

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Építőmérnöki Kar

Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

Tudományos Diákköri dolgozat

Készítette:

Rosa Richárd Joao - IO70FN
építőmérnök hallgató, MSc II. évfolyam

Konzulens:

Dr. Hincz Krisztián Gyula
BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Budapest, 2021. november 2.

Absztrakt

A múlt század második felében erőteljes igény jelent meg a nagy alapterületű, elsősorban sportrendezvények céljára szolgáló zárt csarnokok iránt, mely trend azóta is folyamatosan tart. A különféle tartószerkezeti megoldások között az 1988-as szöuli olimpián mutatkozott be a tensegrity szerkesztési elven alapuló Geiger-féle kábelkupola-rendszer. Ezen tartószerkezeti rendszer kedvező statikai viselkedése és anyagtakarékossága mellett könnyű szerelhetősége miatt is hamar közkedvelté vált. Később sorra születtek hasonló létesítmények, melyek közül kiemelkedőnek számított az atlantai Georgia Dome, mely átadásakor világrekordernek számított saját fesztávolságával.

A merőben új tartószerkezeti rendszer eltért az addig megszokott kialakításokhoz képest statikai viselkedését tekintve. A szerkezet előfeszítés nélkül infinitezimálisan labilis térbeli rácsrendszer, melynek alaktartóságához sajátfeszültségrendszer létrehozása szükséges. Noha egyszerű húzott-nyomott szerkezeti elemekből felépülő tartószerkezetről beszélünk, új számítási módszerek szükségességét vonta maga után megjelenése. Ennek oka egyrészt a kábelelemek nyomóerővel szembeni ellenállásának hiánya, mely anyagi nemlinearitást okoz. Másrészt a nagy szerkezeti mozgások miatt geometriai nemlinearitás is jellemzi a viselkedést. Így a hagyományos mátrix-elmozdulásmódszeren alapuló lineáris vége-selemes számítások nem felelnek meg az analízis végrehajtására.

A dinamikus ellazítás nevű, fokozatosan közelítő iteratív eljárás megfelelő megoldást adott a szerkezeti analízis elvégzésére. A számítás során a szerkezet fiktív mozgás révén jut el a keresett statikus egyensúlyi állapotába valamilyen megfelelően megválasztott csillapításnak köszönhetően. Így a megoldás során elegendő az egyes csomóponti szabadságfokok mozgásegyenleteit felírni és megoldani, nincs szükség a szerkezet merevségi mátrixának az előállítására. Ezen tulajdonsága miatt különösen kedvelt analízistípus napjainkban nagy elmozdulásokat végző kötél- és ponyvaszerkezetek harmadrendű vizsgálatainak végrehajtására.

A kutatás első részében egy dinamikus ellazításon alapuló numerikus modell létrehozása volt a feladatom kábelkupolák parametrikus vizsgálatának numerikus alapon történő végrehajtásához. A modellt a *Rhinoceros 3D* CAD szoftver *Grasshopper* almoduljában hoztam létre, mely egy C# programozási nyelven alapuló vizuális programozási fejlesztőkörnyezet. A hagyományos fejlesztőkörnyezetekhez képest különösen alkalmas paraméteres vizsgálatok végrehajtásához interaktív felületi kialakítása miatt.

Az elkészített eljárásban vizsgálható, hogy a szabadon felvehető paraméterek, mint a sugaras kiosztású szegmensek száma, a belső gyűrűk száma, a nyomott oszlopok hossza, az előfeszítés mértéke vagy a keresztmetszetek normálmerevsége milyen módon hatnak a szerkezet viselkedésére.

Az általam elkészített parametrikus eljárás verifikálását a szakirodalomban fellelhető, hasonló szerkezeteken végzett kísérletek eredményei alapján végeztem el. Az eljárás helyes működésének igazolása után tensegrity szerkezetek paraméteres vizsgálatait végeztem el.

Abstract

From the middle of the 20th century an urging need for wide spanned closed areas, especially in sports facilities has increased. A wide range of structural solutions were created for this purpose, one of them is the so-called Geiger cable dome system inspired by the tensegrity structural form. The first structure of many was presented in Seoul in the 1988 Summer Olympics. The most notable example of this structural form is the Georgia Dome, which was a record holder with its diameter at its completion.

This system was a wholly new structural form due to its fundamentally new static behavior. The cable dome is not infinitesimally rigid without a properly selected prestressing. Although the structure only consists simply 1-dimensional bar elements, the conventional numerical analysis methods cannot be used due to the nonlinear behavior of cable elements caused by the lack of resistance to compressive forces and the geometric nonlinearity due to the large structural motions. Thus, the conventional linear finite element methods are not acceptable.

The Dynamic Relaxation Method (DRM) is a favorable solution technique for the analysis of tensegrity structures. A fundamentally different approach where the structure's fictitious motion from its initial unloaded state is traced step by step until, due to damping, the static equilibrium is reached. The method requires only the solution of simple equations of motion for each degree of freedom, thus the structure's stiffness matrix does not have to be compiled. That explains the popularity of the method when it comes to numerical analysis of cable and tensile structures.

The objective of my study was to compute a numerical model using the dynamic relaxation method for the investigation of Geiger cable domes. The programming was done in Rhinoceros 3D's Grasshopper, a visual programming language which has become widely used nowadays amongst the structural engineers.

The verification of the model was based on experimental studies found in the literature. After the verification parametric investigations of tensegrity domes were carried out. The main purpose of the investigation was the effect of optional parameters of the structures to the overall structural stiffness.

A large number of parameters can be examined such as the number of inner rings, the number of segments, the length of the columns, the prestressing or the applied structural elements.

Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés.....	5
1.1.	Tensegrity szerkezetek eredete.....	5
1.2.	Szerkezeti viselkedés bemutatása.....	6
1.2.1.	Mechanizmusok kezelése, nagy elmozdulások hatása.....	7
1.2.2.	Kötélszerkezetek csoportosítása.....	9
1.3.	Néhány megvalósult szerkezeti példa.....	11
2.	A dolgozat célja, felépítése.....	12
3.	Kábelkupola-rendszerek statikai számítása.....	13
4.	Numerikus számítási módszerek elméleti háttere.....	16
4.1.	A dinamikus ellazítás nevű eljárás.....	16
4.2.	Erőintenzitás módszer.....	19
5.	A numerikus modell bemutatása.....	20
5.1.	Geometriai- és mechanikai modell felépítése.....	21
5.2.	Terhek modellezése.....	22
5.3.	Tömegek és támasztások modellezése, csillapítás figyelembevétele.....	23
5.4.	Anyagmodell.....	23
5.5.	Egyéb mennyiségek szerepeltetése a modellben.....	24
5.6.	Számítás lépéseinek bemutatása egy iterációs lépésen belül.....	24
5.7.	Numerikus stabilitás és konvergencia.....	26
6.	Modell verifikálása.....	27
6.1.	Kábelkupola vizsgálata.....	27
6.2.	Rácsostartó vizsgálata.....	33
7.	Parametrikus vizsgálatok bemutatása.....	35
7.1.	Előfeszítés hatásának vizsgálata.....	36
7.2.	Nyomott belső gyűrű alkalmazása.....	42
7.3.	Oszlopmagasság hatásának vizsgálata.....	43
7.4.	Féloldalas teher hatása.....	44
8.	Konklúziók, összefoglalás.....	47
	Irodalomjegyzék.....	48
	Mellékletek.....	50
	Dinamikus ellazítás C# programkörnyezetben.....	50
	Elméleti alak meghatározása.....	50
	Állapotváltozás-vizsgálat.....	54

1. Bevezetés

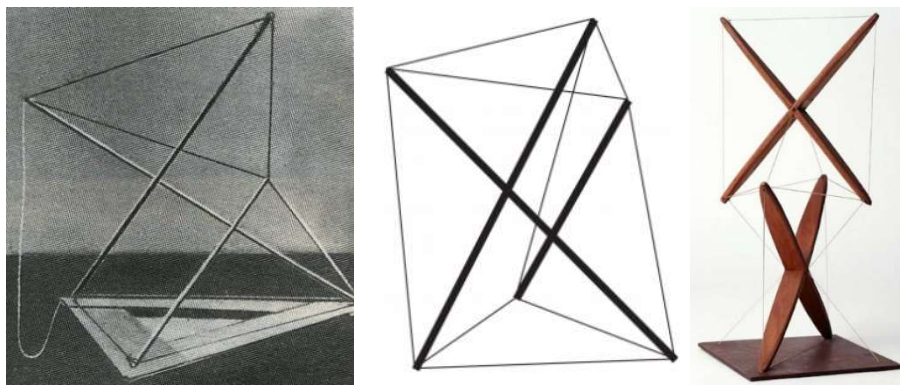
1.1. Tensegrity szerkezetek eredete

A tensegrity szerkezeti rendszer egy igen fiatal tartószerkezeti kialakítás alig 60 éves múltjával. Ebből adódóan viselkedését tekintve rengeteg a megválaszolatlan kérdés. Emellett eredete sem egyértelmű, egymástól független kutatások révén jelent meg a múlt század közepén a konfiguráció.

A tensegrity szerkesztési elv nyomán többnyire *Richard Buckminster Fuller* [1] amerikai építész mérnök és egyetemi tanár nevével találkozunk a szakirodalomban, akinek a szerkezeti rendszer kidolgozása köszönhető. Maga az elnevezés is tőle származik. *Kenneth Duane Snelson*ra [2], *Fuller* egy diákjára nagy hatással volt munkássága, neki tulajdonítható az első ilyen valós szerkezet megalkotása. Kezdetben *Fuller* elismerte *Snelson* érdemeit és hozzájárulását a tensegrity szerkesztési elv kidolgozásában, később azonban magának tulajdonította a teljes felfedezést, több mint 30 éves vitát elindítva ezzel. [3]

Fullerrel és *Snelsonnal* egy időben, de tőlük függetlenül, a debreceni születésű, magyar származású *David Georges Emmerich* [4] szintén előállt a szerkezeti kialakítás ötletével, egy lett-orosz művész, *Karlis Johansons* munkája révén. *Johansons* az 1920-as években egy merőben hasonló szerkezeti kialakítást valósított meg, mely „*Gleichgewichtkonstruktion*” vagy angolul „*Equilibrium structure*” néven ismert.

A fent említettek közül *Snelson* elsősorban művészi oldalról közelítette meg a problémát, *Emmerich* és *Fuller* azonban tudományos alapokra helyezték vizsgálataikat, a szerkezetek viselkedésének elméleti háttérével is foglalkoztak. Az első tensegrity szerű alkotásokat az 1.1. ábra mutatja. *Johansons* esetében hiányzott az előfeszítés a szerkezetből, ezért ez nem tekinthető a mai értelemben vett tensegrity szerkezetek elődjének. Az ábrán látható laza kábel a szerkezet mozgathatóságáért, más egyensúlyi állapotba hozásáért felelt.



1.1. ábra. Karlis Johansons - „*Gleichgewichtkonstruktion*” [5] (balra),
Emmerich - „*Elementary Equilibrium*” [6] (középen),
Snelson - „*X-column*” [7] (jobbra)

1.2. Szerkezeti viselkedés bemutatása

A tensegrity szerkezetek csoportjába húzott és nyomott szerkezeti elemekből felépülő tartószerkezetek tartoznak. A kialakítás lényege, hogy a szerkezeti rendszer egyes normálerővel terhelt elemei a terheléstől függetlenül, vagy csak nyomóerővel, vagy csak húzóerővel terheltek. A nyomott elemek egymástól függetlenek, csak húzott elemekkel vannak kapcsolatban a rendszerben. Ily módon jelentősen kedvezőbb kapcsolatok alakíthatók ki, gazdaságosabb tartószerkezeti rendszer hozható létre.

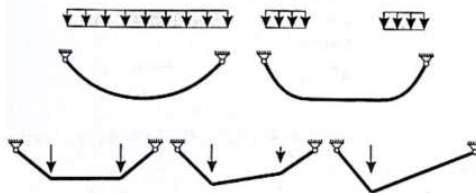
A szerkezeti elemek topológiája alapján bármely csomópontból bármely csomópontba eljuthatunk húzott elemek mentén a szerkezeten belül. Ebből a húzott elemekben megfigyelhető folytonosságból ered a szerkezeti rendszer elnevezése (*tension-integrity*).

A tensegrity szerkezetek viselkedésének megértéséhez érdemes a tartószerkezetet először tágabb szerkezeti csoportba besorolni, és a viselkedési jellemzőket onnan eredeztetve megállapítani. Az alkalmazott szerkezeti elemek túlnyomórészt kötelek, néhány nyomás felvételére is alkalmas rúdelemmel kiegészítve, így adja magát a kötél szerkezetek csoportjába való besorolás.

A kötél szerkezetek viselkedése jelentősen eltér a hagyományos rúdelemekből felépített rácsostartók viselkedésétől azonos topológiai kialakítás esetén is. Alkalmazásuk főbb előnye az olcsó árak, a kábelek tetszőleges hosszban való gyárthatósága és kedvező szilárdsági tulajdonsága. Ugyanakkor az előbb említett eltérő viselkedés miatt számításuk általában összetettebb feladatot jelent.

Statikai viselkedésük több dologban is eltér a hagyományos szerkezetekétől, ezek közül az egyik legfontosabb a kötél szerkezetek nagy mozgásokra való hajlama. Ennek okai között szerepel a kötélelem nyomással szembeni ellenállásának hiánya, a kötél szerkezetek lapos alakja miatti kicsi harántirányú merevség, a szerkezetek statikai és kinematikai osztálya, valamint a kábelek szerkezeti acélanyagokhoz képest kedvezőtlenebb szilárdság/merevség aránya. Utóbbi miatt gyakran előfordul, hogy a mértékadó tervezési helyzet a lehajlásra való megfelelés, mely használhatósági határállapot, szemben a hagyományos tartószerkezetekkel, ahol jellemzően a teherbírási szempontok a meghatározóak.

Külön magyarázatot érdemel ezek közül a nyomással szembeni ellenállás hiánya. Ennek szemléltetése egy két végén rögzített, belógatott kötélből kialakított szerkezet esetén végezhető el legjobban. A kialakítás egy adott teherelrendezést csak a neki megfelelő kötélgörbe alak szerint képes elviselni. Ilyen összetartozó teherelrendezésekre és kötélalakokra mutat példát az 1.2. ábra.



1.2. ábra. Különböző eloszlású terhekhez tartozó kötélalakok. [8]

Mivel minden teher típushoz más és más kötélalak tartozik, és ezek között az alakok között jelentős eltérés lehet, a teher változásával jellemzően nagy mozgások révén jut el a szerkezet az új egyensúlyi helyzetébe. Ez előfeszítéssel, leterheléssel vagy több kötélt együttes

alkalmazásával kiküszöbölhető. Utóbbi esetben úgynevezett tartó- és feszítőköteleteket alkalmazunk az eltérő terhek felvételére.

A kötélszerkezetek statikai és kinematikai osztályba sorolása szerint előfeszítés nélküli állapotban megkülönböztetünk alaktartó- és alakjukat változtató szerkezeteket. Az alaktartó szerkezetek előfeszítés nélkül is, eredeti helyzetükben képesek a terhek hordására. Ilyenkor az egyensúlyi egyenleteknek az eredeti alakban is létezik megoldásuk. Ez statikailag határozott, illetve határozatlan, de nem túlhatározott kialakítások esetén teljesülő feltétel.

Nem alaktartó szerkezetek esetén előfeszítés nélküli állapotban a szerkezet nem képes eredeti helyzetében a terhek viselésére, az egyensúlyi egyenletek egy része ellentmondásra vezet. Ez a statikailag túlhatározott, egyben kinematikailag határozatlan szerkezetek jellemzője. Az egyensúlyi egyenletekben ki nem elégíthető külső- és belső reakcióerőknek megfelelő elmozdulási szabadságfokok értelmében a csomópontok elmozdulnak, végeredményben a szerkezet az eredetitől eltérő állapotban kerül csak újra egyensúlyba.

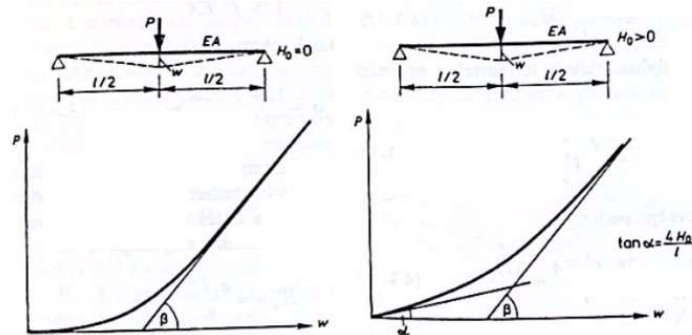
Nem alaktartó szerkezetek esetén az ellenállás nélkül létrejönni képes elmozdulások nagysága alapján beszélhetünk infinitezimális és véges labilitású szerkezetekről, illetve mechanizmusokról. Előbbi esetben a szerkezetek csak az infinitezimális mozgások tartományában mutatkoznak mechanizmusnak, utóbbi csoportban azonban véges nagyságú elmozdulások is létrejöhetnek ellenállás nélkül. Az ilyen alakváltozásokat, melyek során az egyes elemek hossza nem változik nyúlásmentes alakváltozásoknak nevezzük. Ezen problémák általában megfelelően megválasztott előfeszítéssel, illetve leterheléssel kezelhetők.

1.2.1. Mechanizmusok kezelése, nagy elmozdulások hatása

Az előző fejezetben említett problémák ellen megfelelő megoldást nyújthat az előfeszítés, valamint leterhelés, mellyel úgynevezett geometriai merevség adható a szerkezeteknek.

A kötélszerkezetek nyomással szembeni ellenállásának hiánya kiküszöbölhető, ha az előfeszítést úgy vesszük fel, hogy a külső terhekből kialakuló előfeszítés csökkenése kisebb, mint az eredeti feszítőerő. Ilyenkor a szerkezet tisztán húzásokkal képes ellensúlyozni a terheket. Előfeszítés természetesen csak statikailag határozatlan szerkezetek esetében alkalmazható megoldás. Így a szerkezeti besorolás szerinti II. osztályú, statikailag határozatlan, illetve IV. osztályú, statikailag és kinematikailag egyszerre határozatlan és túlhatározott szerkezetek esetén jöhet szóba.

Az előfeszítés alkalmazásával az infinitezimális mechanizmusok stabilizálhatók, a kezdeti zérus merevség az előfeszítéssel arányosan megnő. Az előfeszítés hatása [9] alapján mutatható be szemléletesen. Egy statikailag egyszerre határozatlan és túlhatározott kialakítású vízszintes kötél vagy háromcsuklós tartó, ahol mindhárom csukló egy egyenesre esik, infinitezimális mechanizmus feszítés nélküli állapotban, ugyanis egy tartóközepén elhelyezett függőleges teher a szerkezetben ellenállás nélkül okozza a középső pont eltolódását. Előfeszítés hatására azonban ez az infinitezimális labilitás megszűnik, és kis elmozdulások esetén is megjelenik a szerkezet visszatérítő hatása, a szerkezeti viselkedést leíró erő-elmozdulás karakterisztika kezdeti érintője nem lesz zérus. A viselkedést az *1.3. ábra* szemlélteti.



1.3. ábra. Előfeszítés nélküli (balra) és előfeszítés utáni (jobbra) erő-elmozdulás karakterisztika [9].
A H_0 feszítőerő hatására a jobboldali diagramon a nemzérus α kezdeti érintőből látható, hogy megszűnik az infinitezimális labilitás.

Fontos megjegyezni, hogy az előfeszítésből származó geometriai merevség általában minimum egy, de jellemzően két nagyságrenddel kisebb a szerkezeti elemek alakváltozásából származó valódi merevséghez képest. Emiatt az előfeszítés hatására továbbra sem lesz alaktartó a szerkezet, továbbra is nagy mozgások alakulnak ki. Elvi jelentősége az infinitezimális labilitás megszűnésének szempontjából fontos.

Véges mechanizmusok előfordulhatnak statikailag határozatlan és túlhatározott szerkezetek esetében is. Utóbbi esetben feszítés nem alkalmazható. Ilyenkor megfelelően választott leterheléssel lehet merevvé tenni a szerkezetet. Cél a leterhelés megválasztása során hasonló az előfeszítésnél tárgyaltakkal, miszerint az így kialakuló igénybevételek legyenek nagyobbak, mint az ellentétes értelmű hatások okozta húzóerőcsökkenés a kötelekben.

Szerkezetek vizsgálata során az eddigiek alapján látható, hogy alapvető fontosságú a szerkezet statikai és kinematikai osztályba sorolása. Ez általános esetben a szerkezet egyensúlyi mátrixának elemzésével végezhető el, mely a mátrix-elmozdulásmódszer levezetése során kerül értelmezésre. Az egyensúlyi mátrix rangja és a mátrix méreteinek egymáshoz való viszonya alapján történik a besorolás.

Előfeszítés alkalmazása esetén két fontos megjegyzés emelendő ki. Egyrészt a statikai határozatlanság fokszáma alapvetően befolyásolja a szerkezet kivitelezhetőségét, minél nagyobb fokú a határozatlanság, annál érzékenyebb lesz a szerkezet a gyártási- és szerelési pontatlanságokra, az esetleges hibák annál inkább elronthatják a tervezett előfeszített állapotot.

Másrészt külön figyelmet kell fordítani a nyomott elemek esetleges destabilizáló hatására, mely negatív kezdeti merevséget eredményezhet. Ennek hatására a szerkezet az egyensúlyi állapotából kitérítve, majd magára hagyva az eredeti helyzetétől távolodna, vagyis instabil egyensúlyi helyzet alakulna ki. Utóbbi eset mindenképpen elkerülendő, valós szerkezetek esetén tönkremenetelt eredményez.

A nagy elmozdulások hatását a szerkezeti viselkedésre nézve nem alaktartó szerkezetek esetén mindenképpen figyelembe kell venni, ugyanis ott előfeszítéssel merevített konfiguráció esetében sem teljesíthetők az egyensúlyi egyenletek a kiindulási állapotban. Az ilyen mozgások figyelembevétele geometriai értelemben nemlineáris számítást eredményez.

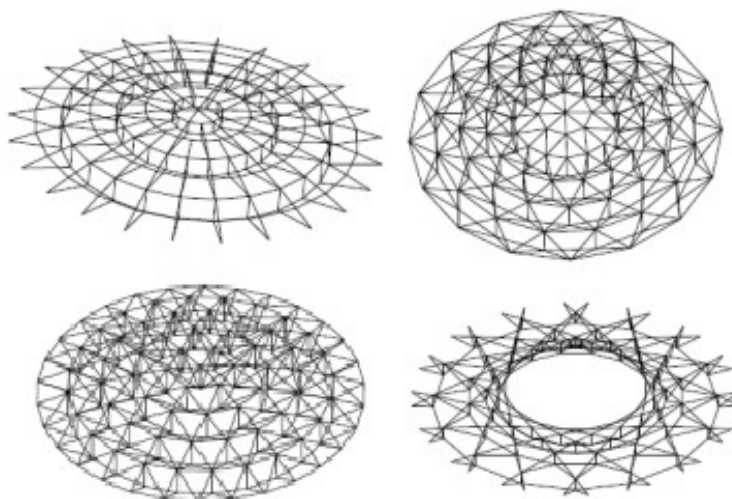
Alaktartó szerkezetek esetén, ahol az egyensúlyi egyenletek kielégíthetők eredeti állapotban is, elvileg nem szükséges geometriailag nemlineáris analízis végrehajtása. A létrejövő deformációk azonban jellemzően olyan tartományban vannak, melyek esetében a lineáris

számítás már jelentősen a biztonság kárára való eltérést eredményezhet, így itt is célszerű az elmozdulások pontosabb nyomon követése a számítás során.

1.2.2. Kötélszerkezetek csoportosítása

A kötélszerkezeteken belül két fő csoportot különböztethetünk meg topológiai kialakításuk szerint. A kötélfőtartós kialakítások alkotják a szerkezetek egyik fő csoportját. Ezen belül beszélhetünk síkbeli kötélfőtartós kialakításról, valamint térbeli szerkezetekről, amelyekbe sorolhatók a biciklikerek-jellegű lefedések és a kábelkupolák is.

A másik fő csoportot a héjszerkezetek viselkedését idéző egy- vagy többretegű kötélhálók alkotják, melyek a membránhéjakkal analóg módon vizsgálhatók.



1.4. ábra. Különböző rendszerű kábelkupolák vázlatos elrendezése. [10]

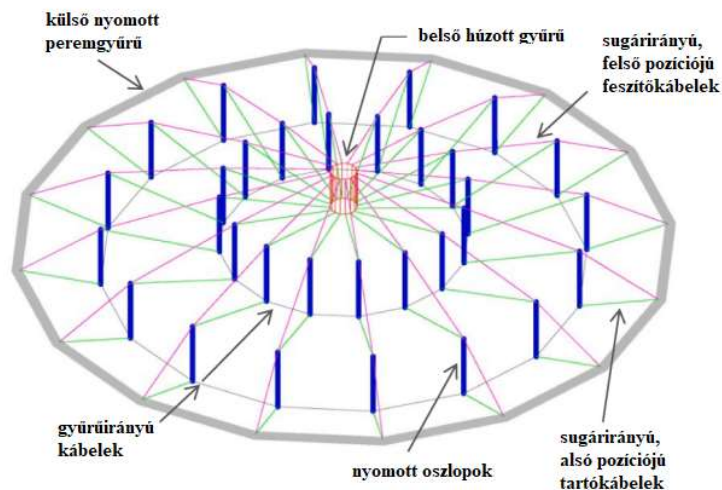
TDK dolgozatomban a kötélkupolák, ezen belül Geiger-féle kábelkupolák statikai viselkedését vizsgáltam, így a továbbiakban ezek részletes bemutatásával foglalkozom. Ezen szerkezetek a kötélszerkezeti besorolás mellett tensegrity szerkezetek is a speciális hálózati felépítésük miatt.

A Geiger-féle kábelkupolák statikailag egyszeresen, kinematikailag többszörösen határozatlan szerkezetek [11]. Ily módon alkalmazható előfeszítés, enélkül nem alaktartó kialakítású, infinitezimális mechanizmusokról beszélünk. Egy adott kialakítás esetében a kinematikai határozatlanság fokszámának megfelelő összes mechanizmus megtalálása [11] alapján nehéz feladatot jelent. Azonban szemléletből a legnyilvánvalóbb mechanizmus könnyen megtalálható, mely az egyes gyűrűk függőleges tengely körüli elfordulása, melyek a kábelek nyúlásmentes alakváltozását okozzák kis elmozdulások esetén.

