



**TÉRBELI INTERPOLÁCIÓS MÓDSZEREK TESZTELÉSE**  
**KOMPLEX FOLYAMI KÖRNYEZETBEN**

TDK-dolgozat

SZERZŐ:

GYŰRKY KATALIN

III. éves építőmérnök hallgató

KONZULENSEK:

DR. TÖRÖK GERGELY TIHAMÉR

DR. FLEIT GÁBOR

Budapest, 2023.

# TARTALOMJEGYZÉK

<b>1. BEVEZETÉS</b> .....	<b>3</b>
1.1 ELMÉLETI BEVEZETŐ.....	4
1.1.1 Térbeli interpolációs módszerek.....	4
1.1.2 Interpolációs anomáliák.....	5
1.1.3 Interpolációs módszerek medergeometriára .....	6
1.2 CÉLKITŰZÉSEK.....	7
<b>2. TEREPI MÉRÉSEK ÉS ADATFELDOLGOZÁS</b> .....	<b>8</b>
2.1 MÉRÉSI KAMPÁNYOK .....	8
2.2 ADATOK ELŐKÉSZÍTÉSE AZ INTERPOLÁCIÓHOZ.....	11
2.3 AZ ALKALMAZOTT INTERPOLÁCIÓS MÓDSZEREK BEMUTATÁSA .....	14
2.3.1 Lineáris interpoláció.....	14
2.3.2 A WALID interpolációs algoritmus .....	14
2.4 VALIDÁCIÓS MÓDSZERTAN.....	16
<b>3. EREDMÉNYEK</b> .....	<b>17</b>
3.1 INTERPOLÁCIÓS MÓDSZEREK ÖSSZEHOSONLÍTÁSA .....	17
3.1.1 Kvantitatív összevetés.....	17
3.1.2 Kvalitatív összevetés.....	18
3.2 A TELJES MEDERMODELL BEMUTATÁSA.....	19
3.3 ÉRZÉKENYSÉGVIZSGÁLAT .....	20
3.3.1 Interpolációs ablak szélességének ( $W_{IW}$ ) hatása .....	21
3.3.2 Interpolációs ablak hosszának ( $L_{IW}$ ) hatása.....	23
3.3.3 Inverz távolság súly hatványkitevő ( $p$ ) hatása.....	25
<b>4. DISZKUSSZIÓ</b> .....	<b>27</b>
<b>5. ÖSSZEFOGLALÁS</b> .....	<b>28</b>
5.1 KITEKINTÉS, TOVÁBBI VIZSGÁLATI CÉLOK .....	28
<b>KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS</b> .....	<b>30</b>
<b>FELHASZNÁLT IRODALOM</b> .....	<b>31</b>

## 1. BEVEZETÉS

Vízfolyások morfológiájának vizsgálatához elengedhetetlen a megbízható medergeometria szerkesztése. Azonban a domborzati adatokat jellemzően csak diszkrét pontokban lehet megmérni. A vízmérnöki területen használt egydimenziós modellekhez szükséges mederadat igényt hazánkban a szabványosított VO szelvények kielégítik. Ezek felmérését már régóta alkalmazzák, a múltbeli folyóalakokról ilyen jellemzők állnak rendelkezésre. Ezzel szemben a folyószakaszok 2D illetve 3D modelljeinek alkalmazásához már ismerni kell a területi változékonyságot bemutató domborzati térképeket is. Ezeket nevezzük digitális terepmodelleknek (DTM) (Fleit és Baranya, 2022).

Napjainkban szinte tetszőleges felbontásban, gyorsan és alaposan felmérhetőek (térképezhetőek) a folyómedrek, az egyre szélesebb körben elterjedt akusztikus elven működő többsugaras mederfelmérő (multibeam echo-sounder, MBES) műszerrel. Ez a magas felbontású, mozgóhajós mérés közvetlenül előállítja a felületet nagy folyók esetén, azonban hátránya, hogy költséges, és bonyolultabb üzemeltetést igényel. Ezen okok miatt nehéz alkalmazni a sekély vízzel rendelkező terepen, tehát a szelvénymenti mérések relevanciája manapság is nagy (Ádány, 2015).

Ahhoz, hogy az általában csak diszkrét pontokban ismert adatokból folytonos medertérképet lehessen szerkeszteni, különböző interpolációs algoritmusokat alkalmaznak. A gyakran használt eljárások – például a lineáris interpoláció, inverz távolság, természetes szomszéd – sok esetben anomáliákat és pontatlan medertérképeket eredményeznek (Kardos, 2013). Ennek hátterében jellemzően az áll, hogy a módszerek nem figyelik a szórt pontok területi eloszlását, illetve a vízfolyások anizotróp jellegét. Következésképpen az általános interpolációk nem vezetnek megbízható eredményhez, ha azokat egy hidraulikailag komplex környezetben – mint amilyen egy folyó meanderező szakasza – használjuk.

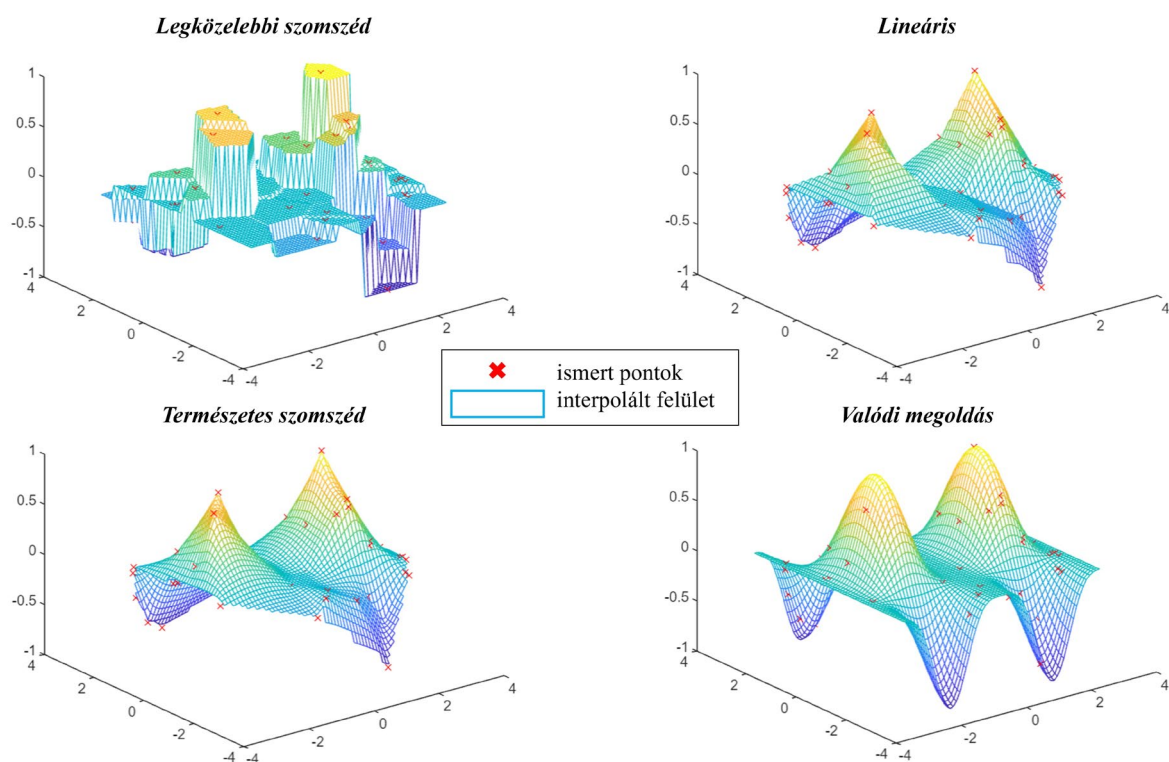
A folyók aktuális medertérképének pontos ábrázolásától függenek például az alábbi hidrológiai és vízépitési feladatok:

- a) morfológiájának változásainak követése (Török et al., 2019);
- b) árvízvédelem és előrejelzés (Bures et al., 2019);
- c) vizes élőhelyek minősége (Baranya et al., 2018) és
- d) hordalékháztartási elemzések (Wheaton et al., 2009).

## 1.1 ELMÉLETI BEVEZETŐ

### 1.1.1 Térbeli interpolációs módszerek

A gyakorlatban alkalmazott műszaki felmérések és megfigyelések nyers medermagassági adatokat, és egy szórt pontú adathalmazt szolgáltatnak. Ezekre különböző módszerekkel görbét vagy felületet illesztve interpolálni lehet a rácsháló hiányzó elemeire. A diszkrét elemekből álló pontfelhők interpolációjára többféle algoritmus létezik. Ezek között vannak egyszerűbbek, mint a háromszögelésen alapuló (TIN) lineáris, a természetes szomszéd (NN) vagy az inverz távolsággal súlyozott (IDW) módszer, de fejlettebb eljárások is előfordulhatnak, mint például a kriging (Li et al., 2023). Az interpolációk Tobler törvénye alapján azt feltételezik, hogy a keresett pont értéke jobban kapcsolódik a térben közel eső elemhez, mint a távolabb elhelyezkedőhöz (Tobler, 1970). Tehát többségük olyan elven számol, hogy az ismeretlen ponthoz viszonyítva meghatározza a legközelebbi lévő néhány darab pontot, amelyek alapján lineárisan vagy súlyozással átlagmagasságot rendel. Az így generált felületek bár matematikailag helyesek (ld. 1. ábra), azonban keresztmetszvény menti meder adatok esetén jellemzően nem ábrázolják realiztikusán a folyó mederalakját (Ádány, 2015).



1. ábra: Különböző interpolációval ábrázolt felület és a pontos megoldás (<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/griddata.html>).

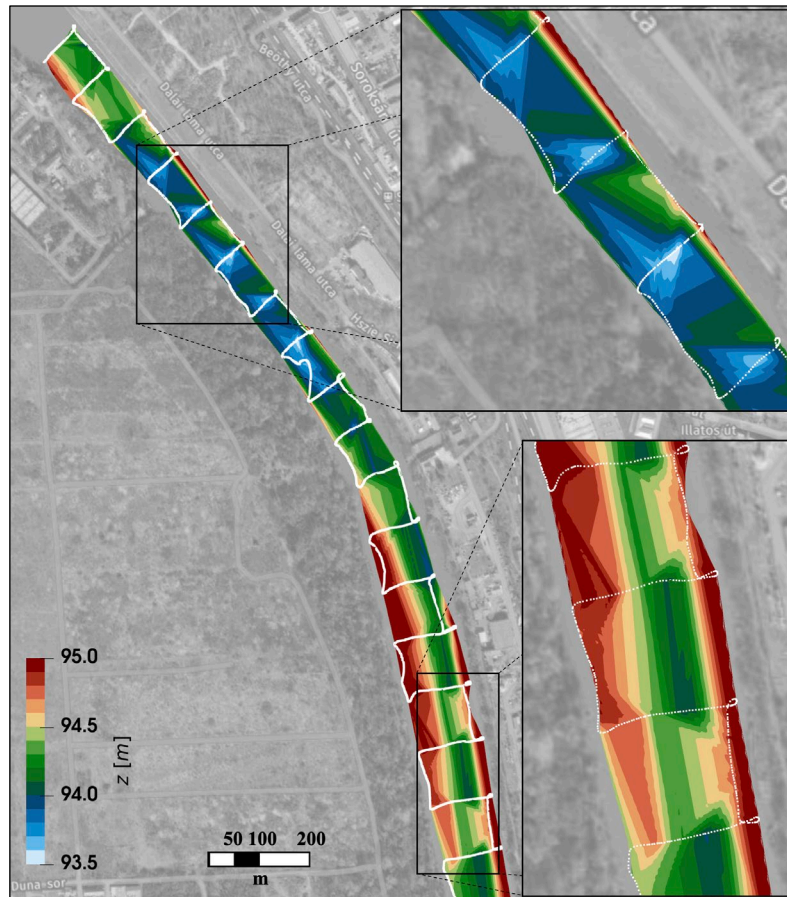
A térbeli interpolációk egyik legfontosabb alkalmazási területe a földfelszín modellezése, amely a szabályos rácshálós vagy raszteres digitális terepmodellek (DTM) alkalmazásán alapul. A DTM-eknek jelentős szerepük van a földrajzi információs rendszerekben (Evans, 1980), főként az erózió modellezésében (Knisel, 1980), de még a mezo- és makroszintű éghajlati jelenségek modellezésében is (Tesche és Bergstrom, 1978; Hutchinson és Bischof, 1983).

