert Georgina

Konzulens: Dr. Sipos András Árpád

Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék



TDK 2019
BME Építésmérnöki Kar



Absztrakt

A Möbius-szalag olyan nem irányítható felület, amely a háromdimenziós térbe helyezve egy oldallal és egy éllel rendelkezik. A szalagot a 19. század első felében fedezte fel két német matematikus egymástól függetlenül. Nevét egyik felfedezőjéről, August Ferdinand Möbiusról kapta.

A Möbius-szalag az élet meglepően sok területén előfordul. Számos művészeti alkotásban fellelhető a pontos forma (például M. C. Escher néhány képe), több esetben a folytonosságot, az önmagába való visszatérést szimbolizálja. A természetben (például aromás vegyületek molekuláinak alakjánál) is megtalálható. A hétköznapi életben is felfedezhető a Möbius-szalag: például szállítószalagoknál ez a forma biztosítja, hogy a felület egyenletesen kopjon. Mindezek fényében meglepő, hogy a szalag alakja zárt matematikai összefüggésekkel nem leírható.

Egy, a háromdimenziós térben elhelyezkedő felület (például a gömb) paraméterezése során egy síkidom (például egy téglalap) és a felület pontjai között létesítünk egyértelmű kapcsolatot. Az említett példában a téglalap pontjai a földrajzi hosszúságnak és szélességnek felelnek meg. Ismert, hogy ezen két adatból egyértelműen beazonosítható a gömb bármely pontja, a két pólus kivételével, ahol a hosszúsági adat nem egyértelmű. Ezen megfeleltetés alapján készülnek a térképek is.

Jelen pillanatban nem ismert hasonló leképezés a síkba teríthető Möbius-szalagot illetően, annak ellenére, hogy számos kutatás foglalkozik a szalag sajátosságaival. A Möbius-szalag különböző terhek hatására számos alakot felvehet, a fentebb említett tanulmányok azonban elsősorban a szalag (terheletlen) egyensúlyi alakjának meghatározására irányulnak. Ennek nehézsége, hogy a Möbius-szalag pontjaiban (terheletlen állapotban is) feszültségek ébrednek (hasonlóan a feszített tartókhöz), amelyek egyensúlyban lévő nyomatékok révén biztosítják az alakban a görbületet.

Kutatásomban egy olyan (közelítő) képletet keresek, amely egyszerű megfeleltetést ad a téglalap és a belőle készített, terheletlen Möbius-szalag pontjai között. Ennek segítségével a Möbius-szalag különböző terhek hatására létrejövő alakváltozásai a mai eljárásoknál egyszerűbben számíthatóvá válnak.

Tartalomjegyzék

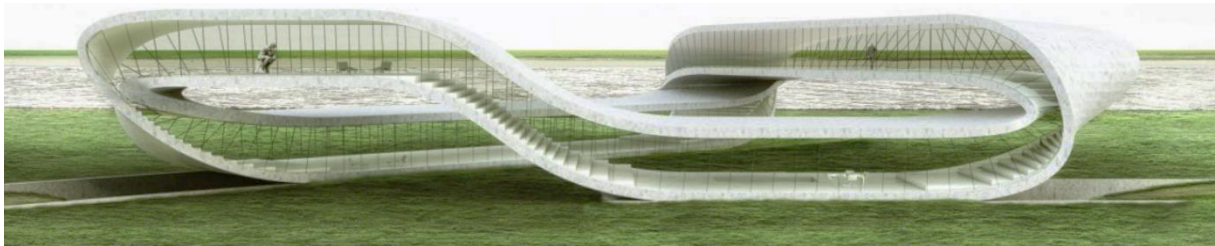
Absztrakt	1
1. Bevezetés.....	3
2. Elméleti háttér	4
2.1 Kifejthető felületek	4
2.2 Irányítható felületek.....	4
2.3 Felületek paraméterezése.....	5
2.4 Csebisev-polinomok	6
2.5 Kvaterniók	6
3. A Möbius-szalag lehetséges modelljei	7
3.1 Rúdelméletre épülő megközelítés.....	8
3.2 Felületelméletre épülő megközelítés	9
4. Numerikus megoldás.....	11
4.1 Rövid ismertető a használt programokról	11
4.2 Az r_j vektorat leíró Csebisev-polinomok együtthatóit leíró $c_{j,i}(w)$ függvények meghatározása	19
4.3 A görbületmentes egyenesek és a középvonal által bezárt η szöget leíró Csebisev-polinomok együtthatóit leíró $c_{\eta,i}(w)$ függvény meghatározása.....	20
4.4. Normavizsgálat.....	21
5. Összefoglalás	22
Irodalomjegyzék.....	23
Mellékletek.....	24

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni konzulensemnek, Dr. Sipos András Árpádnak a dolgozat elkészítése során nyújtott mind szakmai, mind lelkesítő támogatását.

1. Bevezetés

A Möbius-szalag az élet meglepően sok területén előforduló alakzat. Elegendően elnyúlt téglalap két, egymással szemben lévő, rövidebb oldalának ellentétes irányú összeragasztásával könnyen előállítható. Például számos művészeti alkotásban fellelhető a pontos forma. Inspirált festőket (például M. C. Escher néhány képét), szobrászokat, sőt az építészetben is felbukkan a Möbius-szalag. Több helyen a folytonosságot, az önmagába visszatérő mozgást szimbolizálja.



*1. ábra Janjaap Ruijssenaars - Landscape House
(Courtesy of UniverseArchitecture) [1]*

Az épület úgy lett kialakítva, hogy a földem egyetlen Möbius-szalagból álljon

A természetben (például aromás vegyületek molekuláinak alakjánál) is megtalálható a forma [2]. A hétköznapi életben is felfedezhető a Möbius-szalag: például szállítószalagoknál ez az alak biztosítja, hogy a felület egyenletesen kopjon [10]. Mindezek fényében meglepő, hogy téglalaplából készülő szalag alakja zárt matematikai összefüggésekkel nem leírható.

A Möbius-szalag különböző terhek hatására számos alakot felvehet, több tanulmány [9]-[13] foglalkozik a szalag (terheletlen) egyensúlyi alakjának meghatározásával. Ennek nehézsége, hogy a Möbius-szalag pontjaiban (terheletlen állapotban is) feszültségek ébrednek (hasonlóan a feszített tartókhoz), amelyek egyensúlyban lévő nyomtérkek révén biztosítják az alakban a görbületet.

Kutatásomban egy olyan (közelítő) képletet keresek, amely egyszerű megfeleltetést ad a téglalap és a belőle készített, terheletlen Möbius-szalag pontjai között. Ennek segítségével a Möbius-szalag különböző terhek hatására létrejövő alakváltozásai a mai eljárásoknál egyszerűbben számíthatóvá válnak.

Dolgozatomban először a téma geometriai háttérét mutatom be és definiálom a szükséges fogalmakat. Ezután rátérek azokra a modellekre, melyeket az eddigi kutatások során az alak meghatározására használtak. Ezek alapján készült a 4. rész numerikus megoldója. Az eredmények bemutatása után a dolgozatot összefoglalás zárja.

2. Elméleti háttér

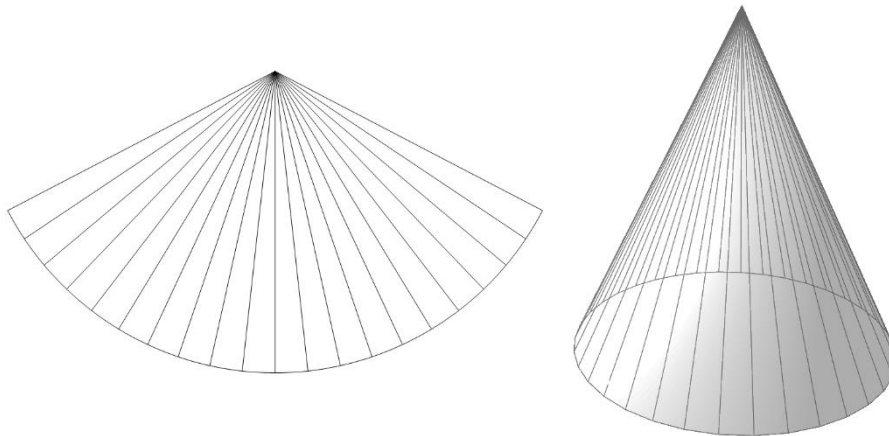
A klasszikus geometriából ismert, hogy a téglalapról készített Möbius szalag egy kifejthető, nem irányítható, kétdimenziós felület. Ámbár a szalag könnyen, egy vékony papírcsíkból is elkészíthető, nem ismert olyan képlet (matematikai fogalommal: paraméterezés), amely egyértelműen megfelelteti a kezdeti téglalap pontjait a belőle készített Möbius szalag pontjaival. A következőkben a háromdimenziós térbe ágyazott kétdimenziós felületekkel foglalkozom.

2.1 Kifejthető felületek

A térgörbe kifejthető felületén értjük a térgörbe érintőiből álló felületet.

Lörincz-Petrich: Ábrázoló geometria [3]

A *kifejthető felületek* a vonalfelületek egy osztálya. (A vonalfelületek minden pontjára illeszthető egy egyenes, amit tartalmaz az adott felület. Ezt az egyenest a felület egy alkotójának nevezzük.) Akkor kifejthető egy felület, ha a megfelelő helyen (egy alkotója mentén) elvágva, a felület nyújtás nélkül síkba teríthető. Ilyen felületek például a henger, a kúp, illetve a kifejthető felületek osztályába tartozik a síkba teríthető Möbius-szalag is. A kifejthető felület alkotói mentén a felület normálvektora az alkotó minden pontjában ugyanolyan állású (merőleges a felület érintősíkjára), azaz a kifejthető felületek alkotó irányú görbülete zérus, ezért a Gauss-görbületük is nulla. Szintén az előző tulajdonság következménye, hogy H átlaggörbületük az alkotóra merőleges felületmeszet görbületének fele.