A két fő tartószerkezeti elemcsoportot a húzott kábelek és a nyomott oszlopok alkotják. Geiger-féle kábelkupolák szerkezeti elemei az alábbiak szerint alakulnak:

- a megtámasztást a széleken *nyomott peremgyűrű* biztosítja,
- sugárirányú *szegmensek* szerkezeti elemei:
 - sugárirányú húzott kábelek két pozícióban, az alsó *tartókábelek* és a felső *feszítőkábelek*,
 - a húzott kábelek között található *nyomott oszlopok*,
- az egyes szegmenseket *gyűrűirányú kábelek* kötik össze, biztosítva azok együttműködését és stabilizálását,
- a szegmensek belső végén egy *húzott gyűrű* zárja le a szerkezeti rendszert.

Természetesen a fenti *tartó-* és *feszítőkábel* megnevezés egy adott teherelrendezés esetén igaz, jelen esetben a függőlegesen lefelé ható terhekre van értelmezve. Egy szélteher hatására kialakuló szívó jellegű teher esetén az egyes szerepek a felső és alsó kábelek között felcserélődhetnek. Az egyes szerkezeti elemeket az 1.5. ábra szemlélteti.



1.5. ábra. Geiger-féle kábelkupola-rendszer fő szerkezeti elemei. [12]

A szerkezeti rendszer csoportosítása több szempont szerint lehetséges:

- alaprajzi elrendezés,
- szegmensek száma,
- gyűrűk száma.

A szegmensek és gyűrű száma szerinti csoportosítás egyértelmű. Alaprajzi elrendezés szerint leggyakrabban kör alaprajzú szerkezeti rendszert alkalmaznak. Ez főként a körszimmetrikus kialakításban rejlő kedvező statikai viselkedésnek köszönhető. Léteznek azonban ettől eltérő kialakítások is. Ez esetben valamilyen irányban elnyújtott ellipszis alakú kialakítás a jellemző.

Kábelkupolák borításának közkedvelt anyagai a különböző modern ponyvaszerkezeti anyagok. Ezeket jellemzően szövessel előállított textilbetétek műanyag ágyazórétegbe való elhelyezésével alakítják ki [13]. A ponyvaszerkezet feladata lehet a kábelkupola szerkezeti elemei közötti felületek áthidalása és ezen szerkezeti elemekre történő teherelosztás. [9] alapján rendkívül nagy szerepük van a felső oszlopcsomópontok horizontális merevségének biztosításában.

Kellően nagy merevségű ponyvaszerkezet alkalmazása esetén az öszvérszerkezeteknél megismert kedvező együttműködés is kialakítható, mely jelentős mértékben növelheti a teljes szerkezet merevségét. Az így előálló szerkezeti kialakítást a szakirodalom *hypar-tensegrity* néven ismeri.

1.3. Néhány megvalósult szerkezeti példa

Valós tartószerkezeti kialakításokra számos példát találunk napjainkban. Egyik legismertebb példája a tensegrity szerkezeteknek a brisbane-i *Kurilpa Híd*.



1.6. ábra. Kurilpa Híd, Brisbane. [14]

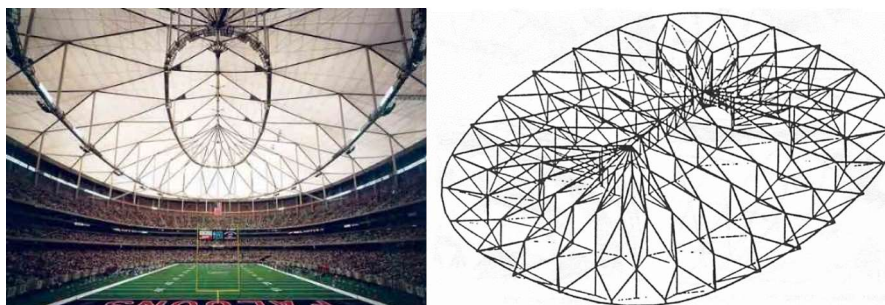
A Geiger-féle kábelkupola-rendszernek köszönhető több nagy fesztávolságú csarnoklefedés a jelenkorból. Ezek közül az első megépült szerkezeti rendszerek az 1988-as szöuli olimpián mutatkoztak be két példányban, 90 m-es és 120 m-es átmérőkkel [15].

Ugyancsak szép példa a 210 m átmérőjű floridai *Tropicana Field* [16] kör alaprajzú tetőszerkezetének tartószerkezeti kialakítása. Esetében a szerkezet támaszát jelentő nyomott gyűrű ferde síkon került kialakításra. A szerkezetben 24 sugárirányú szegmens és 4 gyűrű található.



1.7. ábra. A floridai Tropicana Field Geiger-féle kábelkupola-lefedése. [17]

Egyik legjelentősebb képviselője a kialakításnak 256 m-es átmérőjével az atlantai *Georgia Dome* [18] volt 2017-es elbontásáig. A kupola sajátossága, hogy tervezése során figyelembe vették a kábelek, valamint a közöttük kifeszített hiperbolikus paraboloid alakú ponyvaszerkezet együttműködését. Ez volt ezen öszvérszerkezeti kialakítás első megépült változata.



1.8. ábra. Georgia Dome [19] (balra) és tetőszerkezete [18] (jobbra).

A Geiger-féle kábelkupola-rendszer belső lezárását acél rácsostartó biztosítja, mely lehetővé tette az elnyújtott alaprajzi elrendezést.

2. A dolgozat célja, felépítése

TDK dolgozatomban tensegrity szerkezetek, ezen belül Geiger-féle kábelkupolák parametrikus vizsgálatát végeztem el C# programkörnyezetben. A kutatás célja az olyan paraméterek szerkezeti viselkedésre gyakorolt hatásának vizsgálata volt, mint az előfeszítés, az alkalmazott szegmens- és gyűrű szám vagy az oszlopmagasság.

A szerkezeti viselkedés numerikus vizsgálata a korábban említett statikai sajátosságok miatt eltér a hagyományos szerkezeteknél megszokottaktól. Ez egyrészt köszönhető a csak húzást felvenni képes, nyomásnak nem ellenálló kábelelemek nemlineáris viselkedésének, másrészt a nagy szerkezeti mozgások miatti geometriai nemlinearitásnak. Emiatt a hagyományos lineáris számítási módszerek nem alkalmazhatók ezen szerkezetek vizsgálatára. Speciális, külön ilyen szerkezetek számítására kifejlesztett módszerek állnak rendelkezésre.

Kötél- és ponyvaszerkezetek esetén a tervezés menete is jelentősen eltér más tartószerkezetekhez képest, ugyanis a terheletlen, úgynevezett elméleti alak meghatározása is jóval összetettebb feladatot jelent. A dolgozat *3. fejezete* ezen számítási sajátosságok és lépések bemutatásával foglalkozik. Ez a fejezet az elméleti és a szerelési alak meghatározásáról szól.

Ezután a szakirodalomban fellelhető, kötél- és ponyvaszerkezetek körében elterjedt numerikus számítási módszerek kerülnek bemutatásra a *4. fejezetben*. A két legelterjedtebb módszer az úgynevezett erőintenzitás-módszer és a dinamikus ellazítás nevű fokozatosan közelítő iteratív eljárások, melyek kifejezetten húzott-nyomott szerkezeti elemekből szerkesztett tartószerkezetek számításra alkalmasak. Ezen módszerek közül a dinamikus ellazítás nevű eljárást választottam, melyet ezért részletesebben bemutatok.

Ezek alapján elkészítettem a vizsgálat céljára egy numerikus eljárást. Ezen módszer alapján a *Rhinoceros 3D CAD* szoftver *Grasshopper* almoduljában hoztam létre a numerikus modellt, mely egy C# programozási nyelven alapuló vizuális programozási fejlesztőkörnyezet. A hagyományos fejlesztőkörnyezetekhez képest különösen alkalmas paraméteres vizsgálatok végrehajtásához interaktív felületi kialakítása miatt. Ipari felhasználása egyre jobban elterjedt napjainkban, így nem csak kutatási célokra alkalmazott.

A numerikus modell felépítését részletesebben az *5. fejezet* tárgyalja. Ehhez a végeleemes számítási eljárásnál megismert tárgyalásmód szerint mutatom be a numerikus modell elemeit, az egyes komponensek modellezési lehetőségeit, valamint az alkalmazott változókat és a számítás lépéseit. A modell konvergenciájához szükséges numerikus stabilitás feltételére a fejezet vége részletesebben is kitér.

A numerikus modell felépítése után az eljárás helyes működésének igazolását egyrészt a szakirodalomban fellelhető, hasonló szerkezeteken végzett kísérletek eredményei alapján végeztem el. Ehhez egy kicsinyített szerkezeti modellen elvégzett valós kísérlet eredményeit vettem alapul [11] alapján. Emellett egy jól ismert viselkedésű rácsostartó lineáris és nemlineáris végeleemes analízisének eredményeit is felhasználtam. Ezeket az *6. fejezet* tartalmazza.

Végül a vizsgálat számítási eredményeit, valamint az ezekből levont tapasztalatokat a dolgozat végén a *7. és 8. fejezetek* összegzik.

3. Kábelkupola-rendszerek statikai számítása

A kábelkupola-rendszerek, kötél- valamint ponyvaszerkezetek számítási eljárásai a lényegesen eltérő szerkezeti kialakítások ellenére nagyban hasonlítanak egymáshoz. Ez alapvetően a szerkezetekre jellemző nagy elmozdulásoknak, a geometriai és anyagi nemlinearitásnak köszönhető. Ezek eltérnek a hagyományos szerkezeteknél leggyakrabban alkalmazható lineáris eljárásoktól. Megjegyzendő, hogy ponyvaszerkezetek esetén a gyakorlatban alkalmazott ponyvaanyagok anizotrop viselkedése miatt további megfontolások szükségesek.

A Geiger-féle kábelkupolák előfeszítés nélkül infinitezimálisan labilis szerkezetek, melynek alaktartóságához sajátfeszültségrendszer létrehozása szükséges. Noha egyszerű húzott-nyomott szerkezeti elemekből felépülő tartószerkezetek a kutatás vizsgálatának tárgyai, az alkalmazott kábelelemek nyomóerővel szembeni ellenállásának hiánya miatt már az anyagegyenletekben is nemlinearitás jelentkezik.

Másrészt a nagy szerkezeti mozgások miatt geometriai nemlinearitás is jellemzi a rendszer viselkedését, így az elsőrendű elmélet alkalmazásakor megszokott matematikai közelítések, mint a megmerevítés vagy a kis elmozdulások elve nem vezet megfelelő eredményre. Ezen elsőrendű közelítések esetén a geometriai egyenletek mindegyikében a pontos matematikai összefüggéseket a megfelelő Taylor-sorok nullad- és elsőfokú tagjaival közelítjük, mely végeredményben lineáris egyenleteket eredményez.

A szerkezet geometriájának megváltozását ennek megfelelően legalább másodrendű elmélet alkalmazásával figyelembe kell venni. Itt az előzőekkel ellentétben a Taylor-sorok bizonyos rendig tartó tagjai is megjelennek. Ebben az esetben már megszűnik a geometriai egyenletek linearitása. Az, hogy mely fokszámú tagokat hanyagoljuk el az a számítás megkívánt pontosságától függ. Ezek között a módszerek között az alkalmazott közelítéseknek megfelelően jelentős különbségek adódhatnak a numerikus megoldás végeredménye szempontjából. [20]

Alkalmazható még a megoldásra harmadrendű elmélet is, mely bármilyen elhanyagolás nélkül a pontos matematikai összefüggéseket veszi alapul az egyenletek felírása során. Legpontosabb eredmény a harmadrendű elmélet alapján történő számítással érhető el, ami a szerkezet elmozdult alakját veszi alapul a statikai egyenletek felírása során.

Látható tehát, hogy a hagyományos mátrix elmozdulás-módszeren alapuló lineáris végeselemes számítások nem felelnek meg az analízis végrehajtására, anyagi és geometriai értelemben nemlineáris analízis végrehajtása szükséges.

Kötél- és ponyvaszerkezetek statikai analízise [13] alapján az alábbi számítási lépések elvégzése szerint történik:

1. Kiindulási alak felvétele.
2. Elméleti alak meghatározása, alakkeresés.
3. Szabásmintaterv elkészítése, leszabási hosszak meghatározása.
4. Szerelési alak meghatározása.
5. Állapotváltozás-vizsgálat.

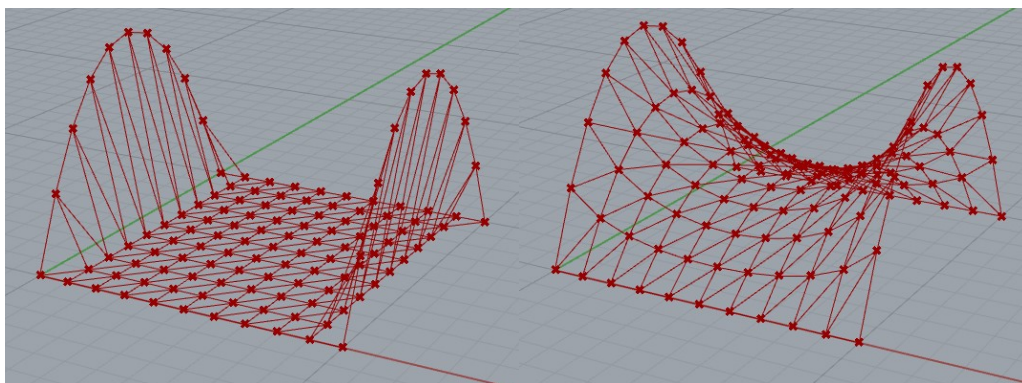
A kiindulási alak felvétele ponyvaszerkezetek esetén csaknem tetszőlegesen megtehető. A gyakorlati esetekben a kiindulási alak valamilyen könnyen felvehető szabályos geometriai kialakítást jelent. Ez megtehető a szabad csomópontok azonos magasságban való felvételével például az alapsíkon, illetve a perempontok között lineáris interpolációval is felvehető azok kezdeti helyzete. Természetesen az eltérő kiindulási alakok eltérő számítási gyorsaságot

eredményezhetnek, így célszerű kellő megfontolásokkal és körültekintéssel felvenni azt a számítás elején.

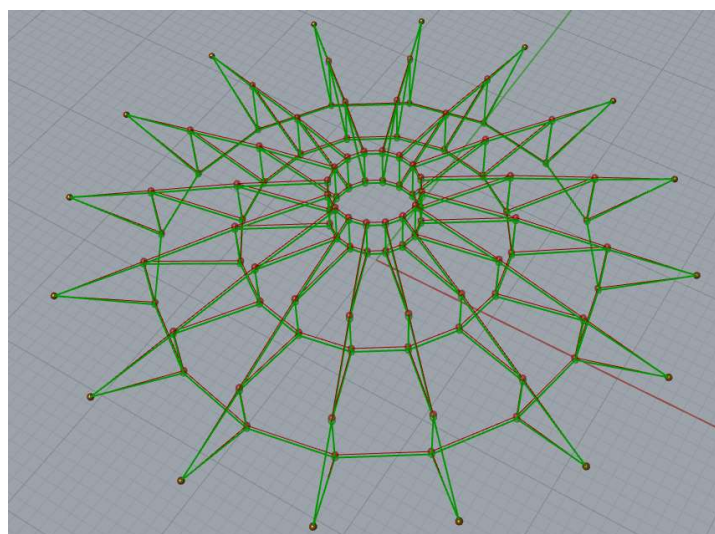
A tetszőleges kiindulási alak azért vehető fel, mert a ponyvaszerkezetek elméleti alakja rendszerint ismeretlen a számítás elején. Egy általunk felvett metszeterő eloszláshoz tartozó alakot keresünk, az alakkeresés során nem vesszük figyelembe a szerkezet deformációinak hatását a belső erők számításakor, végig a felvett erőeloszlást írjuk elő az elemekben. Megjegyzendő, hogy adott az peremfeltételekhez és a felvett metszeterő eloszláshoz nem mindig tartozik egyensúlyi alak.

Ezzel ellentétben a kábelkupola-szerkezetek elméleti alakjának jellege ismert, egy határozott geometriai kialakítást szeretnénk az alakkeresés végén visszakapni. Így a kiindulási állapot felvétele során a kívánt alakot megközelítő geometriát veszünk fel. Az elméleti alak meghatározása során, a szerkezeti elemeknek csak egy részében írunk elő meghatározott nagyságú feszítőerőt, a többi elemekben a deformációk alapján, szilárdságtani alapon, a kiindulási állapot feszültségmentes hosszait alapul véve határozzuk meg az igénybevételeket.

Egy kétoldalt parabolikus, kétoldalt egyenes peremre feszített hiperbolikus ponyvaszerkezet elméleti alakját és a számítás elején felvett kiindulási alakot a 3.1. ábra szemlélteti. A képek az általam projektfeladat keretében készített ponyvaelem számító modul felhasználásával készültek. Egy kábelkupola esetén ugyanezeket a 3.2. ábra szemlélteti.



3.1. ábra. Ponyvaszerkezetek kiindulási (balra) és elméleti alakja (jobbra).



3.2. ábra. Kábelkupola kiindulási (piros) és elméleti alakja (zöld).

Az elméleti alak alapján a szerkezeti elemek feszültségmentes, leszabási hosszainak meghatározása következik. Az egyes elemek ezen leszabási hosszak szerint kerülnek beépítésre a szerkezetbe. Ponyvaszerkezetek esetén ez jelenti az úgynevezett szabásmintaterv elkészítését.

Megjegyzendő, hogy a rúdszerű, húzott-nyomott szerkezeti elemekből felépülő tartószerkezetek elméleti- és szerelési alakja megegyezik egymással. A szerelési alaknak elsősorban ponyvaszerkezetek esetén van jelentősége, ahol a ponyva anyagának anizotropiája miatt a szabásmintaterv elkészülte után, összeállítva a szerkezetet, nem kapható vissza pontosan az elméleti alak.

Az állapotváltozás-vizsgálat a külső terhek, jellemzően meteorológiai- és hasznos terhek hatását vizsgálja. Az önsúly jellemzően elhanyagolható ezen szerkezetek esetén. Állapotváltozás-vizsgálatkor a kiindulási állapot a szerkezet szerelési alakja. Kiemelendő, hogy felületre merőleges terhek esetén, mint a szélteher, vagy belső túlnyomás, a geometria megváltozása a terhek változását vonja maga után, amit a számítás során figyelembe kell venni.

Tervezési feladat során valamilyen határállapot szabja meg az állapotváltozás-vizsgálat végén kapott eredmények megfelelőségét. Ez lehet a húzott szerkezeti elemekben ébredő feszültségek értéke, a nyomott szerkezeti elemek stabilitásvesztési ellenállása, ponyvaszerkezetek esetén a ponyva ráncmentességének biztosítása vagy a szerkezet lehajlási korlátja. Ha egy kábelkupola esetén például a terhelés hatására az analízis végeredményeként nagyobb keresztmetszetű kábelek alkalmazása szükséges, akkor ezen merevségbeli változás kihat mind a szerkezet elméleti alakjára, mind az állapotváltozás-vizsgálat eredményére. Mivel a gyakorlatban az elméleti és szerelési alak meghatározását, valamint az állapotváltozás-vizsgálatot is jellemzően többször el kell végezni, ezért a végleges kialakítás a teljes számítási folyamat többszöri elvégzése után áll elő. A kidolgozott paraméteres számítási eljárás egyszerűvé teszi a teljes folyamat újraszámítását.

A számítási módszerek közül az erőintenzitás-módszer, illetve a dinamikus ellazítás nevű, fokozatosan közelítő iteratív eljárás tartoznak a legnépszerűbb megoldások közé azok viszonylag egyszerű programozhatósága miatt. Természetesen alkalmazható nemlineáris végelem-módszer is az analízis végrehajtására. Ugyanakkor az említett szerkezetspecifikus számítási módszerek nagy előnye a végelem módszerhez képest, hogy nem igénylik a szerkezet merevségi mátrixának előállítását, mely erősen nemlineáris feladatok esetén jelentősen megnöveli a számítási igényt.

Dolgozatom következő részében az említett két számítási módszer elméleti hátterének bemutatásával foglalkozom.

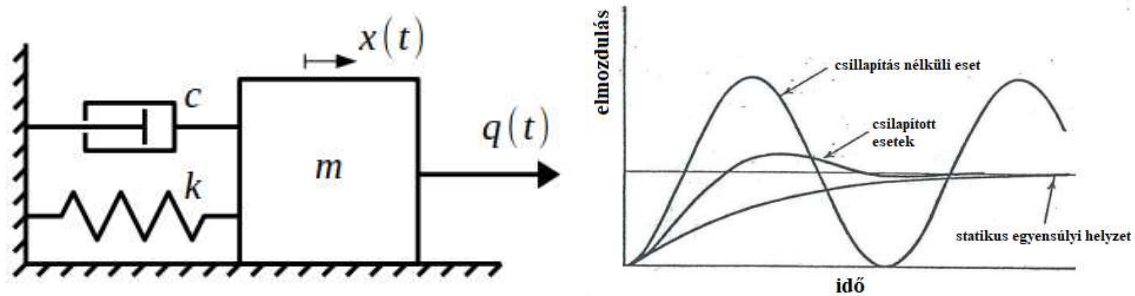
4. Numerikus számítási módszerek elméleti háttere

4.1. A dinamikus ellazítás nevű eljárás

Alistair Day [21] nevéhez fűződik a dinamikus ellazítás (*Dynamic Relaxation Method – DRM*) nevű eljárás alapjainak kidolgozása, melyet először atomerőmű reaktorok nyomástartó edényeinek vizsgálatára alkalmazott. Az 1960-as években a számítástechnika fejlődése tette lehetővé az ehhez hasonló nagy kapacitásigényű számítási módszerek elterjedését. Az addig alkalmazott kvázi-statisz vizsgálatokhoz képest jelentős újításokat tartalmazott az eljárás.

A módszer statikus terhekre adott szerkezeti válasz vizsgálatára alkalmazható. A *Day* által kidolgozott eljárás lényege a viselkedés pontos dinamikai úton történő vizsgálata a szerkezet terheletlen állapotából kiindulva. A szerkezeti analízis során a valós szerkezet jellemzőiből meghatározható paraméterek kerültek alkalmazásra. Ezek a szerkezeti kialakításból adódó tömeg- és merevségi mátrix, valamint csillapítási jellemzők.

Legegyszerűbb példaként a jól ismert, szabad végén tömegponttal rendelkező súlytalan konzol vagy egy egyszerű rugóból, csillapítóelemből és tömegpontból álló egyszabadságfokú dinamikai rendszer rezgése hozható fel. A vizsgálathoz szükséges paraméterek a szabadságfok m tömege, a szerkezeti kialakításból adódó k rugómerevség, a csillapítást jellemző c csillapítási tényező, valamint a statikus teher.



4.1. ábra. Egyszabadságfokú dinamikai rendszer modellje (balra), és a rendszer válaszfüggvénye csillapítatlan és csillapított esetekben (jobbra) statikus teher esetén ($q(t)$ állandó). [21]
Az egyensúlyi helyzethez való közeledés esetén elengedhetetlen csillapítás jelenléte, anélkül a rendszer az egyensúlyi helyzet körüli oszcilláló mozgást végez a jobboldali ábra szerint.

Elemi dinamikai ismeretek alapján egy csillapítatlan rendszer időben állandó terhelés hatására a statikus egyensúlyi helyzet körüli oszcilláló mozgást végez. Bármilyen kis csillapítás jelenléte esetén azonban a statikus egyensúlyi helyzethez aszimptotikusan konvergáló válaszfüggvényt kapunk. Mivel valós szerkezeteknél minden esetben jelen van valamekkora csillapítás a rendszerben, megfelelően hosszú idő elteltével kellően közel kerülünk az egyensúlyi helyzethez. Ugyanakkor a konvergencia gyorsasága nagyban függ az alkalmazott csillapítás mértékétől, mely numerikus számítás esetén a számítás kapacitás- és időigénye szempontjából alapvető fontosságú tényezővé lép elő. Az egyensúlyi helyzethez leggyorsabban konvergáló számítás az úgynevezett kritikus csillapítás biztosítja, mely elemi dinamikai ismeretek alapján meghatározható.

A számítás lépései az alábbiak szerint alakulnak:

1. szerkezeti kialakításnak megfelelő dinamikai modell alapelemeinek meghatározása – szerkezeti tömeg, merevség és csillapítás előállítása
2. diszkretizálás: szerkezeti elemekre való felosztás, elkülönítés

3. egyensúlyi- és anyagegyenletek felírása, statikailag határozatlan szerkezetek esetén a kompatibilitási egyenletekkel kiegészítve
4. az egyenletrendszer konvertálása, a dinamikai alapfeladat egyenletrendszerének előállítás
5. egyenletek felírása növekményes alakban, az időlépéses integrálással való megoldhatósághoz
6. növekményes alak megoldása

Az eljárás továbbfejlesztett változata a mai végeselemes szoftverek nagy részében megtalálható, az általunk korábban megismert dinamikai analízissel lényegében egyező eljárás. A különbséget az adja, hogy a statikus egyensúlyi helyzet vizsgálatára alkalmazzuk. A módszer szerkezeti kialakítástól függetlenül alkalmazható mind rúd-, mind felületszerkezetekre. Újdonságát a rendszert leíró differenciál-egyenletrendszernek a véges differencia közelítésen alapuló időlépéses integrálással történő megoldása adta.

Tisztán húzott-nyomott szerkezeti elemekből felépülő rúdszerkezetek esetében a dinamikus ellazítás egy ettől merőben eltérő számítási módszerre nőtte ki magát.

Barnes [22] foglalja össze a húzott-nyomott szerkezeti elemekből álló tartószerkezetek dinamikus ellazítással történő vizsgálatának lépéseit. Míg *Day* [21] a módszert teljes mértékben általánosítva vezette be, addig *Barnes* [22] már szerkezetspecifikus alkalmazását adja meg az eljárásnak.

A módszer lényege, hogy kicsi Δt időlépésekben követjük nyomon a szerkezet csomópontjainak mozgását mindaddig, amíg az alkalmazott csillapításnak köszönhetően az be nem áll az egyensúlyi helyzetébe. Az előzőekben beláttuk, hogy statikus terhek hatására a dinamikai vizsgálat eredményeként kapott válaszfüggvény aszimptotikusan tart a statikus egyensúlyi helyzethez tetszőleges csillapítás alkalmazása esetén.

A megoldás során elegendő az egyes csomóponti szabadságfokok mozgásegyenleteit felírni és megoldani, nincs szükség a szerkezet merevségi mátrixának az előállítására [13]. Ezen mozgásegyenletek bármilyen közelítés nélkül figyelembe veszik a nagy elmozdulásokat, nem alkalmazunk a matematikai modellben semmilyen közelítést. Így harmadrendben pontos megoldási módszernek tekinthető az eljárás.