A raszteres DTM-eket közvetlenül sztereofotó-térképekből (Kelly et al., 1977), vagy műholdképekből (Konecny et al., 1987) számítják. Emellett gyakori a DTM-ek interpolációja elszórt magassági pontokból, amelyeket kiegészíthet áramvonal, illetve különböző felszínspecifikus pontok (például csúcsok, gödrök, nyergek, gerincvonalak). Kis vízgyűjtő területek hidrológiai vizsgálatokhoz ezek az adatok beszerezhetőek felméréssel vagy digitalizálhatóak topográfiai térképekből (Trevisse és Hutchinson, 1986).

### ***1.1.2 Interpolációs anomáliák***

A konvencionális térbeli interpolációs eljárások abban az esetben működnek megbízhatóan, ha térben nagyjából egyenletes a rendelkezésre álló pontok eloszlása. Folyók vizsgálatok általában keresztmetszvény menti felmérés jellemző, így a létrehozott medermodell általában nagy hibával terhelt (Ádány, 2015). Továbbá fontos tulajdonság, hogy a folyók alakja anizotróp, azaz mivel a mederformák az áramlás irányában fejlődnek, a felszín kisebb változékonysága várható hosszirányban, mint oldalirányban (Allen et al, 1994; Julien és Wargadalam, 1995). Ezek a sajátosságok a gyakorlatban sokszor interpolációs anomáliát generálnak.

Az anomáliák egyike, hogy a modellben lokálisan nagy hibák fordulnak elő, amelyek a valósághoz képest jelentősen eltérnek, a képzett mederalak nem realiztikus. Ezek az akadályok makroérdességként jelentkeznek, így egy későbbi hidrodinamikai modellezés eredményeit például jelentősen torzíthatják. Amikor a szelvénymenti mérések között a part közelében is meghatározzuk a mélységeket (ami a szokásos mérési stratégia esetén egy optimális eset, hiszen a parti terület ilyen jellegű felmérése nem jelent többlet mérési utat), akkor ezek az adatok interpolációs anomáliákat okozhatnak (Fleit és Baranya, 2022).



2. ábra: Példa interpolációs anomáliára, amely háttérben a mérési stratégia és a lineáris interpoláció áll.

### 1.1.3 Interpolációs módszerek medergeometriára

Az anomáliák javítására kifejezetten folyóspecifikus interpolációs módszerekkel kísérleteztek. Az alábbiakban néhány példát ismertetek, hogy korábban kik és hogyan foglalkoztak medergeometria szerkesztéssel szórt adatokból.

Hutchinson (1989) morfológiai megközelítést írt le a rácshálós digitális terepmodellek (DTM) felszínspecifikus magassági adatokból és kiválasztott áramvonalakból történő szerkesztésére. Az algoritmus eltávolítja a téves víznyelőket vagy gödröket, így olyan DTM-eket generál, amelyek felhasználhatóak a hidrológiai folyamatok vizsgálatában. Az eljárás jelentősen növeli a DTM-ek pontosságát, ezenkívül megkönnyíti a magassági adatokban lévő hibák felismerését, amelyek hagyományos statisztikai eszközökkel nem észlelhetők, és megbízható alapot képez a térképészeti általánosításhoz.

Merwade (2002) kutatásának célja egy folyómederre alkalmazható térinformatikai interpoláció létrehozása, amely során az új koordinátarendszerben a folyó pontjait karteziánus koordinátákból  $(x, y, z)$  görbületes koordinátákká transzformálja át  $(m, r, z)$ , ahol  $m$  a folyó középvonala mentén mért távolság,  $r$  pedig a középvonaltól való merőleges távolság. Ezáltal egy meanderező vízfolyás egyenes vízfolyásként ábrázolható, csupán az  $m$  és  $r$  koordinátákat felhasználva.

Osting (2004) kifejlesztett egy MEBAA (Mesh Elevating and Bathymetry Adjusting Algorithms) elnevezésű szoftvert, amellyel egy meanderező, alacsony lejtésű folyó szórt pontjaira háromdimenziós végeselemes rácsot illesztett. A MEBAA inverz távolsággal súlyozott (IDW) sémát használt az interpolánsok keresésére. Az új módszer pontosan reprezentálta a természetes medergeometriát, és ezt a gyér terepi adatokkal rendelkező területeken is megbízhatóan tette.

Merwade et al. (2006) továbbfejlesztették a korábbi interpolációs módszert. Az anizotróp hatások tanulmányozásához az eljárásokat két különböző koordinátarendszerben értékelték: egy karteziánus  $(x, y)$  és egy áramlásorientált  $(s, n)$  koordinátarendszerben. A folyó anizotrópiájának figyelembevételére az inverz távolság súlyozási módszer módosított változatát, az elliptikus inverz távolság súlyozás (EIDW) módszert alkalmazták.

Kardos (2013) olyan módszerrel kísérletezett, amely – figyelembe véve az anizotrópiát – egy ortogonális, egyenlő távolságú segédhálót használt az interpolációhoz. Egyenletesen elosztott keresztmetszeteket feltételezett, és jó eredményeket adott, mikor a folyópart párhuzamos az áramlási vonallal, ellenkező esetben, például gátak környezetében csak korlátozottan használható. Továbbá problémát okoz, ha a keresztmetszetek közötti távolság túl sűrű a szélességükhöz képest.

## 1.2 CÉLKITŰZÉSEK

A kutatásom során Hont térségében, az Ipoly egyik nagy meanderének morfordinamikai változásának feltárásához vizsgálom a pontbeli adatokból történő medergeometria szerkesztésének módjait. Az interpolációs anomáliák javítására egy újszerű iterációs eljárást tesztelek és validálok. Az algoritmus sajátosságát az adja, hogy nem rácshálót illeszt a pontokra, hanem az alapelve egy interpolációs ablak alkalmazása, illetve bemenő paraméterként elegendő a diszkrét pontokban végzett magassági méréseket és a folyó sodorvonalát megadni. A módszer figyelembe veszi a) a mederszintek anizotróp jellegét, b) a mérési pontok inhomogén területi eloszlását és c) a folyó meanderező jellegét is.



## 2. TEREPI MÉRÉSEK ÉS ADATFELDOLGOZÁS

A következőkben az általunk végzett terepi mérést, a környezeti adottságokat, és a vizsgálat folyamatát mutatom be, amelyben hallgatótársaimmal, és a BME Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék munkatársaival együtt vettünk részt.

### 2.1 MÉRÉSI KAMPÁNYOK

Magyarország és Szlovákia határfolyója, az Ipoly egy igen sok meanderrel rendelkező vízfolyás. Hazánk egyik legszeszélyesebb folyója, akár kilencszázszoros eltérés is előfordulhat az árvízi és a kisvízi vízhozama között. A szlovák Vepor-hegységben ered és Szobnál torkollik a Dunába. Teljes hossza 212,4 km; éves átlagos vízhozama 25,4 m<sup>3</sup>/s. Sok helyen szabályozták mesterségesen, azonban egyes szakaszain, például az Ipolyszög és Hont között 30 kilométernyi részen nem történt beavatkozás (dunaipoly.hu). Kutatásunk során egy túlfejlett kanyarulatot választottunk, amely Hont térségében található. Ezen a körülbelül 260 méter hosszú részen az Ipoly folyásiránya délnyugati irányból keleti irányba fordul, ezzel közel 180 fokos éles kanyart megtéve. A terület környezete természetes, nem történt a közelében emberi beépítés.



3. ábra: Az Ipoly elhelyezkedése, meanderező alakja és az általunk felmért kanyarulat.



A terepi mérésekre első alkalommal 2023. június 26-án került sor. Ennek alkalmával a vízzel borított területről (mederről) származó mélység adatokat akusztikus Doppler-elvű áramlásmérő műszerrel (acoustic Doppler current profiler – ADCP) végzett mozgóhajós mérésekből nyertük ki. A készülék ultrahangos elven a vízfelszín és a fenék közötti függőleges távolságot rögzíti. A berendezés dokumentálja az állandó frekvenciájú jel kibocsátása és a mederfenékről történő visszaverődését követően a műszerig való visszaérkezése között eltelt időt, így a hang terjedési sebességének ismeretében kiszámítható a megtett út hossza (Hajnal és Koris, 2014).

Az ADCP műszerrel felszerelt csónak jellemzően az Ipoly szelvénye mentén haladt, ezenkívül pedig néhány állóhajós mérést is végeztünk. A szárazföldi (hullámtéri) pontokat GNSS RTK (Global Navigation Satellite System Real-Time Kinematic) alapú geodéziai felméréssel rögzítettük. Ezen pontok egy része a szelvények kiegészítésére szolgált, másik részük pedig szórt pontok voltak a területen. A jelenlévő áramlási és morfológiai folyamatokat Magos István hallgatótársam vizsgálja TDK-dolgozatában.



**4. ábra: Szelvénymenti mérések ADCP-vel felszerelt hajóval.**

A választott területen az Ipoly változékony tulajdonságokkal rendelkezik, a meander okozta várható lerakódás, erózió – és a távolibb jövőben lefűződés – miatt a terepi mérést megismételtük két hónappal később, 2023.09.01-jén. A nyári alkalommal azt tapasztaltuk, hogy a területen nagy mérési zajt okozott a növényzet. Ezért a szárazföldi pontok feltáráshoz már Topcon GPS eszközt kölcsönöztünk. Ennek működési elve kettő készülék használatán alapszik. A bázist fix ponton elhelyeztük, műholdak segítségével meghatároztuk a pozícióját, majd a rover vevővel a terep további pontjait rögzítettük, miközben a bázisról folyamatos korrekció érkezett.

Az első méréshez hasonlóan ADCP berendezéssel felszerelt hajóval dokumentáltuk a vízmélységeket, sűrítettük a keresztzelvények helyzetét. Ezenkívül mederanyag mintákat vettünk a folyó vizsgált szakaszáról. A két mérési kampány során alaposan feltérképeztük a kanyarulatot és annak környezetét.



**5. ábra: A Topcon műszerek használata, ahol a bázist növényzettől mentes helyen állítottuk fel, így a rover vevővel a sűrűbb növényzetű területeken is lehetett méréseket végezni.**

## 2.2 ADATOK ELŐKÉSZÍTÉSE AZ INTERPOLÁCIÓHOZ

Az adatok kiértékelését Quantum GIS (QGIS) térinformatikai programban végeztem. Mivel az első mérés alkalmával nem működött megbízhatóan a GNSS RTK, ezért a szárazföldön csak a Topcon eredményeit ábrázoltam. Az ADCP-vel mért adatok közül a pontok XYZ koordinátáira volt szükségem. A műszer a vízmélységet rögzítette, így a meder helyzetéhez meg kellett határozni a vízfelszín magasságát.