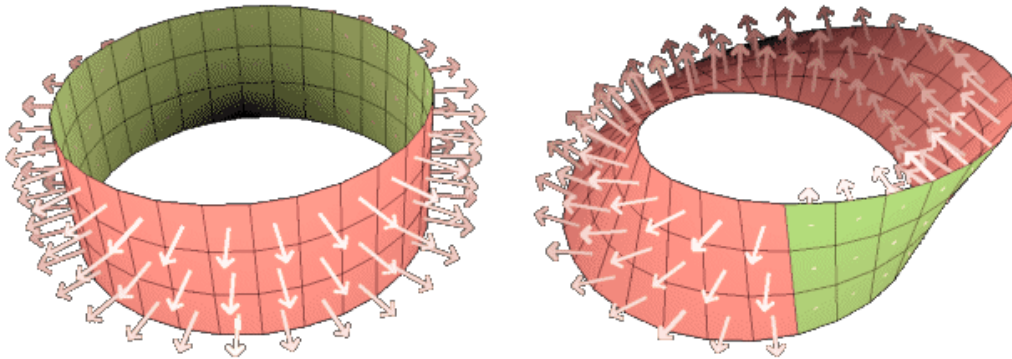


2. ábra Példa kifejthető felületre: a kúp

2.2 Irányítható felületek

A sima felületek minden pontjában értelmezhető egy lokális (két egymásra merőleges érintő irányú, és a rájuk merőleges normál irányú, egységvektorból álló) koordináta-rendszer (a szakirodalomban gyakran használt kifejezéssel: triéder). Ha nem létezik olyan görbe a felületen, ami mentén mozogva a triéder két vektora ellentétes irányba vált, míg a harmadik megtartja

irányát (vagy más szavakkal, a pontról pontra változó koordináta-rendszer elemei folytonos vektormezőt hoznak létre) akkor a felület *irányítható*. A legtöbb, széles körben használt felület (pl.: gömb, henger, tórusz, kúp stb.) irányítható. A legismertebb, nem irányítható felület a Möbius szalag, mivel a felületen (például a középvonalán) végig haladva a triéder két iránya (az egyik érintő irány és a normál irány) megfordul, ellentétes állású lesz.



3. ábra Példa irányítható és nem irányítható felületre [4]

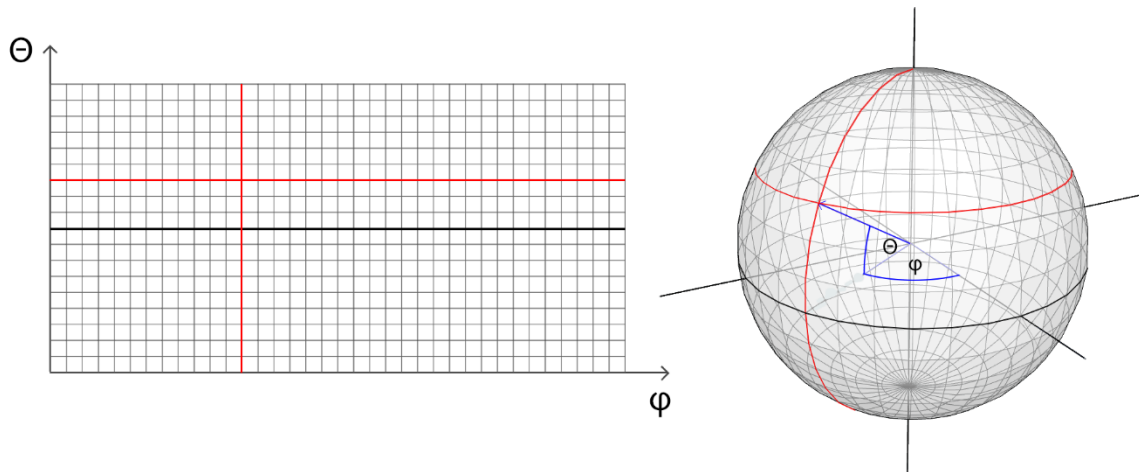
A henger külső (vagy belső) felületén végighaladva a felületre merőleges normálvektor visszatér önmagába, azaz például a kifelé mutató normálvektorok folytonos vektormezőt alkotnak. Ezzel szemben a Möbius-szalagon végighaladva a normálvektor ellentétes állású lesz, a létrejövő vektormező nem folytonos.

2.3 Felületek paraméterezése

Egy térgörbe *paraméterezése* során az értékészlet elemeit egyváltozós függvények határozzák meg, ezek skalár változóját szokás paraméternek nevezni. Ez a változó lehet például a görbe ívhossza, vagy egyszerűbb esetben egy pontjának x-koordinátája, a másik két koordinátát pedig x függvényében írjuk fel. Másképp megfogalmazva a paraméterezés egyértelmű kapcsolatot teremt egy egyenes és a görbe pontjai között.

Felületek paraméterezése hasonlóan történik: ekkor két paraméter felvétele szükséges. Egy, a háromdimenziós térben elhelyezkedő felület paraméterezése során egy síkidom és a felület pontjai között létesítünk egyértelmű kapcsolatot. Felület paraméterezésére klasszikus példa a gömb, például a földgömb és a sík térképek közötti kapcsolat. Ekkor a téglalap pontjai a földrajzi hosszúságnak és szélességnek felelnek meg.

Ismert, hogy ezen két adatról egyértelműen beazonítható a gömb bármely pontja, a két pólus kivételével, ahol a hosszúsági adat nem egyértelmű. Megfordítva pedig igaz, hogy a gömb pontjainak koordinátáit (egy rögzített koordináta-rendszerben) a pontba mutató helyvektor XY és az XZ síkkal bezárt szögeinek (φ , ϑ) értéke határozza meg.



4. ábra Paraméterezés szemléltetése

A sík egy pontjának koordinátái megfeleltethetők a térbeli gömb felületi pontjaiba mutató helyvektor és az XY illetve az XZ sík által bezárt szöggel.

2.4 Csebisev-polinomok

Munkámban a szalag alakját alkalmasan választott függvények lineáris kombinációjaként fogom keresni, az alakot a függvényeket szorzó együtthatókkal fogom jellemezni. Láttuk, hogy a Möbius-szalag esetében a felületre merőleges vektormező nem folytonos, azaz a szalagot a vektormező átfordulásánál elvágva a vektormező nem periodikus. Ha periodikus függvényekkel dolgoznánk, akkor az alakot annak Fourier-sorával lehetne jellemezni, azonban a numerikus analízis tapasztalatit követve, a periodicitás hiánya miatt az alakot Csebisev-polinomok segítségével fogjuk közelíteni.

A Csebisev-polinomok egy rekurzív módon definiálható polinomsorozat tagjai. Első két eleme adott ($T_1 = 1, T_2 = x$), a sorozat további tagjai pedig az előtte lévő két tag ismeretében az alábbi összefüggés alapján adható meg: $T_n = 2 \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ [5]. Az elméleti megfontolások mellett fontos szempont, hogy a Matlab programban van olyan eszköztár, a Chebfun toolbox [6], mely automatikusan előállítja a Csebisev-polinomokat és azok deriváltjait.

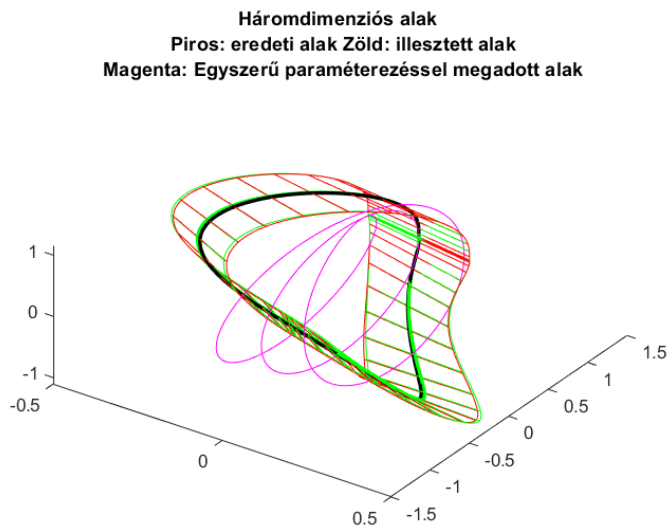
2.5 Kvaterniók

A kvaterniók [7] a komplex számok 4 dimenzióra való kiterjesztése. $q=a+bi+cj+dk$ alakú formális kifejezésekből, az úgynevezett kvaterniókból áll, ahol a, b, c, d valós számok, i, j, k pedig a Q kvaterniócsoport elemei.

A kvaterniók segítségével könnyen leírhatók a forgatások 3 és 4 dimenzióban.

3. A Möbius-szalag lehetséges modelljei

A Möbius-szalagnak létezik nem síkba teríthető változata is, a *Mellékletben* szereplő képletek [8] egy ilyen, síkba nem teríthető felületparaméterezéséhez tartoznak. Ez az alak lényegében egy kör keresztmetszetű henger alkotóinak az elforgatásával keletkezik. Középvonala (ami mentén az alkotók elforgatása is történik) egy kör, a kifejthető Möbius-szalag esetében viszont a középvonal nem síkgörbe. Ebből is látható, hogy ez a paraméterezés bár Möbius-szalagot ad eredményül, az általunk is keresett, papírból is megalkotható szalagtól nagyon távol áll, így munkánkban sem tud kiindulási alap lenni.



