



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

# **ÓKORI KŐOSZLOPOK DINAMIKUS VISELKEDÉSÉNEK VIZSGÁLATA DISZKRÉT ELEMES MÓDSZERREL**

TDK DOLGOZAT



**KÉSZÍTETTE:**

**JOÓ DÁNIEL LÁSZLÓ**  
ÉPÍTŐMÉRNÖK HALLGATÓ – BSC – IV. ÉVFOLYAM

**KONZULENS:**

**FORGÁCS TAMÁS – PhD HALLGATÓ**  
BME TARTÓSZERKEZETEK MECHANIKÁJA TANSZÉK

---

## Tartalom

<b>Előszó .....</b>	<b>3</b>
<b>Összefoglaló .....</b>	<b>4</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>5</b>
<b>1. Bevezetés.....</b>	<b>6</b>
<b>2. Oszloptörzsek kialakítása .....</b>	<b>7</b>
<b>3. Billegő oszlopok vizsgálata.....</b>	<b>9</b>
3.1. Analitikus módszerek .....	9
3.1.1. Diszkrét elemes szimulációk .....	14
<b>4. Diszkrét elemek módszere .....</b>	<b>18</b>
4.1. Elem- és kapcsolattípusok, kontaktfelismerés.....	18
4.2. Kapcsolatok mechanikai viselkedése .....	18
4.3. Merev test mozgásegyenletei .....	19
4.4. Mozgásegyenlet megoldása deformálható blokkok esetén.....	20
4.5. Mechanikai csillapítás .....	22
4.6. Numerikus stabilitás .....	22
<b>5. Numerikus modell .....</b>	<b>23</b>
5.1. Geometria .....	23
5.2. Anyagjellemzők.....	24
5.3. Terhelés, peremfeltételek és csillapítás .....	26
<b>6. Egy billegő blokk numerikus vizsgálata .....</b>	<b>27</b>
<b>7. Kettő, illetve három blokkból álló rendszer vizsgálata.....</b>	<b>29</b>
7.1. Kétblokkos kísérlet.....	29
7.2. Három blokk a rázóasztalon .....	31
<b>8. Összefoglalás .....</b>	<b>33</b>
<b>Hivatkozások .....</b>	<b>34</b>

---

## Előszó

A dolgozatban bemutatott munka az Új Nemzeti Kiválóság Program támogatásával valósult meg. A szerző köszönetét fejezi ki az Emberi Erőforrások Minisztériumának az általuk nyújtott támogatásért. Az elnyert ösztöndíj 2018. szeptembere és 2019. júniusa közötti időszakra szól. A kutatási tervben vállaltaknak megfelelően az elért eredmények a támogatási időszakon belül TDK konferencián kerülnek bemutatásra. Azonban a támogatási időszakon belül csak egy TDK konferencia kerül megrendezésre, amit az egyetem a 10 hónapos kutatási időszak második hónapjában szervez meg. Emiatt a TDK dolgozat csak egyfajta előkészítése, megalapozása lehet a későbbi kutatási feladatoknak. A TDK munka ezért a numerikus modell kialakítására, anyagjellemzők és terhek felvételére helyezi a hangsúlyt. A munka keretében a numerikus modell verifikációja és validációja készült el.



EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA

---

## Összefoglaló

Az ókori görög és római építészet egyik leggyakrabban alkalmazott szerkezeti eleme az oszlop (kolumna), mely az épületek terheit nyomóerők formájában továbbítja az alapozásra. Ezen kőoszlopok lehetnek monolitikusak, illetve több oszlopdob egymásfölé helyezésével kialakított szerkezetek. Utóbbi esetben az oszlopdobok között tipikusan nem található kötőanyag. Az így kialakított szerkezetek immáron két évezreden át viselik gond nélkül a rájuk ható statikus terheket. Ezzel szemben e szerkezet típus igen érzékenyen viselkedik földrengési hatásokra: a vízszintes terhek hatására a kövek elcsúszhatnak egymáson, illetve a nyomóerő központosságának növekedése az oszlop felborulásához vezethet. Ezen nemlineáris jelenségek megnehezítik a szerkezet klasszikus, az anyag kontinuitásán alapuló mechanikai vizsgálatát.

A földrengés okozta dinamikus terhelés modellezésére analitikus és numerikus módszereket dolgoztak ki. Housner [1] által megalapozott analitikus módszerek a kövek billegő mozgását próbálják modellezni. Azonban a rendszert leíró differenciálegyenletek megváltoznak annak függvényében, hogy épp milyen konfigurációban végez billegő mozgást a szerkezet. Ráadásul a feladat bonyolultsága az oszlopdobok számának növelésével nagymértékben növekszik, így a kidolgozott módszerek legfeljebb 2-3 egymásra helyezett blokk esetén vezetnek megoldásra (lásd Ther és Kollár [2]). További hátrány, hogy e módszerek a kövek egymáson történő megcsúszását általában nem veszik figyelembe.

A jelenség vizsgálatára a diszkrét elemek módszere is alkalmazható. A tudományos diákköri munka keretében 3D-s diszkrét elemek módszerén alapuló szoftver segítségével parametrikus modellt építtek, melyet Ther és Kollár [2] kísérletei alapján kalibráltak. A kalibrált modell lehetőséget ad, hogy a modell kiterjeszhető legyen magasabb, több elemből álló oszlopok vizsgálatára a kövek közti súrlódás figyelembevételével.

---

## Abstract

The column, as a structural element was commonly used in the Greek and Romanic architecture. With the help of columns, the compressive forces arise from the weight of the buildings were transmitted to the ground. Columns can be monolithic or can be built from multiple drums. In the latter case, typically there is no any mortar layer between the drums. This structural system showed great durability against static loading conditions. On the other hand, columns show very weak behaviour in case of seismic actions: due to the horizontal loads, drums can slide upon each other, while the columns can turn over with the increasing eccentricity of the compressive forces. These nonlinear effects makes difficult to use the classical, continuum based approaches.

There are analytic and numerical methods to analyse the dynamic behaviour of columns. Analytical solution of Housner [1] are able to model the rocking movement of the columns. However, the differential equations are changing according to the actual configuration of the system. Moreover, the complexity of this approach is rapidly increasing with the increasing number of drums. Hence, techniques based on this approach can solve the dynamic problem up to 2 or 3 drums (Ther and Kollár [2]). Another disadvantage, that these methods cannot take into consideration the possibility of shear sliding between the elements.

To model the described phenomena, the method of discrete elements can be used as well. In the present scientific work, a parametric, 3D numerical model will be built. The numerical parameters connected to the discrete element model will be calibrated to the experimental test of Ther and Kollár [2]. With the help of the calibrated model, multi-drum columns can be investigated with finite frictional resistance.

---

## 1. Bevezetés

Az építészeti örökség megőrzése Európa fejlett országainak számára nagy társadalmi jelentőséggel bír, de mérnöki szemmel tekintve igen nehéz feladat, különösen a szeizmikus szempontból veszélyeztetett területeken. Az ókori templomok, fellegrárok; középkori védelmi struktúrák, harangtoronyok Európa-szerte megtalálhatóak a mai napig, és fontos szerepet játszanak a megőrzendő történelmi és építészeti örökségben. Az utóbbi évtizedek földrengései rávilágítottak arra, hogy ezen szerkezetek kőoszlopai, amelyek a függőleges terhelést évezredek óta kitűnően viselik, különösen sérülékenyek a földrengés által okozott vízszintes terhekre. Ezen egyedülálló remekműveknek a földrengéssel szembeni ellenállásának meghatározása ezért kiemelkedő fontosságú.