Ez két adatból számítható. A felvízi és az alvízi vízszintet GPS segítségével mértem meg, a középvonal hosszát pedig a QGIS alkalmazásával határoztam meg. Ezek alapján a vizsgált szakaszon a folyó esése az alábbi képlettel kalkulálható:

$$s \text{ [m/km]} = \frac{\Delta \text{vízszint [m]}}{l_{\text{középvonal [m]}} \cdot 1000} \quad [1]$$

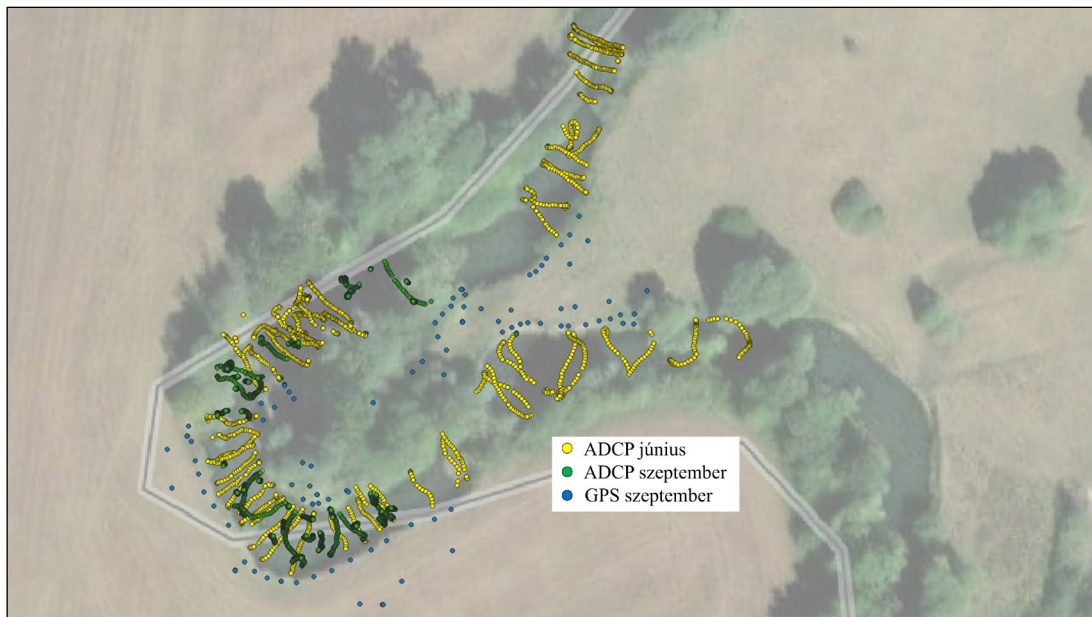
ahol a vízszintkülönbség a felvízen és az alvízen végzett mérések eltéréséből számítható ( $\Delta \text{vízszint} = 0,097 \text{ m}$ ), a középvonal hosszát pedig a QGIS rajzáról olvastam le ( $165 \text{ m}$ ). Az Ipoly esése a vizsgált kanyarulatban így  $s = 0,59 \text{ m/km}$  értékre adódott.

A saját mérésből származó eredményt összehasonlítottam a Vízügyi Főigazgatóság által regisztrált paraméterekkel. A vizsgált szakasz Balassagyarmat és Ipolytölgyes vízmérce állomások között helyezkedik el. A terepi mérés idején (augusztus utolsó napjaiban) rögzített adatokból a következő képlet segítségével számítottam az esést:

$$s \text{ [m/km]} = \frac{\Delta \text{vízállás [m]}}{\Delta \text{szelvény [fkm]}} \quad [2]$$

A levezetés eredménye  $s = 0,38 \text{ m/km}$ . A kétféle módszerrel meghatározott esés nagyságrendben megegyező értéket mutat, ezért az adatok előkészítését a vizsgált szakaszt jobban jellemző, mért  $s = 0,59 \text{ m/km}$  értékkel folytattam. Az egyes szelvényekben rögzített vízmélységeket a felvízi méréshez viszonyított vízszintes távolság függvényében toltam el.

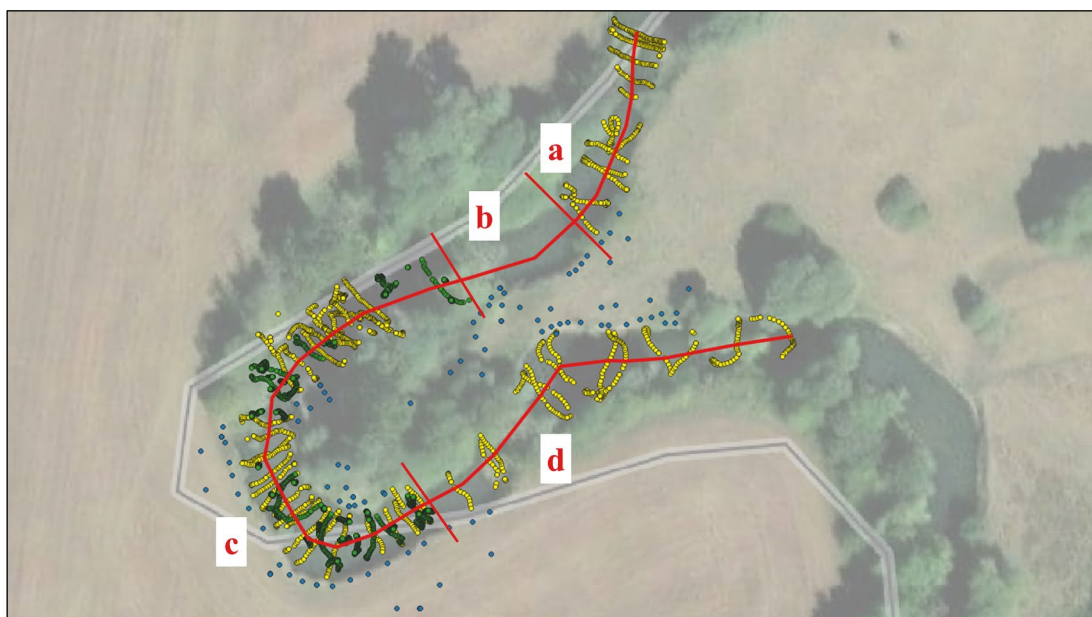
A két mérési kampány között eltelt időszakban az Ipoly adott szakaszára nem érkezett árhullám, emiatt nem feltételeztem jelentős mederátrendeződést a nyár folyamán. Így a felmérések eredményéből egy közös pontfelhőt hoztam létre, amely egyaránt tartalmazza a GPS és az ADCP szűrt pontjait.



6. ábra: Műholdkép a mérési pontokkal QGIS-ben megjelenítve.

A tesztelt interpolációs program egyik sajátossága miatt (ld. később) érdemes volt a pontfelhőt négy részre választani (7. ábra), és a továbbiakban a sűrű mérési szelvényekkel (c jelű) folytatni az eljárások tesztelését. A szakaszokat az alábbi ábra szemlélteti, ahol:

- a) ritkább mérési szelvények,
- b) a vízbe belógó növényzet miatt kimaradó, felmértelen szakasz,
- c) sűrű mérési szelvények, és
- d) ritkább mérési szelvények láthatóak.

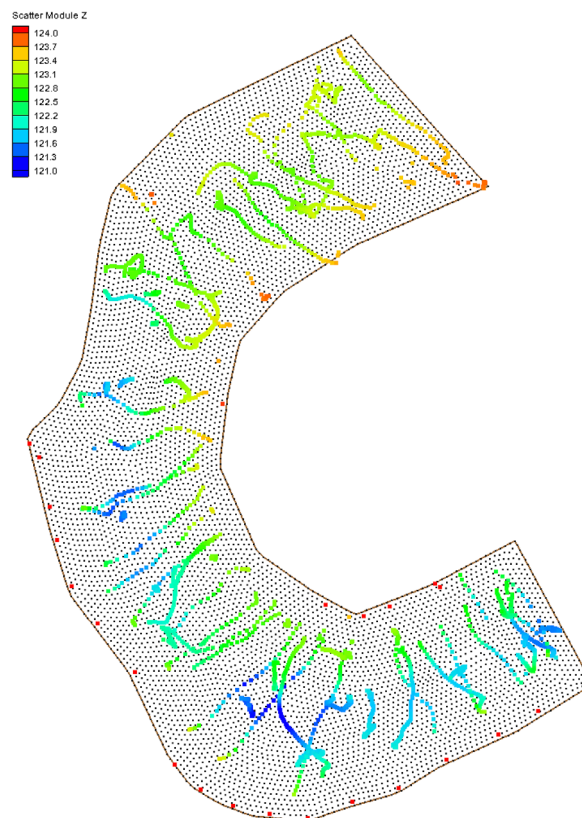


7. ábra: A mérési pontfelhő szétválasztása négy szakaszra.



Következő lépésben az interpoláció során használt lekérdezési pontok meghatározása szükséges. Az alkalmazott eljárás kódjában két opció lehetséges, a) megadott pontokban történő, vagy b) automatikusan generált raszterre végzett keresés. Ez utóbbi esetben a program létrehozza a mérési pontokat magába foglaló zárt poligont, majd generál egy azt lefedő, tetszőleges osztásközű rasztert. Azonban a komplex, kanyargós terep miatt, illetve a sok szórt pont okán maszkolni kellene a végeredményt. Így jobb megoldás a megadott pontokban történő interpoláció alkalmazása. Ehhez a szűrés után előállított ponthalmazt az SMS (Surface-water Modeling System) nevű szoftverbe olvastam be, majd manuálisan körülhatároltam a felmért területet, és meghatároztam a lekérdezési pontokat 1 méteres felbontással.

Továbbá fontos lépés a sodorvonal megadása, amely legtöbbször rendelkezésre áll az illetékes vízügyi igazgatóságok adatbázisában, vagy automatizált eljárásokkal számítható keresztmetszeti magasságok felhasználásával (Caviedes-Voullième et al., 2014). Vizsgálatom során manuálisan rajzoltam meg az SMS programban, követve a legalacsonyabb pontok helyzetét. A sodorvonal alakját használja az algoritmus a folyásirány figyelembevételéhez.



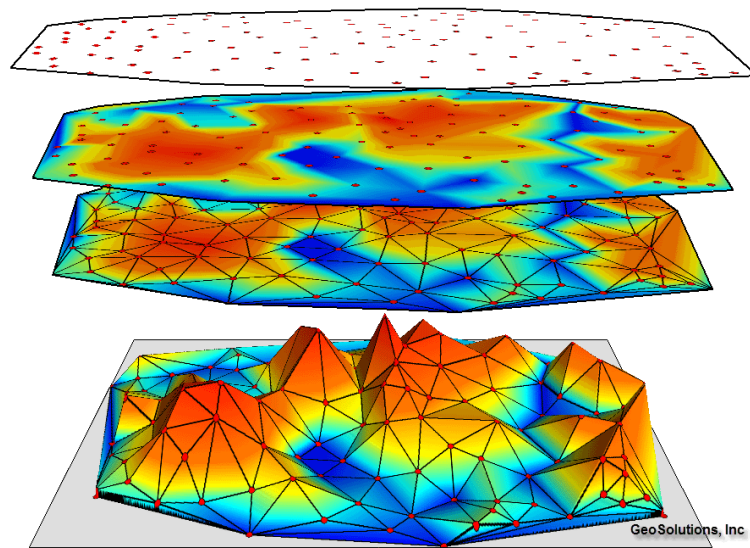
**8. ábra: SMS szoftverben előkészített adatok: a sűrűn felmért szakaszt (c) körülhatároló poligon és a lekérdezési pontok.**

## 2.3 AZ ALKALMAZOTT INTERPOLÁCIÓS MÓDSZEREK BEMUTATÁSA

A diszkrét adatokból álló pontfelhőből a gyakorlatban széles körben elterjedt, paramétermentes lineáris interpolációval, illetve egy újszerű, WALID (Windowed Anisotropic Local Inverse Distance) nevű interpolációs módszerrel vizsgáltam meg az Ipoly medergeometriáját. Ez utóbbi program Fleit Gábor konzulensem fejlesztése.