5. ábra

Az egyszerű paraméterezéssel megadható Möbius-szalag (magenta) jelentősen eltér a kifejthető (piros és zöld) és a papírból elkészíthető (jobb oldali kép) Möbius-szalag alakjától

A síkba teríthető alak esetén egyszerű kísérletekkel meggyőződhetünk róla, hogy a szalag akár kis mértékű külső teher hatására is jelentős mértékben deformálódik. Ezért céлом a terheletlen Möbius-szalag alakjának előállítás és közelítő paraméterezése. Mivel a nem irányítható felület létrehozásához ellentétes irányultsággal kell a kezdeti téglalap két végét összeragasztani, könnyen látható, hogy az alak létrehozásához a téglalapot deformálni, elsősorban hajlítani szükséges. Azaz a felület kezdeti görbülettel rendelkezik. Ez hasonlít a mérnöki gyakorlatban használt feszített tartókhöz olyan értelemben, hogy a szerkezet ugyan terheletlen, de mégis belső, ún. *sajátfeszültségekkel* rendelkezik. A Möbius-szalag esetében ezen, sajátfeszültségek alatt kialakuló forma pontos leírása nehéz feladat.

A szakirodalomban a Möbius-szalag alakját kétfajta modellel írják le. Mindkét esetben a nehézséget a szalag két végének ellentétes összekapcsolását leíró peremfeltétel megfogalmazása jelenti. Az egyik megközelítés a rúdelmélet nyomdokain a Möbius-szalagot a középvonalával helyettesíti, a másik alapvetően felületszerkezetként tekint rá. A

következőkben a kiindulásnak használt téglalap szélességét w , hosszúságát l jelöli, az anyag konstansnak tételezett vastagsága pedig h .

3.1 Rúdelméletre épülő megközelítés

A Möbius-szalag alakját modellezhetjük a Cosserat-féle rúdmodell [12] alkalmazva. A nyírási és nyúlási deformációk elhanyagolása esetén a modell a Bernoulli-Euler-féle rúdmodellhez hasonlóan, merev lapok sorozatából álló rúdként tekint a szalagra. A modellben a szalagot a középvonalával és a ráillesztett triéderrel jellemezzük. A triédert egységvektorokkal írjuk le, ahol \mathbf{d}_1 : keresztmetszet ún. erős iránya, \mathbf{d}_2 : keresztmetszet gyenge iránya, \mathbf{d}_3 : érintőirány. Olyan alakot keresünk, amely minimalizálja a rúd belső energiáját, amely teljes egészében abból származik, hogy a rudat meghajlítjuk és megcsavarjuk. A deformált szalagon a kezdő és a végpontban a keresztmetszet síkjában lévő két vektor, \mathbf{d}_1 és \mathbf{d}_2 ellentétes irányú, ugyanakkor a \mathbf{d}_3 érintővektor iránya azonos. A rúd modellben csak közelítőleg (aszimptotikusan) biztosítható, hogy az eredmény egy kifejthető felület legyen [12]. Ez azt jelenti, hogy minél szélesebb szalagot veszünk, a megoldás hibája egyre növekszik.

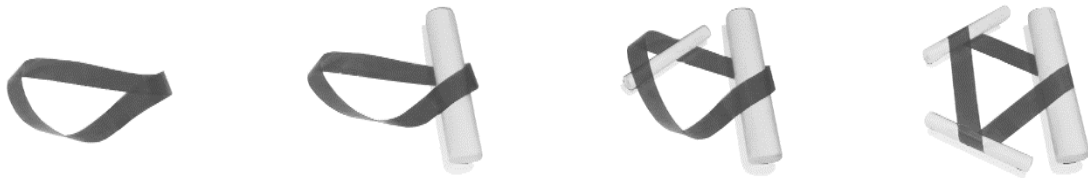
A rúdelméletet használó megoldás hasonlít egy szilárdságtani feladat megoldásához. Vegyünk például egy konzolt, melyen megoszló terhet működtetünk. Ismerjük a terheletlen alakot, ebben az esetben egy vízszintes rúd. Tudjuk, hogy milyen összefüggés írja le a terhelt rúd belső energiáját. Illetve meghatározhatunk még peremfeltételeket: a befogási pontban a rúd elmozdulása nulla és ebben a pontban az érintője vízszintes, tehát a rúd alakját leíró függvény első deriváltja nulla, a konzol végén pedig a függvény második deriváltja nulla, mivel a rúd végében nincsen nyomaték. Ezután a keresett rúdalak a peremfeltételeket kielégítő alakok közül az az alak, amely a belső energiát minimalizálja.

A Möbius-szalaghoz használt rúdmodell esetében szintén ismert a kiindulási alak, ami egy egyenes. A belső energiát leíró függvény a hajlításhoz és csavaráshoz tartozó energiasűrűségből írható fel, és meghatározhatóak peremfeltételek is: például a kísérő triéder forduljon el 180° -kal a \mathbf{d}_3 érintővektor körül, illetve a rúd kezdő és végpontja essen egybe. Ebben az esetben a feladat megoldásának nehézségét a belső energiát leíró összefüggés bonyolultsága okozza, hiszen szemben a konzollal, ahol kis alakváltozásokat feltételezünk, a Möbius szalag esetében a deformációk jelentősek. Ez indokolja a Cosserat-féle megközelítés használatát.

3.2 Felületelméletre épülő megközelítés

Eszerint a modell szerint a Möbius-szalagra felületként tekintünk, és a modell a kifejthető felületek osztályában keresi a rugalmas energia minimumát.

A modell alapját az észet származású Michael Alexander Sadowsky alkotta meg a 20. század első felében. Egy 1930-ban megjelent tanulmányában bebizonyítja, hogy egy téglalapot nyújtás nélkül össze lehet hajtani Möbius-szalaggá, ezzel bizonyítva azt, is, hogy a Möbius-szalag a kifejthető felületek osztályába tartozik [9]. Sadowsky konstrukciója az 5. ábrán látható, lényege, hogy a szalagot két darab R és egy darab $2R$ sugarú henger segítségével a hengerek illeszkedő és sík felületdarabokból állítja elő. Ezen alak előállításához a hengereket enyhén kifelé kell húzni, ami kísérleti úton is demonstrálja, hogy ez az alak nem a rugalmas energia minimumához tartozik, a feszítés elengedésével az alak megváltozik, a sík darabok enyhe görbületet vesznek fel.



6. ábra Sadowsky kísérlete lépésről lépésre

A képsorozatban látható, hogy a Möbius-szalagot fel lehet fűzni három hengerre úgy, hogy a hengerek közötti szakasz sík legyen. Ezzel bizonyítható, hogy létezik kifejthető Möbius-szalag.

Sadowsky munkája rámutatott, hogy a Möbius szalag izometrikus transzformációval előáll a kezdeti téglalapból, azaz nem szükséges nyújtás a térbeli alak előállításához. Rugalmas anyagot és terheletlen felületet feltételezve, a Möbius-szalag olyan alakot vesz fel, melynél a szalag belső energiája minimális lesz. Izometria estén az F felületű szalag P belső energiája a H átlaggörbület négyzetével lesz arányos:

$$P = \int_F H^2 dF = \min! \quad (1)$$

Munkámban a felületelmélet alapján módosított rúdelméletet veszem alapul [13]. Ebben a Cosserat-féle rúdelméletet olyan módon módosítják a szerzők, hogy az összhangban legyen a felületelmélet átlaggörbületet minimalizáló megközelítésével. Szemben a korábbi rúdelméleti megoldásokkal, itt a felület kifejthető marad a modellben. A \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 vektormezők (ún. direktorok) továbbra is a középvonalhoz rendelt triédert jelentik olyan módon, hogy a \mathbf{d}_3 vektormező adja a középvonal érintő irányát. A középvonalat az s ívhossza mentén paraméterezzük, a $(\cdot)'$ jelölés az ívhossz szerinti deriválást jelenti. Legyen a középvonal teljes

hossza 2π ! A direktorok és az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortogonális egységvektorokkal jellemzett globális koordináta-rendszer kapcsolatát az $\mathbf{R}(s)$ forgatómátrix teremti meg:

$$\mathbf{d}_i(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{e}_i. \quad (2)$$

A forgatómátrixot a háromdimenziós forgatást egyértelműen jellemző kvaterniók segítségével jellemezzük, azaz $\mathbf{R}(\mathbf{q}(s))$ alakban adjuk meg, ahol $\mathbf{q}(s) = [q_0(s), q_1(s), q_2(s), q_3(s)]^T$. A felület alkotójának irányvektora legyen $\mathbf{b}(s)$, amit a következő kifejezéssel adunk meg,

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{d}_1(s) + \eta(s)\mathbf{d}_3(s), \quad (3)$$

ahol $\eta(s)$ függvény az alkotó és az érintőirány közötti szög cotangense. A 3.1. alfejezetben említett rúdmodellnek az $\eta(s) = 0$ választás felel meg. A rúd belső nyomatékát a dikertorok körül az $\mathbf{m}(s)$ vektor tartalmazza, a görbületeket pedig a $\boldsymbol{\kappa}(s)$ vektor. Variációs számítási lépések segítségével az (1) jelű összefüggésből a következő, elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer vezethető le.

$$\mathbf{m}' + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{m}) \times \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$\mathbf{r}' - \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}' - \mathbf{A}(\mathbf{q})\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{m}) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$-\frac{d}{ds} \left[\frac{Dw^2}{2} \kappa_1^2 [1 + \eta^2]^2 \dot{g}(w\eta') \right] + 2Dw\kappa_1^2 \eta [1 + \eta^2] \dot{g}(w\eta') - m_3 \kappa_1 = 0, \quad (7)$$

ahol $\mathbf{r}(s) = [r_1(s), r_2(s), r_3(s)]^T$ a középvonal pontjait megadó helyvektor, D az E rugalmassági modulusú és ν Poisson tényezőjű szalag hajlítómerevsége:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}. \quad (8)$$

A fenti egyenletekben megjelenő $g(x)$ és $\dot{g}(x)$ függvények az (1) egyenletben felírt Sadowsky funkcionál alkalmas átírásakor jelennek meg, konkrétan:

$$g(x) = \frac{1}{x} \log \left(\frac{1+x/2}{1-x/2} \right) \quad \text{és} \quad \dot{g}(x) = \frac{d}{dx} g(x) \quad (9)$$

Vegyük észre, hogy a (4)-(7) kifejezések összesen 11 egyenletet jelentenek. Követve az irodalmat, kihasználjuk a feladatban rejlő nyilvánvaló szimmetriákat és az egyenletrendszert a szalag felére oldjuk meg. Ekkor az egyértelmű megoldáshoz szükséges 11 peremfeltétel a következő:

$$\mathbf{r}(0) = [r_1(\pi), 1, r_3(\pi)], \quad (10)$$

$$\mathbf{q}(0) = [1, 0, 0, 0], \quad (11)$$

$$m_1(\pi) = 0, \quad (12)$$

$$\eta'(0) = 0, \quad (13)$$

$$\eta(\pi) = 0, \quad (14)$$

$$q_1(\pi)q_2(\pi) + q_0(\pi)q_3(\pi) = 0. \quad (15)$$

Itt az utolsó egyenlet fejezi ki, hogy a fél-szalagon a triéder 90 fokot elfordul.