Az egyensúlyi helyzethez való konvergencia közeledéséhez szükséges csillapítás felvételére két lehetőség adódik. Alkalmazható a megszokott viszkozus, sebességgel arányos csillapítás a csomópontok mozgásának kontrollálásához. Ugyanakkor ez a módszer nagy szabadságfokú, sok rezgésalakkal rendelkező szerkezetek esetében, különösen az elméleti alaktól jelentősen eltérő kiindulás alakoknál gyakran nem tudja garantálni a konvergenciát, numerikusan instabil számítást eredményez.

Ennek kiküszöbölésére alkalmazható az úgynevezett kinetikus csillapítás [23], [24]. Ez egy mesterséges csillapítási forma. A módszer lényege, hogy a szerkezet mozgási energiáját követjük nyomon és minden egyes energiacsúcs esetén megállítjuk a szerkezetet, majd ebből a helyzetből a mozgást zérus kezdősebességgel indítjuk el. Utóbbi csillapítási módszer megbízhatóbb számítást tesz lehetővé numerikus szempontból. [25]

A dinamikai vizsgálat kinematikus csillapítás esetén egy fiktív mozgás leírását jelenti, ily módon az alkalmazott tömegek is fiktívek, nem a valós szerkezeti tömeg kerül az egyes csomópontokba redukálva. A fiktív tömegek nagysága és az időlépések hossza szoros

kapcsolatban van egymással, a kettő mennyiség együttes viszonya határozza meg, a numerikus módszer stabilitását [13]. Megjegyzendő, hogy lehetőség van az egyes csomópontokban szabadságfokoként eltérő fiktív tömegkomponensek felvételére is, azonban ennek gyakorlati haszna nem jelentkezik, ezzel együtt viszont jelentősen megnehezíti a számítási eljárás programozhatóságát. [22]

A számítás lépései az alábbiak szerint történnek egy tetszőlegesen kiválasztott időlépésben:

1. adott t időpillanatban meghatározott normáligénybevételek és külső terhek csomópontokra redukálása – kiegyensúlyozatlan csomóponti terhek meghatározása
2. csomóponti gyorsulások meghatározása a csomópontokra redukált erők és terhek alapján
3. csomópontok sebességének számítása állandó gyorsulás feltételezésével
4. csomópontok új pozíciójának meghatározása az intervallum végén

A külső terhek és a szerkezeti elemek igénybevételeinek csomópontokra való redukálása nem igényel különösebb megfontolást, az adott geometria alapján minden lépésben egyértelműen végrehajtható. Felületre merőleges szélteher, vagy belső túlnyomás esetén figyelembe kell venni, hogy minden egyes lépésben változik a szerkezet alakja, így ezen felületre merőleges terhek iránya is, így azok újraszámítandók az egyes lépésekben. Szélteher esetén további figyelmet kell szentelni a szélteher értékének a változására is, mely a szerkezet alaki tényezőjében fejezhető ki a geometria változása miatt.

A csomóponti terhekből *Newton II. törvénye* értelmében elemi fizikai ismeretekkel kerülnek meghatározásra a csomóponti gyorsulások, melyek értéke az egyes Δt intervallumokban állandónak tekintett.

A csomópontok sebességének számítása a gyorsulások alapján történik. A numerikus számításra való tekintettel az első deriváltak centrális differencia hányadossal való közelítését alkalmazzuk. A sebességeket az időintervallumok közepén határozzuk meg.

Az intervallumok végén a csomóponti koordináták meghatározása az intervallum eleji koordinátákból, a konstansnak tekintett sebességek feltételezésével szintén elemi összefüggésekkel számíthatók.

Egy adott időlépés végén tehát ismertek a csomópontok új koordinátái, ezekből a következő időlépésben a fenti folyamat újra végrehajtható mindaddig, amíg el nem érjük az egyensúlyi helyzetet, ami minden egyes csomópontra zérus eredő erőt jelent. A numerikus számításra való tekintettel ez praktikusán egy adott hibahatár alatti maximális kiegyensúlyozatlan csomóponti terhet jelent. Ennek a szerkezeti elemekben fellépő igénybevételek és a külső terhek nagyságánál több nagyságrenddel kisebbnek kell lennie.

4.2. Erőintenzitás módszer

Az erőintenzitás-módszer alapjait (*Force Density Method – FDM*) Schek [26] fektette le. Előnye abban rejlik, hogy megfelelően megválasztott paraméterek bevezetésével a kötél szerkezetek viselkedését leíró nemlineáris egyenletrendszerek linearizálhatóak. Ennek elérése érdekében bevezethető az erőintenzitás fogalma. Egy adott szerkezeti elem esetén a q_i erőintenzitás:

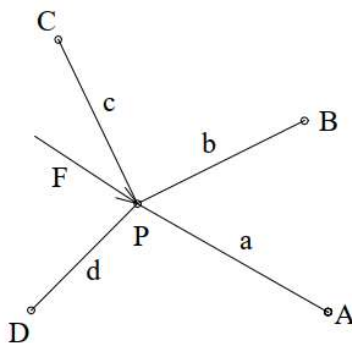
$$q_i = \frac{S_i}{l_i}, \quad (1)$$

ahol

S_i az elemben működő normálerő értéke,

l_i az elem hossza.

Ezen erőintenzitások a számítás során kötél szerkezetek esetén minden egyes elemben előírhatók, egyfajta szabadon felvehető paraméterként. A módszer alkalmazásával az egyensúlyi egyenletek az alábbi módon kerülnek linearizálásra [13] szerint.



4.2. ábra. Kötél szerkezet egy belső csomópontjának egyensúlyi vizsgálata. [13]

A 4.2 ábra szerinti P pont vizsgálatakor a pontra ható külső F koncentrált teher, és az A , B , C és D kötételelemekről átadódó belső S_i igénybevételek hatnak. Az egyensúlyi egyenletek:

$$S_a \frac{x_A - x_P}{l_a} + S_b \frac{x_B - x_P}{l_b} + S_c \frac{x_C - x_P}{l_c} + S_d \frac{x_D - x_P}{l_d} + F_x = 0, \quad (2)$$

$$S_a \frac{y_A - y_P}{l_a} + S_b \frac{y_B - y_P}{l_b} + S_c \frac{y_C - y_P}{l_c} + S_d \frac{y_D - y_P}{l_d} + F_y = 0, \quad (3)$$

$$S_a \frac{z_A - z_P}{l_a} + S_b \frac{z_B - z_P}{l_b} + S_c \frac{z_C - z_P}{l_c} + S_d \frac{z_D - z_P}{l_d} + F_z = 0, \quad (4)$$

Mivel az egyes kötételelemek aktuális hossza függ az elemek végpontjainak helyzetétől, így az egyenlet valóban nemlineáris összefüggésre vezet. Előírva azonban az egyes elemek erőintenzitásait, majd azokat ide behelyettesítve az alábbi lineáris egyenletrendszer adódik:

$$q_a(x_A - x_P) + q_b(x_B - x_P) + q_c(x_C - x_P) + q_d(x_D - x_P) + F_x = 0, \quad (5)$$

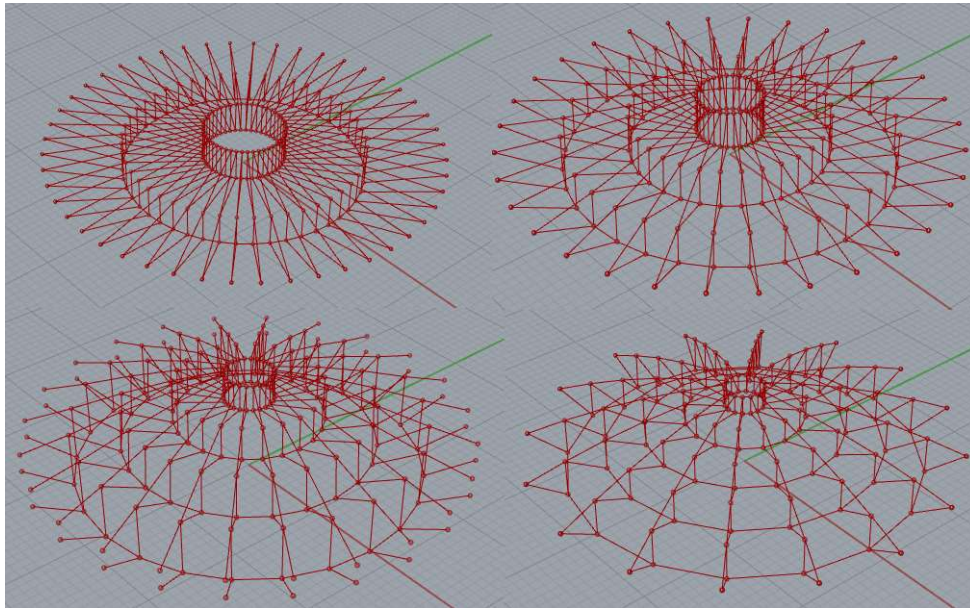
$$q_a(y_A - y_P) + q_b(y_B - y_P) + q_c(y_C - y_P) + q_d(y_D - y_P) + F_y = 0, \quad (6)$$

$$q_a(z_A - z_P) + q_b(z_B - z_P) + q_c(z_C - z_P) + q_d(z_D - z_P) + F_z = 0. \quad (7)$$

5. A numerikus modell bemutatása

Dolgozatom készítése során céлом egy dinamikus ellazításon alapuló numerikus modell kifejlesztése volt, mellyel egydimenziós rúd- és kötőelemekből felépülő tartószerkezetek vizsgálata végrehajtható. A programkörnyezet kiválasztása során fontos szempont volt a parametrikus vizsgálati módszer minél nagyobb fokú alkalmazhatósága, hogy a bemeneti paraméterek egyszerű változtatására lehetőség nyíljon, megkönnyítve a nagyszámú számítás végrehajtását.

A modellt a *Rhinoceros 3D* CAD szoftver *Grasshopper* almoduljában hoztam létre. Ez egy C# programozási nyelven alapuló vizuális programozási fejlesztőkörnyezet. A hagyományos fejlesztőkörnyezetekhez képest különösen alkalmas paraméteres vizsgálatok végrehajtásához interaktív felületi kialakítása miatt.



5.1. ábra. Különböző szerkezeti kialakítások elméleti alakja *Rhinoceros 3D*-ben.

Általánosságban egy numerikus modell az alábbi alkotóelemekből épül fel:

- szerkezeti geometriai modell,
- tehermodell,
- támaszok modellje,
- mechanikai modell,
- anyagmodell,
- tömegek modellje,
- csillapítás modellezése.

Az alkalmazott számítási eljárás a dinamikus ellazítás nevű eljárás, mely az *4.1. fejezet* értelmében a statikus egyensúlyi helyzet meghatározására irányuló fiktív dinamikai feladat megoldását jelenti. A keresett változóink a számítás végén a szerkezet csomópontjainak koordinátái az egyensúlyi helyzetben. Ezután másodlagos mennyiségekként számíthatóak a deformációk a szerkezeti elemek feszültségmentes- és aktuális hosszának ismeretében, majd ezekből az igénybevételek az anyagegyenleteken keresztül.

Dinamikai feladat révén a szerkezeti szabadságfokok mozgásegyenleteinek felírása és megoldása szükséges, az ezekben szereplő fizikai jellemzők modellezése elengedhetetlen. A statikus vizsgálatokhoz képest ez a tömegek és a csillapítás modellezésében jelent újdonságot.

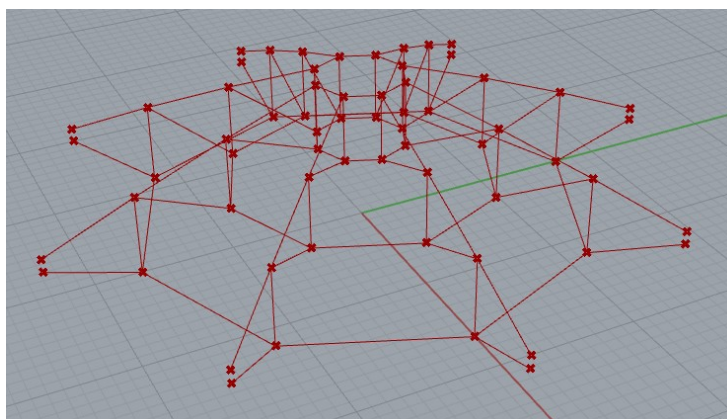
Globális numerikus analízisről lévén szó egy térbeli modell felépítése és alkalmazása szükséges a feladat elvégzése szempontjából, ahol a *csomópontok szabadságfoka* 3 az alkalmazott szerkezeti elemeknek megfelelően. Az elemek közötti csuklós kapcsolatok miatt az egyes csomópontokban három irányú eltolódást vettem fel, mint szabadságfokot.

Az 1. és 3. fejezetek értelmében elsőrendű számítás nem alkalmazható, a szerkezeti geometria megváltozásának hatását a nagy elmozdulásokra való tekintettel figyelembe kell venni. Ez az alkalmazott dinamikus ellazítás harmadrendben való pontossága szerint teljesül.

5.1. Geometriai- és mechanikai modell felépítése

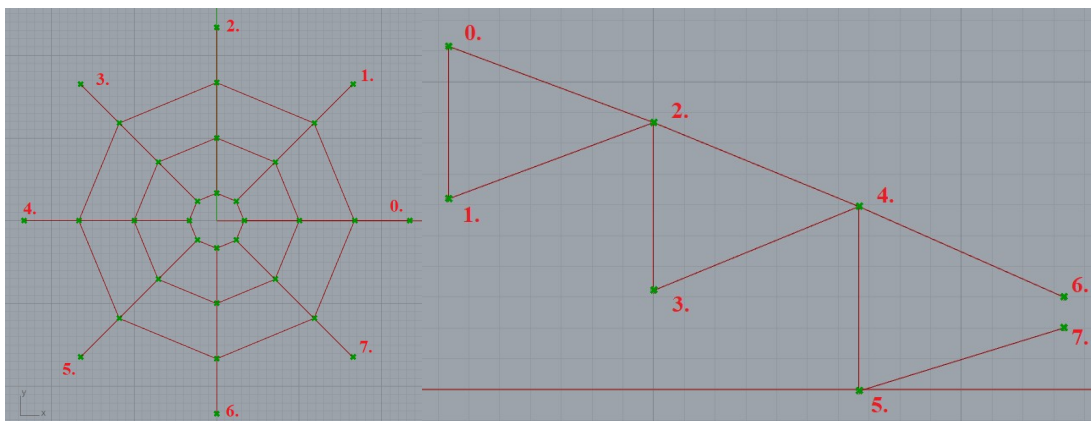
A geometriai modell felépítése a térbeli viselkedésre való tekintettel a teljes szerkezet globális, háromdimenziós modelljeként történt. Az egyes szerkezeti elemeket, prizmatikus, húzott-nyomott rúdelemekről, valamint csak húzást felvenni képes kötélelemekről lévén szó, azok tengelyében modelleztem. A szerkezeti elemek mechanikai modelljét tekintve 6 – *csomópontonként* 3 – *szabadságfokú* rúdelemek. A külső nyomott peremgyűrű, mely a szerkezet támaszául szolgál nem került modellezésre, az oda befutó szélső csomópontokat fix helyzetűnek tekintettem a vizsgálatok során.

Egy 3 gyűrűből és 8 szegmensből álló szerkezet térbeli nézetét szemlélteti az 5.2. ábra.



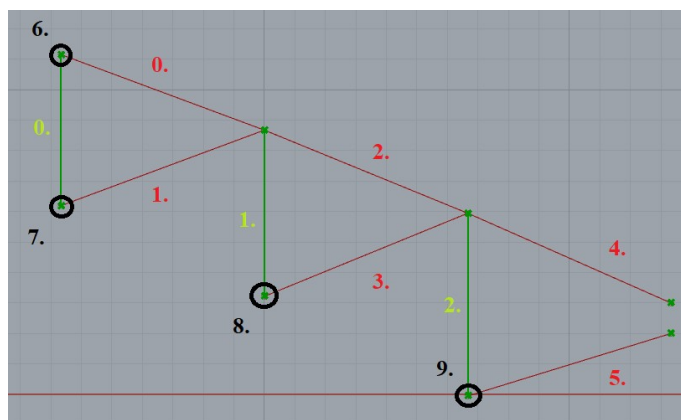
5.2. ábra. Három gyűrűből és 8 szegmensből álló Geiger-féle kábelkupola térbeli nézete.

A vizsgált szerkezetek körszimmetrikus kiosztásúak és sugaras elrendezésűek, így elegendő volt egy szegmens csomópontjait definiálni. A szerkezet csomópontjainak sorszámozását egy adott szegmensben az 5.3. ábra mutatja. Az alkalmazott programozási nyelvre való tekintettel a számozás a 0. *elemmel* kezdődik. Egy szegmens csomópontjainak definiálása után a többi szegmens kiosztása ezen szerkezeti részlet másolásával és forgatásával történt az óramutató járásával ellentétes forgatási irányban. A szegmensek kiosztását szintén az 5.3. ábra szemlélteti.



5.3. ábra. Három gyűrűből és 8 szegmensből álló Geiger-féle kábelkupola szegmenseinek sorszámozása (balra) és csomópontjainak sorszámozása a 0. szegmensen belül (jobbra). A szélső, jelen esetben 6. és 7. sorszámú csomópontok fix helyzetűek.

A szerkezeti elemek beazonosítása kábel- és oszlopelemenként egy-egy *topológiai mátrixban* történt. Ezen mátrix minden egyes sora a neki megfelelő sorszámú szerkezeti elem kezdő- és végpontját tartalmazza. Egy adott szegmensen belüli kábelek és oszlopok sorszámát, valamint a szegmenseket összekötő gyűrűirányú kábelek sorszámozását az 5.4. ábra szemlélteti.



5.4. ábra. Három gyűrűből és 8 szegmensből álló Geiger-féle kábelkupola 0. szegmensen belüli oszlopai (zöld) és kábelei (piros), az 1. szegmenshez kapcsolódó gyűrűirányú kábelek csatlakozási pontjaival (fekete), valamint ezek sorszáma.

5.2. Terhek modellezése

A számítás során a terheket csomópontokra redukálva adtam meg. Ezen csomópontokra redukált terhek a valóságban felületmentén megoszló, például meteorológiai terhekből tevődnek össze, így a terhek megoszlása szerinti terhelési mezők figyelembevétele szükséges. Fontos megjegyezni, hogy felületre merőleges terhek esetén az egyes iterációs lépésekben változik a szerkezet alakja, ezért minden lépésben újraszámolandó a terhek iránya- és nagysága az aktuális geometria alapján.

A számítás során alaprajzi értelemben egyenletesen megoszló totális és féloldalas terhek hatását vizsgáltam. Ezek csomópontokra redukálásával állt elő a *csomóponti terhek vektora*.

Lehetőség van továbbá az önsúly figyelembevételére is, azonban ez a többi teherhez viszonyítva a kis szerkezeti önsúly miatt a gyakorlati esetekben elhanyagolható.

5.3. Tömegek és támasztások modellezése, csillapítás figyelembevétele

A 4.1. fejezetnek megfelelően nem a valós szerkezeti tömegek modellezése a feladat dinamikus ellazítás során. A csomópontokban fiktív tömegek definiálása szükséges. A gyakorlati esetekben megfelelő eredményt szolgáltat csomópontként és szabadságfokként azonos nagyságú tömegek alkalmazása [22]. Elméleti szempontból a numerikus számítás konvergenciája miatt alkalmazható lenne mind csomópontként, mind pedig a csomópontokon belül szabadságfokként eltérő nagyságú komponensek alkalmazása, azonban ennek gyakorlati haszna nem jelentkezik.

A belső csomópontok fiktív tömegeinek nagyságát a számítás numerikus stabilitása alapján szükséges felvenni. Amennyiben stabil a numerikus számítás és a szerkezeti viselkedés konvergens, úgy a különböző nagyságú csomóponti tömegek alkalmazása esetén a numerikus számítás pontosságán belül nem jelentkezik különbség. Egyedül a számítás iterációs lépéseinek számában és az eljárás időigényében van eltérés.

Ennek megfelelően építettem fel a *csomóponti tömegek vektorát*. Az egyes csomópontokban azonos tömeget vettem fel mindhárom elmozdulási szabadságfok értelmében.

Vizsgálataim során az alkalmazott megtámasztások tökéletes támaszok. Ennek megfelelően a támaszpontok nem mozognak a dinamikus ellazítás folyamata során.

A lehetséges csillapítási módszerek közül a 4.1. fejezetben megismert *kinematikus csillapítást* alkalmazom, ahol a szerkezet mozgási energiáját követjük nyomon, és minden egyes lokális energiacsúcs esetén megállítjuk a szerkezetet, majd ebből a helyzetből a mozgást zérus kezdősebességgel indítjuk el.

5.4. Anyagmodell

Az anyagmodell az egyszerű szerkezeti elemekre való tekintettel egy húzott-nyomott rúd normálereje és fajlagos nyúlása közötti kapcsolatot jelenti:

$$N_{k\acute{a}bel} = \left\{ \begin{array}{l} EA_{k\acute{a}bel} * \varepsilon_{k\acute{a}bel} = EA * \frac{l_{k\acute{a}bel}^{aktu\acute{a}lis} - l_{k\acute{a}bel}^{leszab\acute{a}si}}{l_{k\acute{a}bel}^{leszab\acute{a}si}} \text{ ha } \varepsilon_{k\acute{a}bel} > 0 \\ 0 \text{ egy\acute{e}bk\acute{e}nt} \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$N_{oszlop} = EA_{oszlop} * \varepsilon_{oszlop} = EA * \frac{l_{oszlop}^{aktu\acute{a}lis} - l_{oszlop}^0}{l_{oszlop}^0} \quad (9)$$

ahol

EA az elemek normálmerevsége,

ε a szerkezeti elem fajlagos nyúlása,

$l^{aktu\acute{a}lis}$ az adott állapotban meghatározott elemhossz,

$l^{leszab\acute{a}si}, l^0$ a kábel- és oszlopelemek kiindulási, terheletlen hosszúsága.

Kábelelemek esetén figyelembe kell venni, hogy a szerkezeti elem csak húzás felvételére képes, így amennyiben egy iterációs lépésben negatív fajlagos nyúlás adódik, úgy ott a normálerő értékét zérusra kell módosítani.

A szerkezeti elemek *terheletlen*-, illetve *aktuális hossza*, valamint a rájuk jellemző *normálmerevségek* az eddigiekhez hasonlóan szintén *vektoros formában* kerültek megadásra a programban.

5.5. Egyéb mennyiségek szerepeltetése a modellben

A számítás során az egyes iterációs lépésekben meghatározandó az elmozdulási szabadságfokok irányában a csomóponti gyorsulások és sebességek értéke, valamint a teljes szerkezet mozgási energiájának. A *csomóponti gyorsulások- és sebességek vektora* tartalmazza az egyes koordinátatengelyek irányába tartozó értékeket. A szerkezet teljes mozgási energiája a csomóponti sebességek és tömegek alapján számítandó. Azonos csomóponti tömegek alkalmazása esetén elegendő a sebességek négyzeteinek összegzése.

5.6. Számítás lépéseinek bemutatása egy iterációs lépésen belül

A dinamikus ellazítás elvi alapjait és a számításhoz szükséges jellemzőket a numerikus modellben a *4. fejezet* mutatta be. A számítást minden egyes csomópontban, a három elmozdulási szabadságfoknak megfelelően, a három koordináta-tengely irányban kell elvégezni. Az egyes lépések képletszerű bemutatásakor egy tetszőleges *ξ -tengely* mentén írom fel a mozgásegyenleteket. A számítás lépései az alábbiak szerint történnek egy tetszőlegesen kiválasztott időlépésben:

1. az adott t időpillanatban meghatározott normálerők és külső terhek csomópontokra redukálása
2. gyorsulások meghatározása a csomópontokra redukált erők alapján a t időpillanatban
3. sebességek meghatározása az intervallum közepén $t + \Delta t/2$ időpillanatban, állandó gyorsulást feltételezve az időlépésben
4. az intervallum végén, $t + \Delta t$ -ben a pozíció meghatározása

A csomóponti terhek vektora a számítás elején bemeneti paraméterként adott. A normáligénybevételek nagyságának meghatározása után azok irányai elemi koordinátageometriai összefüggések szerint számítandók. A kábelelemek irányvektora meghatározható a vég- és kezdőpontba mutató helyvektorok különbségének hosszal való normálásával. Ezután az így előálló térbeli vektornak a három koordináta-tengely irányába eső komponenseire bontása szintén elemi ismeretek szerint elvégezhető az alábbiak szerint:

$$N_{\xi} = N * \frac{\xi_j - \xi_i}{l_{\text{aktuális}}}, \quad (10)$$

ahol i a kezdőpont, j a végpont sorszáma, N pedig az adott elemben meghatározott normáligénybevétel nagysága.

A külső terhek és a normáligénybevételek csomópontonként történő összegzésével előáll a kiegyensúlyozatlan csomóponti terhek vektora.

A kiegyensúlyozatlan csomóponti terhek ismeretében *Newton II. törvénye* értelmében egyszerűen adódnak a csomóponti gyorsulások:

$$a_{i\xi}^t = \frac{R_{i\xi}^t}{m_i}, \quad (11)$$

ahol

$a_{i\xi}^t$ az i jelű csomópont adott tengely irányú gyorsulása a t időpillanatban,

$R_{i\xi}^t$ az i jelű csomópontra az adott tengely irányában ható kiegyensúlyozatlan csomóponti erő a t időpillanatban,

m_i az i jelű csomópont fiktív tömege.

A gyorsulások és sebességek közötti kapcsolat kifejezésére az első deriváltak véges differencia közelítését alkalmaztam a módszerben. Ezek alapján egy adott időpontbeli gyorsulás az intervallum felezőpontokban számolt sebességekkel az alábbi módon fejezhető ki:

$$a_{i\xi}^t = \dot{v}_{i\xi}^t = \frac{v_{i\xi}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - v_{i\xi}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t}, \quad (12)$$

ahol $v_{i\xi}^{t+\frac{\Delta t}{2}}$, $v_{i\xi}^{t-\frac{\Delta t}{2}}$ az i jelű csomópont sebessége két egymást követő intervallum felezőpontjában.

Ennek átrendezésével adódik az új intervallumban a sebesség:

$$v_{i\xi}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = v_{i\xi}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + a_{i\xi}^t * \Delta t = v_{i\xi}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t}{m_i} * R_{i\xi}^t \quad (13)$$

Végül az intervallum végi új koordináta az alábbiak szerint számítható:

$$\xi_i^{t+\Delta t} = \xi_i^{t-\Delta t} + v_{i\xi}^{t+\frac{\Delta t}{2}} * \Delta t \quad (14)$$

ahol $\xi_i^{t-\Delta t}$, $\xi_i^{t+\Delta t}$ az intervallum elején és végén mért koordináta.