### 2.3.1 Lineáris interpoláció

A lineáris interpolációt alkalmazó programok működési elve, hogy az ismert mérési pontokat háromszögekkel köti össze. Az így kapott térbeli háromszögek kijelölnek egy síkot, melyekkel ezután a háromszög által lefedett területet jellemezhetjük. Ha megfelelően sűrűn helyezkednek el a keresztmetszvények, akkor a poligonok egyik csúcsa a szomszédos szelvénybe esik, ezáltal az interpoláció pontos medertérképet eredményez. Nagy előnye, hogy az eljárás paramétermentes, szemben egyéb, gyakran használt interpolációkkal, mint például az inverz távolság módszer, a kriging technika vagy akár a WALID.



9. ábra: Lineáris interpoláción alapuló TIN felület (forrás: My UNIGIS).

### 2.3.2 A WALID interpolációs algoritmus

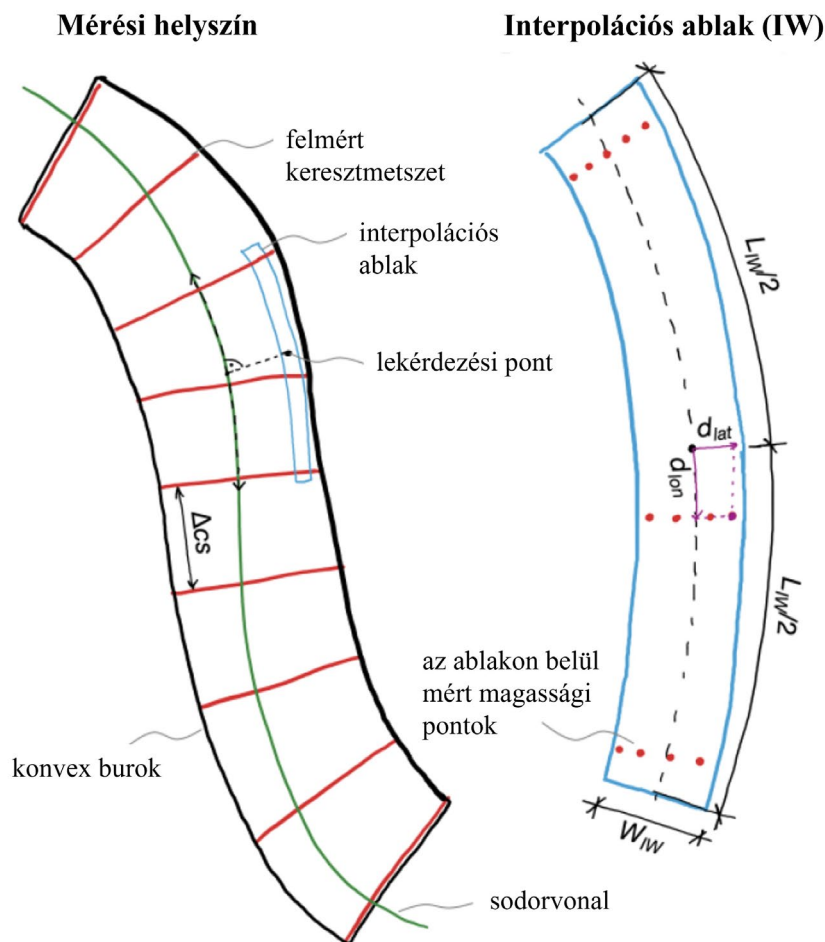
A WALID egy új interpolációs módszer, amely az eredeti inverz távolság módszeren alapszik (Shepard, 1968). Azonban a folyók medergeometriai jellemzői miatt figyelembe veszi:

- a kiindulási adatok térbeli eloszlásának inhomogenitását (pontok jellemzően keresztmetszvények mentén),
- a folyómeder anizotróp tulajdonságát, és
- a folyók meanderező jellegét.

Az algoritmust úgy tervezték, hogy a szórt medermagassági mérések és a sodorvonal ábrázolása alapján képes legyen a medergeometria gyors és automatizált létrehozására.

A módszer működési elvét a releváns változókkal a 10. ábra mutatja be. Az eljáráshoz meg kell határozni a mért pontok konvex burkát, mert a lekérdezést csak az ezen belül lévő pontokra végezzük. Az interpolációs ablak (interpolation window, IW) alakja minden interpolációs pontban más és más – követi a sodorvonal görbületét. Hossza és szélessége ( $L_{IW}$  és  $W_{IW}$ ) szabad paraméterek, amelyeket az ismert pontok eloszlásának függvényében kell megadni. A keresztmetszetek közötti átlagos távolságot  $\Delta cs$  jelöli. Továbbá fontos tényező  $p$  értéke, amely az inverz távolság alapú súlyozás hatványkitevője, és figyelembe veszi az anizotróp jelleget.

Egy adott pontban az interpoláció menete a következő: meghatározásra kerül az IW, illetve az abba eső mérési pontok. Ezután az inverz távolság módszerhez a távolságokat nem a szokásos descartes-i koordinátákkal értendő euklideszi távolságként vesszük figyelembe, hanem egy helyi koordináta rendszerben, amiben a fő tengely az IW hosszirányú középvonala, a második koordináta pedig az ettől mért merőleges távolság (Fleit, 2023).



10. ábra: WALID program működési elve és a releváns változók (forrás: Fleit Gábor).

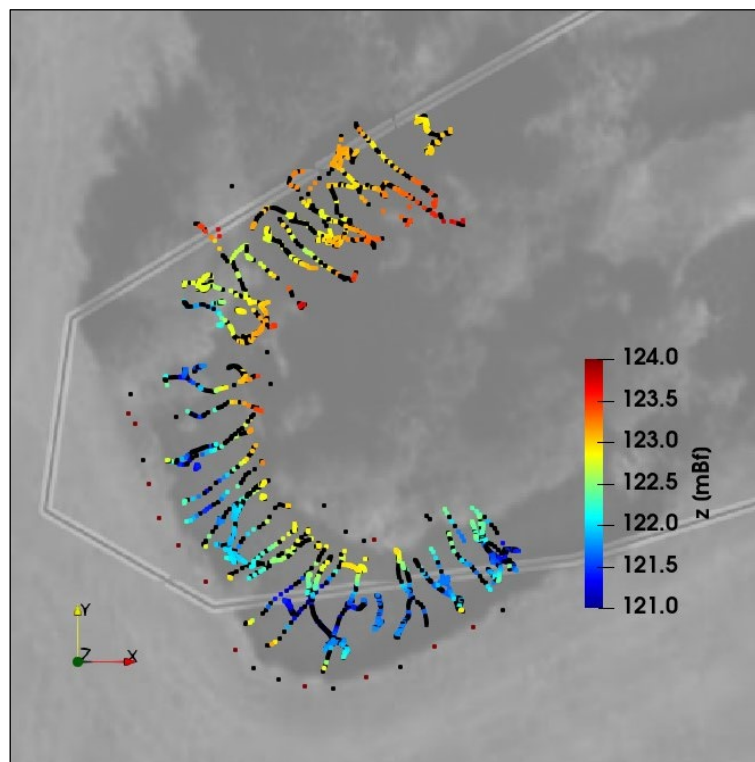


## 2.4 VALIDÁCIÓS MÓDSZERTAN

A vizsgált folyószakaszon nem állt rendelkezésemre pontosan felmért, nagy pontsűrűségű (például MBES alapú) adat. Ezért az új algoritmus igazolásához véletlenszerűen kettéválasztottam a pontfelhőt. Az egyik felét használtam az interpoláció inputjaként, míg a másik felére – mint lekérdezési pontokra – végeztem az interpolációt a két módszerrel. Ezután értékeltem az interpolációk pontosságát az adatok eredeti magasságai ( $z_{mért}$ ) és számított értékei ( $z_{int}$ ) alapján kalkulált négyzetes középhiba (root-mean-square error, RMSE) alapján, a lineáris és a WALID módszer esetén. Az RMSE egy standard hibamérő, de nem fejezi ki, hogy a számítások alul- vagy felülbecslést okoznak. Értéke a következőképpen számítható:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_{int} - z_{mért})^2}{n}} \quad [3]$$

ahol  $n$  az összehasonlított pontok száma.



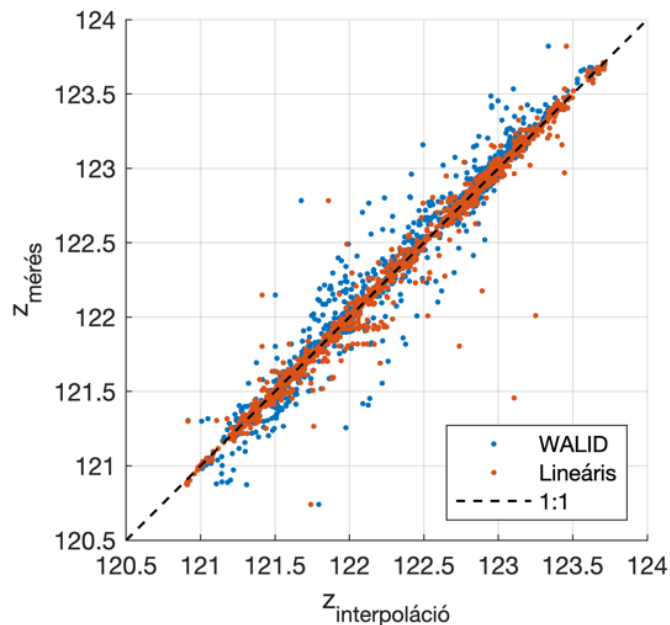
11. ábra: Az interpolációs módszerek teszteléséhez használt adathalmaz. Magasság szerinti színezéssel a mért és interpolációhoz használt pontok, feketével az ellenőrzőpontok.

### 3. EREDMÉNYEK

#### 3.1 INTERPOLÁCIÓS MÓDSZEREK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

##### 3.1.1 Kvantitatív összevetés

Az interpolációs módszerek teszteléséhez mindkét eljárást lefuttattam az adathalmaz 50 %-ával. Miután a lineáris és a WALID módszer is előállította a medergeometriai térképeket, meghatároztam az egyes pontokban lévő magassági koordináták RMSE értékét. A számított értékeket szórásdiagramon ábrázoltam, melynek tengelyein a mért és az interpolált szintek szerepelnek, továbbá feltüntettem az 1:1 arányú egyenest, amelyre tökéletes egyezéskor kerülnének a pontok. A grafikon a 12. ábrán látható, ahol kék szín jelöli a WALID, piros szín pedig a lineáris interpoláció eredményét.



**12. ábra: Interpolációs módszerek számszerű igazolása. Mért és számított szintek az ellenőrző pontokban a két interpolációs módszer esetén.**

A grafikon vizsgálatakor az alábbiak figyelhetőek meg:

1. Relatív jó az illeszkedés az 1:1 egyenesre.
2. Hasonló mértékű szórás a lineáris és a WALID interpoláció esetén, bizonyos szinttartományokban a lineáris interpoláció még jobban is teljesít.
3. A tartomány teljes hosszán kb. egyenletesen szórnak az adatok, tehát szintektől független a pontosság, illetve egyik módszer esetén sem figyelhető meg szisztematikus alá- vagy fölébecslés.