4. Numerikus megoldás

A szalagot a középvonal ívhossza mentén paraméterezem. A numerikus megoldóban $s \in [0, \pi]$. Legyen M rögzített, pozitív egész szám! A Möbius-szalag középvonalának pontjait leíró \mathbf{r} helyvektor komponenseit az alábbi formában keresem:

$$r_1(s) = \sum_{i=1}^M c_{1,i} \cdot T_i(s) \quad (16)$$

$$r_2(s) = \sum_{i=1}^M c_{2,i} \cdot T_i(s) \quad (17)$$

$$r_3(s) = \sum_{i=1}^M c_{3,i} \cdot T_i(s) \quad (18)$$

A szalag alakjának leírásához lényeges még tudnunk a középvonal és az alkotó egyenesek által bezárt szöget, ahogy azt a (3) egyenletben megadtuk. Mivel ez a szög a középvonal mentén pontról pontra változik, szintén függvényként írható le az alábbi alakban:

$$\eta(s) = \sum_{i=1}^M c_{\eta,i} \cdot T_i(s) \quad (19)$$

ahol T_i i -ed fokú Csebisev-polinom, $c_{j,i}$ pedig az i -ed fokú Csebisev-polinomhoz tartozó együttható, $j=1,2,3, \eta$.

4.1 Rövid ismertető a használt programokról

A dolgozatomban bemutatott számítások MATLAB programrendszerben készültek.

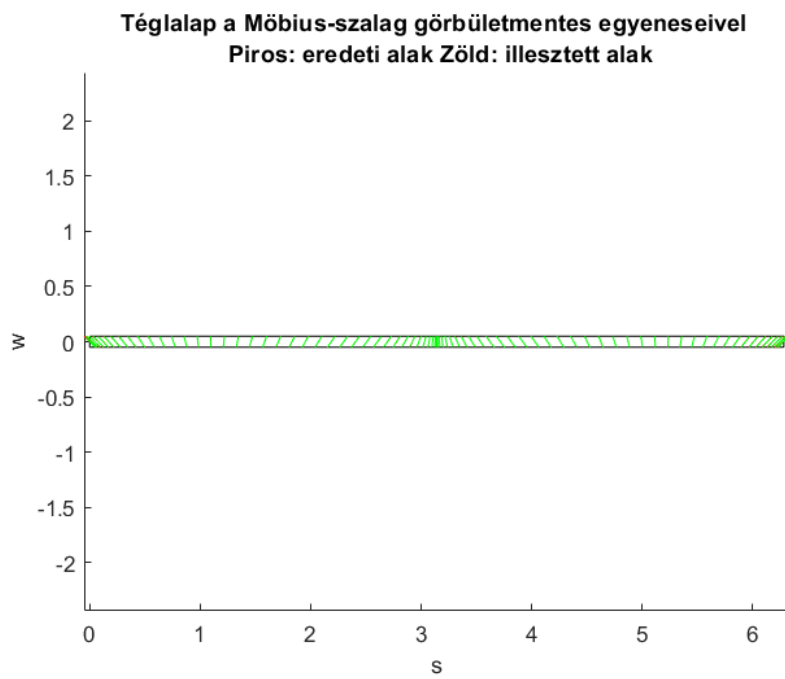
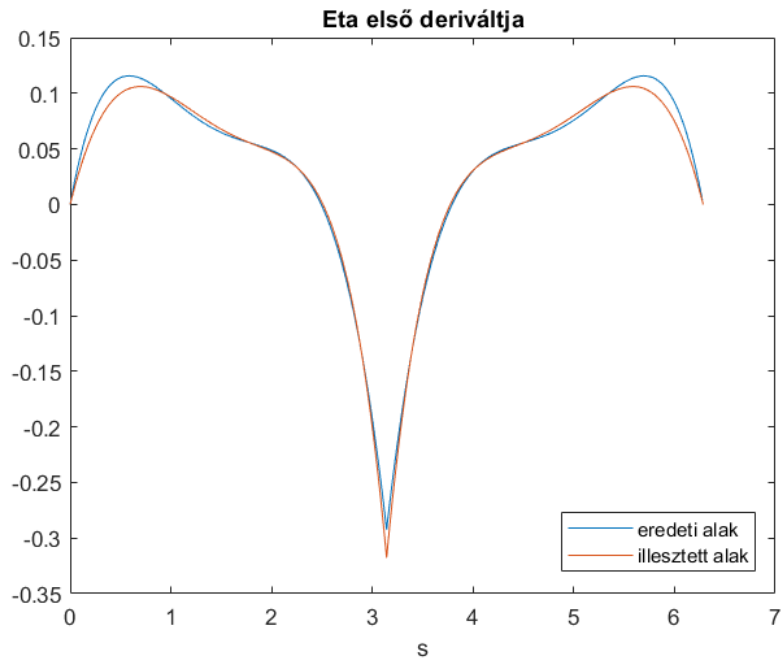
Konzulensem által készített mobshape61.m program numerikusan, a $c_{j,i}$ együtthatók terében, optimalizáló eljárás segítségével oldja meg a fentebb említett differenciálegyenlet-rendszert. Az ívhosszat egyenletesen, $N=200$ ponttal diszkrétizálva a legkisebb négyzetek módszerével minimalizálja a pontokban az egyenletekben elkövetett hibát. Végeredménye a C_m mátrix, melynek oszlopai a nyomatékokat (m_1, m_2, m_3), a középvonal helyvektorait (r_1, r_2, r_3), a kvaterniókat (q_0, q_1, q_2, q_3) és a görbületmentes egyenes és a középvonal által bezárt η szöget leíró függvények Csebisev-polinomjainak együtthatóit tartalmazza.

A param.m programban mobshape61.m program C_m mátrixából 8 vektort emelek ki, a továbbiakban ezekkel dolgozok. A nyolcból három vektor a Möbius-szalag középvonalának pontjaihoz mutató origóból induló \mathbf{r} vektor komponenseit, négy a kvaterniókat, egy pedig a

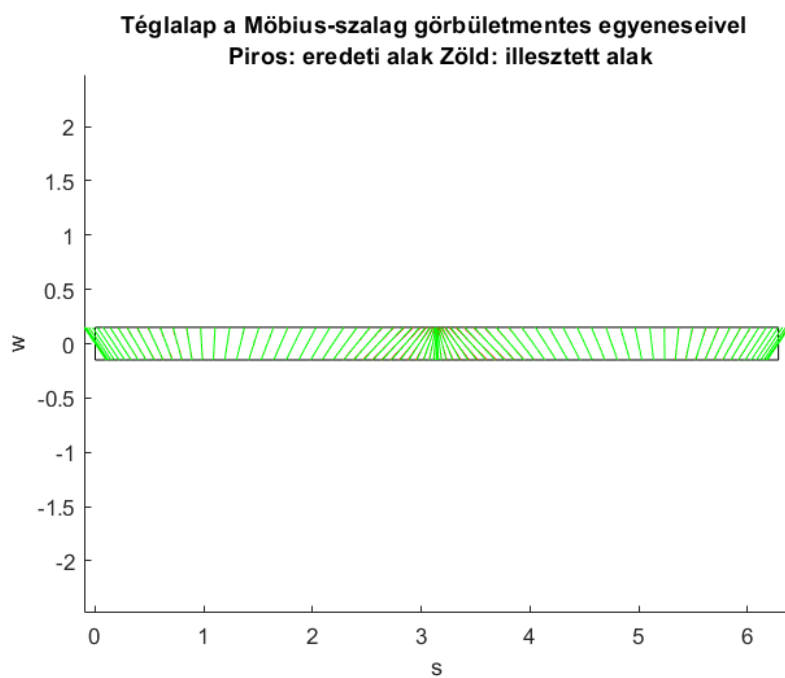
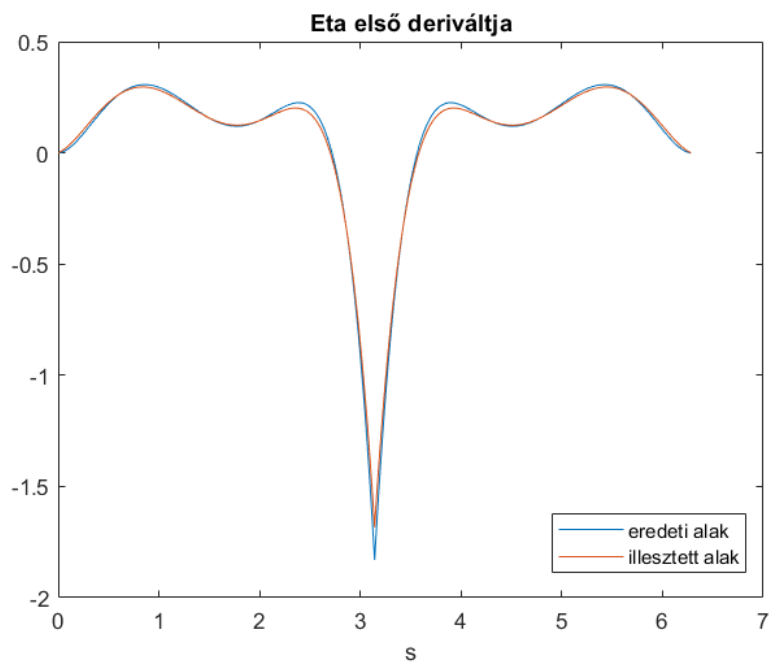
középvonal és a meghajlított szalagon lévő görbületmentes egyenesek által bezárt szöget leíró Csebisev-polinomokból képzett függvény együtthatóit tartalmazó vektor.