A dinamikus ellazítás teljes folyamata a folyamat elejétől az egyensúlyi helyzet beállításáig:

1. Kiindulási állapot a nyugalomban lévő szerkezet, a csomópontok sebességei, így a mozgási energia zérus.
2. A külső terhek és a szerkezeti elemekben ébredő normáligénybevételek meghatározása. Felületre merőleges terhek (pl. szélteher) esetén minden lépésben újra kell számítani a tehervektort a megváltozott szerkezeti alak miatt.
3. A külső terhek és az igénybevételek csomópontokra redukálása, kiegyensúlyozatlan csomóponti terhek meghatározása.
4. Csomópontok sebesség- és koordináta komponenseinek meghatározása. A sebességek ismeretében a teljes szerkezetre vonatkozó mozgási energia meghatározása.
5. Ha a mozgási energia csökken az előző lépéshez képest, akkor a kinetikus csillapítás értelmében a csomópontok sebességeinek nullázása.
6. Ha a mozgási energia nő az előző lépéshez képest, a csomópontok pozíciójának frissítése.
7. A számítás megismétlése mindaddig, amíg a szerkezet el nem éri a statikus egyensúlyi helyzetét. Ez a gyakorlatban a kiegyensúlyozatlan csomóponti terhek adott hibahatárnál való kisebb értékét jelenti.

Természetesen a megtámasztott csomópontok a teljes folyamat során nyugalomban maradnak, nem kerülnek mozgásra.

Nyugalmi állapotból elindított szerkezet esetén a sebesség zérus, és a következő sebesség meghatározása során egy $\Delta t/2$ nagyságú időintervallum hosszát kell figyelembe venni:

$$v_{i\xi}^2 = a_{i\xi}^{t=0} * \frac{\Delta t}{2} = \frac{\Delta t}{2 * m_i} * R_{i\xi}^{t=0} \quad (15)$$

További megjegyzés, hogy az egyes energiacsúcsok ideje pontosabban is meghatározható, ha az energiacsúcsra, és az azt körülvevő két értékre egy másodfokú polinom függvényt illesztünk, majd ennek meghatározzuk a maximumhelyét szélsőérték kereséssel.

Ezeknek az elhanyagolása, a mozgás fiktív volta miatt, a végeredmény szempontjából a numerikus pontosság hibahatárán belül nem okoz eltérés. Emiatt az energiacsúcsok utáni újraindításnál figyelembe vettem, hogy az adott időlépés hossza az eredeti intervallumhossz fele, azonban a csúcsok pontos helyét nem határoztam meg. Ennek egyszerűen programozástechnikai okai voltak.

5.7. Numerikus stabilitás és konvergencia

A numerikus vizsgálat stabilitása alapvetően az időlépések hosszának és a fiktív csomóponi tömegeknek az egymáshoz viszonyított arányától függ. Értelmezhető egy Δt^{cr} kritikus időlépéshossz, ami felett a vizsgálat elveszti a stabilitás és a szerkezet fiktív mozgása nem fog konvergálni a statikus egyensúlyi helyzethez. A kritikus időlépéshossz meghatározása [13] és [22] szerint mind rúdszerű-, mind ponyvaszerkezetek esetén azonos összefüggésre vezet. Ez alapján a kritikus időlépés hossza:

$$\Delta t^{cr} = \sqrt{\frac{2m}{S}}, \quad (16)$$

ahol

m a szabadságfok értelmében felvett fiktív csomóponi tömeg,

S a csomópont adott szabadságfok szerinti merevsége.

A kritikus időlépéshossz szabadságfokonként értelmezendő, majd az egyes szabadságfokokra kapott értékek minimuma adja a teljes szerkezetre vonatkozó értéket.

A számítás során tehát az időlépések hosszának és a fiktív tömegeknek egy olyan kombinációja szükséges, ami a (16) egyenletnek megfelel. Célszerű a két érték közül az egyiket rögzíteni a számítás során és a másik értékét beállítani ennek megfelelően.

Az összefüggés alapján az időlépés hosszának növelése fix tömegek esetén, valamint a csomóponi tömegek nagyságának csökkentése fix időlépéshossz esetén azonos hatást fejt ki numerikus szempontból.

Egy sokszabadságfokú szerkezet vizsgálata esetén (16) számítása az S merevségek meghatározása miatt nem egyszerű feladat. A problémát tovább nehezíti, hogy S értéke a geometria folyamatos változásával lépésről lépésre változik. Emiatt a gyakorlatban Δt , illetve m értékét tapasztalati alapon szokás felvenni.

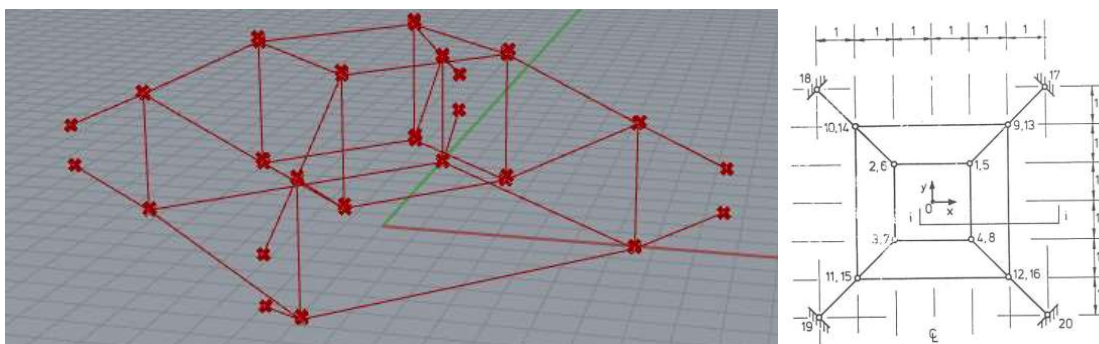
A numerikus számításból adódó sajátosságok miatt tökéletes egyensúlyi helyzet nem érhető el. Ezért egy hibahatár megadása szükséges, amelynél kisebb maximális kiegyensúlyozatlan csomóponi eredő erő esetén a számítás leáll. Ez az analízis során megjelenő külső erők és belső igénybevételek értékénél több nagyságrenddel kisebb értéket jelent.

6. Modell verifikálása

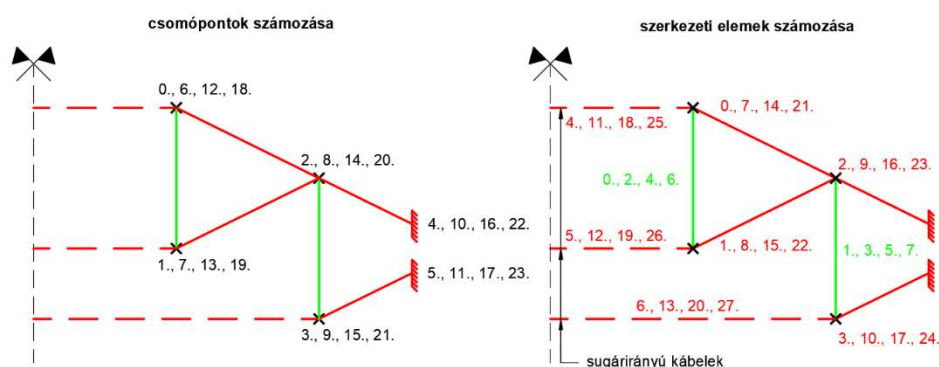
A modell verifikálását egyrészt a szakirodalomban fellelhető, hasonló szerkezeteken végzett kísérletek eredményei, másrészt egy jól ismert viselkedésű rácsostartó végeleemes analízise alapján végeztem el. Az eljárás helyes működésének igazolása kábelkupolán végzett mérések szerint [11] alapján történt, mely mind numerikus számítási eredményeket, mind valós fizikai modellen végzett kísérleti eredményeket közölt.

6.1. Kábelkupola vizsgálata

Egy Geiger-féle kábelkupola szerkezet egyszerűsített, kisléptékű modelljének numerikus és kísérleti úton történő vizsgálata volt a verifikáció tárgya. A tényleges verifikálást valós kísérleti eredmények alapján végeztem el. A vizsgált szerkezetben 4 sugárirányú szegmens és 2 gyűrű található, ez szegmensenként 4 sugárirányú kábelt és 2 oszlopot jelent. Az egyes szegmensek között két alsó és egy felső kábel létesít összeköttetést, így összesen 24 kábel és 8 oszlop alkotja a szerkezetet. 8 db fix és 16 db belső csomópont van. A szerkezet Grasshopperben felépített és Rhinoceros 3D-ben megjelenített modelljét a 6.1. ábra, csomópontjainak és szerkezeti elemeinek sorszámozását a 6.2. ábra szemlélteti. Megjegyzem, hogy a globális x- és y-koordinátatengelyek 45°-kal elforgatva helyezkednek el a publikációban szereplő és az általam elvégzett vizsgálatban. Ez a vízszintes eltolódások összehasonlítása során figyelembe veendő.



6.1. ábra. 2 gyűrűből és 4 szegmensből álló kicsinyített Geiger-féle kábelkupola Grasshopperben felépített modellje és felülnézeti rajza. [11]



6.2. ábra. 2 gyűrűből és 4 szegmensből álló kicsinyített Geiger-féle kábelkupola csomópontjainak (balra) és szerkezeti elemeinek (jobbra) sorszámozása az egyes szegmensekben.

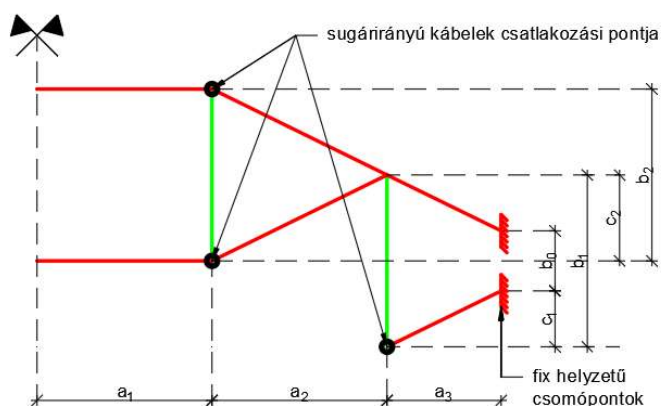
Zöld - oszlopok, folytonos piros - sugárirányú kábelek, szaggatott piros - gyűrűirányú kábelek.

A megépült fizikai modell jelentősen kisebb méretekkel és kevesebb elemszámmal rendelkezik a tényleges szerkezetekhez képest, ugyanakkor az összes jellemző szerkezeti elem megtalálható benne, így módon megfelelően tükrözi a valós viselkedést, a kisléptékű modell viselkedése reprezentatívnak tekinthető.

A modell méretei a 6.3. ábra alapján az alábbiak szerint alakultak:

- $a_1 = 325 \text{ mm}$
- $a_2 = 325 \text{ mm}$
- $a_3 = 212 \text{ mm}$
- $b_0 = 112 \text{ mm}$
- $b_1 = 320 \text{ mm}$
- $b_2 = 320 \text{ mm}$
- $c_1 = 104 \text{ mm}$
- $c_2 = 160 \text{ mm}$

A teljes szerkezet fesztávolsága 1725 mm-re adódott. A szerkezeti kábelek 0,42 mm átmérőjű acél zongorahúrból, míg az oszlopok 6 mm átmérőjű köracélból készültek. A kapcsolatokat a kábelek oszlopokra való hurkolásával, majd alumínium anya elhelyezésével alakították ki. A szerkezet támaszait függőleges acél szerelvények adják. A valós modell imperfekt alakja és a modell elméleti alakja közötti legnagyobb eltérés 15,8 mm-re adódott, az egyik szélső megtámasztás helyén.



6.3. ábra. Geometriai méretek értelmezése.

A tartószerkezet alaktartóságához szükséges előfeszítését a valós, előfeszített modell kábelerőinek megfelelően vettem fel, melyeket méréssel határoztak meg. A kísérlet során a 6.1. táblázat szerinti feszítőerők működtek az egyes szerkezeti elemekben az előfeszítés után, ezen erők átlagát vettem fel a numerikus számítás során.

Az előzőekben közölt geometriai méretek a megépült modell megfeszített állapotában jellemezték a szerkezetet, tehát az elméleti, illetve szerelési alaknak tekintendők. A numerikus számítás során azonban az ezzel egyező szerelési alak előállításához az egyes elemekben működő pontos normáligenybevételek ismerete szükséges feszített állapotban. Ezek azonban csak egész számra kerekítve voltak megadva, így nem tudtam azonos szerelési alakot reprodukálni numerikusan. Emiatt a fenti geometriát kiindulási alakként vettem fel a számítás elején. A 3. fejezetben leírtaknak megfelelően tensegrity kupolák kiindulási és szerelési alakja kellően közel esik egymáshoz, így ez a közelítés nem befolyásolta jelentősen a viselkedést.

kábelemek		előfeszítés kábelerőinek értékei [N]	
megnevezés	sorszám	valós modell	numerikus modell
sugárirányú felső	0., 7., 14., 21.	49, 49, 48, 48	52
	2., 9., 16., 23.	103, 104, 100, 100	103
sugárirányú alsó	1., 8., 15., 22.	51, 52, 50, 50	52
	3., 10., 17., 24.	100, 101, 99, 97	99
belső gyűrű felső	4., 11., 18., 25.	33, 32, 31, 33	33
belső gyűrű alsó	5., 12., 19., 26.	32, 32, 32, 32	33
külső gyűrű	6., 13., 20., 27.	60, 60, 60, 63	62,5

6.1. táblázat. Előfeszítés hatására kialakuló kábelerők a valós fizikai modell és az általam felépített numerikus modell alapján.

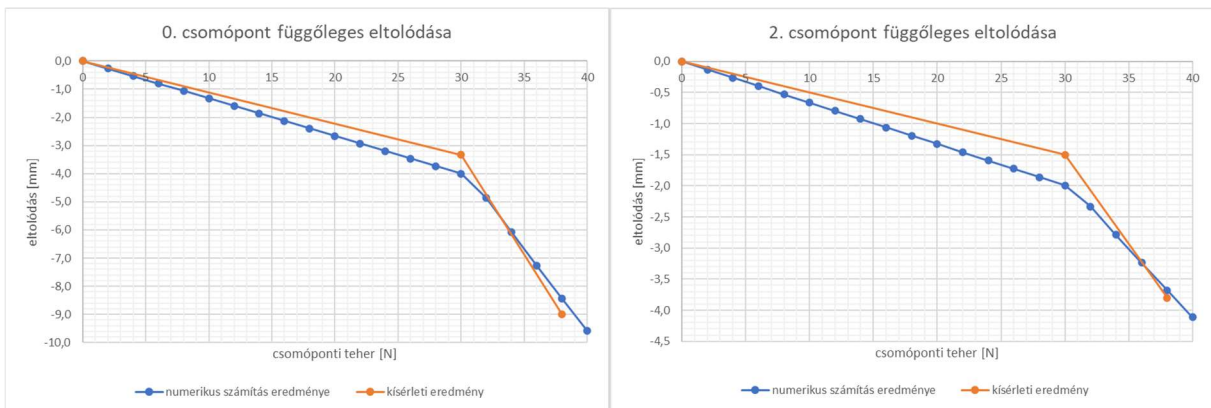
Kétféle alapvetően különböző terhelési esetre végeztem el a modell ellenőrzését. Az első tehereset egy szimmetrikus teherelrendezés, ahol a belső gyűrű alsó csomópontjai voltak

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

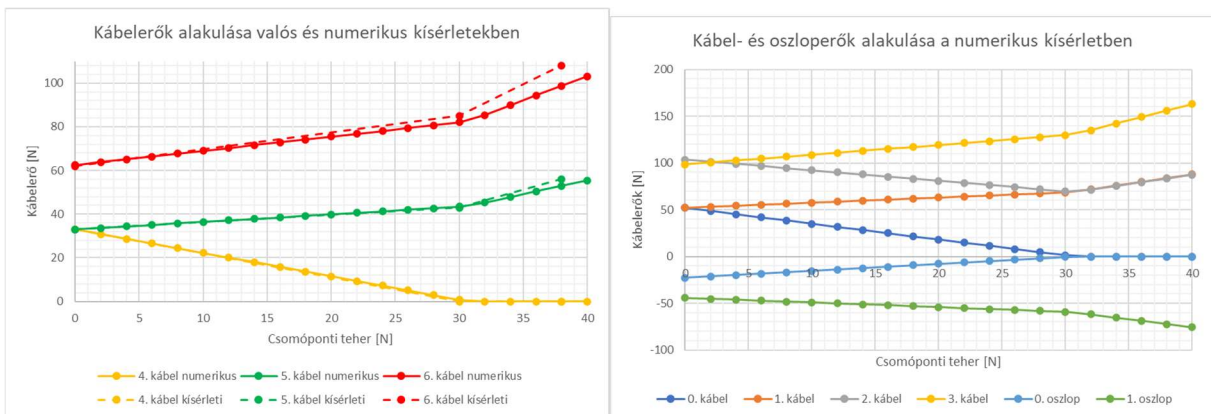
terhelve 2 N-os teherlépcsőkben 40 N-ig. Ezek az 6.2. ábra szerinti 1., 7., 13. és 19. csomópontokat jelentik. Ez teljes egészében nem-nyúlásmentes alakváltozásokat okozó teherelrendezés, a terhelési folyamat során nyúlásmentes alakváltozás nem következett be.

A második teherelrendezésben a belső gyűrű egyetlen egy alsó csomópontja volt megterhelve, mely jelen esetben az 1. csomópontot jelenti. Itt megjelentek a nyúlásmentes alakváltozásokhoz tartozó deformációk is, így lényegesen nagyobb elmozdulások várhatók ezen konfigurációban. A terhelés szintén 40 N-ig történt, 4 N-os teherlépcsőkben.

A szimmetrikus terhelésre nem-nyúlásmentes alakváltozások alakultak ki a terhelési folyamat során. Az így kapott függőleges eltolódások diagramjait a belső és külső gyűrű felső, 0. és 2. csomópontjaiban a 6.1. grafikonok szemléltetik. A kábelerőket a 4. és 5. sorszámú gyűrűirányú belső kábelek, valamint a 6. sorszámú külső gyűrűkábelek esetén a 6.2. grafikon mutatja. A szimmetrikus terhelésre az egyes szegmensekben azonos lehajlások, valamint kábel- és oszloperők adódtak, így elegendő egy szegmens eredményeit megadni.



6.1. grafikon. Valós és numerikus modell eredményeinek összehasonlítása 0. (balra) és 2. (jobbra) csomópont függőleges eltolódása. A narancssárga görbék [11] szerint kerültek felvételre.



6.2. grafikon. Valós és numerikus modell kábelerőinek összehasonlítása (balra), illetve a további kábel- és oszloperők numerikus modell szerinti alakulása (jobbra). Látható, hogy a 0. kábel és 0. oszlop szintén igénybevétel-mentesek a folyamat végén a 4. kábelhez hasonlóan, a belső gyűrűben csak az 1. sorszámú alsó kábel marad dolgozó szerkezeti elem.

A valós kísérlet eredményeit [11] által közölt diagramokról olvastam le a görbék jellegzetes töréspontjaiban, így egy diagramban ábrázolva adom meg a numerikus modell eredményeivel való összehasonlíthatóság érdekében.

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

Összehasonlítva a valós és a numerikus modellen meghatározott eredményeket jó egyezés látható mind a diagrammok jellegében, mind az egyes jellemzők értékeiben. A görbék számértékei közötti eltérés megfelelően kicsire adódott, és a törések az egyes görbékben azonos teherszinten következnek be. Az eltéréseket a 6.2. táblázatban adom meg. A valós kísérleti modell esetén 38 N-os teherszinten tönkremenetel következett be, így az ahhoz a teherszinthez tartozó jellemzőket hasonlítottam össze egymással.

<i>vizsgált mennyiség</i>	<i>0. csp z-eltolódása [mm]</i>	<i>2. csp. z-eltolódása [mm]</i>	<i>4. kábel húzóereje [N]</i>	<i>5. kábel húzóereje [N]</i>	<i>6. kábel húzóereje [N]</i>
<i>valós kísérlet</i>	-9	-3,8	0	56	108
<i>numerikus számítás</i>	-8,44	-3,68	0	53	99
<i>eltérés</i>	-6,2%	-3,2%	0,0%	-5,5%	-8,6%

6.2. táblázat. Vizsgálati eredmények eltérése valós- és numerikus modell esetén szimmetrikus terhelésre 38 N-os teherszint esetén.

A lehajlások tekintetében a nagyobb eltérés 6 % körüli, míg a kábelerők esetén ugyanez 9 %. Ezen eltérések alapján a felépített numerikus modell az előfeszítésben és az elméleti alakban alkalmazott közelítések ellenére is megfelelő pontossággal adja vissza a szerkezet viselkedését szimmetrikus teherelrendezés esetén.

A függőleges eltolódásokat és kábelerőket leíró diagramok vizsgálata során változás figyelhető meg a szerkezet viselkedésében 30 N-os teherszintnél. Az addig tapasztalható lineáris diagramban törés van. Ezután egy újabb lineáris szakasz következik, azonban lényegesen nagyobb esés, ezáltal kisebb merevség jellemző ezen a szakaszon.

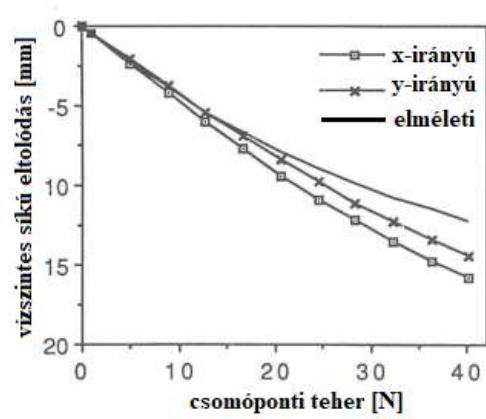
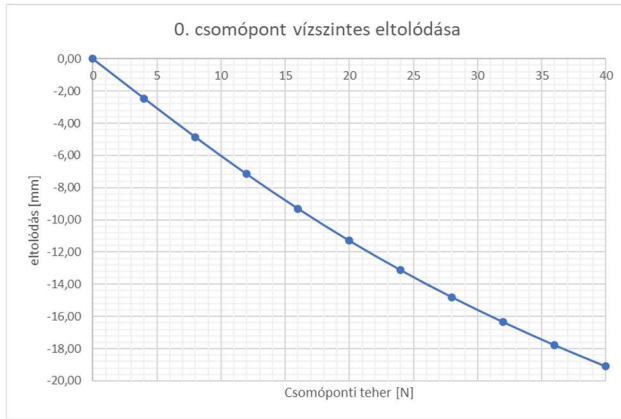
A jelenség oka, a 4. kábel vizsgálatával magyarázható. A felső gyűrűirányú kábelek ezen teherszinten terheletlenné válnak. Ennek oka, hogy a belső gyűrű terhelés hatására lefele mozdul el, ezzel együtt a belső oszlopok befelé dőlése jelentkezik. Így a felső gyűrűirányú kábelek hossza csökken a folyamat során, végül az adott teherszinten a kezdeti feszítésből származó húzóerőt ellensúlyozza a kábel folyamatos rövidüléséből adódó csökkenés.

A felső gyűrűirányú kábelek ernyedése mellett továbbá a felső sugárirányú kábelekben, valamint a belső oszlopokban is megszűnik a normáligénybevétel, így a három szerkezeti elem együttese válik a terhelési folyamat végére nemdolgozóvá. Ennek hatására jelentősen csökken a szerkezet globális merevsége, mely megfigyelhető a fenti diagramok mindegyikében. A belső szerkezeti rész merevsége egyedül az alsó kábelekből származik.

Az aszimmetrikus terhelés hatására a szerkezeti viselkedés elveszti az előzőekben megfigyelhető körszimmetrikus jellegét, az egyes szegmensekben eltérő viselkedés tapasztalható. A diagramokban azonban itt is jó egyezés figyelhető meg a két eset vizsgálatakor. Itt már elveszik a szerkezeti viselkedés lineáris jellege, köszönhetően annak, hogy a deformációs folyamat során nyúlásmentes alakváltozások is kialakulnak.

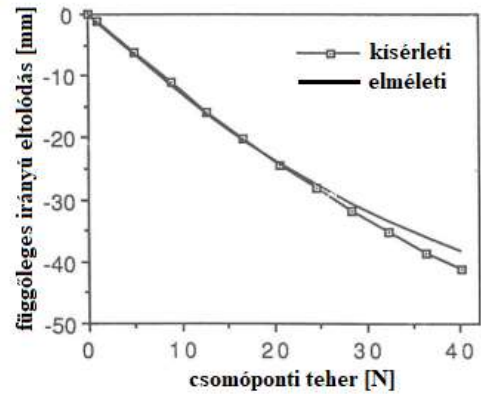
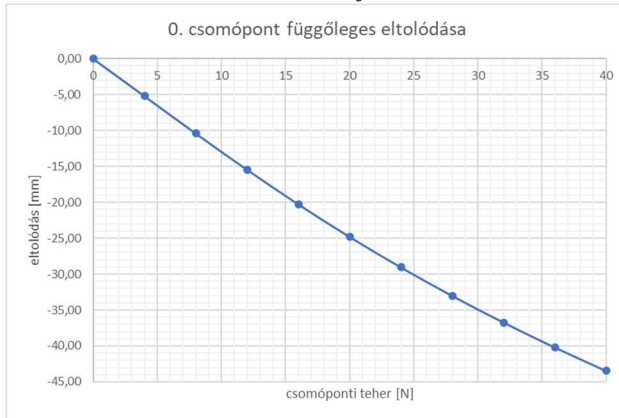
A terhelés során kialakuló eltolódások diagramjait a 0. szegmens esetében a 6.3.-6.5. grafikonok szemléltetik, míg a kábelerők az 6.6. grafikonokon láthatók.

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

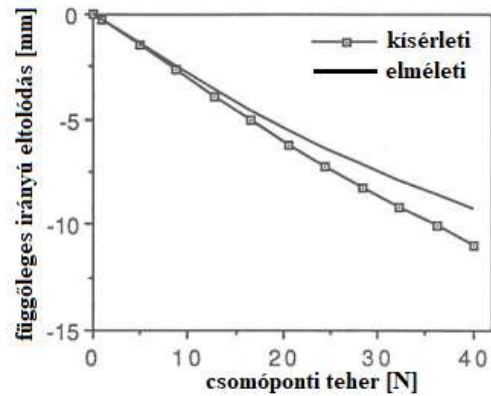
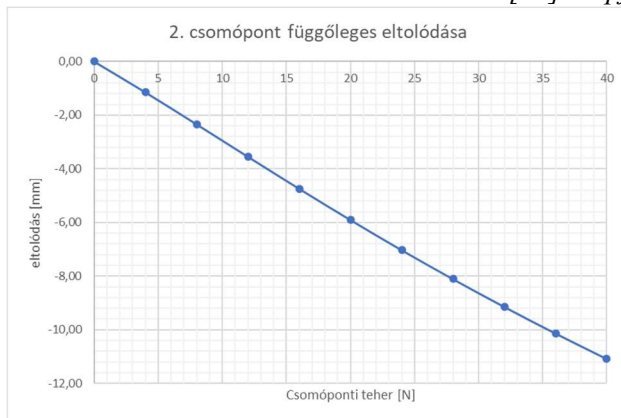


6.3. grafikon. Numerikus modell által meghatározott vízszintes síkú eltolódás (balra), és a valós modell elmozdulásai [11] alapján a 0. csomópontban (jobbra).