A kőszerkezetek modellezése mind a mai napig kihívást jelent a mérnökök számára: az építőkövek közti kapcsolatokon az elemek megcsúszhatnak egymáson, illetve repedések alakulhatnak ki az elemek között. E jelenségek nemlineárisá teszik a megoldandó feladatot, továbbá a megjelenő diszkontinuitások nagy száma ellehetetleníti a klasszikus, kontinuum feltételezésén alapuló vizsgálati módszerek alkalmazását. A feladat komplexitását növeli, ha a teher időben változó, mivel a mozgást leíró differenciálegyenletek megváltoznak a billegő mozgást végző oszlopdobok épp aktuális konfigurációjától.

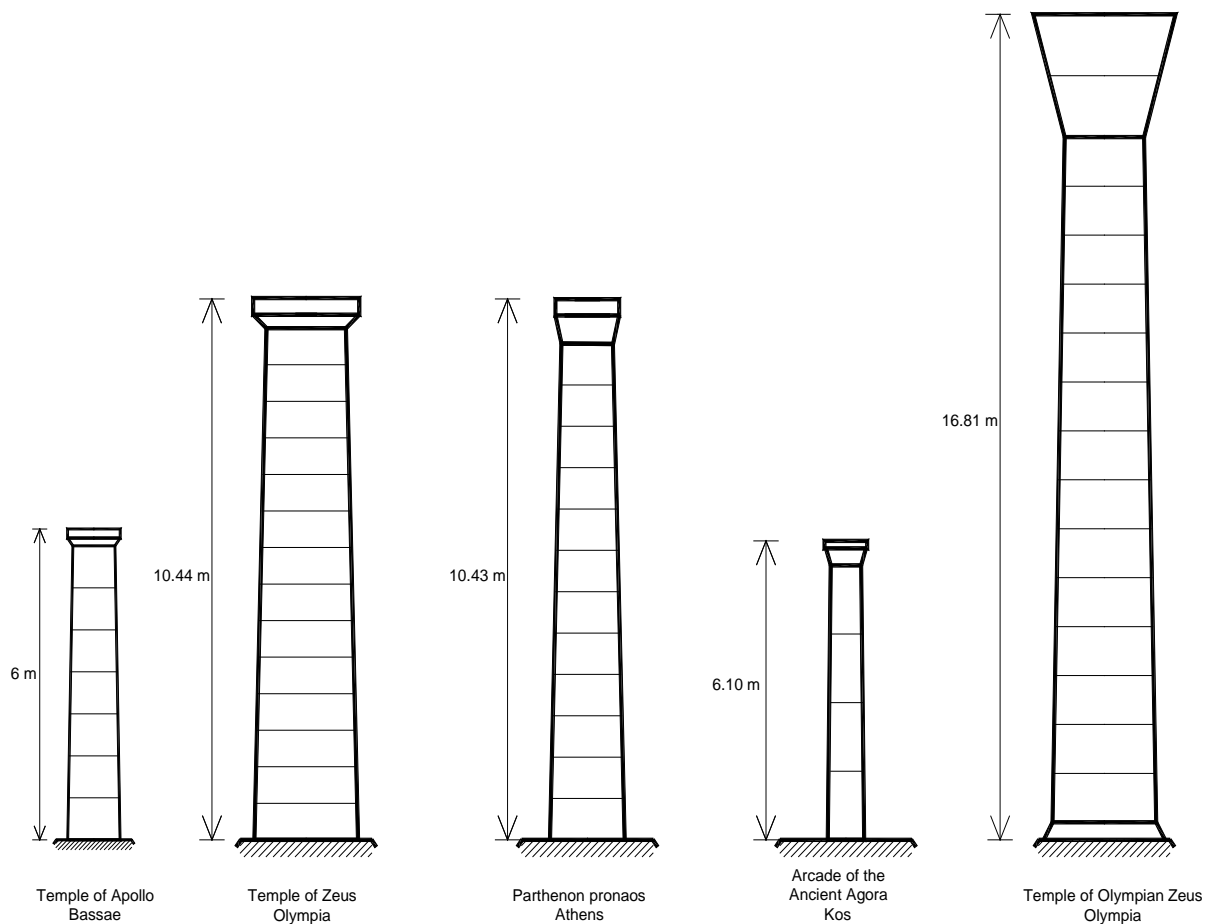
A kőoszlopok dinamikus terheléssel szembeni viselkedését a jelenlegi szakirodalom szerint két fő csoportba lehet sorolni:

- A hagyományos megközelítés „ab ovo” jellegű: ezen filozófiát követő szerzők a feladat leegyszerűsítésére törekuszenek: analitikus módszerekkel vizsgálják egyetlen (esetleg 2-3 egymásra helyezett) billegő blokk mozgását. Mindezt síkbeli problémaként, sok esetben a blokkok közti megcsúszás lehetőségének kizárásával. A módszerek ebben az esetben analitikusak. Ezen irányvonal alapjait Housner fektette le munkájával [1].
- Másrészt az elmúlt évtizedekben a számítási kapacitás rohamos növekedésével megjelentek olyan numerikus módszerek is (pl. diszkrét elemek módszere), amivel némely szerzők „in medias res” típusú megközelítésben vizsgálják a problémát: itt a szerzők a szerkezet komplex geometriáját modellezik, míg teherként gyakran valós földrengésrekordokat alkalmaznak. Azonban felmerül a kérdés, hogy ezen módszerek milyen mértékben validáltak, a bennük alkalmazott anyagjellemzők, illetve numerikus paraméterek hogyan határozhatók meg.

Munkám célja a fenti, egymástól jelentősen eltérő megközelítések közti tudományos hézag szűkítése oly módon, hogy a dolgozatban diszkrét elemek módszerével modellezem egyszerű szerkezetek viselkedését, majd az így validált modellt terjesztem ki tetszőleges geometriájú oszloptörzsek vizsgálatára.

## 2. Oszloptörzsek kialakítása

Az ókori oszlopok elterjedését tekintve a világ leggazdagabb régiója a kelet-mediterrán térség. Az oszlop az ókori építészet kedvelt eleme, amely egy függőleges, tipikusan kör keresztmetszetű szerkezeti elem, amely nyomóerők formájában továbbítja az épület terheit az alapozásra. Az oszlopok lehetnek monolitikusak, ekkor egyetlen kőtömbből kerülnek kifaragásra. Az oszlopok kialakíthatók egymásra helyezett, ún. oszlopdobokból is. Az oszlopdobok között tipikusan nem található habarcs vagy bármilyen egyéb kötőanyag [3]. Az oszloptörzs formáját jellemezhetjük annak karcsúságával, ami alatt az oszlop magasságának és az oszloptalpnál mérhető átmérőjének hányadosát értjük. Továbbá egyes oszlopok az oszloptalptól felfelé haladva karcsúsodnak, ennek mértékét a talpátmérő és a fejtátmérő segítségével jellemezhetjük. Néhány görög templom oszlopainak jellemző kialakítását mutatja be az 1. ábra.



1. ábra – Görög templomok különböző kialakítású oszloptörzsei [3]

A gravitációs terheket évezredek óta kitűnően viselő oszlopok az eddigi tapasztalatok alapján meglehetősen sérülékenynek mutatkoznak a földrengésből származó vízszintes terhekre. Néhány klasszikus oszloptörzset mutat be az 2. 3. és 4. ábra.