A `param.m` program a `mobshape61.m` programot 0,1 és 0,7 között 121 különböző szalagszélességgel lefuttatva az egyes eredmények oszlopvektorait egy mátrixba egymás mellé helyezi. Fontos kiemelni, hogy a `mobshape61.m` az ismertetett differenciálegyenlet-rendszer ívhossz mentén vett pontbeli hibáit minimalizálja, azonban nincs garancia arra, hogy a stabil egyensúlyi megoldást állítja elő. Numerikus tapasztalataink szerint $w > 0.15$ felett bonyolult, vélhetően instabil megoldásokat ad eredményül. Ez összhangban van azzal a ténnyel, hogy a Sadowsky funkcionálról nem bizonyított, hogy egyetlen minimumhellyel rendelkezik. A `param.m` program ezért $w=0.1$ -nél elindulva, a w -t kis lépésekkel növelve mindig az előző lépésben kapott rúdalak körül keres megoldást. Ilyen módon kizárható a nem kívánt instabil megoldások megjelenése. A kód tulajdonképpen a legegyszerűbb, precíz prediktor lépés nélkül megvalósított útkövetést hajtja végre. A programban képzett mátrix sorai a vizsgált vektor $c_{j,i}$ együtthatóit fogják tartalmazni. A mátrix sorait vizsgálva látható, hogy $c_{j,i}$ a legtöbb esetben nem konstans, hanem a szalag szélességének függvényében más-más értéket vesz fel. Tehát az \mathbf{r} vektor komponenseit és az η -t leíró összefüggés i -ed fokú Csebisev-polinomjához tartozó paramétert leíró, a szalag szélességétől függő $c_{j,i}(w)$ függvényeket keresem. A program mátrix soraira a `polyfit` parancs segítségével tetszőleges, általam meghatározott fokszámú polinom függvényeket illeszt. Végül pedig létrehoz egy-egy szalagszélességhez tartozó értékeiből egy-egy mátrixot, amit egy mátrix-struktúrába rendez.

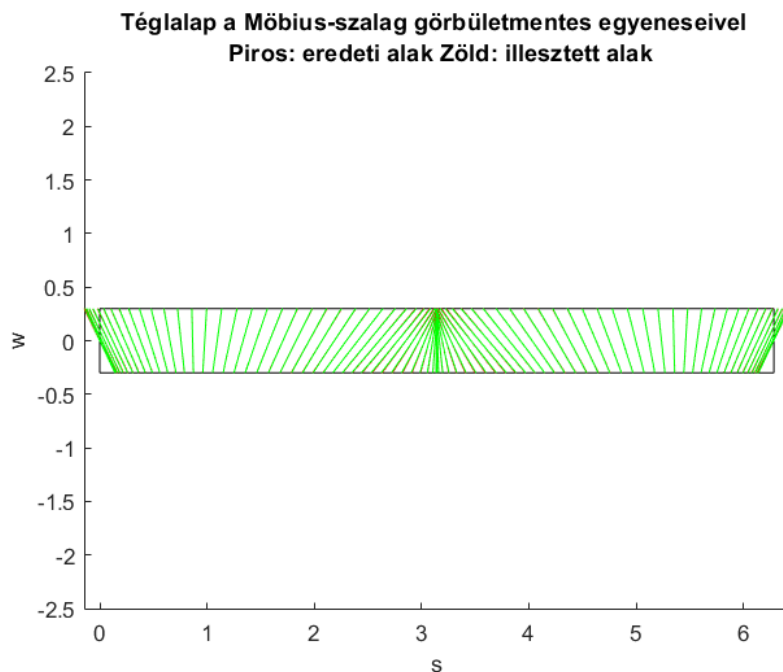
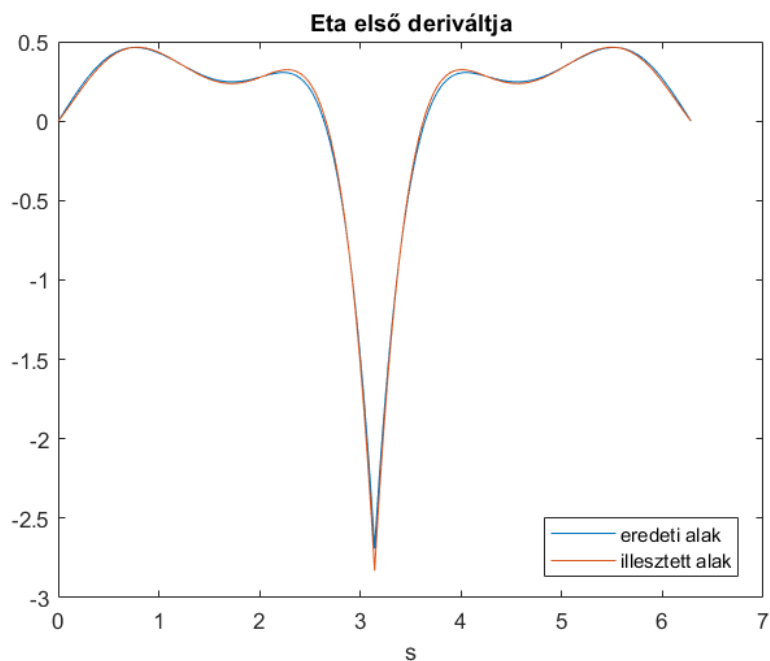
A `ShapePlot.m` rárajzolja az adott téglalapra a görbületmentes egyeneseket bizonyos távolságonként az eredeti és az illesztett esetben is. Kirajzolja az ehhez a szélességhez tartozó η függvény első deriváltját. Ez a két ábra megegyezik az eddigi kutatások eredményeivel, tehát a paraméterezésünkben feltételezhetően nincs nagy eltérés a differenciálegyenletekből származó alakokkal összevetve. Itt látszik a szalag kirajzolásának nehézsége, ugyanis a szalag szélességének növelésével egy pontban lokalizálódik a görbület, az η' függvény egyre csúcsosabb lesz, romlik a differenciálhatósága. A 7., 8. és 9. ábrákon a $w=0.1, 0.3$ és 0.6 szélességű szalagokhoz mutatom be az alkotók elhelyezkedését és az η' függvény lefutását.



7. ábra $w=0,1$



8. ábra $w=0,3$



9. ábra $w=0,6$

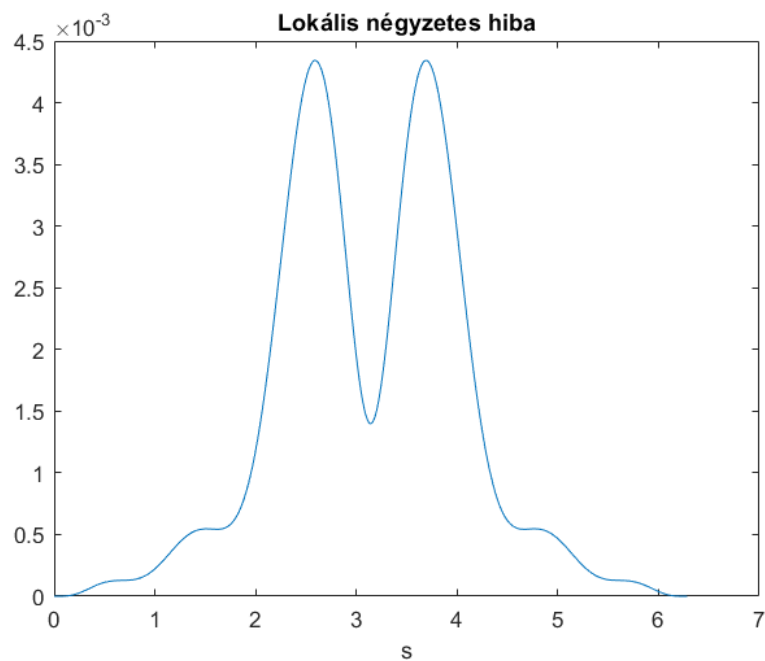
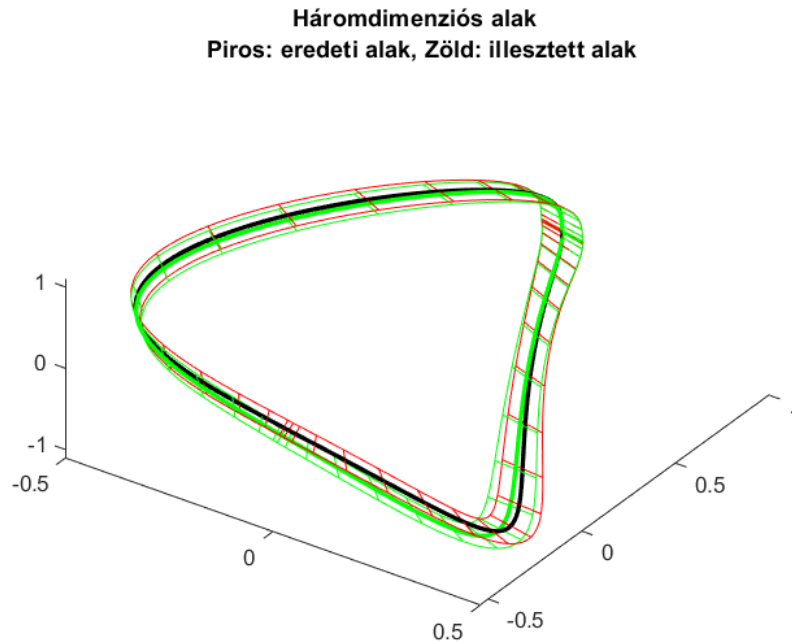
Ugyanez a program kirajzolja az eredeti és a paraméterezett szalag háromdimenziós alakját.