A valós- és numerikus modellek globális koordinátatengelyeinek x - és y -tengelye egymáshoz képest 45° -kal elforgatva helyezkednek el, így a jobb oldali diagram esetén adódó 14-15 körüli eltolódások eredője hasonlítandó össze a baloldali diagram értékeivel.

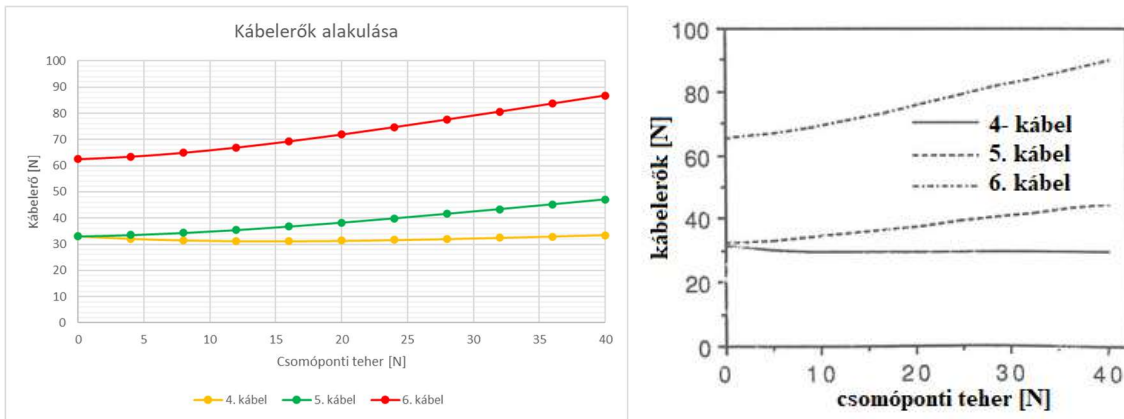


6.4. grafikon. Numerikus modell által meghatározott függőleges irányú eltolódás (balra), és a valós modell elmozdulása [11] alapján a 0. csomópontban.



6.5. grafikon. Numerikus modell által meghatározott függőleges irányú eltolódás és a valós modell függőleges irányú eltolódása [11] alapján a 2. csomópontban.

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata



6.6. grafikon. Numerikus modell- (balra) és [11] alapján a valós modell (jobbra) kábelerőinek összehasonlítása.

Összehasonlítva a valós és numerikus modellen meghatározott eredményeket jó egyezés látható mind a diagrammok jellegében, mind az egyes jellemzők értékeiben. A görbék számértékei közötti eltérés megfelelően kicsire adódott. Az eltéréseket az 6.3. táblázatban adom meg.

vizsgált mennyiség	0. csp z-eltolódás [mm]	2. csp. z-eltolódás [mm]	4. kábel húzóereje [N]	5. kábel húzóereje [N]	6. kábel húzóereje [N]
valós kísérlet	-40,00	-21,00	31,00	45,00	90,00
numerikus számítás	-43,47	-19,10	33,45	47,05	86,76
eltérés	8,7%	-9,0%	7,9%	4,5%	-3,6%

6.3. táblázat. Vizsgálati eredmények eltérése valós- és numerikus modell esetén aszimmetrikus terhelésre.

A lehajlások tekintetében a nagyobb eltérés 9 % körüli, míg a kábelerők esetén 8 %. Ezen eltérések a szimmetrikus terhelésnél tapasztaltakhoz képest valamivel nagyobbra adódtak, azonban még így is megfelelő pontossággal visszaadja a numerikus modell a szerkezet viselkedését aszimmetrikus teherelrendezés esetén.

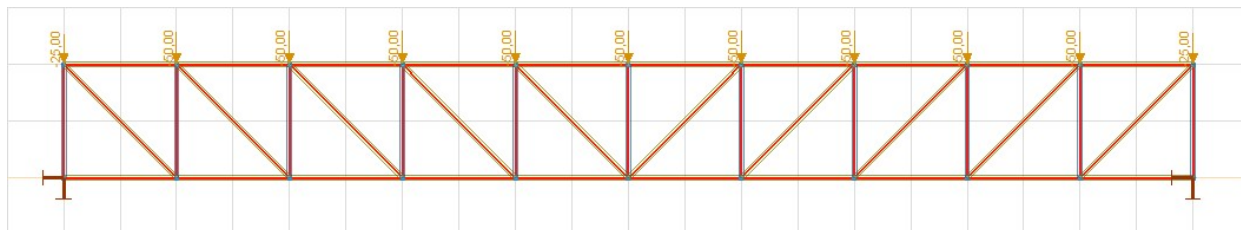
Érdekes összehasonlítani a szimmetrikus és az aszimmetrikus terhelésekhez tartozó z-irányú maximális eltolódások numerikus értékeit is. Szimmetrikus esetben a maximális eltolódás a 0. csomópontban 9,5 mm, aszimmetrikus terhelés esetén 43,5 mm. Ez több mint négyszer nagyobb érték, annak ellenére, hogy a teher az eredeti érték negyede. Ez a korábban említett nyúlásmentes alakváltozások hatásának köszönhető.

6.2. Rácsostartó vizsgálata

A program verifikálásához az előző fejezetben bemutatott valós fizikai modellen elvégzett mérések mellett egy rácsostartó végeelemes modellen végrehajtott numerikus számítási eredményeit is felhasználtam. Mivel az általam alkalmazott numerikus számítási eljárás tetszőleges topológiájú húzott-nyomott rúdelemekből felépített tartószerkezet vizsgálatára alkalmazható, ezért rácsostartók harmadrendű analizisére is megfelelő megoldást ad.

A végeelemes számítást az *AxisVM X6* végeelem-módszeren alapuló program segítségével végeztem el. A lineáris- és nemlineáris statikai analízis eredményeit hasonlítottam össze a dinamikus ellazítás eredményeivel. Míg a végeelemes számítással első- és másodrendű elmélet alapján meghatározott eredményeket kaptam, addig az általam készített numerikus eljárás harmadrendű elméleten alapszik. Ezáltal lehetőség nyílt az egyes elméletekkel kapott numerikus értékek összehasonlítására is.

A számítás során egy *20 m-es nyílásközű, 2 m magas, húzott átlós rácsozattal* ellátott kialakítást vizsgáltam. A szerkezeti elemek normálmerevségét az összes rúd esetében $7,4 \times 10^5$ kN-ra vettem fel. A két szélső csomópontban függőleges és vízszintes értelemben is fix megtámasztást alkalmaztam. A rácsostartó modelljét a végeelemes programban az *6.4. ábra* szemlélteti.



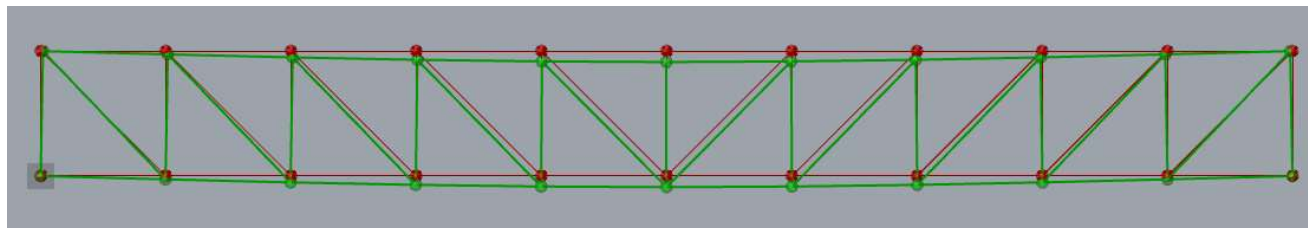
6.4. ábra. Vizsgált rácsostartó kialakítása az *AxisVM X6* végeelemes programban.

A verifikálás során az alábbi paraméterek értékét vizsgáltam az egyes számítási eljárásokban:

- alsó öv középső csomópontjának függőleges irányú eltolódása
- maximális húzóerő az alsó övben
- maximális nyomóerő a felső övben
- maximális rácsrúderő értéke a szélső mezőben

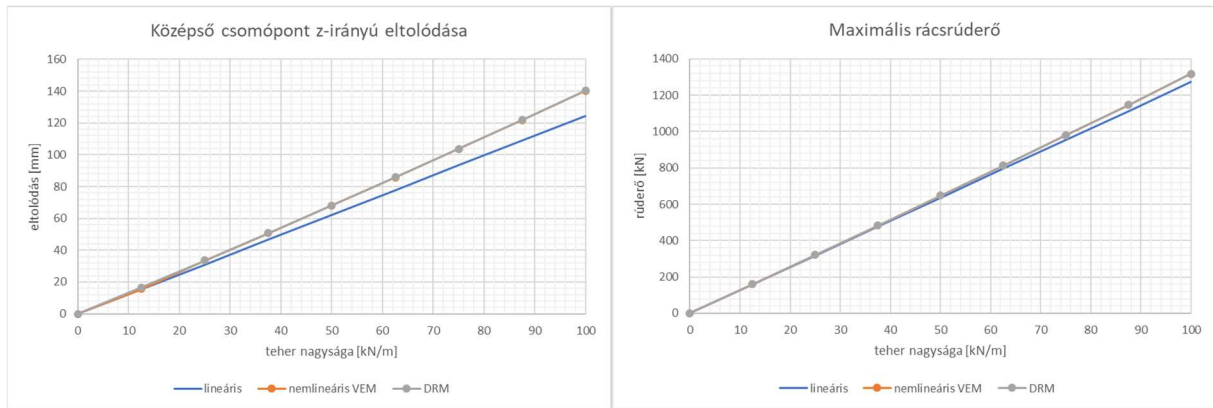
Az alkalmazott teherelrendezés egy hosszmentén egyenletesen megoszló tehernek felel meg, amelyet a rácsostartó felső csomópontjaira redukálva adtam meg. Ezen megoszló erő értékét növeltem 100 kN/m-ig, 12,5 kN/m-es teherlépcsőkben. Fontos megjegyezni, hogy a tartószerkezet nem került méretezésre, a szerkezet mechanikai vizsgálatára azonban megfelelő.

A dinamikus ellazítással meghatározott lehajlási ábrát a *6.5. ábra* szemlélteti. A verifikálás eredményeit a három eltérő pontosságú számítási eljárás esetén a *6.7. – 6.8. grafikonokon* szemléltetem.

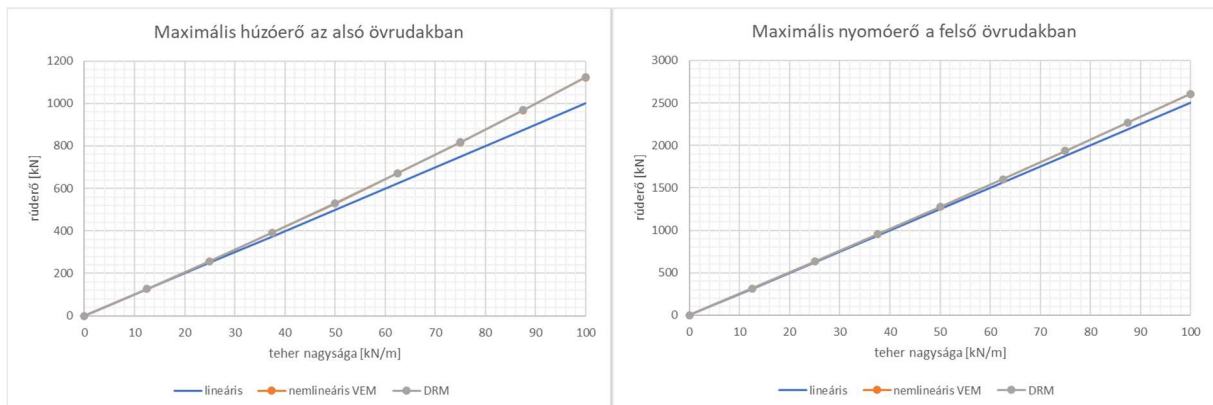


6.5. ábra. Kiindulási (piros) és deformált alak (zöld) *Rhinoceros 3D*-ben megjelenítve.

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata



6.7. grafikon. Középső csomópont z-irányú eltolódása (balra) és maximális rácsrúderő értéke (jobbra) az alkalmazott terhelés függvényében a három eltérő pontosságú számítási eljárás esetén.



6.8. grafikon. Maximális húzó- (balra) és nyomóerő értéke (jobbra) az övrudakban az alkalmazott terhelés függvényében a három eltérő pontosságú számítási eljárás esetén.

Az eredmények alapján látható, hogy a dinamikus ellazítással meghatározott elmozdulás- és erőjellegű mennyiségek a nemlineáris végeselemes számítás eredményeivel jó egyezést mutatnak.

A numerikus értékek összehasonlítása esetén elmondható, hogy valós szerkezetek esetén előforduló terhekre, ahol a rácsostartó teherbírasi és használhatósági szempontból megfelel, a három eljárás eredményei között elhanyagolható a különbség. A terhek növekedésével azonban a lineáris számítás egyre nagyobb mértékben eltér a másik két eljárás eredményeitől, mely eltérés a legnagyobb terhelés esetében már meghaladja az 10 %-ot. Ilyen lehajlások valós acélszerkezetű rácsostartók esetén azonban nem léphetnek fel, mert a szerkezet ebben a tartományban már nem teljesíti a vonatkozó határállapotokat. A vizsgálat célja kizárólag az eljárások összehasonlítása.

Az eredmények alapján a felépített numerikus program számítási eljárása megfelelőnek mondható, a várákosoknak megfelelően jó egyezést mutat a nemlineáris végeselemes eljárással.

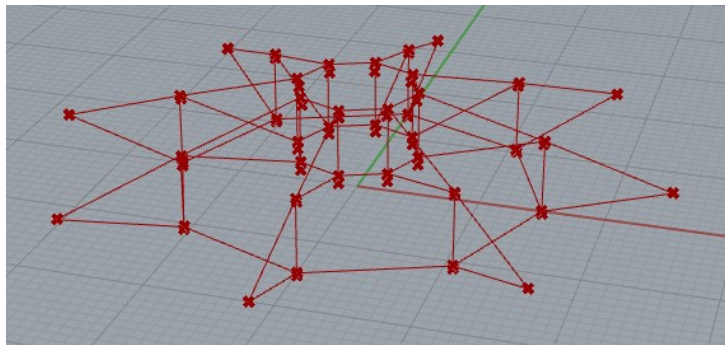
7. Parametrikus vizsgálatok bemutatása

A numerikus modell előállítás, és az eljárás helyességének igazolása után tensegrity kupolák parametrikus vizsgálatát végeztem el a felépített programkörnyezetben. A program felépítése alapján a szerkezet geometriai és merevségi paraméterei a számítás elején bemeneti adatként megadhatók, így azok egyszerű változtatásával a paraméteres vizsgálat nagyszámú analízise könnyedén elvégezhető.

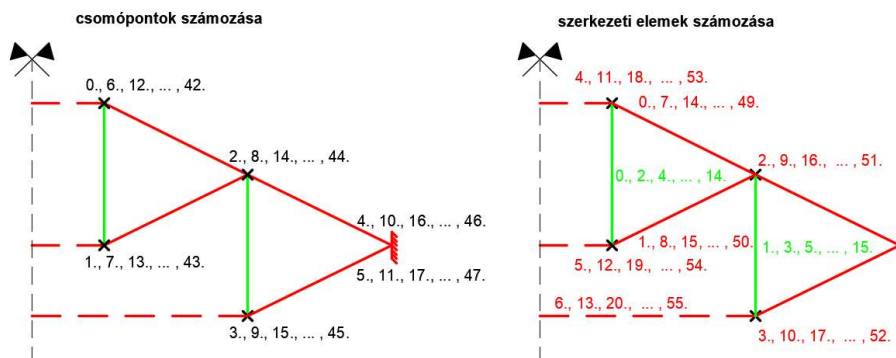
A főbb paraméterek az alábbiak szerint alakultak:

- a kábelkupola átmérője
- sugárirányú szegmensek száma
- gyűrűk száma
- a szélső oszlopok magassága, valamint a magasságok aránya a külső gyűrűtől kiindulva
- a merev peremgyűrűhöz csatlakozó megtámasztott csomópontok magassági helyzete
- a szerkezeti elemek merevsége
- megfeszített kábelek száma és pozíciója, feszítőerők nagysága
- terhelés nagysága és eloszlása

Kiindulásként egy 8 szegmensből és 2 gyűrűből álló, 50 m átmérőjű szerkezet vizsgálatát végeztem el 1 kN/m² intenzitású, alaprajzi értelemben egyenletesen megoszló felületi teherre. A terhet a csomópontokra szükséges redukálni, ez a terhelési mezők alapján történt.



7.1. ábra. 2 gyűrűből és 8 szegmensből álló, 50 m átmérőjű Geiger-féle kábelkupola modellje.



7.2. ábra. 2 gyűrűből és 8 szegmensből álló 50 m átmérőjű Geiger-féle kábelkupola csomópontjainak (balra) és szerkezeti elemeinek (jobbra) sorszámozása az egyes szegmensekben.

Zöld - oszlopok, folytonos piros - sugárirányú kábelek, szaggatott piros - gyűrűirányú kábelek.

A támasznál lévő csomópontokat egy pontba vontam össze, ez eredményezi a legmeredekebb kábelvezetést, ezáltal a legnagyobb globális merevségű kialakítást.

A számítás első lépéseként a feszítőerőnek a szerkezeti viselkedésre gyakorolt hatását vizsgáltam. Valós szerkezetek kivitelezhetősége alapján, a szerelhetőséget figyelembe véve,

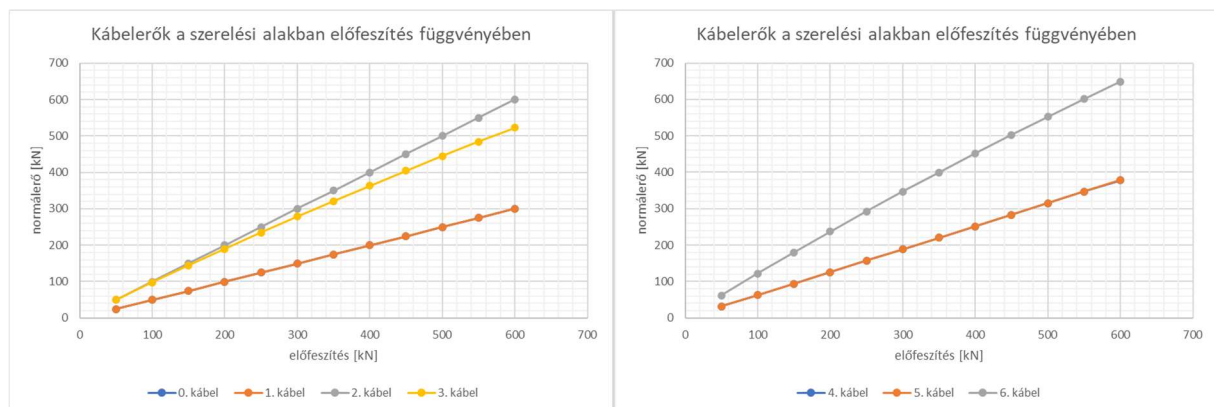
logikusnak tűnik a szerkezet olyan módú megfeszítése, ahol a támaszokhoz kapcsolódó kábeleket feszítik meg. Így a szerkezet többi része kényszerek nélkül összeszerelhető, mozgatható, feszíteni csak a tartószerkezet szerelésének utolsó fázisában szükséges. A körszimmetrikus szerkezeti kialakításra való tekintettel az egyes szegmensekben az azonos kábelelemekben azonos nagyságú feszítőerőt írtam elő az alakkeresés során. A szélső kábelek közül mindegyik vizsgálat során a felső feszítőkábelekben írtam elő egyedül adott nagyságú feszítést, a többi kábelben rugalmas alapon számoltam az igénybevételeket az alakkeresés során.

A vizsgált szerkezet kábel- és oszlopelemeinek merevségét oly módon határoztam meg, hogy azok a terhelés nagyságával összhangban legyenek, egy reális szerkezeti kialakítást eredményezzenek. A vizsgálat elején a tartószerkezeti elemek közelítő méretfelvételét végeztem el. Ennek során a kábelek húzási- és az oszlopok stabilitásvesztési ellenállását vettem alapul és határoztam meg a szükséges keresztmetszeti méreteket az említett egyenletesen megoszló terhelésre. Fontos tehát kiemelni, hogy tartószerkezeti szempontból nem a szabványos méretezési eljárásnak megfelelő kialakításokat vizsgáltam, illetve a számítás során sem volt célom a szerkezet méretezése. Ez a figyelembe vett terhelési típusok és teherelrendezések számából is következett, szélteher hatását például nem vizsgáltam. Ez a tény azonban nem befolyásolta a szerkezeti viselkedésről levonható általános tapasztalatokat.

7.1. Előfeszítés hatásának vizsgálata

Az előző fejezetben leírtaknak megfelelően a szélső peremgyűrűkhöz kifutó kábelek közül a felsőket (2., 9., 16. ... 51. sorszámú kábeleket) feszítettem meg 50 kN-tól 600 kN-ig, 50 kN-os lépcsőkben. Az így kialakuló elméleti alakokban az egyes kábel- és oszlopelemekben arányosan alakultak a feszítőerők, mivel ezen sajátfeszültség-rendszerek nem függetlenek egymástól.

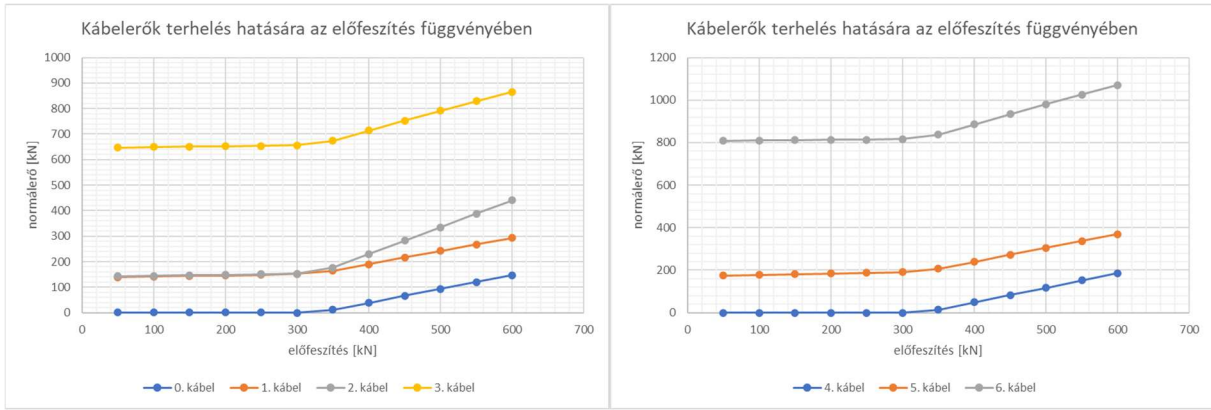
Az ennek megfelelő lineáris eloszlású feszítőerők értékét, valamint a terhelés hatására az állapotváltozás-vizsgálat végén meghatározott igénybevételeket a 7.1. - 7.3 grafikonok szemléltetik. A függőleges és sugárirányú eltolódásokat a 7.4. grafikonok szemléltetik.



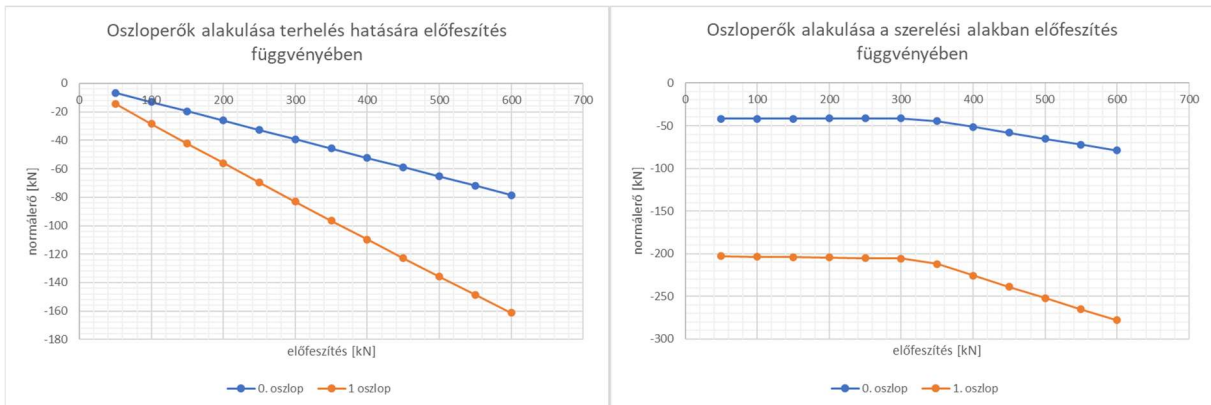
7.1. grafikon. Feszítőerők a szerelési alakban egy szegmens esetén változó nagyságú előfeszítésnél a sugár- (balra) és gyűrűirányú (jobbra) kábelekben.

Fontos megjegyezni, hogy a különböző nagyságú előfeszítések azonos jellegű, de eltérő elméleti alakokat eredményeztek. Általánosságban elmondható, hogy minél nagyobb az előfeszítés értéke, annál laposabb a kábelkupola alakja. Ily módon különböző előfeszítések összehasonlításakor az eltolódások relatív értékét tudtam összevetni.

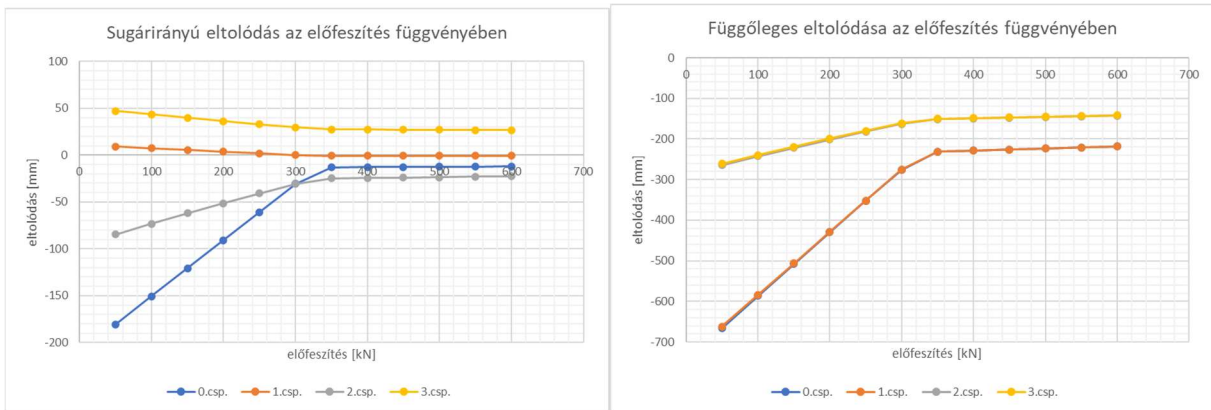
Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata



7.2. grafikon. Kábelerők az állapotváltozás végén egy szegmens esetén változó nagyságú előfeszítésnél a sugar- (balra) és gyűrűirányú (jobbra) kábelekben.