2. ábra – Zeusz temploma (Olympia, Görögország) [3]



3. ábra – Károsodott oszloptörzsek az athéni Akropoliszban [4]



4. ábra – Apollo templomának oszlopai (Bassae, Görögország) [5]



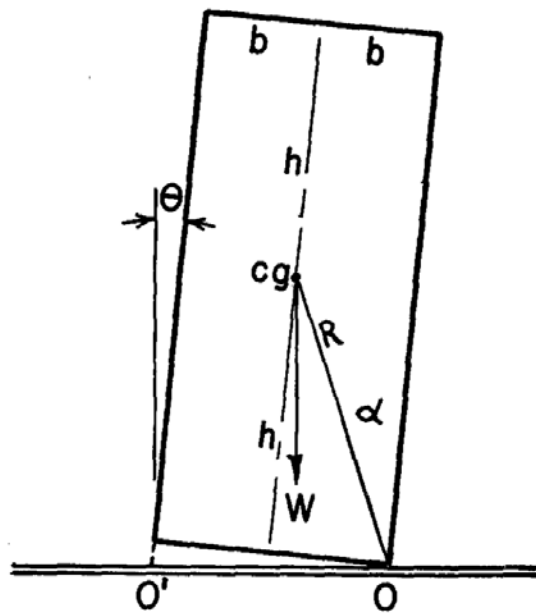
---

### 3. Billegő oszlopok vizsgálata

Az oszlopokra ható, földrengés okozta dinamikus terhelés modellezésére analitikus és numerikus módszereket dolgoztak ki. A fejezet keretében a szakirodalmat áttekintve mutatom be ezen módszereken alapuló tudományos cikkek legfontosabb eredményeit.

#### 3.1. Analitikus módszerek

Housner [1] mára klasszikussá vált cikkében egyetlen billegő blokk mozgásával foglalkozott. A vizsgált elem geometriája az 5. ábrán látható. A függőleges helyzetéből  $\theta$  szöggel kitérített, majd magára hagyott test először az O pont körül végez forgómozgást.



5. ábra – A vizsgált elem geometriája [1]

Amennyiben a kezdeti kitérítés szöge meghaladja az (1)-ben definiált kritikus értéket, akkor test felborul, ellenkező esetben az óra járásával ellentétesen, az eredeti függőleges pozíciója felé fordul el.

$$\theta_{crit} = \tan(\alpha) = \tan\left(\frac{b}{h}\right)$$

A forgómozgás alapegyenletét a szerkezetre felírva a 5. ábrán látható geometriai jelölésekkel az alábbi nemlineáris differenciálegyenletet kapjuk:

$$-WR \sin(\alpha - \theta) = I_o \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ahol  $W$  a blokk súlya  
 $R$  az O pont és a súlypont távolsága,  
 $I_o$  a blokk O pontra számított tehetetlenségi nyomatéka

Mikor a blokk visszatér függőleges pozíciójába, nekiütközik az őt megtámasztó felületnek. Ha feltesszük, hogy az ütközés rugalmatlan és a blokk tovább fordul immáron  $O'$  körül, akkor a blokk  $O'$ -re számított perdülete nem változik meg:

$$I_o \dot{\theta}_1 - 2mRb\dot{\theta}_1 \sin(\alpha) = I_o \dot{\theta}_2$$

Az ütközés utáni szögsebességet a geometria alapján meghatározható tényezővel csökkenteni kell [2]:

$$\omega_{O'} = \mu_{Housner} \omega_O \quad \mu_{Housner} = \frac{2h^2 - b^2}{2h^2 + 2b^2},$$

ahol  $\omega_{O'}$  és  $\omega_O$  az ütközés utáni, illetve azelőtti szögsebesség,

$\mu_{Housner}$  a szögsebességek aránya.

A vizsgált blokk immáron  $O'$  körül forog, mely során mozgási energiája teljes egészében átalakul helyzeti energiává és eléri a függőlegestől mért maximális kitérését. Ezután a blokk ismét óramutató járásával megegyező irányban fordul el, a helyzeti energia ismét mozgási energiává alakul. A fenti folyamat ismétlődik mindaddig, amíg a még meglévő mozgási energia teljes egészében „elveszik” a sorozatos ütközések során. Egy ütközés alatt az energia  $\eta$  részét veszítjük el:

$$\eta = \frac{\omega_{O'}^2 - \omega_O^2}{\omega_{O'}^2} = 1 - \mu_{Housner}^2$$

Ogawa [6] fából készült próbatesteken mérte a szögsebességek arányát. A különböző karcsúságú elemeken a kísérletet többször elvégezte, melynek eredményei az 6. ábrán láthatók.

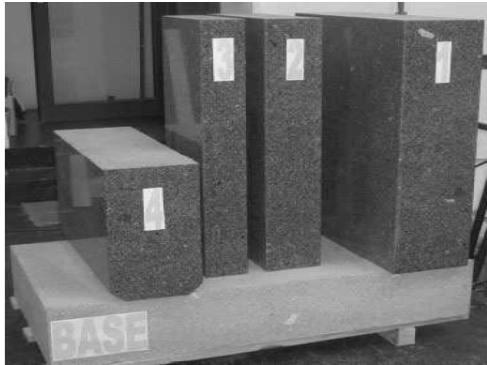
h/b	Measurement							Theoretical
	i=1	2	3	4	5	6	Average	
4.00	0.89	0.99	0.89	0.98	0.90	0.99	0.94	0.91
3.00	0.89	0.89	0.89	0.85	0.89	0.84	0.88	0.85
2.00	0.80	0.77	0.80	0.75	—	—	0.79	0.7

6. ábra – Ogawa fa próbatesteken meghatározott szögsebességek aránya [6]

Érdekes megfigyelni, hogy a kísérleti eredmények azonos h/b arány mellett is elég nagy szórást mutatnak. Ettől eltekintve a kísérletek azt mutatják, hogy a billegő mozgás során kevesebb energia veszik el ahhoz képest, mint amit a Housner modell jósol.

Prieto [7] gránit próbatesteken mérte a szögsebességek arányát. Az általa vizsgált próbatestek h/b arányait, és a kísérletileg (E) meghatározott szögsebesség arányokat foglalja össze az 7. ábra. A kísérletileg meghatározott szögsebesség arányokat összehasonlították a Housner-féle megoldással (T)

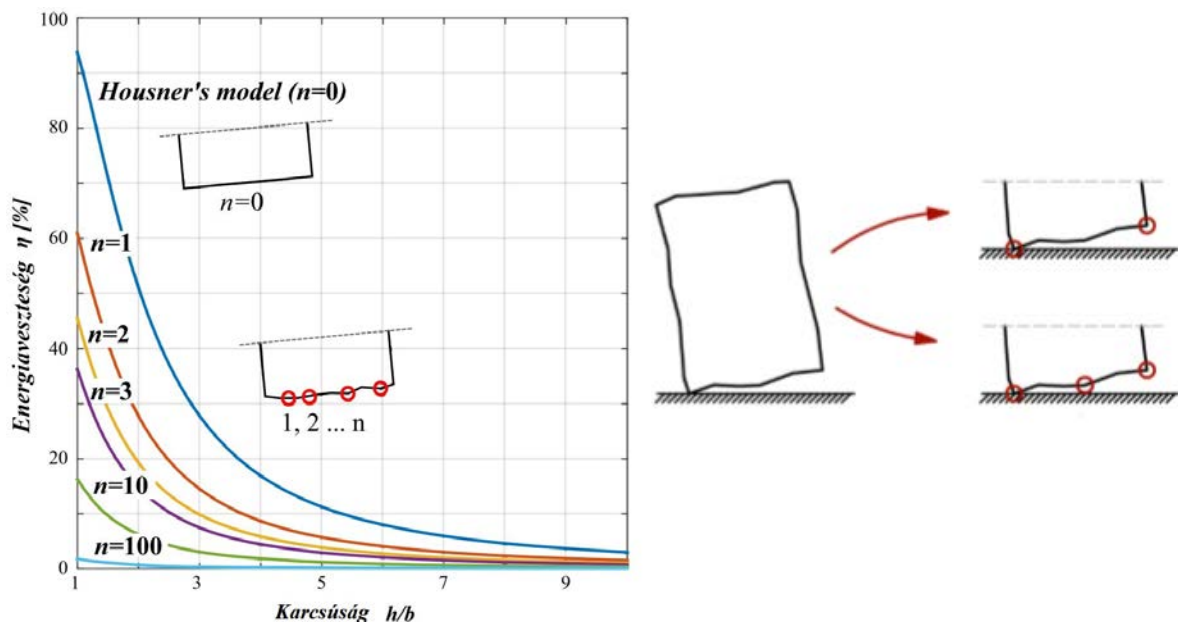
is, amelyből megállapítható, hogy a kísérletek során kevesebb energia nyelődött el a Housner-féle megoldáshoz képest.