A differenciálegyenletekből kapott illetve az illesztett alak közötti eltérés mértékének megállapítására hibaszámítást végeztem el. Az eredeti és az illesztett alakok középvonalainak eltérését vizsgáltam az alábbi módon:

$$h(s) = (r_{1,i}(s) - \tilde{r}_{1,i}(s))^2 + (r_{2,i}(s) - \tilde{r}_{2,i}(s))^2 + (r_{3,i}(s) - \tilde{r}_{3,i}(s))^2, \quad (20)$$

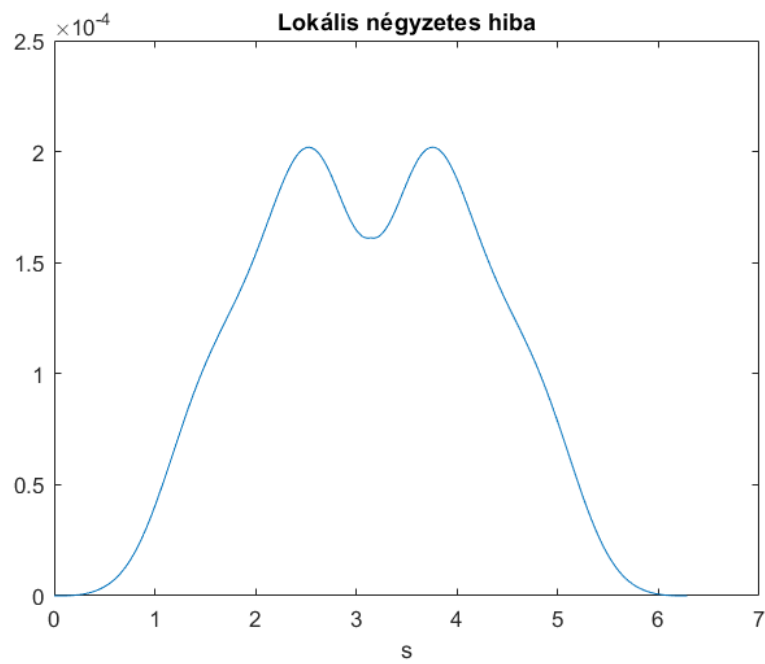
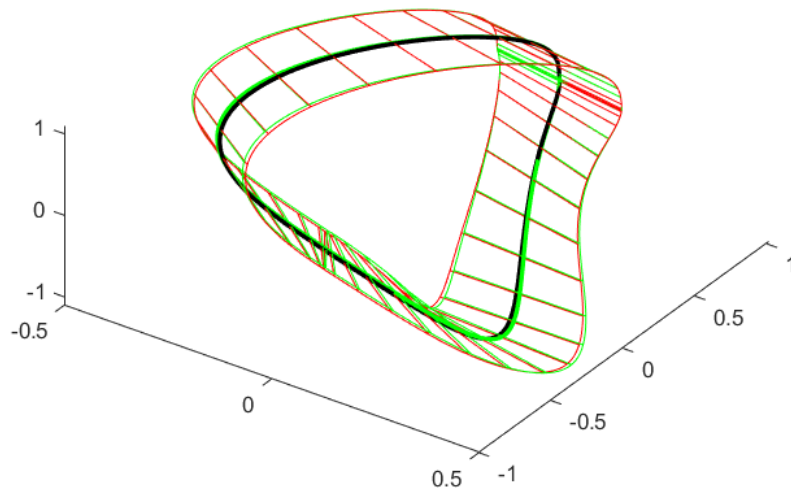
ahol a hullám nélküli komponensek a pontos, a hullámos komponensek az illesztett alakhoz tartoznak.

A számítás alapja a legkisebb négyzetek módszere a középvonal pontjaiban külön vizsgálva, eredménye pedig az adott szalagszélességhez tartozó lokális négyzetes hiba. A hiba mértéke minden esetben 10^{-3} - 10^{-4} nagyságrendjébe esik, tehát az illesztett alakok csak nagyon kis mértékben térnek el az eredeti, differenciálegyenletekből számolt alaktól. Az eredményeket a ShapePlot.m program vizualizálja.



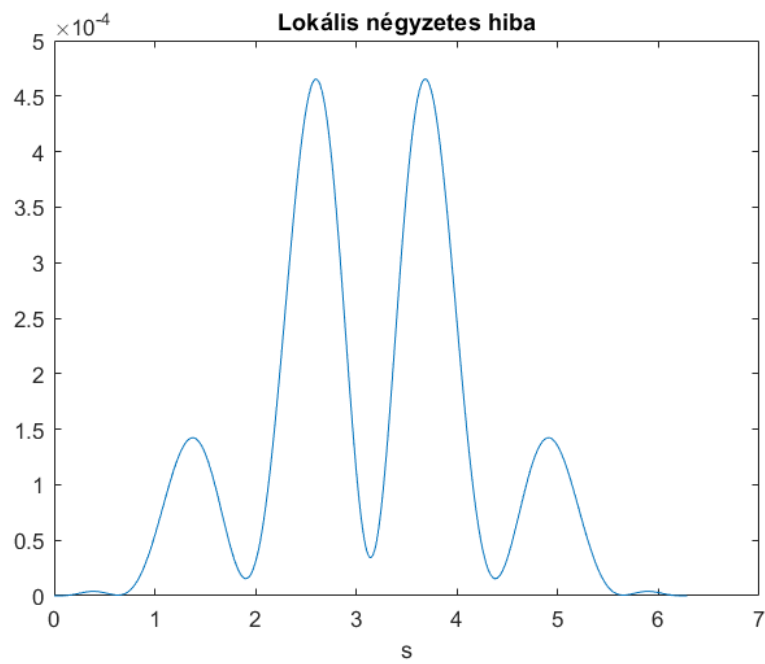
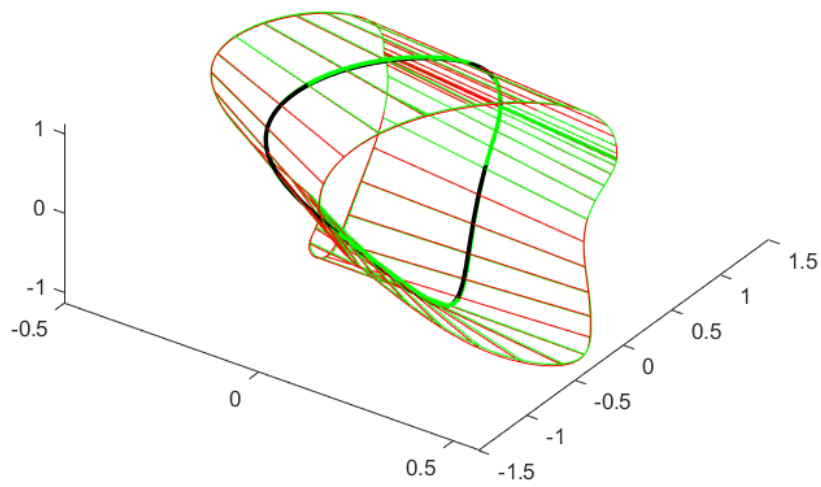
10. ábra $w=0,1$ szélességű szalag axonometrikus képe és középvonalának pontonként hibája

Háromdimenziós alak
Piros: eredeti alak, Zöld: illesztett alak



11. ábra $w=0,3$ szélességű szalag axonometrikus képe és középvonalának pontonként hibája

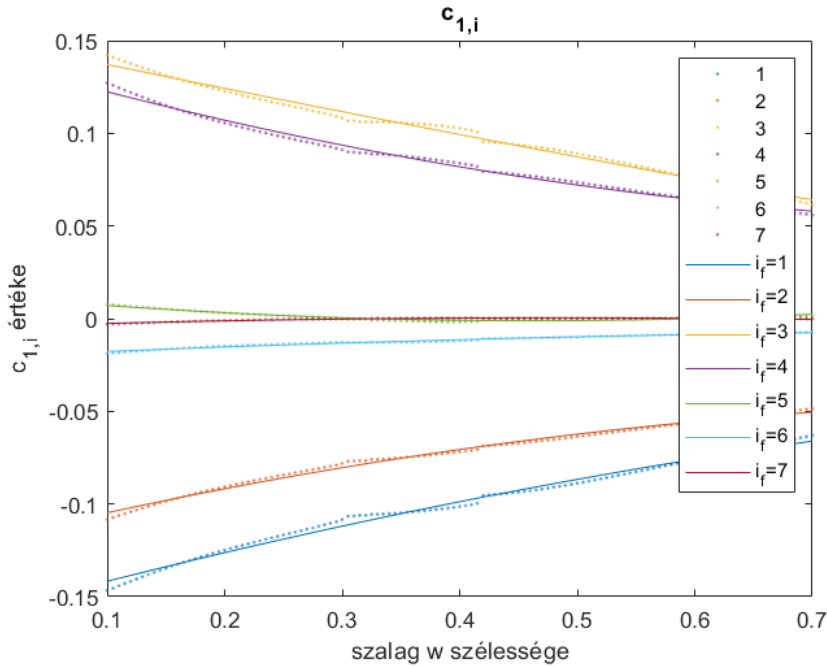
Háromdimenziós alak
Piros: eredeti alak, Zöld: illesztett alak