7.3. grafikon. Oszloperők alakulása egy szegmensen belül változó nagyságú előfeszítésnél az elméleti alakban (balra) és az állapotváltozás végén (jobbra).



7.4. grafikon. Eltolódások alakulása egy szegmensen belül változó nagyságú előfeszítésnél az állapotváltozás vizsgálat végén.

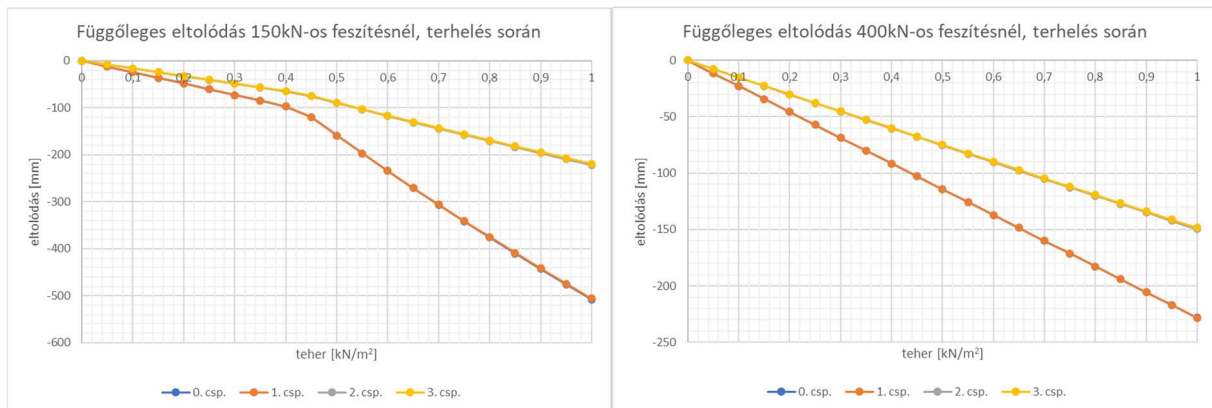
A 7.2. és 7.4. grafikonok alapján látható, hogy a szerkezeti viselkedés két lineáris tartományra bontható, melyek között 300 kN körüli előfeszítés jelenti a határvonalat. Ennél kisebb előfeszítés esetén, terhelés hatására a 0. jelű feszítőkábelben elhanyagolható nagyságú erő ébred, míg a 4. jelű gyűrűirányú felső kábel elernyed, tehermentessé válik. Ezen a tartományon a szerkezeti elemekben, noha jelentős feszítőerő különbségek lépnek fel az elméleti alakban, az állapotváltozás vizsgálat végén közel azonos erőeloszlás adódik. Megfelelően nagy előfeszítés (közelítően 325 kN) esetén, minden kábelelem húzott marad a terhelt szerkezetben is.

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

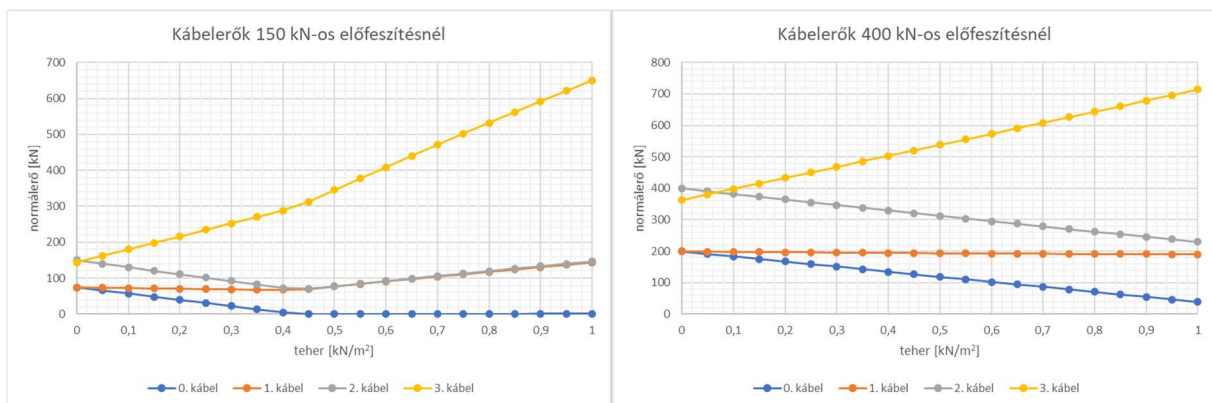
A kábelek elernyedésének oka sugárirányú kábelek esetén az, hogy a külső terhek hatására a szerkezet belső csomópontjai függőlegesen lefele tolnak el, melyek a felső sugárirányú kábelek hosszának csökkenését eredményezik. Egy bizonyos ponton a kábelek szélső csomópontjainak távolsága elérheti a leszábási hosszúságokat, majd az alá csökkenhet, innentől a kábelekben nem keletkezik megnyúlás. A *0. jelű feszítőkábelek* a folyamatok során nem válnak teljesen ernyedtté, a legkisebb húzóerő értéke 1 kN körüli. Ennek oka, hogy az oszlopok a belső csomópontokban befelé dőlnek, így azok nyomóerejének lesz egy kis vízszintes irányú komponense, melyet ekkora nagyságú kábelerővel lehet kiegyensúlyozni. A belső gyűrű felső, *4. jelű felső kábele*i a belső oszlopok befelé dőlése révén szenvednek egyre csökkenő nyúlásokat, mely végeredményben azok elernyedéséhez vezetnek.

Az eltolódások vizsgálata során az előzőekhez képest ellentétes hatás figyelhető meg. Jelentős értékbeli különbségek a kezdeti tartományban adódtak, ahol a belső szerkezeti részek kábelelei elernyednek és 300 kN felett válik közel konstanssá a lehajlások értéke feszítéstől függetlenül. A két tartomány lehajlásai között nagyságrendbeli különbségek tapasztalhatók.

A szerkezeti viselkedés egy adott előfeszítés és lépcsős terhelés esetén a 7.5. - 7.8. grafikonokon látható 150 kN-os, valamint 400 kN-os előfeszítés esetén.

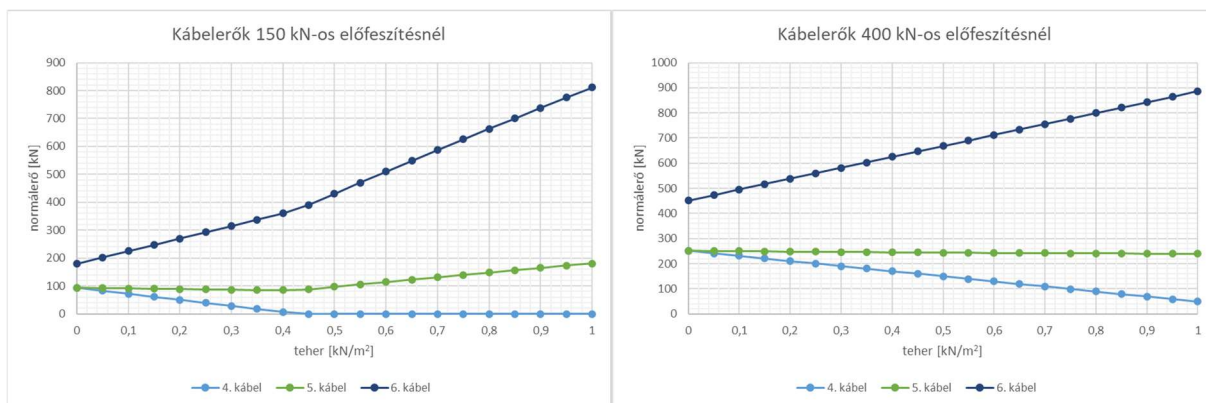


7.5. grafikon. Eltolódások alakulása egy szegmensen belül 150 kN-os (balra) és 400 kN-os (jobbra) előfeszítés esetén, az állapotváltozás vizsgálat során az egyes teherlépcsőkben.

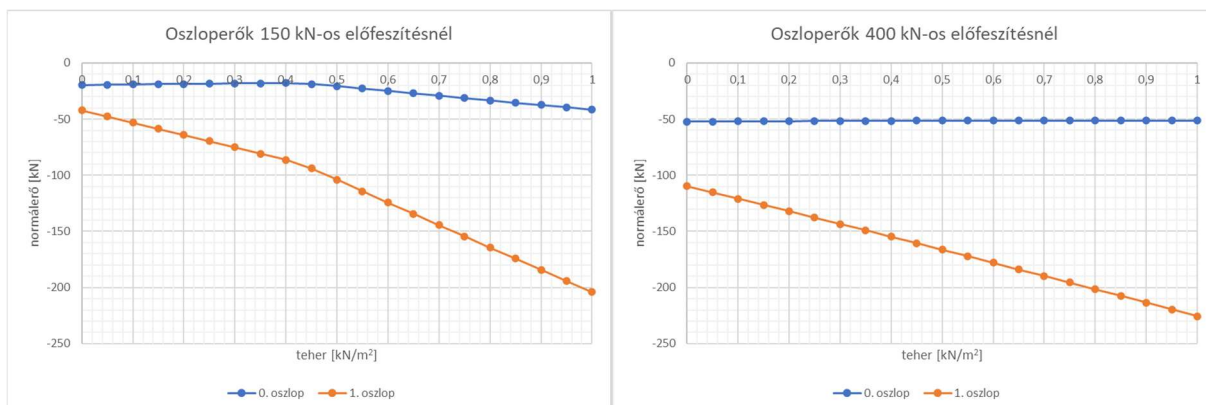


7.6. grafikon. Sugárirányú kábelerők alakulása egy szegmensen belül 150 kN-os (balra) és 400 kN-os (jobbra) előfeszítés esetén, az állapotváltozás vizsgálat során az egyes teherlépcsőkben.

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata



7.7. grafikon. Gyűrűirányú kábelerők alakulása 150 kN-os (balra) és 400 kN-os (jobbra) előfeszítés esetén, az állapotváltozás vizsgálat során az egyes teherlépcsőkben.



7.8. grafikon. Oszloperők alakulása egy szegmensben belül 150 kN-os (balra) és 400 kN-os (jobbra) előfeszítés esetén, az állapotváltozás vizsgálat során az egyes teherlépcsőkben.

Az itt tapasztaltak korrelálnak a verifikálásnál megfigyelttel. A kábelek ernyedése jelentős merevségbeli csökkenést eredményez 150 kN-os előfeszítés esetén, ettől eltekintve a viselkedés szakaszonként lineáris.

A belső gyűrű alsó, 1. jelű csomópontjába befutó 0. oszlop, valamint sugárirányú 1. jelű tartó- és 5. jelű gyűrűirányú alsó kábelek viselkedése alapján elmondható, hogy amíg a felső kábelek dolgoznak, azok nem vesznek részt aktívan a külső terhek viselésében, tartják az előfeszítéskor bevitt igénybevételeket. Aktívan a felső kábelek ernyedése után kapcsolódnak be a teherviselésbe, onnantól kezd el emelkedni az őket leíró görbe 150 kN-os előfeszítés esetén.

A tapasztalat az 1. jelű alsó tartókábel esetén ellentmond a szemlélettel, miszerint az alsó kábelek hossza a lefele történő elmozdulás során növekszik. A jelenség magyarázata az oszlopok befelé történő megdőlésében keresendő, melynek hatására a kábelek végpontjai közelebb kerülnek egymáshoz. A két hatás közel azonos mértékű, de ellentétes értelmű, így nem változik jelentősen a kábelerő.

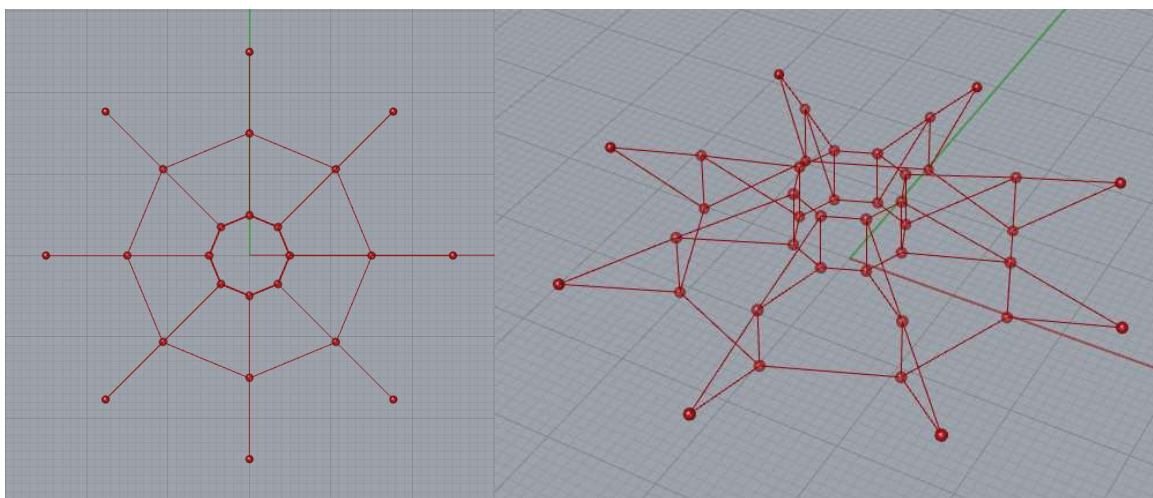
A 0.- és 2. jelű felső sugárirányú feszítőkábelekben a terhelés során csökken a húzóerő értéke. 150 kN-os előfeszítés esetén azonban a 2. jelű külső kábel a belső kábelek elernyedése után újból bekapcsolódik a növekvő terhek viselésébe. A szerkezet egy új statikai vázzal, lényegesen csökkent merevséggel fog működni az adott teherszinttől kezdve.

Természetesen a belső gyűrű felső kábeleinek az elernyedése a viselkedést kedvezőtlenül befolyásolja, valós méretezési feladat esetén célszerű elkerülni a jelenséget. Ugyanakkor felmerül a kérdés, hogy az így kialakuló egyensúlyi állapot stabil-e, ugyanis ebben a

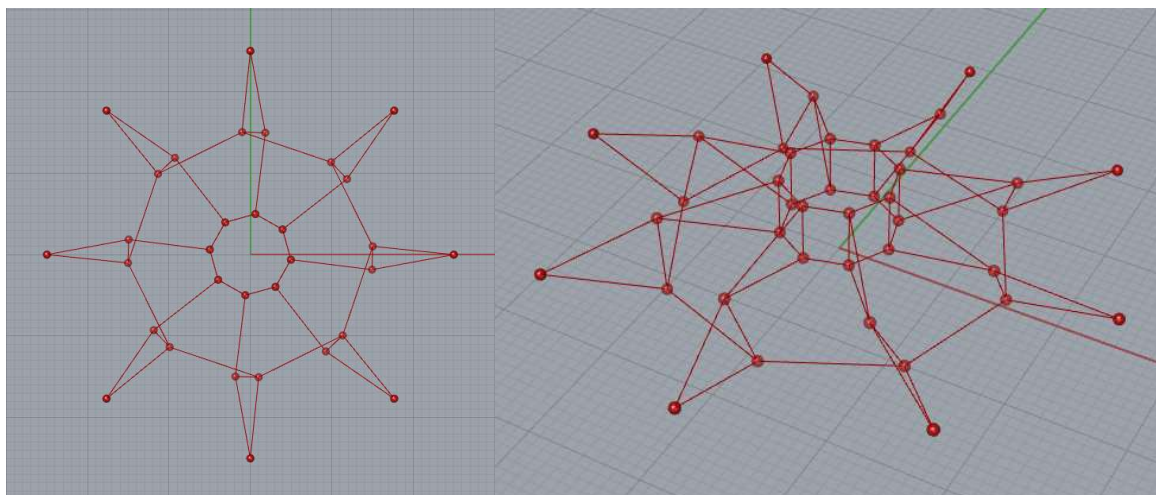
konfigurációban az oszlopok felső csomópontjai gyűrűirányban nincsenek megtámasztva, az adott irányban eltűnik a csomóponti merevség.

Ennek a vizsgálatára a terhelés végén kialakuló állapotban a belső oszlopok egy tetszőlegesen kiválasztott felső csomópontjában a sugárirányra merőleges, vízszintes terhet helyeztem el. A terhelés nagysága a számítás hibahatáránál nem kisebb tartományban tetszőlegesen kicsire felvehető, egyedüli célja, hogy a szerkezetet kitérítse az egyensúlyi állapotából. Így vizsgálható, hogy a megzavart állapotból a szerkezet az eredeti egyensúlyi állapotába tér-e vissza, vagy attól távolodva az eredetitől lényegesen eltérő egyensúlyi helyzetbe kerül.

Az eredeti egyensúlyi állapotot, valamint a stabilitásvizsgálat eredményeként kialakuló új helyzetet 150 kN-os előfeszítés esetén a 7.3 – 7.4. ábrák szemléltetik.



7.3. ábra. Terhelés utáni egyensúlyi helyzet felülnézete (balra) és térbeli nézete (jobbra).
A kialakult egyensúlyi helyzetben a belső gyűrű felső kábelei tehermentesek, a belső oszlopok felső csomópontjai sugárirányban megtámasztatlanok.



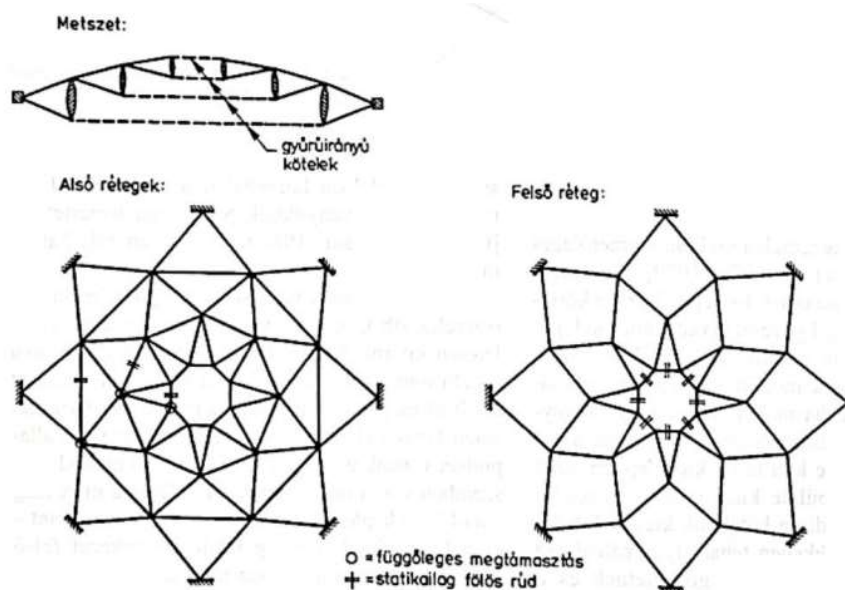
7.4. ábra. Kitérítés utáni új egyensúlyi helyzet felülnézete (balra) és térbeli nézete (jobbra).
Látható a belső gyűrű elcsavarodásával kialakuló jelentősen eltérő konfiguráció.

A számítás során a megzavarást szolgáló gyűrűirányú erő értékét a numerikus számítás hibahatárával azonos értékre vettem fel, mely jelen esetben 0,01 kN volt. A stabilitásvizsgálat eredményeként a szerkezet az eredetitől jelentősen eltérő állapotban került újra egyensúlyban. A terhelés hatására a belső gyűrű elfordult a szerkezet szimmetriatengelye körül jelentős deformációk kialakulása nélkül. A külső oszlopok ezen elcsavarodás hatására egy sugárirányú

tengely körül elfordultak, így kialakítva az új megcsavart egyensúlyi helyzetet. Ez alapján az eredeti egyensúlyi állapot nem mondható stabilnak. A belső gyűrű csomópontjai gyűrűirányban több mint 60 cm-t, a külső oszlop csomópontjai pedig ennél is többet mozdultak el, a felső csomópontban az elmozdulás több mint 180 cm-re adódott.

Ezután egy olyan szerkezeti kialakítás vizsgálatát végeztem el, amelyben minden kábel dolgozó marad az állapotváltozás-vizsgálat végén. Ezt az előbbieken részletesen vizsgált 400 kN-os előfeszítés teljesíti. Az eredmények alapján elmondható, hogy az előbb alkalmazott 0,01 kN-os erő hatására a szerkezet nem tér ki az egyensúlyi helyzetéből, így az stabilis, a csomóponti teher kismértékű növelése azonban az előzőekhez hasonló elcsavarodást eredményezett. Az új helyzet eléréséhez ebben az esetben természetesen kisebb elmozdulások kellettek mint 150 kN-os előfeszítés esetén az instabil helyzetben, de így is nagy szerkezeti mozgások alakultak ki. Ez korrelál a Kollár [9] és Tomka [27] által leírtakkal, mi szerint a kábelkupolák felső oszlopcsomópontjai ugyan stabil egyensúlyi állapotban vannak megfeszített kábelek esetében, azonban a gyűrűirányú terhekkel szembeni merevségük csekélynek mondható. Ezt a problémát az általam vizsgált szerkezeti kialakítás esetén csak a hézajat elhelyezése szünteti meg, mely már kellő megtámasztást biztosít a vizsgált csomópontokban oldalirányban [9]. Ez a jelenség azonban az általam vizsgált függőleges terhek tartományában a szerkezeti viselkedésről levonható tapasztalatokat nem befolyásolja, vízszintes hatások esetén fellépő problémát jelent.

További megjegyzés, hogy kialakítható olyan topológiájú szerkezet, amely erre a problémára megoldást nyújt. Ilyenre mutat példát [9] alapján a 7.5. ábra. Ezen szerkezetek azonban a lényegesen magasabb fokú statikai határozatlanság miatt a szerelhetőség szempontjából kedvezőtlen kialakítást jelentenek.



7.5. ábra. A felső csomópontoknak kellő megtámasztást biztosító hálózati kialakítás [9] alapján.

7.2. Nyomott belső gyűrű alkalmazása

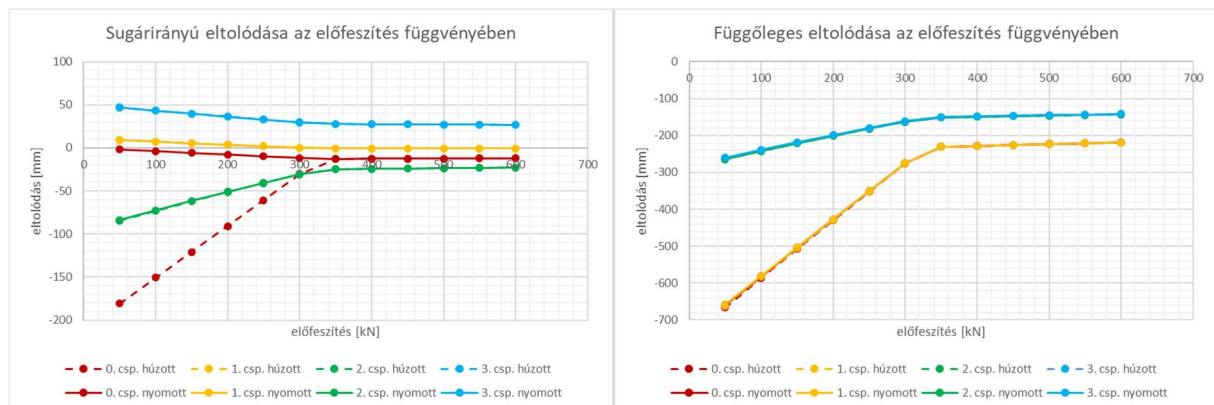
Az előző fejezet végén felvetett probléma megoldására alkalmazható húzást és nyomást egyaránt felvenni képes belső gyűrű kialakítása. Ennek vizsgálata során, hogy az elméleti- és szerelési alakot ne befolyásolja a belső mag átalakítása az eredeti kábelekkel azonos normálmerevségű rúdelemeket alkalmaztam.

Az így kapott új szerkezeti kialakítás ennek megfelelően nem eredményezett eltérő viselkedést nagy előfeszítések esetén, ahol egyik kábelelem elernyedése sem jelentkezett terhelés hatására. Ezeken a szakaszokon a viselkedést leíró görbék teljes mértékben azonosak. Eltérés kis előfeszítések esetén jelentkezett, ahol a korábban elernyedett, így hatástalan kábelek helyébe nyomást is felvenni képes rúdelemek kerültek.

Az eredmények alapján elmondható, hogy lényegi eltérés egyedül az elmozdulás komponensekben, azon belül is a belső oszlop felső, 0. csomópontjának sugárirányú eltolódásában jelentkezett. Ebben az esetben a nyomott belső gyűrű végig dolgozik, így meggátolja a csomópont befelé tolódását, míg csak húzásnak ellenálló gyűrű esetén jelentős eltoldások keletkeznek, 50 kN-os előfeszítés esetén csaknem 200 mm-es nagyságrendben. A többi elmozduláskomponens mindegyik csomópont esetén szinte tökéletes egyezést mutat.

Megjegyzendő hogy a belső magban kialakuló igénybevételek nagysága a többi igénybevételhez képest elhanyagolható, 0,1 kN körüli értékű. Ezen kialakításban azonban az addig dolgozó 0. jelű sugárirányú feszítőkábel elernyedése tapasztalható. Ez húzott kialakítás esetén ugyancsak csekély húzóerővel volt terhelve.

Az ennek hatására kialakuló eltolódásokat a 7.9. grafikonok szemléltetik, összehasonlítva az előző fejezet eredményeivel.



7.9. grafikon. Csomópontok eltolódásainak alakulása az előfeszítés függvényében csak húzásnak ellenálló, és húzást és nyomást felvenni képes belső szerkezeti mag esetén.

Eltérés a 0. csomópont sugárirányú eltolódásaiban van, a többi esetben a grafikonok fedik egymást.