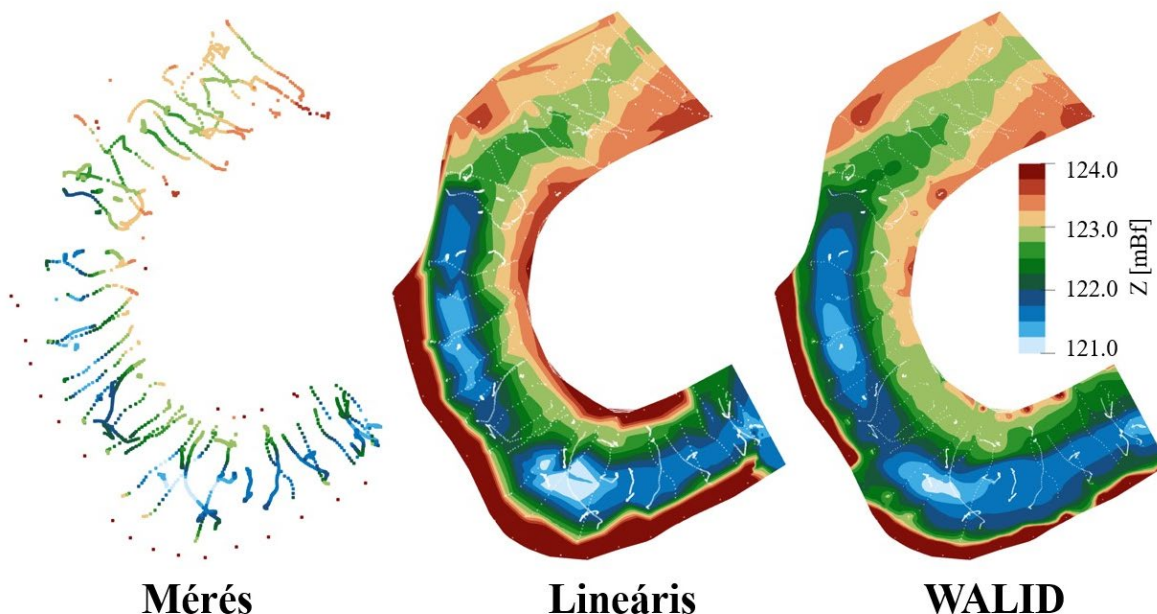
4. Helyenként igen nagy – akár több, mint 1 méteres – hibák láthatóak mind a két módszer esetén.

Az RMSE értékek alapján azonban a WALID módszer mutat nagyobb pontosságot ( $RMSE_{WALID} = 0,1537$  m), bár a lineáris interpoláció hibája is hasonló nagyságrendben mozog ( $RMSE_{lineáris} = 0,1819$  m). Kvantitatív értelemben tehát a WALID módszer jobban teljesít a széles körben elterjedt, háromszögelésen alapuló lineáris interpolációnál.

### 3.1.2 Kvalitatív összevetés

Az interpolációs módszerek kvalitatív összehasonlítását az összes mért pont felhasználásával végeztem. Az ilyen módon generált medertérképeket ParaView programban jelenítettem meg. Ezek a 13. ábrán láthatóak, magasság szerinti színezéssel, illetve fehér pontokkal a mérési szelvények mentén.

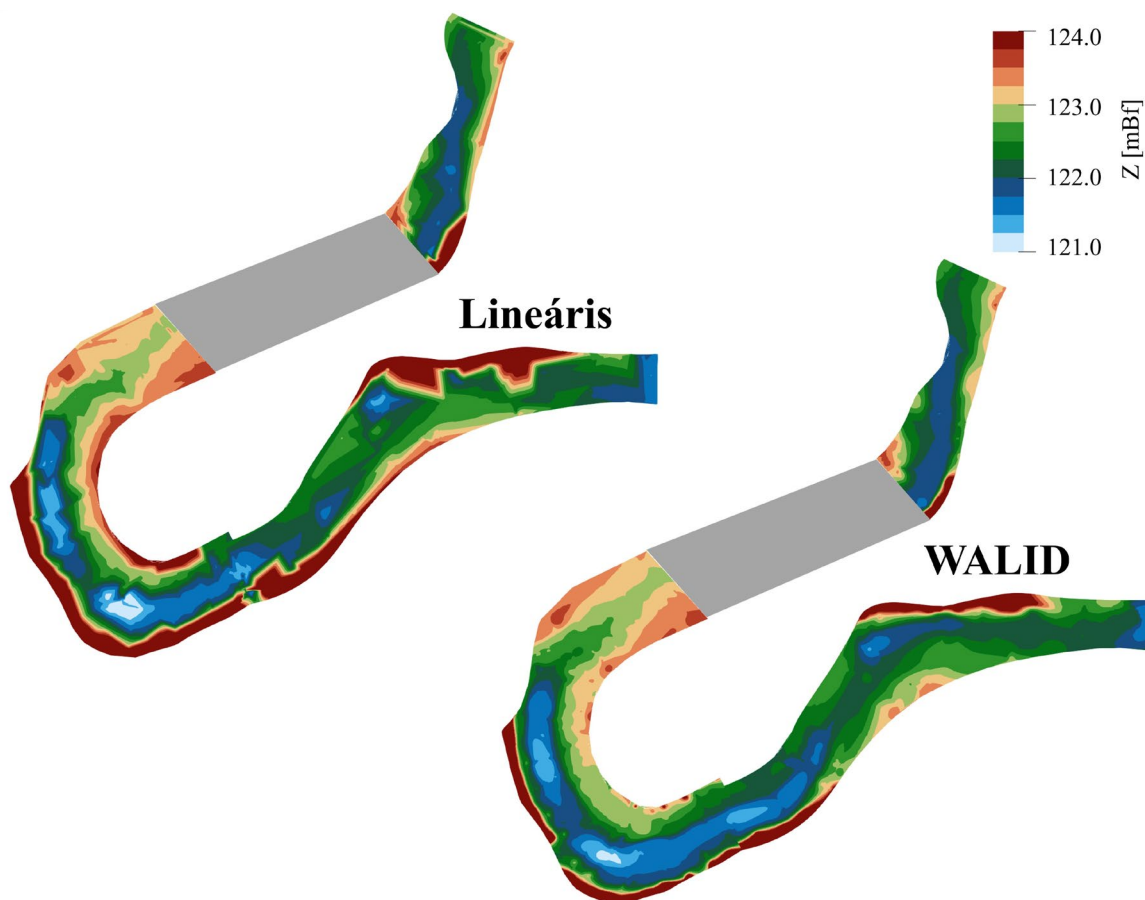
A lineárisan előállított térképen észrevehetőek a tipikus interpolációs anomáliák, például az egyenes élek, és a mérési szelvények közelében lévő töréspontok a kontúrvonalban. Ezzel szemben a WALID módszerrel generált térkép sokkal realisztikusabb, mentes az ilyen hibáktól. A szárazföldi GPS műszerrel mért pontok (jobb part, legmagasabb szintek) környékén a lineáris interpoláció mutatja a hitelesebb alakot, mert valószínűleg egyszerűen egy vonallal összekötötte a szomszédos elemeket.



13. ábra: A sűrűn felmért szakaszra generált DTM-ek a teljes adathalmazt használva a két interpolációs módszer esetén.

### 3.2 A TELJES MEDERMODELL BEMUTATÁSA

Az interpolációs módszerek összehasonlítása után a felmért folyószakasz teljes hosszán előállítottam a medertérképeket, amelyeket a 14. ábra mutat be. A lineáris interpoláció ismét éles éleket és szögletes töréspontokat generált, a geometriából helyenként úgy tűnik, mintha keresztirányú akadályok (széles sarkantyúk) lennének a folyóban. A WALID jól kirajzolta a sodorvonal alakját, amely a kanyarulatban eltolódik a középvonalhoz képest. Látható, hogy ahol jellemzően a legnagyobb a sebesség, ott kimélyül a meder. Az utóbbi technikával létrehozott DTM mentes az anomáliáktól, még a komplex hidraulikai viszonyokkal rendelkező környezetben is.



14. ábra: A teljes felmért szakaszra készített DTM lineáris (balra) és WALID (jobbra) interpoláció esetén.

### 3.3 ÉRZÉKENYSÉGVIZSGÁLAT

A WALID interpoláció az alábbi négy szabad paraméterrel rendelkezik:

1. az interpolációs ablak szélessége ( $W_{IW}$ ),
2. az interpolációs ablak hossza ( $L_{IW}$ ),
3. az inverz távolság súly hatványkitevője ( $p$ ), és
4. egy keresztirányú súlymódosító exponens ( $q$ ) (Fleit, 2023).

A referenciabeállítások igazolására, és a módszer viselkedésének áttekintésére a következő alfejezetekben érzékenységvizsgálatokat végzek, három paraméter ( $W_{IW}$ ,  $L_{IW}$ ,  $p$ ) változtatásával. Az interpolációk után az adatokra MATLAB programban kernel sűrűségfüggvényt illeszttek, amely egy közelítő folytonos görbével ábrázolja a kapott DTM pontjainak magassági eloszlását. A különböző kombinációjú paraméterekkel interpolált adatokat térképen is megjelenítem. A WALID program beállításait az alábbi táblázat foglalja össze, vastagon kiemelve a referenciaértékeket.

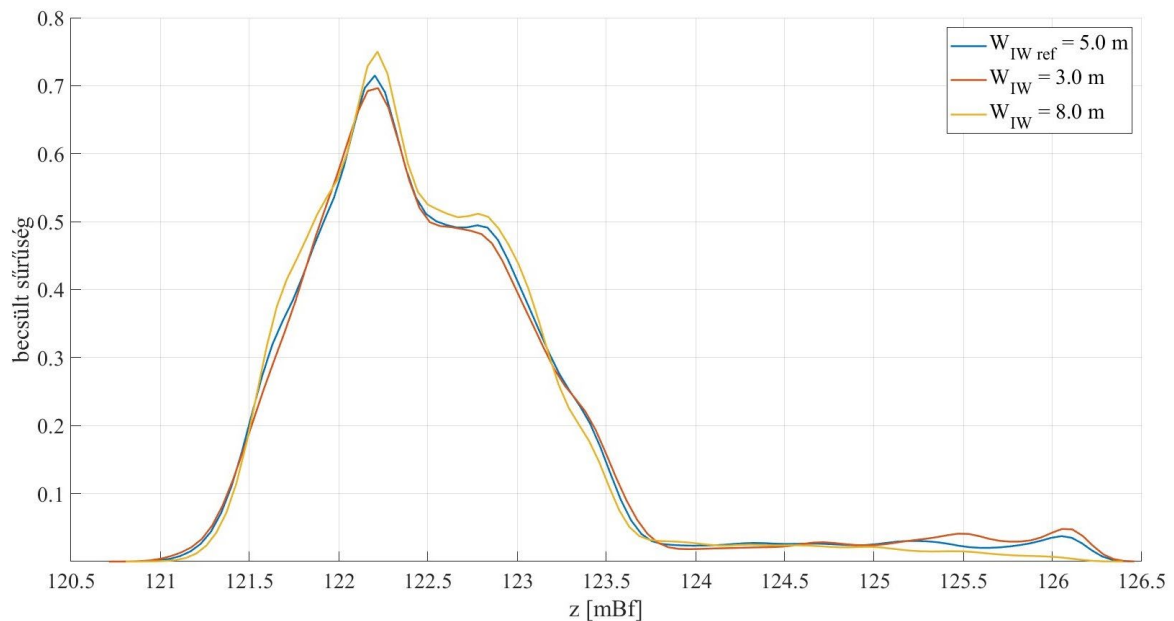
1. táblázat: Referenciabeállítások az érzékenységvizsgálathoz ( $\Delta cs$  az átlagos szelvénytávolság)

$W_{IW}$ [m]	3,0	<b>5,0</b>	8,0
$L_{IW}$ [ $\Delta cs$ ]	2,5	<b>3,5</b>	4,5
$p$ [m]	1,0	<b>1,5</b>	2,0