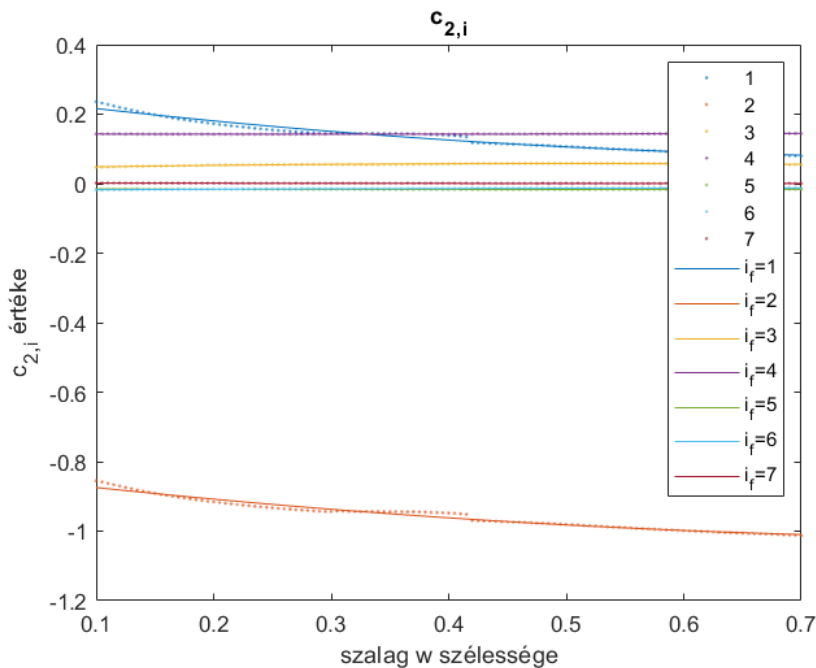
12. ábra $w=0,6$ szélességű szalag axonometrikus képe és középvonalának pontonként hibája

4.2 Az r_j vektorokat leíró Csebisev-polinomok együtthatóit leíró $c_{j,i}(w)$ függvények meghatározása

Az r_1 és r_2 helyvektor komponenseket illetve az η -t az illesztendő pontsorok jellegéből adódóan másodfokú függvénnyel közelítem, az r_3 helyvektor komponenshez tartozó együtthatók értékeire pedig lineáris függvényt illesztettem. Az illesztett függvények a *Mellékletekben* találhatóak meg (2.-4. számú mellékletek).



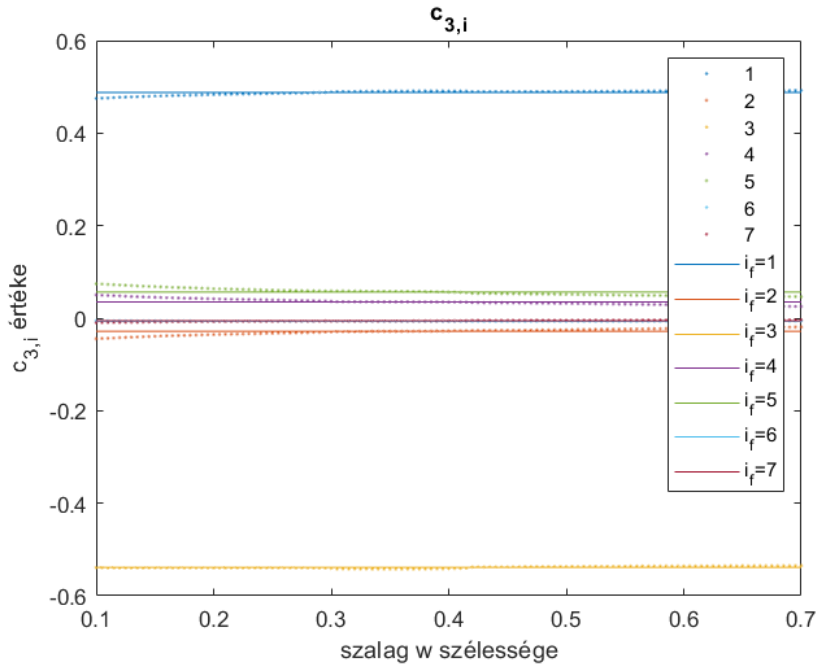
11. ábra $c_{1,i}$ együtthatók értékei a szalagszélesség függvényében



12. ábra $c_{2,i}$ együtthatók értékei a szalagszélesség függvényében

A függvényeket vizsgálva megállapítható, hogy az r_3 vektor komponens csak kis mértékben függ a w vastagságtól. Az őt leíró függvény együtthatóit tekinthetjük konstansnak, értékét pedig

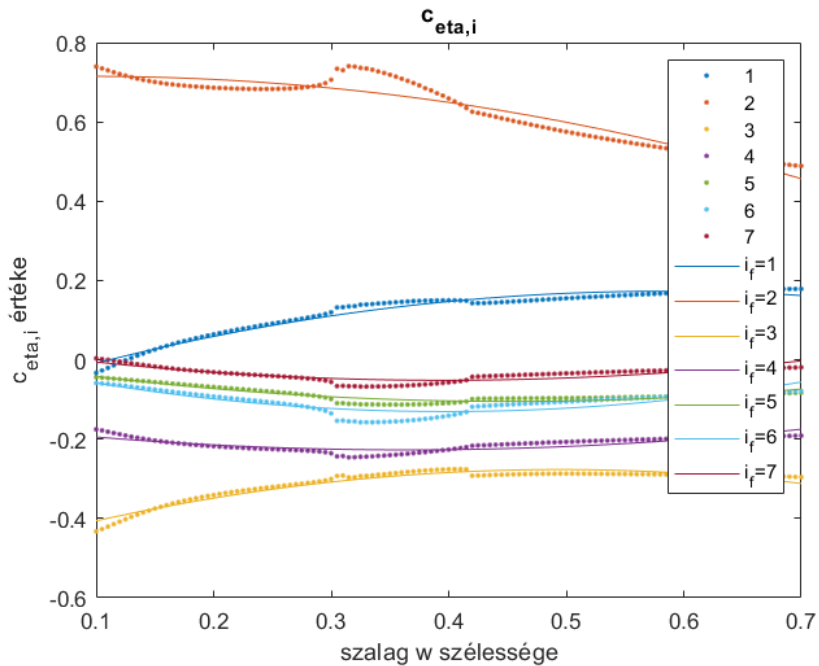
azon pontok átlagának veszem, amelyekre a függvényt illeszttem, $c_{3,i}$ együtthatók értékei a *Melléletekben* találhatóak (5. számú melléklet).



13. ábra $c_{3,i}$ együtthatók értékei a szalagszélesség függvényében (az illesztett értékek konstansok)

4.3 A görbületmentes egyenesek és a középvonal által bezárt η szöget leíró Csebisev-polinomok együtthatóit leíró $c_{\eta,i}(w)$ függvény meghatározása

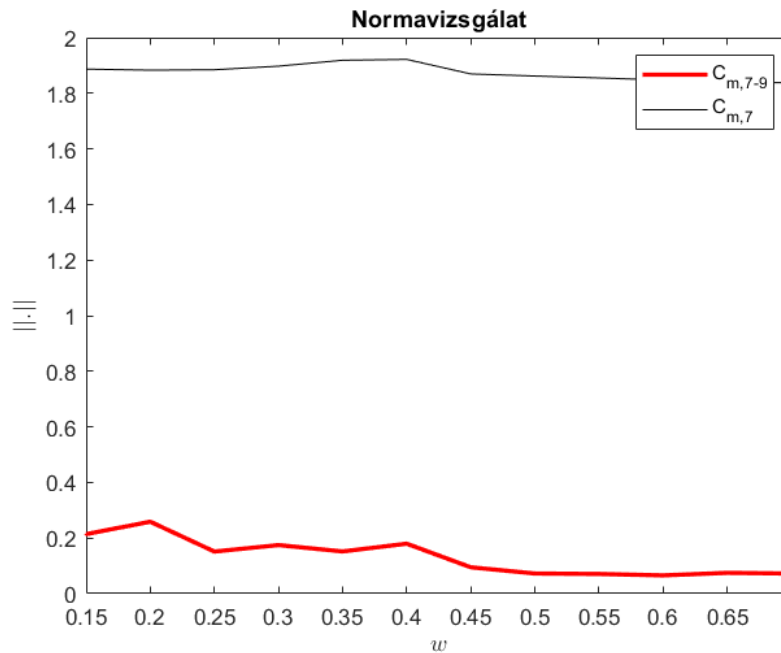
Az η együtthatóit az illesztendő pontsorok jellegéből adódóan szintén másodfokú függvénnyel közelítem. Az illesztett függvények a *Melléletekben* találhatóak meg (6. számú melléklet).



14. ábra $c_{\eta,i}$ együtthatók értékei a szalagszélesség függvényében

4.4. Normavizsgálat

Az ábrákon látható, hogy az r_1, r_2, r_3 esetében Az együtthatók értékei egyre jobban közelítenek a nullához. Ez nem mondható el az η együtthatóiról, a 6. illetve 7. együtthatók esetében sem elhanyagolható a nullától való eltérés, normavizsgálattal megállapítható az eltérés mértéke a Frobenius-normát számolva [14]. A különbségnorma elegendően kicsinek tekinthető, tehát 7 Csebisev-polinommal is elegendően pontosan illeszthető az alak (ezzel egybevágnak a hibaszámítások 10^{-3} - 10^{-4} nagyságrendű eredményei), a pontosság javítása érdekében azonban a jövőbeli kutatásoknál érdemes lehet több Csebisev-polinommal dolgozni.