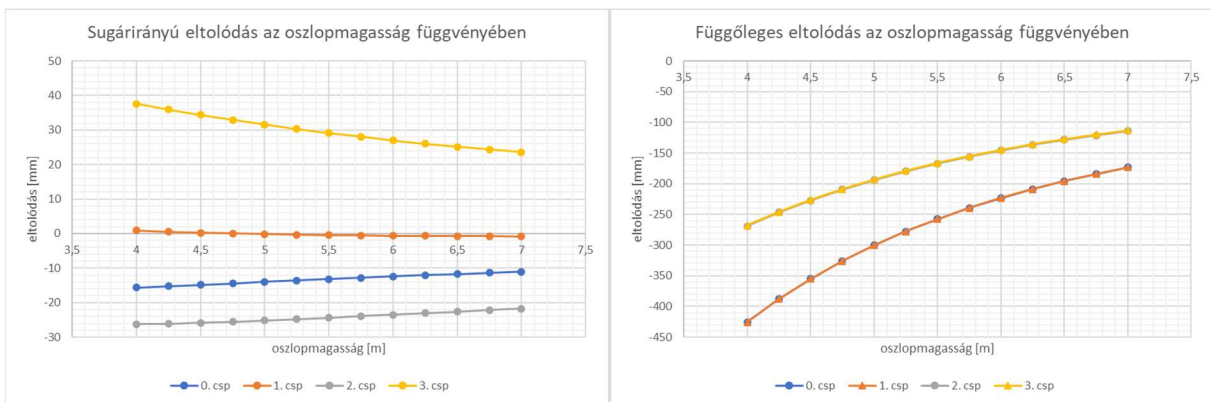
Ezek alapján a belső kábelek nyomott elemekre való cserélése nem jelent hatékony megoldást a kábelek elernyedéséből adódó szerkezeti merevség csökkenésére.

7.3. Oszlopmagasság hatásának vizsgálata

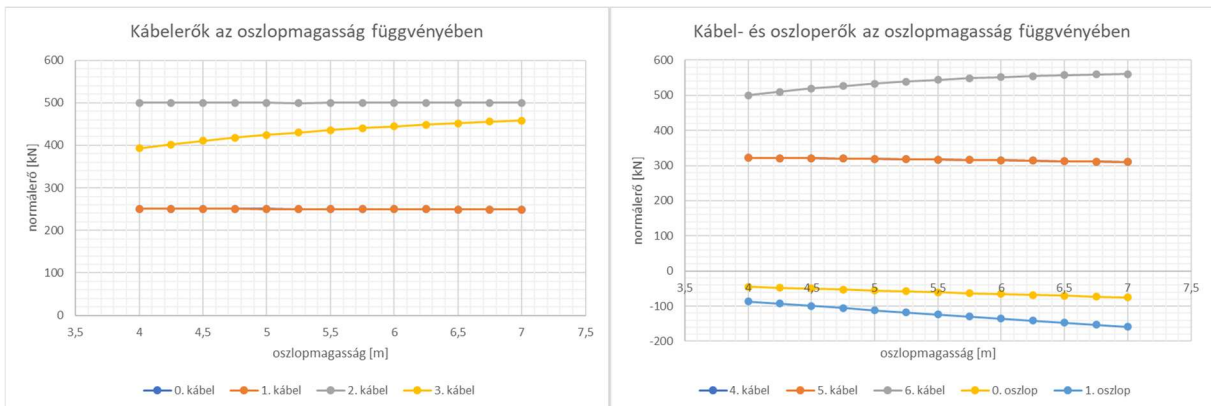
Az oszlopmagasság hatását az előzőek alapján olyan konfigurációban vizsgáltam, ahol minden szerkezeti elem dolgozó marad az állapotváltozás-vizsgálat végén. Az előfeszítést ennek megfelelően 500 kN-ra vettem fel.

A vizsgálatok során az eddigi 2 gyűrűből és 8 szegmensből álló kialakítást vizsgáltam és a külső oszlopok méretét kezeltem változó paraméterként. 4 m-től 7 m-ig változtattam magasságot 0,25 m-es lépcsőkben. A belső és külső oszlop magasságának arányát 1,1-re vettem fel, így minden lépésben ennek megfelelően változott a belső oszlop mérete. A szélső, megtámasztott csomópontokat ugyancsak az előző fejezeteknek megfelelően egy pontba vontam össze és magassági értelemben a szélső oszlop felezőpontjában rögzítettem minden egyes esetben.

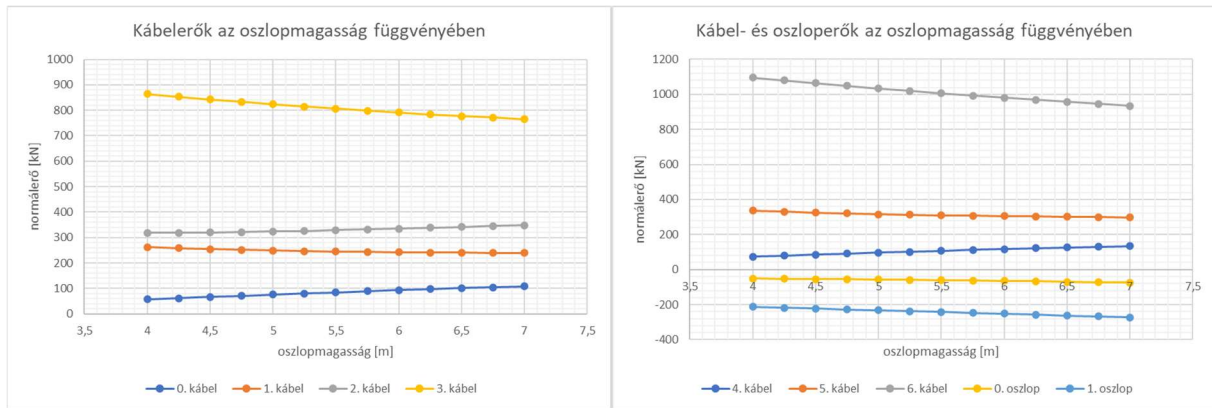
Az egyes kialakításokban a belső csomópontok elmozdulásait, valamint az egyes kábel- és oszloperőket határoztam. Az eredményeket a 7.10.-7.12. grafikonok szemléltetik.



7.10. grafikon. Csomópontok sugárirányú (balra) és függőleges (jobbra) eltolódásainak alakulása. Különösen a függőleges eltolódások vizsgálata esetén látható az erősen nemlineáris kapcsolat.



7.11. grafikon. Sugárirányú kábelerők (balra), valamint gyűrűirányú kábelerők és oszloperők (jobbra) alakulása egy szegmens esetén az előfeszítés után.



7.12. grafikon. Sugárirányú kábelerők (balra), valamint gyűrűirányú kábelerők és oszloperők (jobbra) alakulása egy szegmens esetén terhelés hatására.

Az eredmények alapján a lehajlások tekintetében erősen nemlineáris viselkedés rajzolódik ki, különösen a függőleges eltolódásoknál. Az oszlopmagasság növelésével hatékonyan csökkenthető a szerkezet lehajlása. Az igénybevételek vizsgálata alapján ugyanakkor elmondható, hogy nem tapasztalható jelentős változás. Méretezési feladat esetén tekintettel kell lenni a megnövekedett oszlophosszak miatt lecsökkent stabilitásvesztési ellenállásra, így nagyobb keresztmetszetű oszlopokra lehet szükség.

7.4. Féloldalas teher hatása

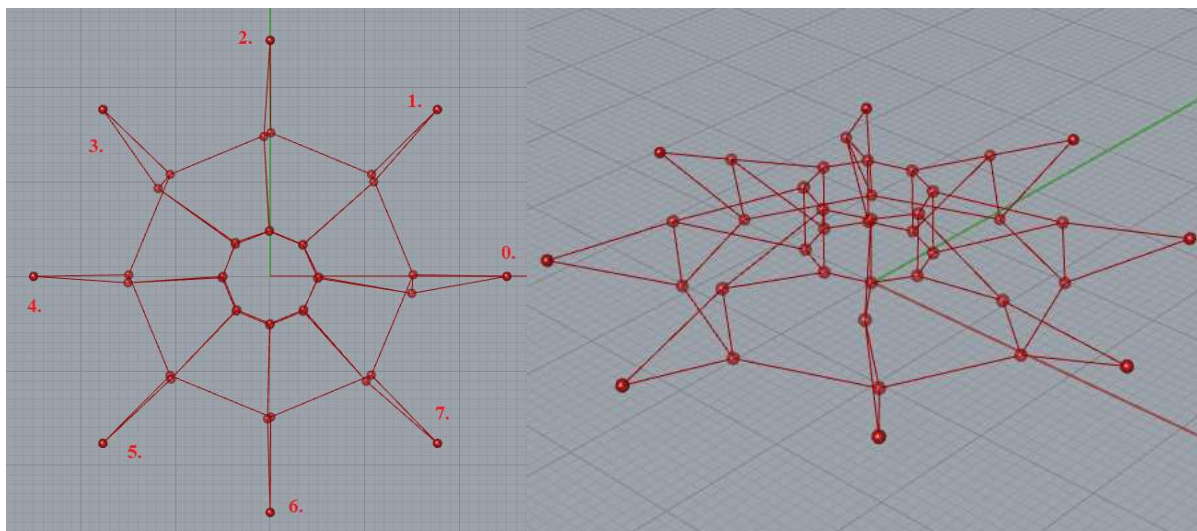
Az eddig alkalmazott alaprajzi értelemben egyenletesen megoszló, 1 kN/m^2 intenzitású felületi teher helyett jelen fejezet vizsgálataikor a 7.6. ábra szerint a szerkezet 0.-3. szegmensein az eredeti teherintenzitásnak megfelelő érték került elhelyezésre, míg a 4.-7. szegmenseken az eredeti érték fele. A viselkedésben ennek a teherelrendezésnek megfelelően egyszerűes szimmetria és a jobban terhelt oldal irányába mutatkozó megdőlés várható. A vizsgált szerkezeti kialakítások megegyeznek a 7.1. fejezetben alkalmazottakkal.

Féloldalas teherelrendezés esetén a 6.1. fejezet vizsgálatai alapján nemlineáris viselkedés feltételezhető. Ennek oka, hogy nyúlásmentes alakváltozások is létrejönnek terhelés hatására, melyek az eredetileg infinitezimálisan labilis szerkezet egyes mechanizmusai szerinti deformációkat okoznak. Ezek az egyenletes teherhez tartozó elmozdulásokhoz képest, az 1. fejezet elméleti áttekintése alapján, jelentősen nagyobb eltolódásokat okoznak.

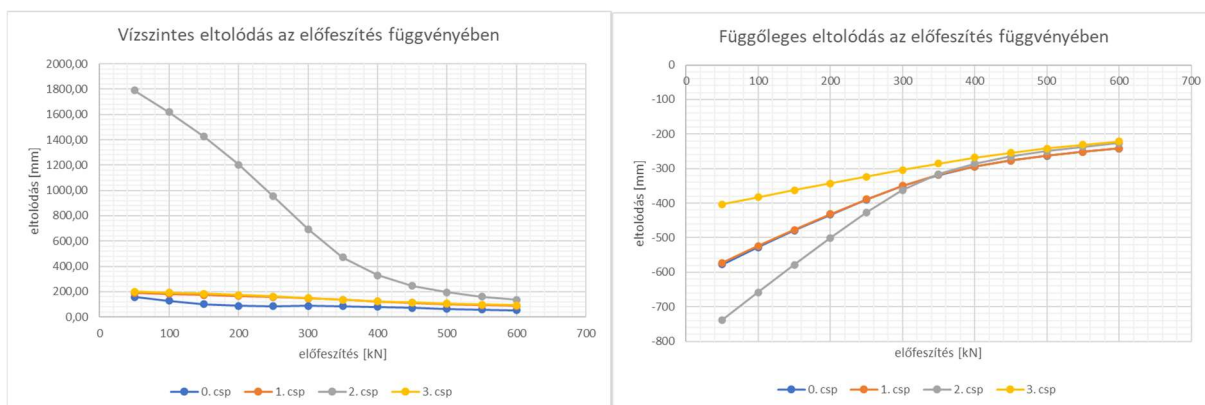
Jelen fejezetben az előfeszítés hatását vizsgáltam féloldalas teherelrendezés esetén. A szélső peremgyűrűkhöz kifutó kábelek közül a felsőket (2., 9., 16. ... 51. sorszámú kábeleket) feszítettem meg 50 kN-tól 600 kN-ig, 50 kN-os lépcsőkben.

Egy ilyen terhelés hatására kialakuló egyensúlyi helyzetet mutat a 7.6. ábra. Az eltolódások és igénybevételek numerikus értékei alapján elmondható, hogy a 0.-3., 1.-2., 4.-7. és 5.-6. szegmensek viselkedése páronként szimmetrikus. Az állapotváltozás-vizsgálat végén kapott eredményeket a 7.13.-7.16 grafikonok szemléltetik.

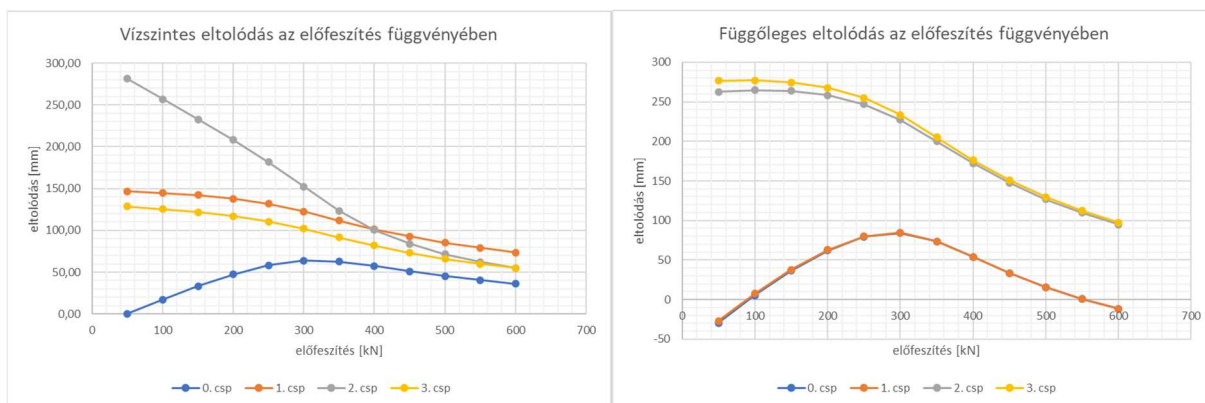
Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata



7.6. ábra. Féloldalas teher hatására kialakult egyensúlyi alak felülnézete (balra) és térbeli nézete (jobbra).



7.13. grafikon. 0. és 3. szegmens csomópontjainak vízszintes (balra) és függőleges (jobbra) eltolódásai.

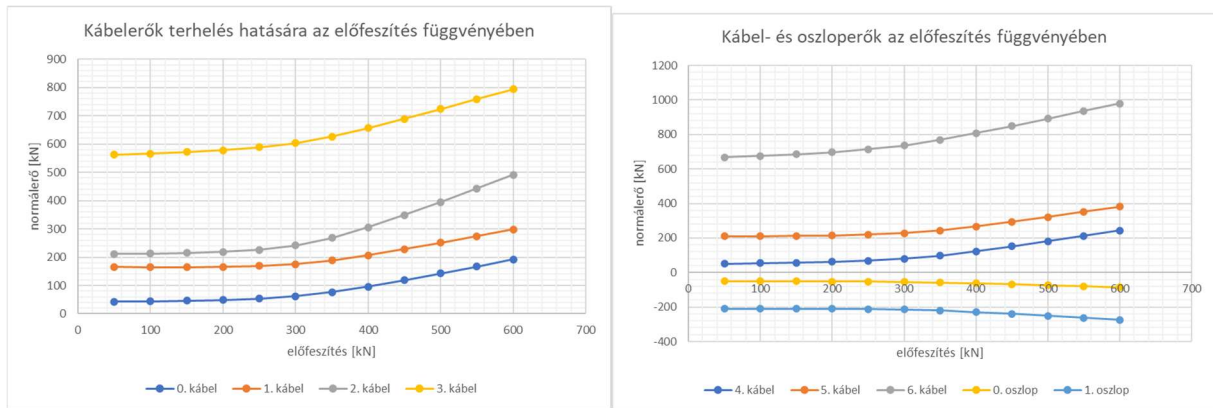


7.14. grafikon. 5.- és 6. szegmens csomópontjainak vízszintes (balra) és függőleges (jobbra) eltolódásai.

A grafikonok erősen nemlineáris viselkedést mutatnak. A 7.13. grafikon a jobban terhelt oldalon található 0. és 3. jelű szegmensek eltolódásait mutatja, míg a 7.14. grafikon a kevésbé terhelt oldal 5. és 6. jelű szegmenseire vonatkozik. Általánosságban elmondható, hogy az előfeszítés csökkenti a csomópontok eltolódását, különösen a külső oszlopok tetőpontja esetén.

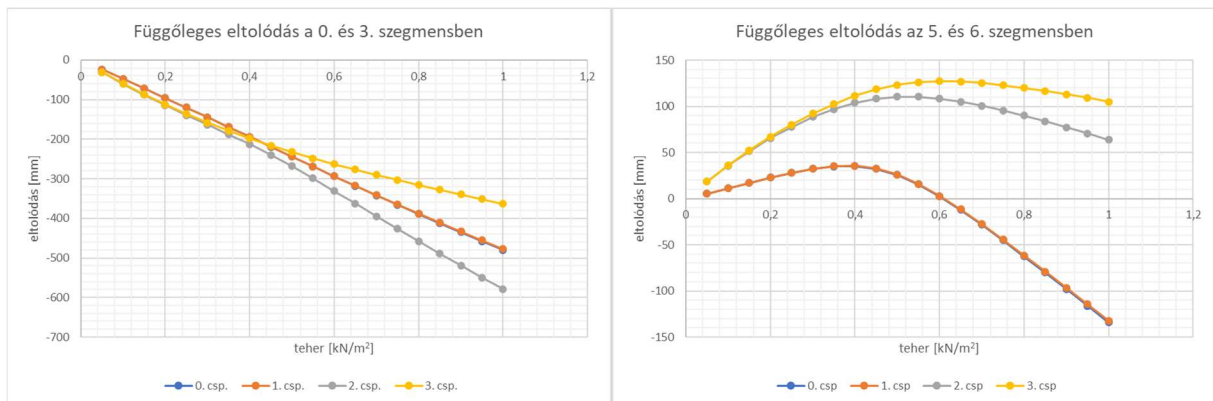
Az igénybevételek nemlineáris alakulását az előfeszítés függvényében a 7.15. grafikon szemlélteti.

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

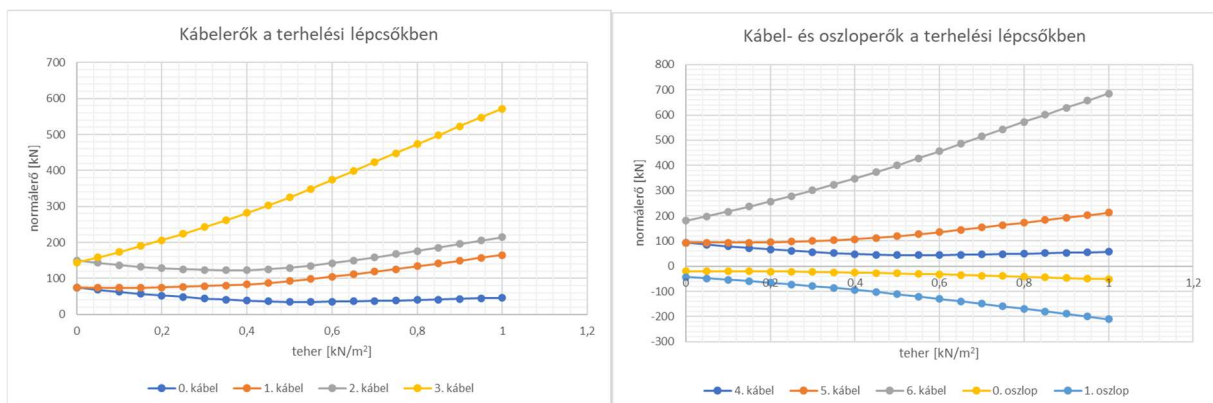


7.15. grafikon. Sugárirányú kábelerők (balra), valamint gyűrűirányú kábelerők és oszloperők (jobbra) alakulása terhelés hatására.

Egy adott nagyságú, 150 kN-os előfeszítés esetén az állapotváltozás-vizsgálat eredményét a 7.16.-7.17. grafikonok szemléltetik.



7.16. grafikon. 0. és 3. szegmens (balra), valamint 5. és 6. szegmens (jobbra) csomópontjainak függőleges eltolódásai a teherintenzitás függvényében.



7.17. grafikon. 0.- és 3. szegmens sugárirányú kábelerői (balra), valamint gyűrűirányú kábelerői és oszloperői (jobbra).

A teherlépcsőkben történő állapotváltozás-vizsgálat eredményei alapján szintén nemlineáris viselkedés rajzolódik ki, azonban elmondható, hogy a kevésbé terhelt oldalon lényegesen nagyobb fokú a nemlinearitás. Itt a csomópontok mozgásának iránya a folyamat során megváltozik, a csomópontok egy része az eredeti helyzetükhöz képest megemelkedik.

8. Konklúziók, összefoglalás

A 7. fejezetben bemutatott parametrikus számításokban az előfeszítésnek, a húzott-nyomott rúdelemekből kialakított belső gyűrűnek, valamint a nyomott oszlopok magasságának a Geiger-féle kábelkupola-rendszerek viselkedésére gyakorolt hatását vizsgáltam. A szerkezet viselkedését egyenletes és féloldalas teherelrendezés mellett vizsgáltam. Az eredmények alapján az alábbi megállapítások vonhatók le.

Amíg minden elemben megmarad az előfeszítés hatása, addig az előfeszítéssel lineárisan változnak az erő- és elmozdulás jellegű mennyiségek egyenletes felületi teher esetében. Abban az esetben, ha egyes kábelelemek elernyednek, a szerkezet globális merevsége jelentősen csökken, de az ezt követő szakaszon ugyancsak lineáris viselkedés tapasztalható. Lépcsős terhelés esetén a viselkedés szintén minimum szakaszonként lineáris.

Féloldalas terhelés esetén az előbbi linearitás erősen nemlineáris viselkedésbe megy át, mind az előfeszítés függvényében, mind lépcsős terhelés esetén. Ennek oka a folyamat során végbemenő nyúlásmentes alakváltozásokban keresendő.

Az előfeszítés nagyságának függvényében egyes szerkezeti elemek az állapotváltozás-vizsgálat során nemdolgozóvá válhatnak. Ez egyrészt jelentős merevségbeli csökkenést eredményez, mely jól látható a vonatkozó grafikonok jellegében, másrészt az elernyedett kábelek hatására egyes oszlopok instabil egyensúlyi helyzetbe kerülnek. Ugyanitt újból érdemes megjegyezni [9] alapján, hogy a héjalás figyelembevétele nélkül ezen oszlopok ugyan stabil egyensúlyi helyzetben vannak, de a felső csomópontok merevsége kicsi, így könnyen bekövetkezhet az oszlopok lokális stabilitásvesztése elbillenésük formájában, mely végső soron a szerkezet elcsavarodással járó globális stabilitásvesztését eredményezheti.

Az előfeszítés túlzott mértékű növelése a szerkezeti viselkedés szempontjából nem jelent javulást, ha minden szerkezeti elem dolgozó marad a megfelelően nagy sajátfeszültségrendszernek köszönhetően. Ezen tartományban nem volt tapasztalható számottevő különbség az egyes eltolódások értékeiben, ugyanakkor a kábelerők jelentős mértékben növekedtek, mely a szerkezeti elemek szükséges ellenállását növeli tervezés során.

Ezek alapján az előfeszítés optimális nagysága a vizsgált terhelésre olyan nagyságú, mely megakadályozza a szerkezeti elemek elernyedését a terhelési folyamat végén, ugyanakkor az ehhez szükséges értéket nem haladja meg jelentősen.

A belső gyűrűt alkotó kábelek elernyedéséből adódó problémát nyomást is felvenni képes rúdelemek alkalmazása nem oldotta meg.

Az oszlopmagasság növelésének egyértelmű merevségnövelő hatása van a vizsgálatok alapján. Voltaképpen a nagyobb oszlopok miatt megnövekedett a sugárirányú kábelek meredeksége, így azok erőinek függőleges komponense, melyek a függőleges terhek viselésében elsősorban szerepűek. Míg az eltolódások értékeiben akár 2-3-szoros eltérés is lehet az egyes kialakítások esetében, addig az igénybevételek legnagyobb eltérése alig haladta meg a 10 %-ot.

Ennek tekintetében az oszlopok magassága hatékony megoldás a merevség növelésére. A megoldás hátránya egyrészt, hogy az oszlopok nagyobb hossza nagyobb anyagfelhasználást jelent, másrészt a nagyobb oszlophossz kisebb kihajlási ellenállást eredményez, mely nagyobb szelvények alkalmazását teheti szükségessé. Az optimális kialakítás megtalálása során ezen hatásokat együtt kell figyelembe venni.

Irodalomjegyzék

- [1] FULLER, R. B. *Tensile-Integrity Structures*. U.S. Patent No. 3,063,521, 1962.
- [2] SNELSON, K. *Continuous tension, discontinuous compression structures*. U.S. Patent No. 3,169,611, 1965.
- [3] GÓMEZ JÁUREGUI, V., *Controversial Origins of Tensegrity*. Proceedings of the IAAS Symposium, Valencia, 1642-1652. 2009.
- [4] EMMERICH, D. G., *Construction de réseaux autotendants*. French Patent No. 1,377,290, 1964.
- [5] Wikiwand
https://www.wikiwand.com/en/Karlis_Johansons (Letöltés: 2021. szeptember 29.)
- [6] Tensegrity Integration Element for Rhino, School of Architecture, University of Illinois at Urbana-Champaign
<https://publish.illinois.edu/tie4rhino/> (Letöltés: 2021. szeptember 29.)
- [7] www.tensegriteit.nl/e-xmodule.html (Letöltés: 2021. szeptember 29.)
- [8] KOLLÁR, L., P., *Tartószerkezetek tervezésének és méretezésének alapjai*. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2015.
- [9] KOLLÁR, L., *Mérnöki építmények és szerkezetek tervezése*. Akadémiai kiadó, 2000.
- [10] OLOFIN, I., LIU, R., *Suspen-Dome System: A Fascinating Space Structure*. The Open Civil Engineering Journal 2017 (11) 131-142, 2016.
- [11] PELLERINO, S., *A class of tensegrity domes*. International Journal of Space Structures 7 (2), 127–142, 1992.
- [12] KRISHNAN, S., *Structural design and behavior of prestressed cable domes*. Engineering Structures 209, 2020.
- [13] HINCZ, K., GY., *Feszített ponyvaszerkezetek tervezése és statikai vizsgálata numerikus módszerrel*. PhD értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2003.
- [14] ArchDaily, Kurilpa Bridge/ Cox Rayner Architects with Arup
<https://www.archdaily.com/186214/kurilpa-bridge-cox-rayner-architects-with-arup>
(Letöltés: 2021. szeptember 29.)
- [15] GEIGER, D.H., STEFANIUK, A., CHEN, D., *The Design and Construction of Two Cable Domes for the Korean Olympics*. Shells, Membranes and Space Frames, Proceedings IASS Symposium, Osaka, 1986 Vol. 2, 265-272, 1986.
- [16] GEIGER, D.H. és társai, *Design Details of an Elliptical Cable Dome and a Large Span Cable Dome 210 m Under Construction in the USA*. Proceedings IASS Symposium, Innovative Applications of Shells and Spatial Forms. Bangalore, India 1988. Vol 2, 919-929, 1988.
- [17] The Online Book of Baseball, Tropicana Field, St. Petersburg, Florida
<https://thisgreatgame.com/ballparks-tropicana-field/> (Letöltés: 2021. szeptember 29.)