### 3.3.1 Interpolációs ablak szélességének ( $W_{IW}$ ) hatása

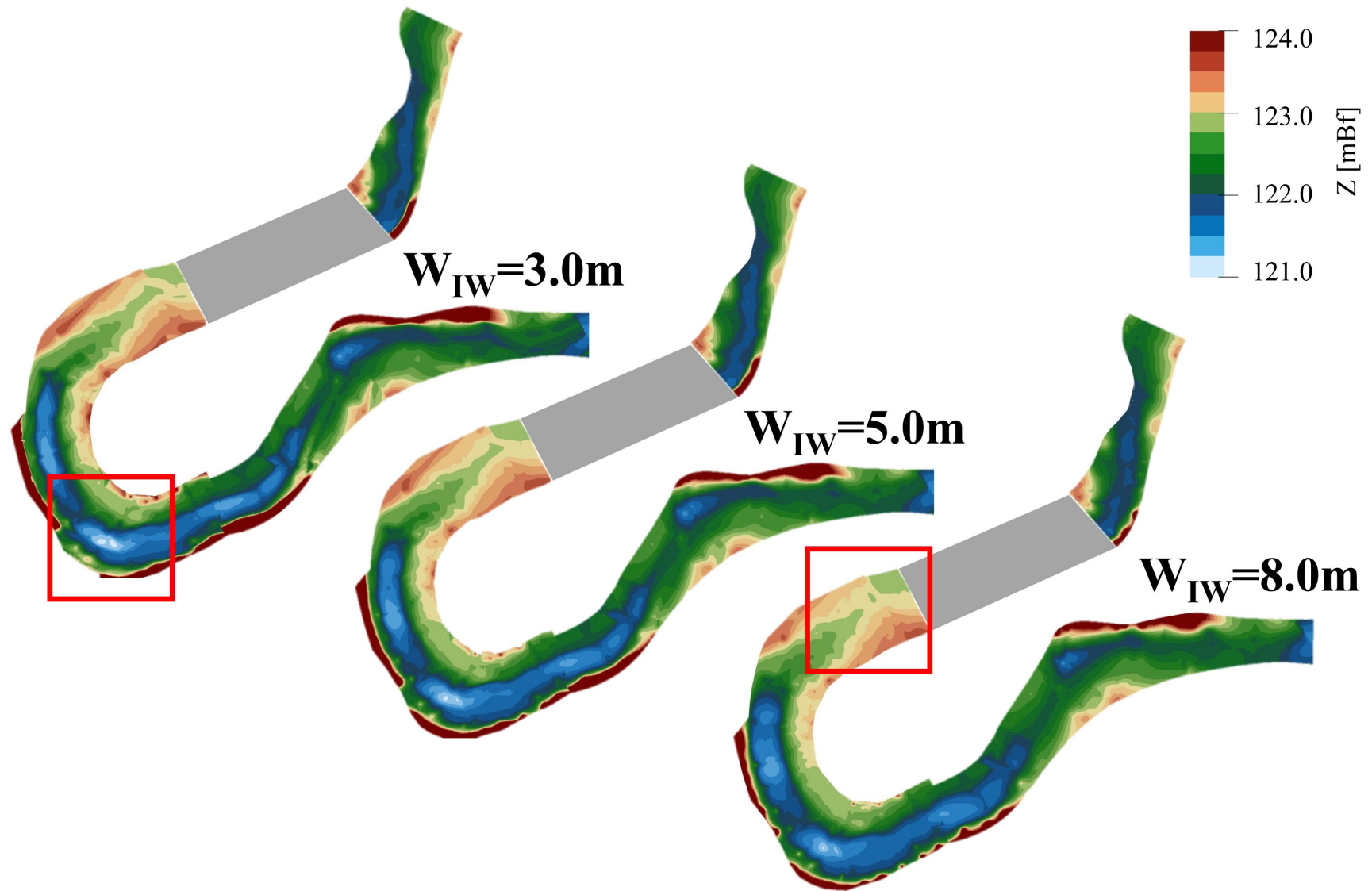
Az interpolációs ablak szélessége befolyásolja, hogy az interpoláció során a keresztmetszetekből hány darab pontot veszünk figyelembe. Az IW szélesség meghatározása függ a folyó szélességétől és a pontok közötti távolságtól. A  $W_{IW}$  referenciabeállítása esetemben 5 méter, amelyet az érzékenységvizsgálatkor 3 m, illetve 8 m értékre módosítottam.

A becsült sűrűségfüggvény alakjáról látható, hogy az adatok szórása nem egyenletes, egyes részeken jól simul az átállított érték a referenciához, más részeken felül- vagy alulbecslést okoz. 123 mBf értékig  $W_{IW}=8$  m beállítás nagyobb becsült sűrűségeket eredményez, 125 mBf felett  $W_{IW}=3$  m számít több pontot.



15. ábra: Becsült sűrűségfüggvények eltérő interpolációs ablak szélességek esetén.

A 16. ábra a generált medertérképeket jeleníti meg, amelyek közel egybevágó színezésűek.  $W_{IW}=3$  m esetén alacsonyabb pontok láthatóak a kimélyülésnél, illetve  $W_{IW}=8$  m beállításnál egy anomália 123 mBf magasságnál.



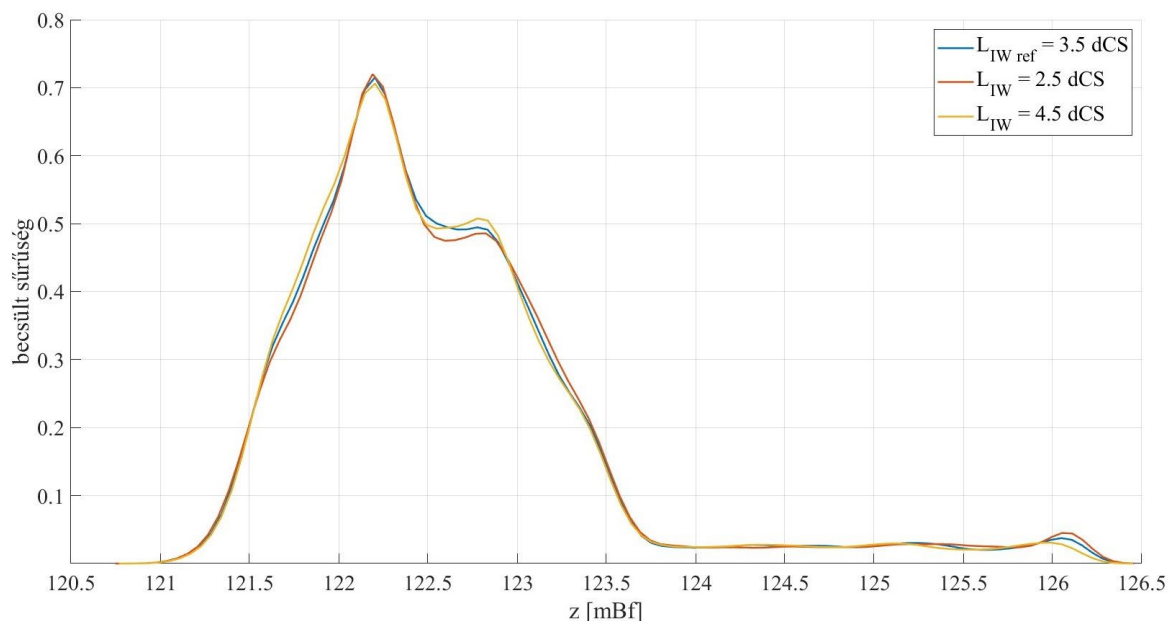
16. ábra: Az IW szélességének paramétereivel generált térképek. Középen a referencia DTM, piros kerettel az eltérések.



### 3.3.2 Interpolációs ablak hosszának ( $L_{IW}$ ) hatása

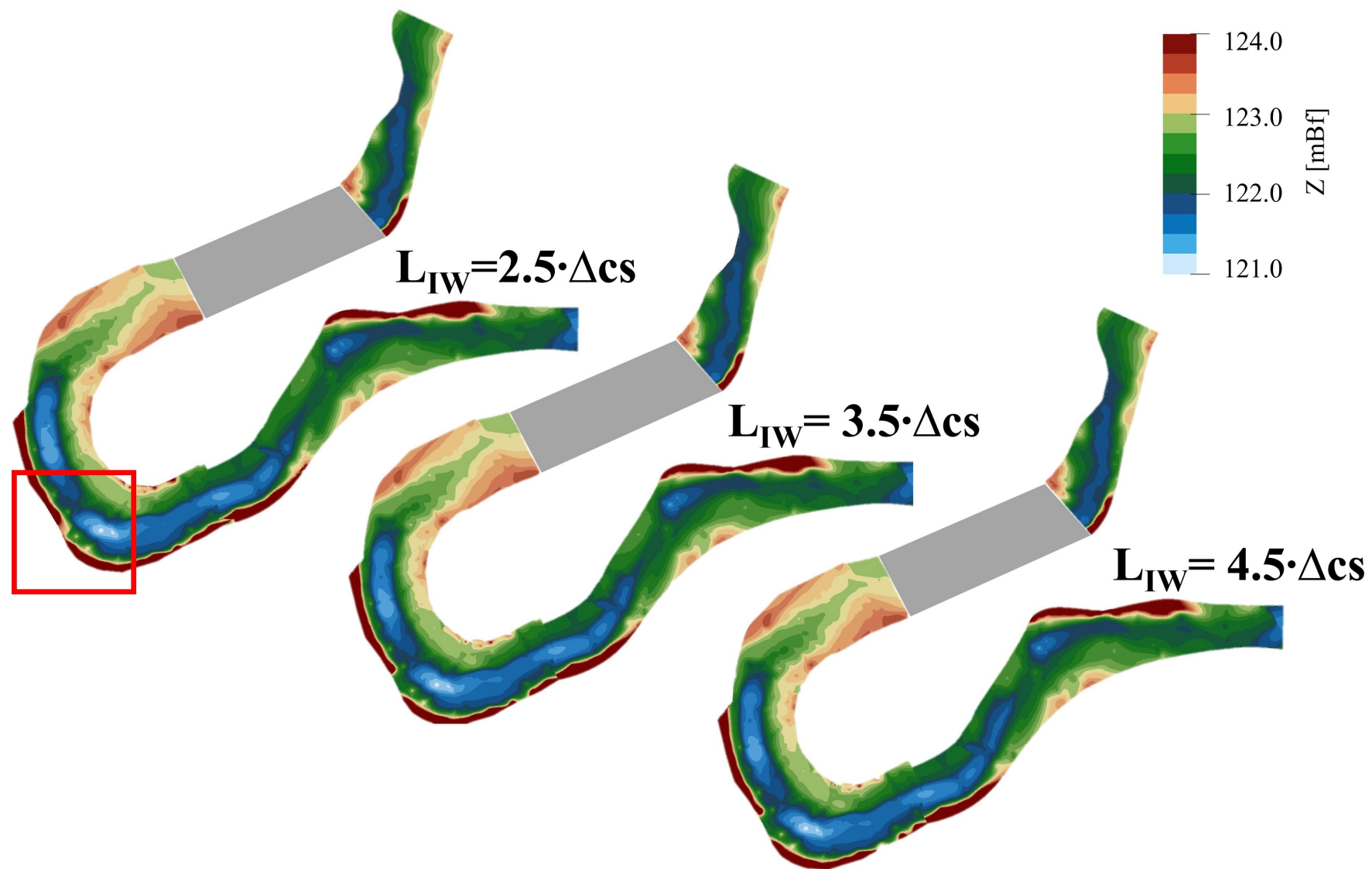
Az interpolációs ablak hosszúsága szintén szabályozza, hogy az eljárás során hány darab keresztmetszetet tartalmaz a keresési terület. Emiatt a méretét az átlagos szelvénytávolsággal arányosan ( $\Delta cs$ ) adjuk meg, és legalább olyan hosszúnak kell beállítani, hogy két egymást követő keresztmetszet beleessen. Mégis túl nagy  $IW$  esetén a számítás eredményére a távoli mérések is hatással lesznek, illetve a futtatás időigényesebbé válik.  $L_{IW}$  érzékenységvizsgálatok az alábbi hosszúságú ablakokat teszteltem:  $2,5\Delta cs$ ;  $3,5\Delta cs$ ;  $4,5\Delta cs$ . Az átlagos szelvénytávolság értékét a sűrűn felmért területen 10 méterben, a ritkábban mért területeken 15 méterben határoztam meg.