Próbatest	h/b	$\mu$		
		T	E	%
1	4.00	0.914	0.936	2.4
2	5.88	0.958	0.973	1.6
3	8.33	0.978	0.978	0.0

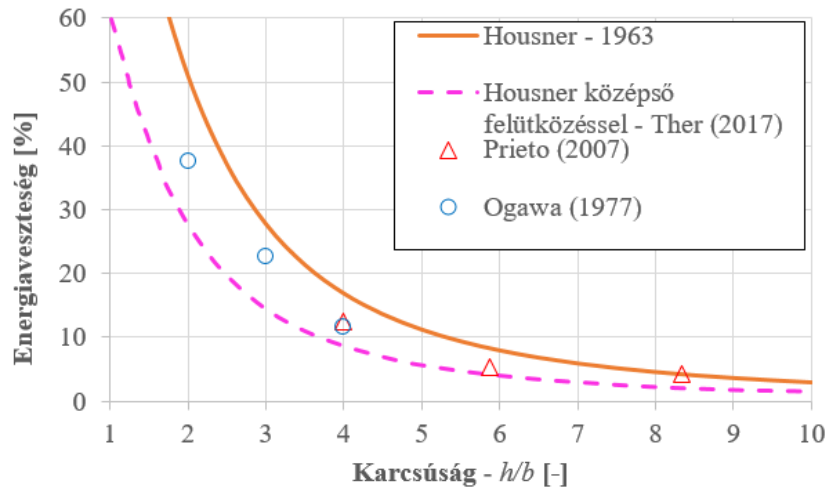
7. ábra – Prieto által vizsgált gránit próbatestek és a meghatározott szögsebesség arányok [7]

Ther és Kollár [8] azt vizsgálták, hogy mi okozhatja, hogy a fentiekben bemutatott kísérleti eredmények a Housner modell által meghatározott energiavesztésnél minden esetben kisebb energiavesztést mutatnak. Hipotézisük szerint az érintkező felületek egyenletlenségei miatt az átbillenés 5. ábra szerinti O pontról O' pontra nem egy ütközéssel valósul meg, hanem kis ütközések sorozatával. A 8. ábra bal oldali grafikonján az látható, hogy egy átbillenés során a felütközési pontok számának növelésével hogyan változik az átbillenés során bekövetkező energiavesztés. Látható, hogy minél több közbenső pontot veszünk figyelembe, annál kisebb az energiavesztés, a folyamat annál inkább hasonlít egyfajta gördülésre.



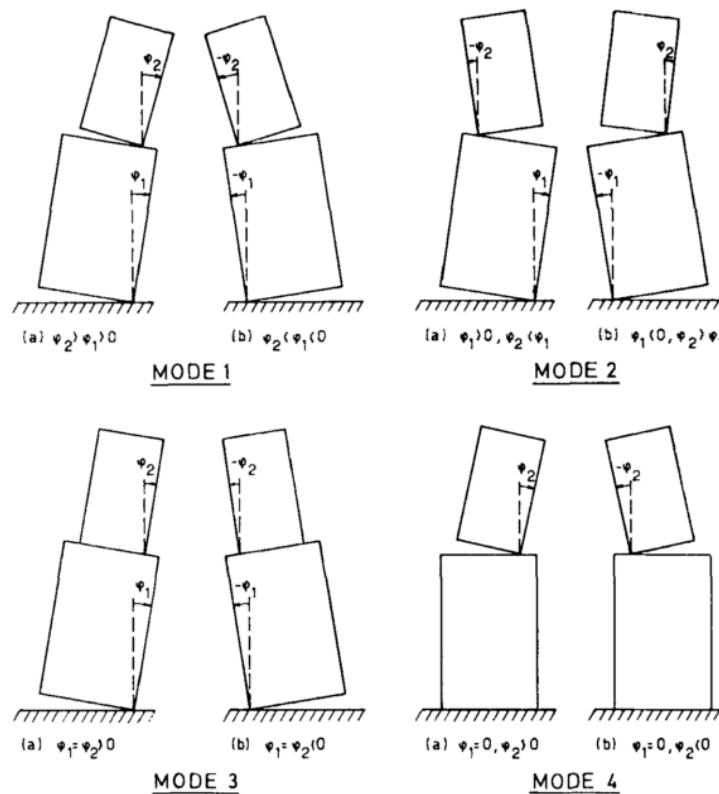
8. ábra – Ütközések lehetséges pozíciói egyenletlen felület esetén [8]

Összefoglalva a fenti, egyetlen blokkra vonatkozó analitikus és kísérleti eredményeket a 9. ábrán látható grafikont kapjuk.



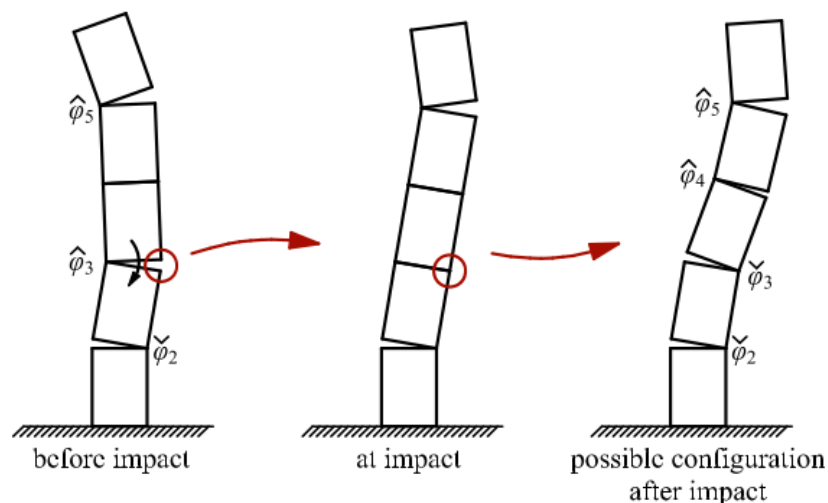
9. ábra- Energiaveszteség egy billegő blokk esetén

Több blokkból álló rendszerek mozgásának leírása jóval nehezebb feladat az egyetlen billegő blokkhoz viszonyítva. Psycharis [9] analitikusan vizsgálta két, egymásra helyezett blokk billegő mozgását (a blokkok közti súrlódás kizárásával). A rendszert leíró differenciálegyenletek azonban a billegő mozgás épp aktuális konfigurációjától függően folyamatosan változnak, ami rendkívül bonyolulttá teszi a problémát. Két blokk esetén a lehetséges konfigurációkat ábrázolja a 10. ábra.



10. ábra – Két billegő blokk lehetséges konfigurációi

Ther és Kollár [2] új eljárást javasoltak a több elemből álló billegő oszlopok vizsgálatára. A többelemű oszlopok terhelése során a kapcsolatokon átadódó, külpontos normálerő támadáspontja folyamatosan változtatja helyzetét. Amennyiben a külpontosság eléri a keresztmetszet szélét a vizsgált kapcsolat megnyílik. Modelljük első részében arra keresik a választ, hogy a terhelés során hogyan lehet meghatározni az újonnan megnyíló kapcsolatokat. Javaslatuk szerint az időintegrálás minden lépésében határozzuk meg az összes kinematikailag lehetséges konfigurációt (11. ábra) ( $3^n - 1$  darab, ahol  $n$  az aktuálisan zárt kapcsolatok száma), majd ezek közül válasszuk azt, amelyikhez tartozó mozgási energia a legnagyobb. Ezután rugalmatlan ütközést feltételezve vizsgálják az összes lehetséges konfigurációt, amelyekből leszűrik a kinematikailag lehetségeseket. Amennyiben egynél több kinematikailag lehetséges konfiguráció marad, akkor ezek közül azt választják, amelyhez tartozó mozgási energia a legnagyobb, azaz az energiavesztés a legkisebb. A módszer hátránya, hogy a blokkok számának növekedésével a vizsgálandó esetek száma exponenciálisan növekszik. Ezzel szemben előny, hogy modelljük kevés paramétert igényel, mivel merev blokkokat használnak, és nincsenek egyéb numerikus paraméterek sem. A vizsgálataik megerősítik azt a korábbi megfigyelést, hogy a monolitikus oszloptörzsek sérülékenyebbek a több oszlopdobból álló oszloptörzsekhez képest.