- [18] LEVY, M.-P., CASTRO, G., *Analysis of the Georgia Dome Cable Roof*. Proceedings of the Eighth Conference of Computing in Civil Engineering and Geographic Information System Symposium, ASCE, 1992.
- [19] New Klages, Lighting a Sporting Event – An Olympic Challenge http://www.newklages.com/NKI_OlympicsAtlanta.htm (Letöltés: 2021. szeptember 29.)
- [20] GÁSPÁR, ZS., NÉMETH R., *A különböző rendű mechanikai elméletekről*. Építés-Építészettudomány 29 (3), 2001.
- [21] DAY, A. S., *An Introduction to Dynamic Relaxation Method*. The Engineer, 1965.
- [22] BARNES, M. R., *Form Finding and analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation Method*. International Journal of Space Structures 14 (2), 89-104, 1999.
- [23] CUNDALL, P. A., *Explicit finite-different methods in geomechanics*. Proceedings of the E. F. Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Blacksburg, Va., 1976.
- [24] RODRIGUEZ, J., RIO, G., CADOU, J. M., TROUFFLARD, J., *Numerical study of dynamic relaxation with kinetic damping applied to inflatable fabric structures with extensions for 3D solid element and non-linear behavior*. Thin-Walled Structures 49 (11), 1468-1474, 2011.
- [25] LABBAFI, S. F., SARAFRAZI, S. R., KANG, T. H.-K., *Comparison of viscous and kinetic dynamic relaxation methods in form-finding of membrane structures*. Advances in Computational Design 2 (1), 71-87, 2017.
- [26] SCHECK, H.-J., *The Force Density Method for Form Finding And Computation of General Networks*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3 (1974), 115-134, 1973.
- [27] TOMKA, P., *Lateral Stability of Cable Structures*, International Journal of Space Structures 12, 19-30, 1997.

Mellékletek

Dinamikus ellazítás C# programkörnyezetben

Elméleti alak meghatározása

```
// =====
// dinamikus ellazítás eljárás alkalmazása alakkeresésre – fiktív dinamikai
// analízis az előfeszítés hatására kialakuló statikus egyensúlyi helyzet meghatározására
// =====

// =====
// input adatok

// iCoordinates – szerkezet csomópontjainak koordinátái a kiindulási állapotban
// iVelocities – nullvektorokat tartalmazó hipervektor
// iCableElements – kábelek topológiai mátrixa
// iColumnElements – oszlopok topológiai mátrixa
// iCablesInOneSlice – kábelek száma egy szegmensben
// iColumnsInOneSlice – oszlopok száma egy szegmensben
// iJointMass – csomóponti tömegek vektora
// iCableLengthsIni – kábelek terheletlen hossza – alakkeresés esetén a kiindulási alakban meghatározott hossz
// iColumnLengthsIni – oszlopok terheletlen hossza
// iCableEA – kábelek normálmerevségeit tartalmazó vektor
// iColumnEA – oszlopok normálmerevségeit tartalmazó vektor
// iTimeStep – időlépés hossza a fiktív dinamikai vizsgálathoz
// iMaxIteration – maximális iterációs szám a túlzott számítási idő elkerülésére
// iEps – a számítás numerikus hibahatára
// iPreStressedMembers – feszítőelemek sorszáma az első szegmensben belül
// iPreTension – feszítőelemekben előírt feszítőerő értéke

// output adatok

// newCoordinates – csomópontok koordinátája az alakkeresés végén
// cableForces – kábelerők vektora
// columnForces – oszloperők vektora
// cableLengths – kábelek hossza az elméleti alakban
// columnLengths – oszlopok hossza az elméleti alakban
// cableStressFreeLengths – kábelek leszabási hossza
// columnStressFreeLengths – oszlopok leszabási hossza
// numberOfIteration – iterációs lépések száma
// =====

// =====
// input adatokból meghatározott paraméterek
// csomópontok száma a koordináták listája alapján
int nodeNumber = iCoordinates.Count;
// kábelelemek száma a vonatkozó lista alapján
int cableElementNumber = iCableElements.Count / 2;
// oszlopelemek száma a vonatkozó lista alapján
int columnElementNumber = iColumnElements.Count / 2;
// =====
```

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

```
// =====  
// változók megadása  
  
// csomópontok aktuális koordinátája, a kiindulási állapotban a kezdeti koordinátákkal egyező  
List<Point3d> newCoordinates = new List <Point3d> (iCoordinates);  
// csomópontok sebességeinek vektora, a kiindulási állapotban nyugalomban van a szerkezet  
List<Vector3d> jointVelocities = new List <Vector3d> (iVelocities);  
// csomópontok előző időlépéshez tartozó sebességeinek vektora  
List<Vector3d> jointVelocitiesIni = new List <Vector3d> (iVelocities);  
// kábelek aktuális, terhelt hosszának meghatározása  
double [] cableLengths = new double [cableElementNumber];  
// oszlopok aktuális, terhelt hosszának meghatározása  
double [] columnLengths = new double [columnElementNumber];  
// kábelekben ébredő igénybevételek meghatározása  
double [] cableForces = new double [cableElementNumber];  
// oszlopokban ébredő igénybevételek meghatározása  
double [] columnForces = new double [columnElementNumber];  
// csomópontok gyorsulása  
Vector3d [] jointAccelerations = new Vector3d[nodeNumber];  
// mozgási energia az egyes csomópontokban a kinematikus csillapításhoz  
double [] squareOfVelocityResultants = new double [nodeNumber];  
// kinetikus energia értéke az előző időlépésben  
double kineticEnergyIni = 0;  
// kinetikus energia értéke az aktuális időlépésben  
double kineticEnergy = 0;  
// segédvektor a csomópontokra ható eredő terhek számításához  
Vector3d pseudoCable = new Vector3d ();  
// csomópontokra ható eredő terhek  
Vector3d [] jointForces = new Vector3d[nodeNumber];  
// csomóponti kiegyensúlyozatlan terhek vektora  
double [] unbalancedForces = new double [nodeNumber];  
// maximális kiegyensúlyozatlan csomóponti teher értéke  
double maxUnbalancedForce = 0;  
// csomóponti kiegyensúlyozatlan terhek maximumnak kigyűjtése a listába  
List <double> maxResidualOfForces = new List <double> ();  
// iterációs lépések száma  
int numberOfIteration = 0;  
// =====  
  
do // iteratív számítás indítása – dinamikus ellazítás kezdete egy adott teherlépcsőre vonatkozóan  
{  
    // =====  
    // kábel- és oszlophosszak meghatározása az aktuális koordináták alapján minden egyes időlépésben  
    for(int i = 0; i < cableElementNumber; i++)  
        cableLengths[i] =  
            newCoordinates[iCableElements[i*2]].DistanceTo(newCoordinates[iCableElements[i*2+1]]);  
    for(int i = 0; i < columnElementNumber; i++)  
        columnLengths[i] =  
            newCoordinates[iColumnElements[i*2]].DistanceTo(newCoordinates[iColumnElements[i*2+1]]);  
    // =====  
}
```

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

```
// =====  
// kábelerők és oszloperők meghatározása a hosszváltozás és a normálmerevség alapján  
for(int i = 0; i < columnElementNumber; i++)  
    columnForces[i] = columnEA[i] * (columnLengths[i] - columnLengthsIni[i]) / columnLengthsIni[i];  
for(int i = 0; i < cableElementNumber; i++)  
{  
    // feszítőelemekben a feszítőerő elírása minden egyes lépésben, az aktuális hosszról függetlenül  
    if(i % cablesInOnSlice == preStressedMembers)  
        cableForces[i] = preTension;  
    else  
    {  
        cableForces[i] = cableEA[i] * (cableLengths[i] - cableLengthsIni[i]) / cableLengthsIni[i];  
        if(cableForces[i] < 0)  
            cableForces[i] = 0; // amennyiben a kábelben nyomóerő adódik, úgy ott az erő értékét lenullázzuk  
    }  
}  
// =====  
  
// =====  
// csomópontokra ható eredő terhek meghatározása  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    jointForces[i] = new Vector3d(0, 0, 0);  
  
// szerkezeti elemekről átadódó normáligénybevételek meghatározása  
for (int i = 0; i < cableElementNumber; i++)  
{  
    // kábel irányvektora a kezdő és végpont helyvektorának különbségeként, majd ennek normálása  
    pseudoCable = newCoordinates[iCableElements[i * 2 + 1]] - newCoordinates[iCableElements[i * 2]];  
    pseudoCable /= pseudoCable.Length;  
    // kábelerő vektora az egységnyi irányvektornak a kábelerő nagyságával vett skalárral való szorzata  
    // kábelerő hozzáadása a kezdő és végpont csomóponti terheihez  
    jointForces[iCableElements[i * 2]] += pseudoCable * cableForces[i];  
    jointForces[iCableElements[i * 2 + 1]] -= pseudoCable * cableForces[i];  
}  
  
for (int i = 0; i < columnElementNumber; i++)  
{  
    // oszlop irányvektora a kezdő és végpont helyvektorának különbségeként, majd ennek normálása  
    pseudoCable = newCoordinates[iColumnElements[i*2+1]] - newCoordinates[iColumnElements[i*2]];  
    pseudoCable /= pseudoCable.Length;  
    // oszloperő vektora az egységnyi irányvektornak az oszloperő nagyságával vett skalárral való szorzata  
    // oszloperő hozzáadása a kezdő és végpont csomóponti terheihez  
    jointForces[iColumnElements[i * 2]] += pseudoCable * columnForces[i];  
    jointForces[iColumnElements[i * 2 + 1]] -= pseudoCable * columnForces[i];  
}  
  
// =====  
// csomópontok fiktív mozgatása az adott időlépésben  
// =====  
// =====  
// gyorsulások meghatározása  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    if(iJointMass[i] != 0)  
        jointAccelerations[i] = jointForces[i] / iJointMass[i];  
    else // a támaszban a csomóponti tömeg nagysága 0, ott nem mozdítjuk el a csomópontot  
        jointAccelerations[i] = new Vector3d (0, 0, 0);  
// =====
```

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

```
// =====  
// sebességek számítása  
// az előző lépésben számolt sebességek értékének elmentése, kinetikus csillapításhoz  
jointVelocitiesIni = jointVelocities;  
// ha kinetikus energiacsúcs volt, és újraindítottuk a számítást, akkor az új lépésben az intervallum felében  
// számolunk sebességet (deltaT/2-vel), ha kinetikus energiacsúcs nem volt, akkor az új lépésben a  
// következő intervallum felében számolunk sebességet (2*deltaT/2=deltaT-vel)  
// mindig az előző sebességhez adjuk hozzá az adott lépésben számolt gyorsulás miatti növekményt  
if(kineticEnergyIni == 0)  
    for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
        jointVelocities[i] = jointVelocities[i] + jointAccelerations[i] * iTimeStep / 2;  
    else  
        for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
            jointVelocities[i] = jointVelocities[i] + jointAccelerations[i] * iTimeStep;  
// =====  
  
// =====  
// kinematikai csillapítás betétele  
kineticEnergy = 0;  
  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    squareOfVelocityResultants[i] = jointVelocities[i].Length * jointVelocities[i].Length;  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    kineticEnergy += squareOfVelocityResultants[i];  
  
if(kineticEnergy < kineticEnergyIni)  
{  
    kineticEnergy = 0;  
    for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
        jointVelocities[i] = jointVelocities[i] * 0;  
}  
kineticEnergyIni = kineticEnergy; // a kinetikus energia értékeit pedig itt update-elem  
// =====  
// =====  
// új koordináták meghatározása  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    newCoordinates[i] += jointVelocities[i] * iTimeStep;;  
// =====  
  
// =====  
// maximális kiegyensúlyozatlan csomóponti teher meghatározása  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    if(iJointMass[i] != 0)  
        unbalancedForces[i] = jointForces[i].Length;  
    else  
        unbalancedForces[i] = 0;  
  
maxUnbalancedForce = 0; // az előző érték törlése, majd az új értékek maximumának keresése  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    if (maxUnbalancedForce < unbalancedForces[i])  
        maxUnbalancedForce = unbalancedForces[i];
```


Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

```
// egyes iterációs lépések végén a maximum kigyűjtése a vonatkozó vektorba
maxResidualOfForces.Add(maxUnbalancedForce);

numberOfIteration++; // iterációs lépések számának növelése egy ciklus végén
// =====

// maximális iterációs szám ellenőrzése, ha eléri a ciklus, a számítás leáll
if(numberOfIteration == iMaxIteration)
    break;
} while(maxUnbalancedForce > eps); // dinamikus ellazítás vége egy adott teherlépcső esetén

// leszabási hosszak meghatározása kábelek és tehermentesek hosszak meghatározása oszlopok esetén
// értelemszerűen az egyensúlyi helyzet beállása után elvégzendő
for (int i = 0; i < cableElementNumber; i++)
    cableStressFreeLength[i] = cableLengths[i] / (1 + cableForces[i] / iCableEA[i]);
for (int i = 0; i < columnElementNumber; i++)
    columnStressFreeLength[i] = columnLengths[i] / (1 + columnForces[i] / iColumnEA[i]);
```

Állapotváltozás-vizsgálat

```
// =====
// dinamikus ellazítás eljárás alkalmazása állapotváltozás-vizsgálatra – fiktív dinamikai
// analízis a külső terhek hatására kialakuló statikus egyensúlyi helyzet meghatározására
// =====

// =====
// input adatok
// iCoordinates – szerkezet csomópontjainak koordinátái a szerelési alakban, mint kiindulási állapotban
// iVelocities – nullvektorokat tartalmazó hipervektor
// iCableElements – kábelek topológiai mátrixa
// iColumnElements – oszlopok topológiai mátrixa
// iJointMass – csomóponti tömegek vektora
// iCableLengthsIni – kábelek terheletlen hossza – állapotváltozás esetén leszabási hossza
// iColumnLengthsIni – oszlopok terheletlen hossza
// iCableEA – kábelek normálmerevségeit tartalmazó vektor
// iColumnEA – oszlopok normálmerevségeit tartalmazó vektor
// iJointLoads – csomóponti terhek vektora
// iLoadIncrement – tehernövekmény nagysága egy terhelési lépcsőben
// iTimeStep – időlépés hossza a fiktív dinamikai vizsgálathoz
// iMaxIteration – maximális iterációs szám a túlzott számítási idő elkerülésére
// iEps – a számítás numerikus hibahatára

// output adatok
// newCoordinates – csomópontok koordinátája az állapotváltozás-vizsgálat végén
// cableForces – kábelerők vektora
// columnForces – oszloperők vektora
// numberOfIteration – iterációs lépések száma
// coordX – teherlépcsők végén az egyensúlyi helyzetben a csomópontok x-koordinátáját tartalmazó mátrix
// coordY – teherlépcsők végén az egyensúlyi helyzetben a csomópontok y-koordinátáját tartalmazó mátrix
// coordZ – teherlépcsők végén az egyensúlyi helyzetben a csomópontok z-koordinátáját tartalmazó mátrix
// cableForcesMatrix – teherlépcsők végén az egyensúlyi helyzetben kialakult kábelerőket tartalmazó mátrix
// columnForcesMatrix – teherlépcsők végén az egyensúlyi helyzetben kialakult oszloperőket tartalmazó mátrix
// maxResidualOfForces – iterációs lépések végén a maximális kiegyensúlyozatlan csomóponti terhek vektora
// =====
```

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

```
// =====  
// input adatokból meghatározott paraméterek  
int nodeNumber = iCoordinates.Count; // csomópontok száma a koordináták listája alapján  
int cableElementNumber = iCableElements.Count / 2; // kábelelemek száma a vonatkozó lista alapján  
int columnElementNumber = iColumnElements.Count / 2; // oszlopelemek száma a vonatkozó lista alapján  
// =====  
  
// =====  
// változók megadása  
// csomópontok aktuális koordinátája, a kiindulási állapotban a kezdeti koordinátákkal egyező  
List<Point3d> newCoordinates = new List <Point3d> (iCoordinates);  
// csomópontok sebességeinek vektora, a kiindulási állapotban nyugalomban van a szerkezet  
List<Vector3d> jointVelocities = new List <Vector3d> (iVelocities);  
// csomópontok előző időlépéshez tartozó sebességeinek vektora  
List<Vector3d> jointVelocitiesIni = new List <Vector3d> (iVelocities);  
// kábelek aktuális, terhelt hosszának meghatározása  
double [] cableLengths = new double [cableElementNumber];  
// oszlopok aktuális, terhelt hosszának meghatározása  
double [] columnLengths = new double [columnElementNumber];  
// kábelelekben ébredő igénybevételek meghatározása  
double [] cableForces = new double [cableElementNumber];  
// oszlopokban ébredő igénybevételek meghatározása  
double [] columnForces = new double [columnElementNumber];  
// csomópontok gyorsulása  
Vector3d [] jointAccelerations = new Vector3d[nodeNumber];  
// mozgási energia az egyes csomópontokban a kinematikus csillapításhoz  
double [] squareOfVelocityResultants = new double [nodeNumber];  
// kinetikus energia értéke az előző időlépésben  
double kineticEnergyIni = 0;  
// kinetikus energia értéke az aktuális időlépésben  
double kineticEnergy = 0;  
// segédvektor a csomópontokra ható eredő terhek számításához  
Vector3d pseudoCable = new Vector3d ();  
// csomópontokra ható eredő terhek  
Vector3d [] jointForces = new Vector3d[nodeNumber];  
// csomóponti kiegyensúlyozatlan terhek vektora  
double [] unbalancedForces = new double [nodeNumber];  
// maximális kiegyensúlyozatlan csomóponti teher értéke  
double maxUnbalancedForce = 0;  
// csomóponti kiegyensúlyozatlan terhek maximumnak kigyűjtése a listába  
List <double> maxResidualOfForces = new List <double> ();  
// iterációs lépések száma  
int numberOfIteration = 0;  
// aktuális teherlépcsőhöz tartozó teherintenzitás  
double currentLoadIntensity;  
// adott teherlépcsőhöz tartozó csomóponti terhek vektora  
loads = new List <Vector3d> (jointLoads);  
// adott teherlépcső végén az egyensúlyi állapotban meghatározott koordináták  
double [,] coordX = new double [nodeNumber, numOfLoadSteps + 1];  
double [,] coordY = new double [nodeNumber, numOfLoadSteps + 1];  
double [,] coordZ = new double [nodeNumber, numOfLoadSteps + 1];  
// adott teherlépcső végén az egyensúlyi állapotban meghatározott igénybevételek  
double [,] cableForcesMatrix = new double [cableElementNumber, numOfLoadSteps + 1];  
double [,] columnForcesMatrix = new double [columnElementNumber, numOfLoadSteps + 1];  
// =====
```

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

```
// teherlépcsőkben történő állapotváltozás-vizsgálat kezdete
for(int j = 0; j < numOfLoadSteps + 1; j++)
{
    do // iteratív számítás indítása – dinamikus ellazítás kezdete egy adott teherlépcsőre vonatkozóan
    {
        // =====
        // kábel- és oszlophosszak meghatározása az aktuális koordináták alapján minden egyes időlépésben
        for(int i = 0; i < cableElementNumber; i++)
            cableLengths[i] =
                newCoordinates[iCableElements[i*2]].DistanceTo(newCoordinates[iCableElements[i*2+1]]);
        for(int i = 0; i < columnElementNumber; i++)
            columnLengths[i] =
                newCoordinates[iColumnElements[i*2]].DistanceTo(newCoordinates[iColumnElements[i*2+1]]);
        // =====

        // =====
        // kábelerők és oszloperők meghatározása a hosszváltozás és a normálmerevség alapján
        for(int i = 0; i < cableElementNumber; i++)
        {
            cableForces[i] = iCableEA[i] * (cableLengths[i] - iCableLengthsIni[i]) / iCableLengthsIni[i];
            if(cableForces[i] < 0)
                cableForces[i] = 0; // amennyiben a kábelben nyomóerő adódik, úgy ott az erő értékét lenullázzuk
        }
        for(int i = 0; i < columnElementNumber; i++)
            columnForces[i] = iColumnEA[i]*(columnLengths[i]-iColumnLengthsIni[i]) / iColumnLengthsIni[i];
        // =====

        // =====
        // csomópontokra ható eredő terhek meghatározása
        for(int i = 0; i < nodeNumber; i++)
            loads[i] = jointLoads[i]; // teljes külső teher betétele az aktuális lépéshez tartozó csomóponti terhekbe

        // adott teherlépcsőben lévő teherhányad
        currentLoadIntensity = Convert.ToDouble(j) / numOfLoadSteps;

        // adott teherlépcsőhöz tartozó tehernagyság meghatározása
        for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)
            loads[i] *= currentLoadIntensity;

        // külső terhek betétele a csomóponti erőkbe
        for(int i = 0; i < nodeNumber; i++)
            jointForces[i] = loads[i];

        // szerkezeti elemekről átadódó normáligénybevételek meghatározása
        for (int i = 0; i < cableElementNumber; i++)
        {
            // kábel irányvektora a kezdő és végpont helyvektorának különbségeként, majd ennek normálása
            pseudoCable = newCoordinates[iCableElements[i * 2 + 1]] - newCoordinates[iCableElements[i * 2]];
            pseudoCable /= pseudoCable.Length;
            // kábelerő vektora az egységnyi irányvektornak a kábelerő nagyságával vett skalárral való szorzata
            // kábelerő hozzáadása a kezdő és végpont csomóponti terheihez
            jointForces[iCableElements[i * 2]] += pseudoCable * cableForces[i];
            jointForces[iCableElements[i * 2 + 1]] -= pseudoCable * cableForces[i];
        }
    }
}
```

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

```

for (int i = 0; i < columnElementNumber; i++)
{
    // oszlop irányvektora a kezdő és végpont helyvektorának különbségeként, majd ennek normálása
    pseudoCable = newCoordinates[iColumnElements[i*2+1]] - newCoordinates[iColumnElements[i*2]];
    pseudoCable /= pseudoCable.Length;
    // oszloperő vektora az egységnyi irányvektornak az oszloperő nagyságával vett skalárral való szorzata
    // oszloperő hozzáadása a kezdő és végpont csomóponti terheihez
    jointForces[iColumnElements[i * 2]] += pseudoCable * columnForces[i];
    jointForces[iColumnElements[i * 2 + 1]] -= pseudoCable * columnForces[i];
}

// =====
// csomópontok fiktív mozgatása az adott időlépésben
// =====
// =====
// gyorsulások meghatározása
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)
    if(iJointMass[i] != 0)
        jointAccelerations[i] = jointForces[i] / iJointMass[i];
    else // a támaszban a csomóponti tömeg nagysága 0, ott nem mozdítjuk el a csomópontot
        jointAccelerations[i] = new Vector3d (0, 0, 0);
// =====

// =====
// sebességek számítása
// az előző lépésben számolt sebességek értékének elmentése, kinetikus csillapításhoz
jointVelocitiesIni = jointVelocities;
// ha kinetikus energiacsúcs volt, és újraindítottuk a számítást, akkor az új lépésben az intervallum felében
// számolunk sebességet (deltaT/2-vel), ha kinetikus energiacsúcs nem volt, akkor az új lépésben a
// következő intervallum felében számolunk sebességet (2*deltaT/2=deltaT-vel)
// mindig az előző sebességhez adjuk hozzá az adott lépésben számolt gyorsulás miatti növekményt
if(kineticEnergyIni == 0)
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)
    jointVelocities[i] = jointVelocities[i] + jointAccelerations[i] * iTimeStep / 2;
else
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)
    jointVelocities[i] = jointVelocities[i] + jointAccelerations[i] * iTimeStep;
// =====

// =====
// kinematikai csillapítás betétele
kineticEnergy = 0;

for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)
    squareOfVelocityResultants[i] = jointVelocities[i].Length * jointVelocities[i].Length;
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)
    kineticEnergy += squareOfVelocityResultants[i];

if(kineticEnergy < kineticEnergyIni)
{
    kineticEnergy = 0;
    for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)
        jointVelocities[i] = jointVelocities[i] * 0;
}
kineticEnergyIni = kineticEnergy; // a kinetikus energia értékeit pedig itt update-elem
// =====

```

Tensegrity kupolák parametrikus vizsgálata

```
// =====  
// új koordináták meghatározása  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    newCoordinates[i] += jointVelocities[i] * iTimeStep;;  
// =====  
  
// =====  
// maximális kiegyensúlyozatlan csomóponti teher meghatározása  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    if(iJointMass[i] != 0)  
        unbalancedForces[i] = jointForces[i].Length;  
    else  
        unbalancedForces[i] = 0;  
  
maxUnbalancedForce = 0; // az előző érték törlése, majd az új értékek maximumának keresése  
for (int i = 0; i < nodeNumber; i++)  
    if (maxUnbalancedForce < unbalancedForces[i])  
        maxUnbalancedForce = unbalancedForces[i];  
  
// egyes iterációs lépések végén a maximum kigyűjtése a vonatkozó vektorba  
maxResidualOfForces.Add(maxUnbalancedForce);  
  
numberOfIteration++; // iterációs lépések számának növelése egy ciklus végén  
// =====  
  
// maximális iterációs szám ellenőrzése, ha eléri a ciklus, a számítás leáll  
if(numberOfIteration == iMaxIteration)  
    break;  
} while(maxUnbalancedForce > eps); // dinamikus ellazítás vége egy adott teherlépcső esetén  
  
// adott teherlépcsőben meghatározott koordináták és igénybevételek megfelelő mátrixokba való elmentése  
for(int i = 0; i < nodeNumber;i++)  
{  
    coordX[i, j] = newCoordinates[i][0];  
    coordY[i, j] = newCoordinates[i][1];  
    coordZ[i, j] = newCoordinates[i][2];  
}  
for(int i = 0; i < cableElementNumber;i++)  
    cableForcesMatrix[i, j] = cableForces[i];  
  
for(int i = 0; i < columnElementNumber;i++)  
    columnForcesMatrix[i, j] = columnForces[i];  
} // lépcsős terhelés vége
```