A becsült sűrűségfüggvények közötti eltérések nem számottevők, a  $W_{IW}$  szélességhez hasonlóan 123 mBf értékig a nagyobb méretű  $L_{IW}=4,5\Delta cs$  beállítás okoz magasabb becsült sűrűséget, 125 mBf felett pedig a kisebbik,  $L_{IW}=2,5\Delta cs$ .



17. ábra: Becsült sűrűségfüggvények eltérő interpolációs ablak hosszúságok esetén.

Az  $IW$  hosszúságának kisebb érzékenysége bizonyítja a folyó anizotróp tulajdonságát. Emiatt a 18. ábrán lévő DTM-eken is kevesebb eltérés jelenik meg.  $L_{IW}=2,5\Delta cs$  esetén szofisztikáltabb eredmények fordulnak elő a partvonal eróziójának környezetében.

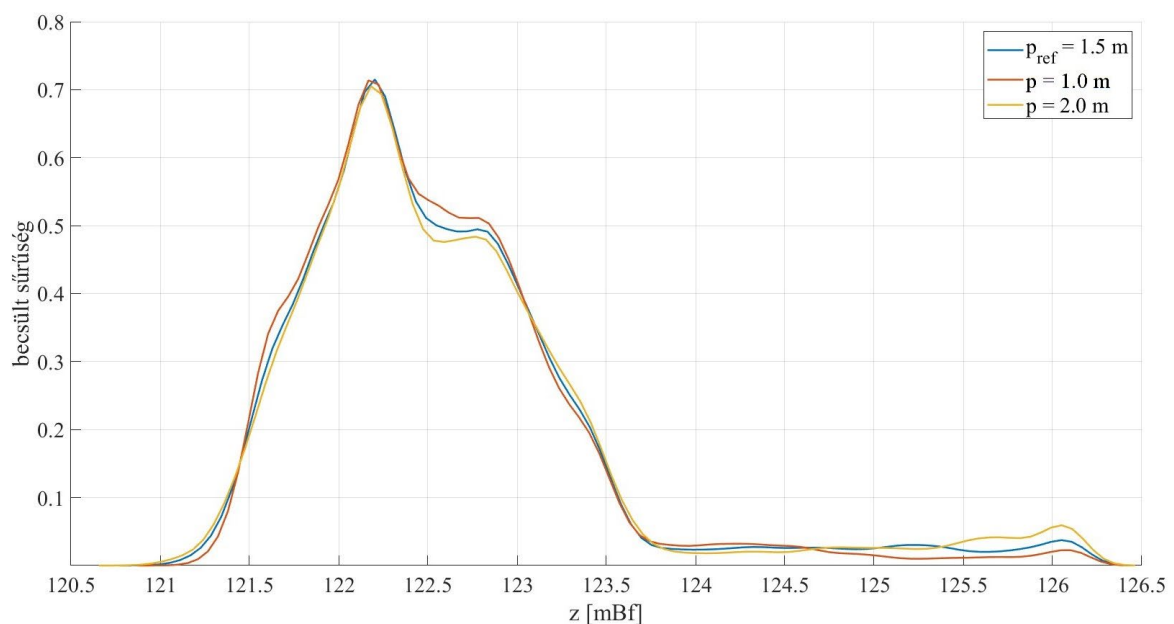


18. ábra: Az IW hosszúságának paramétereivel generált térképek. Középen a referencia DTM, piros kerettel az eltérések.

### 3.3.3 Inverz távolság súly hatványkitevő ( $p$ ) hatása

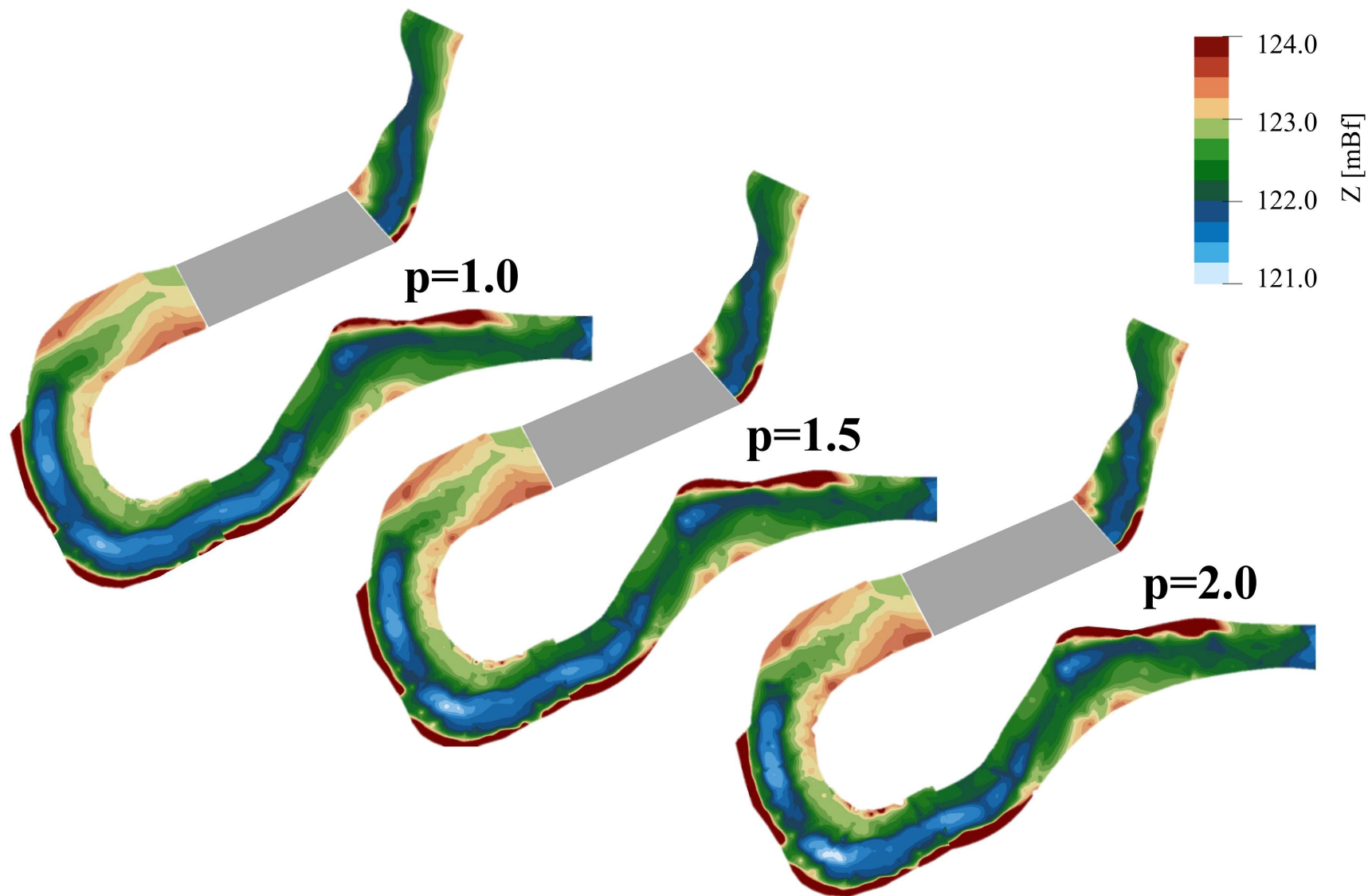
Az inverz távolság alapú interpoláció elemi paramétere a  $p$  hatványkitevő, amely megadja, hogy az egyes pontok távolságának reciprokának hányadik hatványa eredményezi az adott pont súlyát. Az analízis során háromféle súlytényezőt teszteltem, referenciaként 1,5; továbbá 1,0 és 2,0 értékeket.

Mivel  $p$  értéke hatványkitevőként szerepel az interpolációs eljárásban, ezért az általam vizsgált intervallumon nagy eltérések jelentkeztek. A sűrűségfüggvényen megfigyelhető, hogy a három görbe hasonló alakú, mégis kevesebb helyen simul a referenciaértékhez a két módosítás.



19. ábra: Becsült sűrűségfüggvények eltérő súly hatványok esetén.

A 20. ábra medertérképei jól szemléltetik az eltéréseket a különböző  $p$  értékek esetén. A bal oldali  $p=1,0$  geometriája kevésbé osztályozott színezésű, mint a referencia. A jobb oldali  $p=2,0$  esetén még határozottabb élek láthatóak.

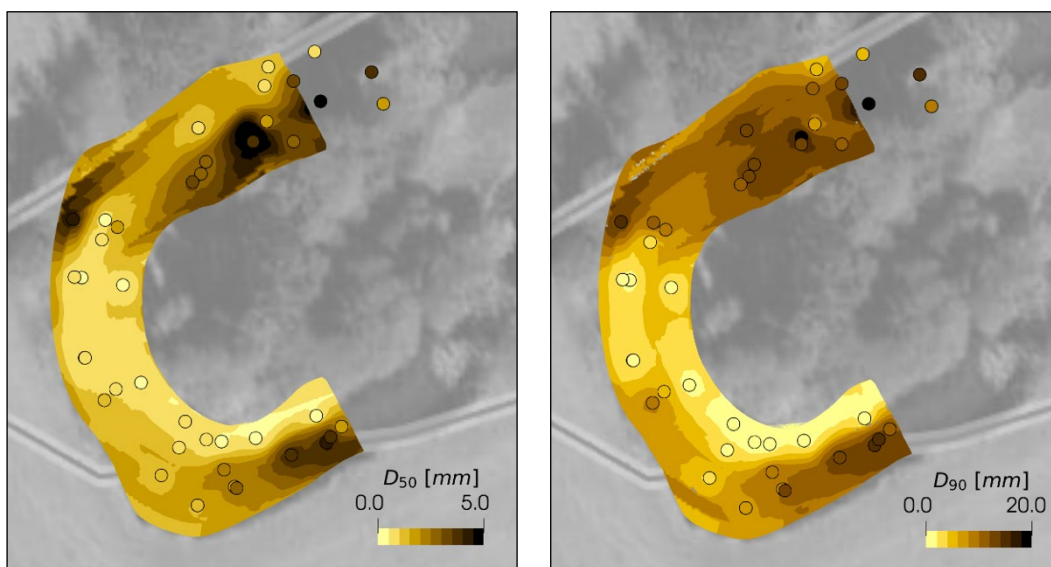


20. ábra: Az inverz távolság súlyainak paramétereivel generált térképek. Középen a referencia DTM.

#### 4. DISZKUSSZIÓ

A WALID módszer érzékenységvizsgálata során próbált beállítások a referenciatérképhez hasonló DTM-eket generáltak, általában csupán néhány lokális eltérést lehetett észrevenni. Az általam elemzett értékek a súlytényező ( $p$ ) változtatásának hatását mutatták nagyobbban. Azonban szélesebb intervallumok vizsgálata folyamán az IW méretei befolyásolják jobban az interpolációt, és elmondható, hogy a WALID módszer kevésbé érzékeny a súlyexponensre. Valamint a negyedik (jelen dolgozatban nem vizsgált) szabad paraméterre, a keresztirányú súlymódosító exponensre ( $q$ ) szinte teljesen érzéketlen (Fleit, 2023). Összességében kijelenthető, hogy a WALID módszer mérsékelt érzékenységet mutat a szabad paramétereire – azok jelentős változtatása esetén is realiztikusabb medermodelleket kaptam, mint a széles körben elterjedt lineáris interpolációval.