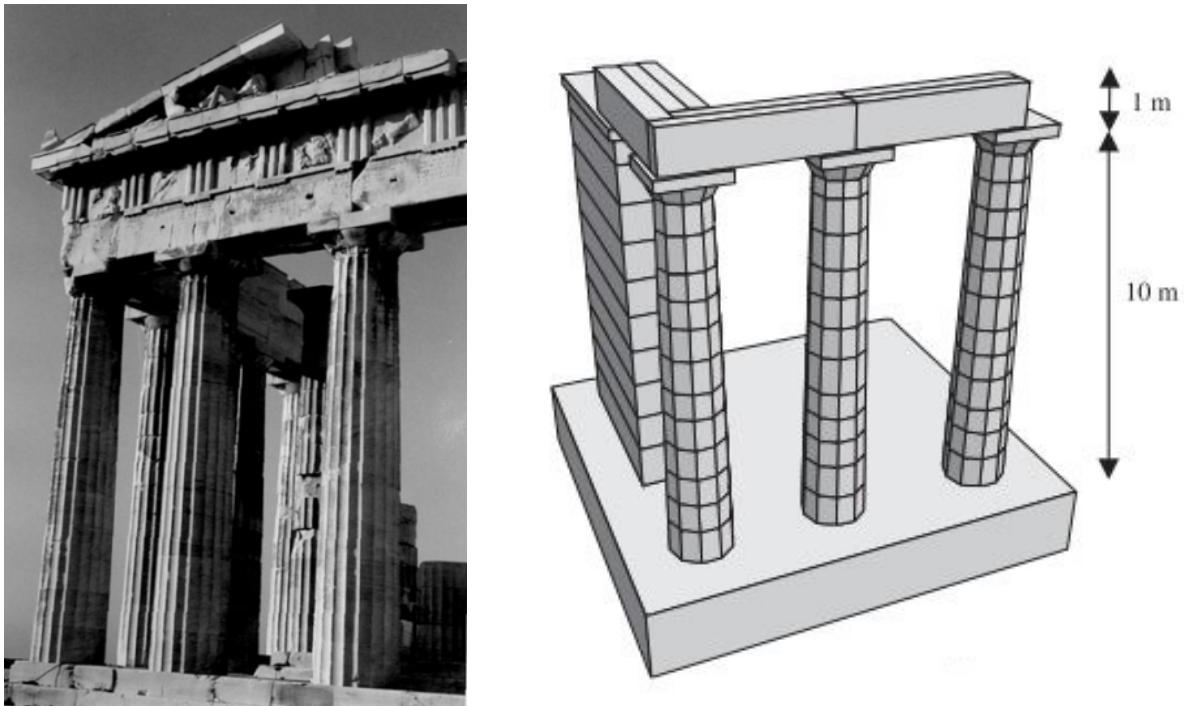
11. ábra – Ütközés során kialakuló, kinematikailag lehetséges konfiguráció [2]

---

### 3.1.1. Diszkrét elemes szimulációk

A billegő szerkezetek vizsgálatára diszkrét elemes technika is alkalmazható. A módszer alkalmas egymástól elkülönülő, önálló elmozdulási szabadságfokokkal rendelkező rendszerek statikus és dinamikai vizsgálatára is.

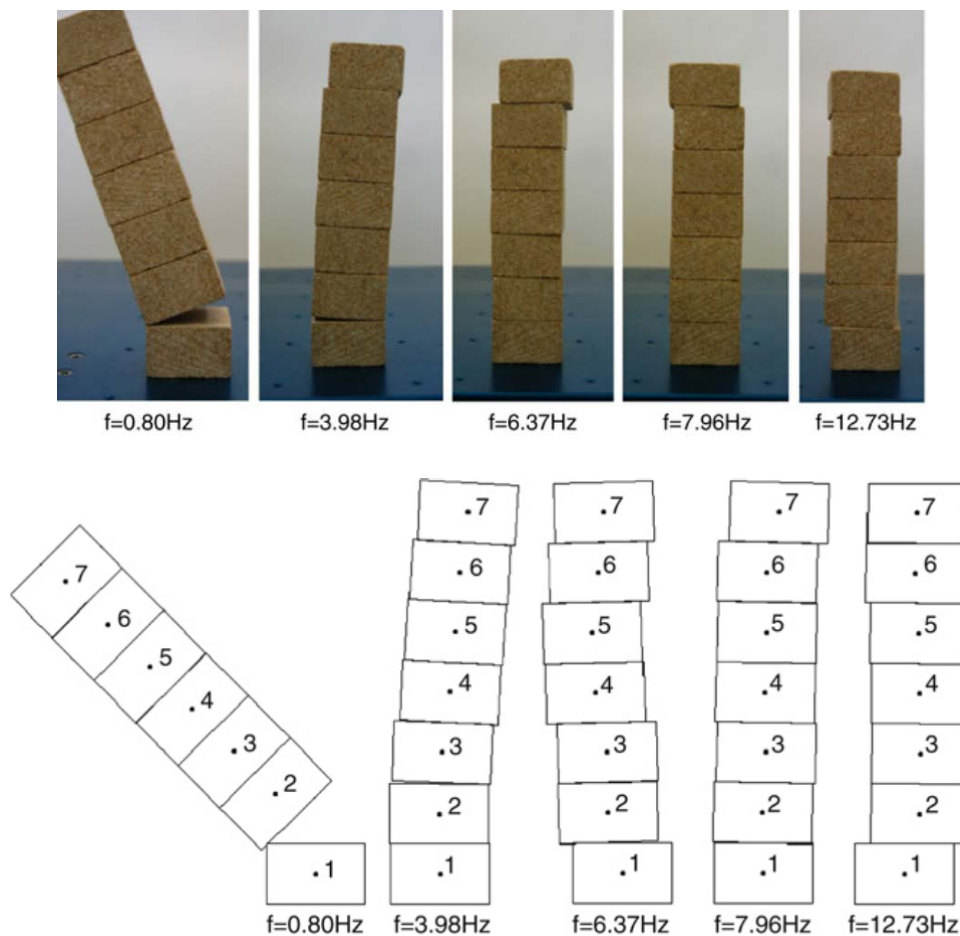
Psycharis és mtsai. [10] 3D-s diszkrét elemek módszerén alapuló szoftverrel vizsgálta a görög Parthenon dél-keleti sarkát (12. ábra). A szimulációk során merev elemeket alkalmazott, amelyet azzal indokolt, hogy a falazott szerkezetek deformációinak túlnyomó többsége a falazóelemek közti érintkezési felületeken alakul ki. Továbbá merev elemek esetén a rendszer szabadságfoka jóval alacsonyabb, így a futásidő kedvezőbb. Mint látni fogjuk a 4.3 fejezetben, merev elemek esetén a Psycharis által is alkalmazott 3DEC nevezetű szoftver a diszkrét elemek tehetetlenségi nyomatékát közelítő módon számítja, így merev elemek alkalmazása nem javasolt olyan szituációkban, ahol a vizsgált folyamatban forgómozgás is megjelenik. Psycharis a vizsgálataiban kismértékű, tömeggel arányos Rayleigh-csillapítást alkalmazott. A szimulációk során valós földrengésteherre vizsgálták a szerkezet választását különböző megerősítések mellett. A numerikus szimulációk alapján megállapították, hogy az oszlopdobok összekapcsolása, „monolitikussá tétele” nem javította a szerkezet viselkedését, sőt bizonyos esetekben káros hatása volt.