15. ábra

C_m az $M=7$ Csebisev-polinom együtthatóit tartalmazó mátrixok normái a szalagszélesség függvényében. $C_{m,7-9}$ pedig a $M=7$ és az $M=9$ Csebisev-polinomok együtthatóiból képzett mátrixok különbségének a normái.

5. Összefoglalás

Kutatásom célja egy közelítő képlet megalkotása volt, amely kapcsolatot ad a téglalap és a belőle készített, Möbius-szalag terheletlen alakjának pontjai között. Az elkészült programok megoldották a szakirodalomban szereplő differenciálegyenlet-rendszert különböző szalagszélességekre, majd az eredményekre függvényt illesztettek. A függvények segítségével készült az illesztett alakról háromdimenziós ábra. Eredményeink helyességének ellenőrzésére hibaszámítást is végeztem, a hibák mértéke elegendően kicsi ahhoz, hogy az eredményeket elfogadhatónak tekinthessük. Ily módon a Möbius-szalag középvonalának illetve a középvonala és a szalagon elhelyezkedő görbületmentes egyenesei által bezárt szög meghatározása egyszerűbbé vált.

Függvényoptimalizálás esetén a függvény paraméterei egy n -dimenziós térben (n a változók száma) alkotnak egy felületet. Ezen a felületen egy pontból elindulva, mindig a legmeredekebb irányban lefele haladva kapható meg a paraméterek egy optimális kombinációja. Azonban előfordulhat, hogy az optimalizálás során nem a globális minimumot találjuk meg, a lokális minimum pedig egy instabil alakhoz tartozó paraméterkombinációt ad eredményül. Ha a mobshape61.m-et közvetlenül hívjuk meg egy nagyobb szalagszélességgel, fenn áll a lehetőség, hogy egy instabil egyensúlyi helyzetet talál, amit elméletileg fel tud venni, gyakorlatilag azonban ilyen alak nem tud megmaradni (ahogy például nem lehet egy ceruzát a hegyén megállítani). Ennek kiküszöbölésére a param.m először egy kisebb szalagszélességgel hívja meg a mobshape61.m programot, és a kapott eredmény közelében keresi a következő, szélesebb szalag egyensúlyi alakjához tartozó paramétereket. Bár még így is fennáll a lehetősége annak, hogy nem a globális minimumhoz tartozó egyensúlyi alakot találjuk meg, eredményeink egybevágóak az eddigi kutatások eredményeivel.

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e a Möbius-szalagnak másik egyensúlyi alakja. Ha létezik több, akkor mik ezek az alakok, illetve, hogy stabilak vagy instabilak-e. Jövőbeli kutatás témája lehet a szalag (stabil és instabil) egyensúlyi helyzeteinek feltérképezése.

Irodalomjegyzék

- [1] <http://www.universearchitecture.com/projects/landscape-house>– letöltés: 2019.10.12. 11.10
- [2] V.B. Gerritsen: The protein with a topological twist (2002) - https://web.expasy.org/spotlight/back_issues/020/
- [3] Lőrincz Pál –Petrich Géza: Ábrázoló geometria. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976, 195.o.
- [4] <https://giphy.com/gifs/strip-eJDvIOGI95ceA>
- [5] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Csebisev-polinomok>
- [6] <https://www.chebfun.org/>
- [7] https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2014/kovacs_adel.pdf
- [8] <https://hu.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius-szalag>
- [9] D. F. Hinz, E. Fried: Translation of Michael Sadowsky's Paper „An Elementary Proof for the Existence of a Developable Möbius Band and the Attribution of Geometric Problem to a Variational Problem. Journal of Elasticity 119 (1) (2015) 3–6
- [10] E. L. Starostin, G. H. M. van der Heijden.: The shape of a Möbius strip. Nature Materials.6 (8), (2007) 563–567
- [11] S.Bartels, P.Hornung: Bending Paper and the Möbius Strip. Journal of Elasticity 119:113(2015)
- [12] A.Moore, T. J. Healey: The Shape of a Mobius Strip via Elastic Rod Theory Revisited. Journal of Elasticity (2014) arXiv:1407.0571v1
- [13] A.Moore, T. J. Healey: Computation of Unconstrained Elastic Equilibria of Complete Möbius Bands and their Stability (2016)
- [14] <https://hu.wikipedia.org/wiki/Frobenius-norma>

Mellékletek

1. számú melléklet

Nem kifejtethető Möbius-szalag paraméteres egyenlete derékszögű koordinátarendszerben:

$$x(u, v) = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot v \cdot \cos \frac{1}{2}u\right) \cdot \cos u$$

$$y(u, v) = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot v \cdot \cos \frac{1}{2}u\right) \cdot \sin u$$

$$z(u, v) = \frac{1}{2} \cdot v \cdot \sin \frac{1}{2}u$$

ahol $0 \leq u < 2\pi$ és $-1 \leq v \leq 1$. Ez egy 1 szélességű, origó középpontú szalag, aminek egység sugarú alapköre az xy síkban fekszik. [8]

2. számú melléklet

Az r_1 vektor komponensét leíró Csebisev-polinomok együtthatóit leíró $c_{1,i}(w)$ közelítő függvények, melyek együtthatóit a Matlab program polyfit parancsával határoztam meg.

$$c_{1,1}(w) = -0,057 \cdot w^2 + 0,1717 \cdot w - 0,1583$$

$$c_{1,2}(w) = -0,078 \cdot w^2 + 0,1528 \cdot w - 0,1192$$

$$c_{1,3}(w) = 0,0128 \cdot w^2 - 0,1328 \cdot w + 0,1503$$

$$c_{1,4}(w) = 0,0919 \cdot w^2 - 0,1809 \cdot w + 0,1396$$

$$c_{1,5}(w) = 0,063 \cdot w^2 - 0,0582 \cdot w + 0,0123$$

$$c_{1,6}(w) = -0,0139 \cdot w^2 + 0,0281 \cdot w - 0,0204$$

$$c_{1,7}(w) = -0,0198 \cdot w^2 + 0,0194 \cdot w - 0,0043$$

3. számú melléklet

Az r_2 vektor komponensét leíró Csebisev-polinomok együtthatóit leíró $c_{2,i}(w)$ közelítő függvények, melyek együtthatóit a Matlab program polyfit parancsával határoztam meg.

$$c_{2,1}(w) = 0,2624 \cdot w^2 - 0,4332 \cdot w + 0,2568$$

$$c_{2,2}(w) = 0,2172 \cdot w^2 - 0,3991 \cdot w - 0,8368$$

$$c_{2,3}(w) = -0,0589 \cdot w^2 + 0,059 \cdot w + 0,0431$$

$$c_{2,4}(w) = 0,0115 \cdot w^2 - 0,0066 \cdot w + 0,1433$$

$$c_{2,5}(w) = 0,0089 \cdot w^2 - 0,0083 \cdot w - 0,0147$$

$$c_{2,6}(w) = -0,0126 \cdot w^2 + 0,0185 \cdot w - 0,0193$$

$$c_{2,7}(w) = 0,0037 \cdot w^2 - 0,0047 \cdot w + 0,0020$$

4. számú melléklet

Az r_3 vektor komponensét leíró Csebisev-polinomok együtthatóit leíró $c_{3,i}(w)$ közelítő függvények, melyek együtthatóit a Matlab program polyfit parancsával határoztam meg.

$$c_{3,1}(w) = 0,0216 \cdot w + 0,4793$$

$$c_{3,2}(w) = 0,0357 \cdot w - 0,0436$$

$$c_{3,3}(w) = 0,0105 \cdot w - 0,5427$$

$$c_{3,4}(w) = -0,0351 \cdot w + 0,491$$

$$c_{3,5}(w) = -0,0411 \cdot w + 0,0727$$

$$c_{3,6}(w) = -0,0006 \cdot w - 0,0063$$

$$c_{3,7}(w) = -0,009 \cdot w - 0,0093$$

5. számú melléklet

Az r_3 vektor komponensét leíró Csebisev-polinomok konstans együtthatóinak értéke.

$$c_{3,1} = 0.4880$$

$$c_{3,2} = -0.0285$$

$$c_{3,3} = -0.5385$$

$$c_{3,4} = 0.0351$$

$$c_{3,5} = 0.0563$$

$$c_{3,6} = -0.0065$$

$$c_{3,7} = -0.0057$$

6. számú melléklet

Az η függvényt leíró Csebisev-polinomok együtthatóit leíró $c_{\eta,i}(w)$ közelítő függvények, melyek együtthatóit a Matlab program polyfit parancsával határoztam meg.

$$c_{\eta,1}(w) = -0,7726 \cdot w^2 + 0,9074 \cdot w - 0,0958$$

$$c_{\eta,2}(w) = -0,8816 \cdot w^2 + 0,2947 \cdot w + 0,6939$$

$$c_{\eta,3}(w) = -0,7006 \cdot w^2 + 0,7188 \cdot w - 0,4713$$

$$c_{\eta,4}(w) = 0,5383 \cdot w^2 - 0,4142 \cdot w - 0,1520$$

$$c_{\eta,5}(w) = 0,4786 \cdot w^2 - 0,4346 \cdot w - 0,0052$$

$$c_{\eta,6}(w) = 0,8043 \cdot w^2 - 0,6433 \cdot w - 0,0032$$

$$c_{\eta,7}(w) = 0,5337 \cdot w^2 - 0,4288 \cdot w + 0,0337$$