A WALID eljárást elsősorban DTM generálásra fejlesztették, módszertana mégis képes egyéb bemenő adatból megbízhatóan térképet generálni. Erre végeztünk egy kísérletet a mederanyagmintákkal. Az Ipolynál rögzítettük a mintavételi helyek koordinátáit, majd ebből előállt az adott EOVS koordinátákban jellemző  $D_{50}$  és  $D_{90}$  szemcseméret. Ezek pozícióját korongok jelölik a 21. ábrán, amelyekre a WALID egy folytonos felületet interpolált. A mederanyag mintázás időigényesebb folyamat – nemcsak terepen, hanem leginkább labormunkákkal kiegészítve –, ezért ilyen adatból kevesebb áll rendelkezésre, pedig térben változatos mintázat alakulhat ki, főleg kanyarulatok esetén. A helyi hidromorfológiai viszonyok megértéséhez, hidrodinamikai modell paraméterezéshez fontos információkat jelentenek az ehhez hasonló térképek (Fleit és Baranya, 2022).



21. ábra: Jellemző szemcseméret ( $D_{50}$ ,  $D_{90}$ ) térképek, melyeket Magos István kutatása eredményezett.

## 5. ÖSSZEFOGLALÁS

TDK kutatásomat az Ipoly egy Hont térségében található túlfejlett kanyarulatának terepi mérési adataira alapoztam. A Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék infrastruktúráját az Általános és Felsőgeodézia Tanszékének eszközeivel kiegészítve tanszéki kollégákkal és hallgatótársakkal két mérési kampány során mértük fel a folyó morfológiai állapotát. A medergeometriát szelvénymenti, valamint állóhajós ADCP mérések alapján rögzítettük, a hullámtér adatait pedig valós időben centiméteres helymeghatározási pontosságú eljárással, pontszerűen dokumentáltuk.

A vizsgálataim során a mederfelszín adatok alapján különböző térbeli interpolációs módszereket elemeztem. A hagyományos térbeli eljárásokat érdemes kiegészíteni folyóspecifikus jellemzőkkel ahhoz, hogy pontos medergeometriai térképet lehessen előállítani. Ilyen módszer például az újszerű WALID, amelynek tesztelését végeztem a kutatásomban. A technikát véletlenszerűen kiszűrt mérési pontok segítségével igazoltam, majd összehasonlítottam a lineáris interpoláció alkalmazásával – amely bár egy precíz közelítés, most mégis gyengébb teljesítményt mutatott, az anizotrópia és a mérési pontok inhomogén eloszlása miatt. A négyzetes középhiba (RMSE) értéke a WALID módszer fölényét mutatta a lineáris interpolációhoz képest. Megállapítható, hogy az új módszer komplex folyami környezetben is megbízható, interpolációs anomáliáktól mentes medertérképet generált.

Az érzékenységvizsgálatokban változtatott szabad paraméterek mérsékelten befolyásolták a WALID interpolációval generált adatokat, amely a módszer robusztusságot igazolja. Az ismertetett eljárás még további fejlesztési lehetőségeket tartogat, amelyek fontosak a megbízható medertérképek jelentősége miatt.

### 5.1 KITEKINTÉS, TOVÁBBI VIZSGÁLATI CÉLOK

A sikeres mérési kampány eredményeivel, valamint a WALID módszer alkalmazásával pontos medertérképet tudtam szerkeszteni az Ipoly folyó egy komplex, meanderező szakaszára. Az eljárást szeretném alkalmazni árhullámok mederváltoztató hatásának pontos felmérésére is. A későbbi kutatásomban szeretném 2D vagy 3D áramlásmodellezéssel vizsgálni az Ipoly ezen túlfejlett kanyarú szakaszát. Ehhez első fontos lépésként – dolgozatom eredményeként – már rendelkezésre áll egy pontos és realisztikus mederdomborzati térkép. Az így felépített modellt kalibrálni és validálni lehetne olyan mért hidrodinamikai adatokkal, amelyeket Magos István hallgatótársam TDK-dolgozata összegez.

Érdemes a WALID előnyeit alkalmazni olyan területeken, mint például a történelmi adatok – régi VO szelvények – feldolgozása, mert az új módszer alkalmas lehet ritkásabban felmért folyószakaszok térképezésére is.

A térbeli interpolációs módszerek vizsgálatát fontosnak tartom a továbbiakban, mert a pontos domborzat elengedhetetlen a mederátrendeződés tanulmányozásában. A folyóspecifikus eljárás után rendelkezésre áll egy valóság-hű térkép, így egy jövőbeli – akár árhullám utáni – újabb mérési kampánnyal összehasonlíthatóak az eredmények. Ezáltal az Ipoly komplex meanderének változása elemezhető.



## **KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS**

Köszönetemet szeretném kifejezni:

Dr. Török Gergelynek, aki konzulensemként lehetőséget adott a kutatásra, a terepi mérések megtapasztalására, illetve irányította és segítette a dolgozatomat.

Dr. Fleit Gábor konzulensem fáradhatatlan munkáját, aki bevezetett a térbeli interpoláció, illetve a WALID módszer világába, és rengeteg szakmai segítséget nyújtott.

Rehák András tanszéki mérnöknek, a terepi mérések kivitelezésében.

Dr. Égető Csaba adjunktusnak és a BME Általános és Felsőgeodézia Tanszékének, hogy a terepi mérésekre eszközt biztosítottak, illetve azok használatában segítséget adtak.

Takács Attilának, a Közép-Duna-völgyi Vízügyi Igazgatóság szakági vezetőjének az adatszolgáltatás terén nyújtott segítségével.

A kutatást az MTA Fenntartható Fejlődés és Technológiák Nemzeti Program (FFT NP FTA) támogatta.

## FELHASZNÁLT IRODALOM

- Ádány, Sz., 2015. A többsugaras mederfelmérési módszer vizsgálata a Duna példáján keresztül. BSc diplomamunka. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
- Allen, P. M., Arnold, J. G., Byars, B. W. 1994. Downstream channel geometry for use in planning-level models, *Water Resources Bulletin*, 30 (4), 663-671.
- Baranya, S., Fleit, G., Józsa, J., Szalóky, Z., Tóth, B., Czeglédi, I., Erős, T., 2018. Habitat mapping of riverine fish by means of hydromorphological tools. *Ecohydrol.* 11. <https://doi.org/10.1002/eco.2009>
- Bures, L., Roub, R., Sychova, P., Gdulova, K., Doubalova, J., 2019. Comparison of bathymetric data sources used in hydraulic modelling of floods. *J. Flood Risk Manag.* 12. <https://doi.org/10.1111/jfr3.12495>
- Caviedes-Voullième, D., Morales-Hernández, M., López-Marijuan, I., García-Navarro, P., 2014. Reconstruction of 2D river beds by appropriate interpolation of 1D cross-sectional information for flood simulation. *Environmental Modelling & Software* 61, 206–228. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2014.07.016>
- Duna-Ipoly Nemzeti Park weboldal. <https://www.dunaipoly.hu/hu/helyek/vedett-teruletetek/duna-ipoly-nemzeti-park/az-ipoly> (letöltve: 2023.10.26.)
- Evans, I. S., 1980. An integrated system of terrain analysis and slope mapping. *Zeitschrift für Geomorphologie. Supplementband Stuttgart.* 1980 (36), 274-295
- Fleit, G., (bírálat alatt) Windowed Anisotropic Local Inverse Distance weighted (WALID) interpolation method for riverbed mapping. *Journal of Hydrology*
- Fleit, G., Baranya, S., 2022. Egységes digitális terepmodellek készítése változó részletességű és minőségű mederfelmérések alapján. XXXIX. Országos Vándorgyűlés (MHT), Nyíregyháza, 2022. július 6–8.
- Hajnal, G., Koris K., 2014. *Hidrológia I. Fizikai hidrológia.* BME Vízépítési és Vízgazdálkodási Tanszék, Budapest.
- Hutchinson, M. F., 1989. A new procedure for gridding elevation and stream line data with automatic removal of spurious pits. *Journal of Hydrology*, 106(3), 211–232. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(89\)90073-5](https://doi.org/10.1016/0022-1694(89)90073-5)

- Hutchinson, M.F., Bischof, R.J., 1983. A new method for estimating the spatial distribution of mean seasonal and annual rainfall applied to the Hunter Valley, New South Wales. *Australian Meteorological Magazine*, 31: 179-184.
- Julien, P. Y., Wargadalam, J., 1995. Alluvial Channel Geometry: Theory and Applications. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(4), 312–325.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1995\)121:4\(312\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1995)121:4(312))
- Kardos, M., 2013. Interpolation of river's morphological model from cross sectional survey. In *Proceedings of the 2nd Conference of Junior Researchers in Civil Engineering, Budapest 2013.06.17-18.*, pp. 243-248.
- Kelly, R. E., McConnell, P. R. H., Mildberger, S. J., 1977. The Gestalt photomapping system. *Photogramm. Eng. Remote Sensing*, 43(11): 1407-1417.
- Knisel, W.G. (Editor), 1980. CREAMS – A field scale model for Chemicals, Runoff, and Erosion from Agricultural Management Systems. USDA Conserv. Res. Rep. 26, 643 pp.
- Konecny, G., Lohmann, P., Engel, H., Kruck, E., 1987. Evaluation of SPOT imagery on analytical photogrammetric instruments. *Photogramm. Eng. Remote Sensing*, 53(9): 1223-1230.
- Li, Z., Peng, Z., Zhang, Z., Chu, Y., Xu, C., Yao, S., García-Fernández, Á.F., Zhu, X., Yue, Y., Levers, A., Zhang, J., Ma, J., 2023. Exploring modern bathymetry: A comprehensive review of data acquisition devices, model accuracy, and interpolation techniques for enhanced underwater mapping. *Frontiers in Marine Science* 10.  
<https://doi.org/10.3389/fmars.2023.1178845>
- MATLAB-Mathworks weboldal. <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/griddata.html>  
 (letöltve: 2023.10.17.)
- Merwade, V. M., 2002. Development of a methodology for accurate representation of rivers in two and three dimensions. *Disszertációs javaslat*.
- Merwade, V. M., Maidment, D. R., Goff, J. A., 2006. Anisotropic considerations while interpolating river channel bathymetry. *Journal of Hydrology*, 331(3), 731–741.  
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2006.06.018>
- My UNIGIS weboldal. <https://myunigis.wordpress.com/2015/06/18/tin-triangulated-irregular-network/>  
 (letöltve: 2023.10.26.)

- Osting, T. D., 2004. An improved anisotropic scheme for interpolating scattered bathymetric data points in sinuous river channels. Kutatási jelentés.
- Shepard, D., 1968. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data, in: Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, pp. 517–524. <https://doi.org/10.1145/800186.810616>
- Tesche, T. W., Bergstrom, R. W., 1978. Use of digital terrain data in meteorological and air quality modelling. Photogrammetric. Engineering and Remote Sensing, Vol. 44, No. (12): pp. 1549-1559.
- Tobler, W. R., 1970. A Computer Model Simulating Urban Growth in the Detroit Region. Economic Geography, 46. sz., 234–240.
- Török, G. T., Józsa, J., Baranya, S., 2019. Validation of a novel, shear Reynolds number based bed load transport calculation method for mixed sediments against field measurements. Water 11, 1–20. <https://doi.org/10.3390/w11102051>
- Trezise, P. H., Hutchinson, M. F., 1986. The development of a national digital elevation model. Proc. 6th Aust. Cartogr. Conf. (Austra Carto Two), Melbourne, 1985, Aust. Inst. Cartogr.
- Wheaton, J. M., Brasington, J., Darby, S. E., Sear, D. A., 2009. Accounting for uncertainty in DEMs from repeat topographic surveys: improved sediment budgets. Earth Surf. Processes Landforms. <https://doi.org/10.1002/esp.1886>