12. ábra – Parthenon dél-keleti sarka, illetve Psycharis numerikus modellje [10]



Komodromos és mtsai. [11] geometriailag különböző kialakítású oszloptörzseket vizsgált periodikus gerjesztéssel, illetve valós földrengésrekordok felhasználásával. A szerzők saját fejlesztésű, 2D-s diszkrét elemes szoftvert alkalmaztak, amelyet kisléptékű modellkísérlettel validáltak 13. ábra.

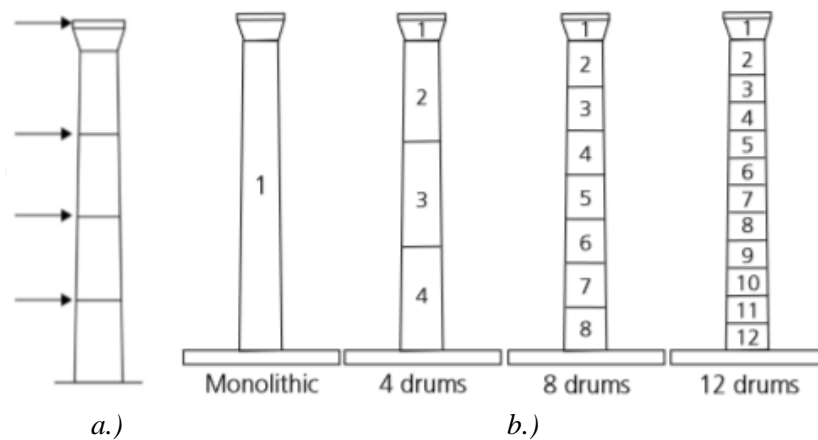


13. ábra – Komodromos által készített kisléptékű kísérlet, és a saját fejlesztésű szoftver által szolgáltatott eredmények összehasonlítása

A szerzők megemlítik, hogy az oszloptörzsek dinamikai teherre adott válasza érzékenyen reagál a geometria, kontakt paraméterek kismértékű megzavarására. Az oszlopdobok számának növelésével emelkedik azon felületek száma is, ahol megcsúszás és ezzel együtt energia disszipáció bekövetkezhet. Emiatt a monolitikus oszlopok sérülékenyebbnek számítanak a többelemű oszloptörzsekkel szemben. Ugyanerre a konklúzióra jutottak Dimitri és mtsai is [5]. Az oszlopdobok számának egy bizonyos határon túli növelésével azonban a megcsúszások miatt előállhat olyan szituáció, hogy külpontos normálerő támadáspontja a keresztmetszet kontúrján kívülre esik, ezáltal a szerkezet egyensúlyát veszti. A szerzők vizsgálatainak alapján a magasságuk mentén karcsúsodó oszlopok stabilabbnak mutatkoztak az állandó keresztmetszetű oszloptörzsekkel szemben.

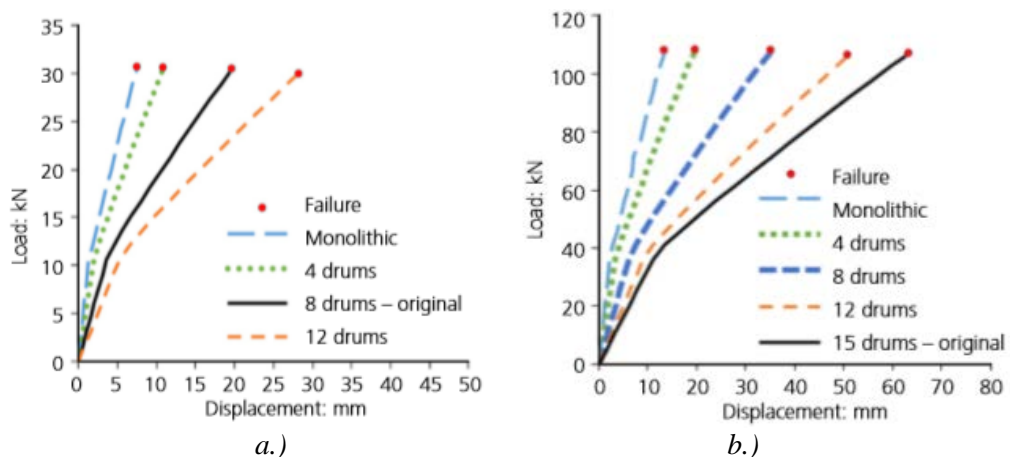
Pulatsu és munkatársai [3] munkájukban saját fejlesztésű, 2D-s diszkrét elemek módszerén alapuló szoftver segítségével vizsgáltak öt valós, ókori oszloptörzs geometriát. A vizsgálat során a blokkokat merevnek tételezték fel. Az elemek közti kapcsolat normál irányban lineárisan rugalmas és csak nyomóerők felvételére képes, míg érintőirányban lineárisan rugalmas – tökéletesen képlékeny, az átadható nyíróerőt a Coulomb-törvény korlátozza. Modelljüket csak egyéb numerikus eljárások eredményeivel hasonlították össze, így a modelljük nincs validálva.

Az oszloptörzsek geometriáját a paraméteres vizsgálatok során n részre osztották fel. A numerikus modellben Push-over analízist végeztek el: az oszloptörzsre ható függőleges gravitációs teher mellett a blokkok tömegével arányos vízszintes eltoló erőt addig növelték, amíg a szerkezet tönkremenetele be nem következett.



14. ábra – Pulatsu által vizsgált oszlopfelosztások

A szerzők által meghatározott kapacitásgörbék bilineáris viselkedést mutatnak, amely az 15. ábrán látható. A viselkedés magyarázata az alábbiakban foglalható össze: a szerkezet kezdeti lineáris viselkedése addig tart, amíg a csak nyomásnak ellenálló keresztmetszetekben a normálerő a belső magon belül működik. Miután a normálerő kilép a belső magon kívülre, már nem a teljes keresztmetszet dolgozik, ezzel együtt a szerkezet merevsége csökken. A szerkezet akkor éri el maximális teherbírását, amikor a normálerő külpontossága eléri a keresztmetszet határát.



15. ábra – Erő-elmozdulás diagrammok a.) Apollo; b.) Zeus templomának oszlopa

---

Az oszlopdobok számától függetlenül a maximálisan felvehető teher nem változott, tehát az oszlopelemek darabszáma nincs hatással a statikus teherbírásra. A kapacitásgörbéken továbbá látható, hogy az oszlopelemek számának növelésével az adott teherszinthez tartozó deformáció növekszik. Ez azzal magyarázható, hogy a többelemű oszloptörzsek esetén több rugalmas kapcsolati interfész lett definiálva, így természetesnek tekinthetők a növekvő elmozdulások.

A szerzők vizsgálták különböző geometriai imperfekciók, pl. sarkok letörésének hatását is, melynek jelentős teherbíráscsökkentő hatását mutatták ki. Továbbá az ókori oszlopok alakját (karcsúságát) vizsgálva azt figyelték meg, hogy az elbillenéssel járó tönkremeneteli mód  $\sim 11-12^\circ$ -os súrlódási szög esetén változna át az oszlop elcsúszásával járó tönkremeneteli módra.

Munkájukban azonban nincs tisztázva, hogy az általuk használt 2D modell, hogy feleltethető meg a valós, kör keresztmetszetű oszlopnak.

Sarhosis és munkatársai [4] Pompeii városában álló, mészkőből készült kétszintes oszlopsor (16.ábra) viselkedését vizsgálták statikus és dinamikus terhek hatására. A szerzők célja a szerkezet viselkedését befolyásoló legfőbb tényezők megállapítása, és a szerkezet erőjátékának pontosabb megértése volt. Munkájuk során 2D-s, diszkrét elemek módszerén alapuló szoftvert használtak rugalmas elemekkel.

A dinamikus vizsgálatok során a szerkezet mechanikai viselkedését harmonikus, illetve valódi szeizmikus gerjesztésekre vizsgálták. Ezzel kimutatták, hogy viszonylag alacsony frekvenciájú gerjesztéseknél az elsődleges válasza a szerkezetnek billegő mozgás volt. Gerjesztési frekvencia növekedésével, a szerkezet válasza komplexebbé vált, amelyben az elemek egymáson történő megcsúszása, illetve az elemek billegő mozgása volt megfigyelhető.



16. ábra – Kétszintes oszlopsor Pompeii városában [4]

---

## 4. Diszkrét elemek módszere

A diszkrét elemek módszerében a szerkezet merev vagy deformálható poliéderek halmazaként jelenik meg. Az érintkező blokkok közti kapcsolatokra olyan felületekként tekintünk, ahol a blokkok közti mechanikai interakció a definiált anyagtörvény szerint létrejöhet. Az elemek mozgását Newton mozgástörvényeinek kis időlépésenkénti numerikus integrálásával határozzuk meg a centrális differenciák módszere alapján. A fejezetben rövid áttekintést adok az alkalmazott diszkrételes szoftver (3DEC) számítási eljárásáról. A fejezetben lévő ismertetés a szoftver felhasználói útmutatóján [12] és Bagi [13] jegyzetén alapul.

### 4.1. Elem- és kapcsolattípusok, kontaktfelismerés

A 3DEC-ben konvex poliéderek generálására van lehetőség. Konkáv blokkok csak konvex blokkok összeragasztásával hozhatók létre. A blokk viselkedhet merev vagy deformálható elemként. A számítás során használt merev elemek esetén egy elem 3 eltolódási és 3 elfordulási szabadságfokkal rendelkezik, míg deformálható elemek esetén a szabadságfokok száma a végelemcsomópontok számával arányosan növekszik.

Az elemek közti kapcsolatokat a szoftver automatikusan detektálja, illetve szükség esetén törli azokat. Azonban minden lehetséges kontaktpár vizsgálatához szükséges idő a blokkok számával exponenciálisan nő. Ezért a szoftver különböző algoritmusokkal szelektálja azokat az elemeket, amelyek között a mozgás során létrejöhet kapcsolat: pl. minden elemhez hozzárendel egy befoglaló téglatestet, és csak azon elemek érintkezését vizsgálja részletesen, amelyek befoglaló téglatestei egymásba metsződnek. A kontaktfelismerő algoritmus, hasonlóan egyéb diszkrételes technikákhoz, az ún. köztes síkon alapul. Az algoritmus az alábbi két részre bontható:

- köztes sík meghatározása oly módon, hogy az - bizonyos értelemben- a két blokk közti teret két „egyenlő” részre ossza;
- mindkét blokk érintkezésének vizsgálata a köztes síkkal.

A köztes sík helyzete egy optimalizációs feladat segítségével adható meg: „maximalizáljuk a távolságot a köztes sík és a legközelebbi csomópont között”, illetve ezzel egyenértékűen: „minimalizáljuk az átfedést a köztes sík és a legjobban átmetsző csomópont között.” Az optimumot a szoftver a köztes sík kismértékű perturbációjával határozza meg.

### 4.2. Kapcsolatok mechanikai viselkedése

Érintkező elemek esetén a kapcsolaton erők adódnak át. A kapcsolatok mechanikai viselkedését a kontakt merevségek jellemzik normál és tangenciális irányban, így a blokkok közti relatív elmozdulásból számítható a kapcsolati erők növekménye:

$$\Delta F^n = -k_n \Delta U^n A_c, \quad (1)$$

$$\Delta F^s = -k_s \Delta U^s A_c, \quad (2)$$

ahol  $\Delta F^n, \Delta F^s$  a normál- és nyíróerő növekménye  
 $k_n, k_s$  a kapcsolat normál- és nyírómerevsége  
 $\Delta U^n, \Delta U^s$  a normál és tangenciális irányú relatív elmozdulás növekménye  
 $A_c$  a szubkontakt területe

Sértetlen kapcsolat esetén (tehát amelyhez tartozó blokkok korábban nem csúsztak meg és a kapcsolat még nem repedt meg) a maximálisan felvehető húzóerőt a húzószilárdság határozza meg:

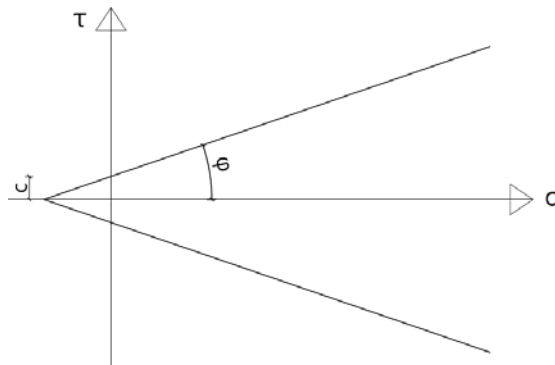
$$T_{max} = f_t A_c, \quad (3)$$

ahol  $f_t$  a húzószilárdság értéke.

A kapcsolaton átadható nyíróerőt a Coulomb-feltétel korlátozza (17. ábra):

$$F_s^{max} = c A_c + F^n \tan \varphi, \quad (4)$$

ahol  $c$  a kohézió,  
 $F^n$  a kapcsolatra ható nyomóerő,  
 $\varphi$  a belső súrlódási szög.



17. ábra – Coulomb-feltétel

A kapcsolat tönkremenetelét (megcsúszását, repedését) követően a húzószilárdság és kohézió értékét a szoftver zérusra állítja.

### 4.3. Merev test mozgásegyenletei

A merev testek eltolódó mozgásához kapcsolódó differenciálegyenlet-rendszer egy blokkot tekintve az alábbi formula szerint írható fel:

$$\ddot{x}_i + \alpha \dot{x}_i = \frac{F_i}{m} + g_i \quad i \in \{x, y, z\}, \quad (5)$$

ahol  $\ddot{x}_i, \dot{x}_i$  a blokk súlypontjának gyorsulása, illetve sebessége  
 $\alpha$  viszkózus csillapítás együtthatója

- 
- $F_i$  a blokkra ható erők eredője (kapcsolati erők + külső terhek, kivéve a gravitációs terhet),  
 $m$  a blokk tömege,  
 $g_i$  a gravitációs gyorsulás.

A merev test forgómozgását csillapítatlan esetben az alábbi egyenletek fejezik ki:

$$\begin{aligned}
 I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 &= M_1, \\
 I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2, \\
 I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 &= M_3,
 \end{aligned} \tag{6}$$

- ahol  $I_1, I_2, I_3$  a tehetetlenségi főnyomatékok,  
 $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$  a fő tengelyek körüli szöggyorsulások,  
 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  a fő tengelyek körüli szögsebességek,  
 $M_1, M_2, M_3$  a blokkra ható nyomatékok a fő tengelyekre számítva.

A 3DEC-ben a (6)-os egyenletek egyszerűsített változatát implementálták, amely feltételezi, hogy a szögsebességek olyan kicsik, hogy a nemlineáris tag ( $\omega_i \omega_j$ ) elhanyagolható. Másrészt a szoftver a tehetetlenségi nyomatékokat is közelítőleg számítja az elem csomópontjainak súlyponttól mért átlagos távolsága alapján. Ennek figyelembevételével:

$$\dot{\omega}_i + \alpha \omega_i = \frac{M_i}{I} \tag{7}$$

**A (7) egyenletből látszik, hogy forgó mozgást végző test esetén a szoftver mindhárom irányban egy „átlagolt” tehetetlenségi nyomatékkal számol. Ez azonban billegő blokkok vizsgálata esetén elfogadhatatlan, ezért a 3DEC környezetben merev elemek nem alkalmazhatók forgómozgást is tartalmazó dinamikai problémák megoldására.**

#### 4.4. Mozgásegyenlet megoldása deformálható blokkok esetén

A diszkrét elemek végeselemes-hálóval vannak felosztva. A végeselemek egy adott csomópontjára a mozgásegyenlet az alábbi formában írható fel:

$$\ddot{u}_i = \frac{\int \sigma_{ij} n_j dS + F_i}{m} + g_i, \tag{8}$$

- ahol  $\ddot{u}_i$  a csomópont gyorsulása az  $i$  irányban,  
 $S$  a végeselemet határoló felület,  
 $n_j$  a  $S$  felület normálisa,  
 $F_i$  a külső terhek csomópontokra redukált eredője az  $i$  irányban,  
 $g_i$  a gravitációs gyorsulás  $i$  irányú komponense.



A csomóponti terhek az alábbiakból adódnak össze:

$$F_i = F_i^z + F_i^c + F_i^l, \quad (9)$$

ahol  $F_i^l$  a külső terhekből származó erő,

$F_i^c$  a szub-kontaktokon ébredő, feszültségekből számítható erő, amely csak a diszkrét elem külső felületéhez csatlakozó végelemek esetén van értelmezve,

$F_i^z$  a csomópontához tartozó végelemek feszültség-állapotából számítható erő.

Amennyiben a csomópontra ható erők eredője zérus (egyensúly állapota), akkor a csomópont gyorsulása is zérus. Ez esetben a csomópont konstans sebességgel mozog. Minden más esetben a csomópont sebessége a  $(t + \Delta t / 2)$  pillanatban az alábbi módon számítható ki:

$$\dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{u}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left( \frac{\int \sigma_{ij} n_j dS + F_i}{m} + g_i \right) \Delta t, \quad (10)$$

A sebességek ismeretében számítható a sebesség-gradiens tenzor ( $\underline{\underline{L}}$ ), mely felbontható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus részre. A szimmetrikus rész az alakváltozás-sebesség tenzor ( $\underline{\underline{D}}$ ), míg a ferdén szimmetrikus rész a spin-tenzor ( $\underline{\underline{W}}$ ). Utóbbi két tenzor elemeit az alábbi módon lehet számítani:

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \\ W_{ij} &= \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}) \end{aligned}, \quad (11)$$

A szoftverben az anyagegyenlet inkrementális formában került implementálásra, így a nemlineáris anyagi viselkedést is könnyedén figyelembe lehet venni. A rugalmas feszültségnövekményt az alábbi módon lehet számítani:

$$\Delta \sigma_{ij}^{elastic} = \lambda \cdot \Delta e \cdot \delta_{ij} + 2G \cdot \Delta \varepsilon_{ij}, \quad (12)$$

ahol  $\Delta \sigma_{ij}^{elastic}$  a feszültségnövekmény rugalmas állapotban

$\lambda$  az ún. Lamé-konstans, értéke  $\frac{2G\nu}{1-2\nu}$

$\Delta e$  az alakváltozás-tenzor első invariánsa:  $\Delta e = \Delta \varepsilon_x + \Delta \varepsilon_y + \Delta \varepsilon_z$

$G$  a nyírási rugalmassági modulus

$\Delta \varepsilon_{ij}$  az inkrementális alakváltozás-növekmény

---

#### 4.5. Mechanikai csillapítás

A diszkrét elemes eljárásokban különböző típusú csillapítást alkalmaznak statikus, illetve dinamikai problémák megoldására. A statikus vizsgálat során a csillapítás célja egyfajta dinamikus relaxáció, annak érdekében, hogy a minél hamarabb megkapjuk az egyensúlyi megoldást. Ebben az esetben a csillapítás a blokk sebességével arányos. A szerkezet önsúly alatti kiegyensúlyozásához ún. adaptív globális csillapítást alkalmaztam, amely egy sebességgel arányos csillapítást jelent, de a csillapítási tényezőt a számítás során folyamatosan változtatja a szoftver oly módon, hogy a csillapítás teljesítménye mindig a rendszer mozgási energiaváltozásának adott hányada legyen:

$$R = \frac{\sum P}{\sum \dot{E}_k} \quad (13)$$

ahol  $P$  a csillapítás teljesítménye,  
 $\dot{E}_k$  a mozgási energia megváltozása.

Dinamikai vizsgálatok során a csillapítás szerepe a rugalmas közeg rezgéseinek csökkentése az analízis során. Vizsgálataim keretében egyáltalán nem alkalmaztam csillapítást.

#### 4.6. Numerikus stabilitás

A szoftver által a mozgásegyenletek megoldásához alkalmazott centrális differenciák módszere feltételesen stabil numerikus eljárás, tehát az időintegráláshoz tartozó lépéshossz nem választható tetszőlegesen. Merev elemek esetén az időlépés nagyságát a legkisebb tömegű blokk és a modellben alkalmazott legmerevebb kontakt határozza meg, míg deformálható elemek esetén az egy végelemhez tartozó tömeg és merevség hányadosa (Részletes definíció [12]-ben található).

$$\Delta t_n = 2 \cdot \min \left( \frac{m_i}{k_i} \right)^{0.5} \quad (14)$$

$$\Delta t_b = frac \cdot 2 \cdot \left( \frac{M_{min}}{K_{max}} \right)^{0.5} \quad (15)$$

ahol  $m_i, k_i$  az  $i$ -dik végelemhez tartozó tömeg és merevség  
 $M_{min}, K_{max}$  a legkisebb tömegű blokk tömege, és a legnagyobb kontaktmerevség.  
 $frac$  felhasználó által megadható csökkentő tényező.

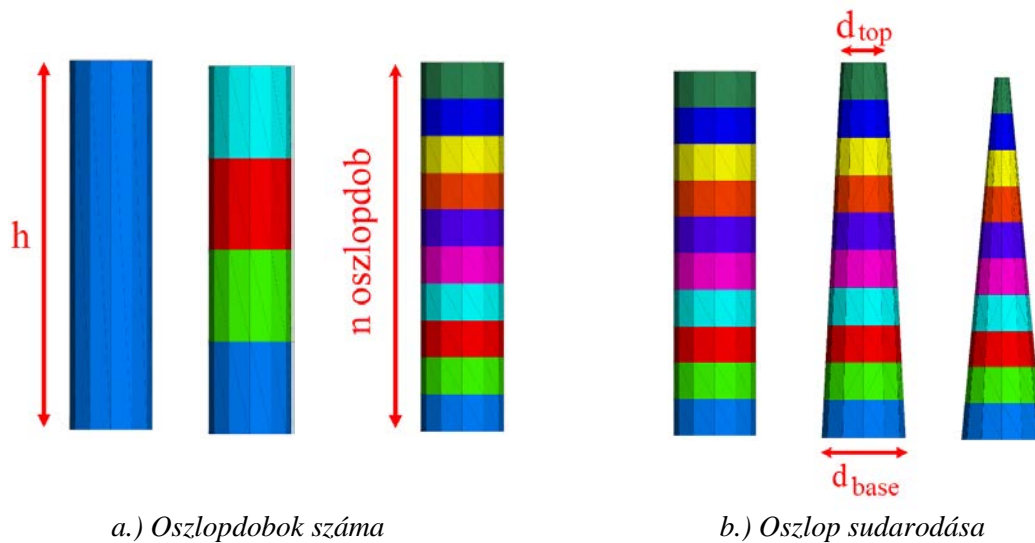
A szoftver által beállított időlépés (14) és (15)-ben meghatározott értékek közül a kisebb:  $\Delta t = \min(\Delta t_n, \Delta t_b)$ .

---

## 5. Numerikus modell

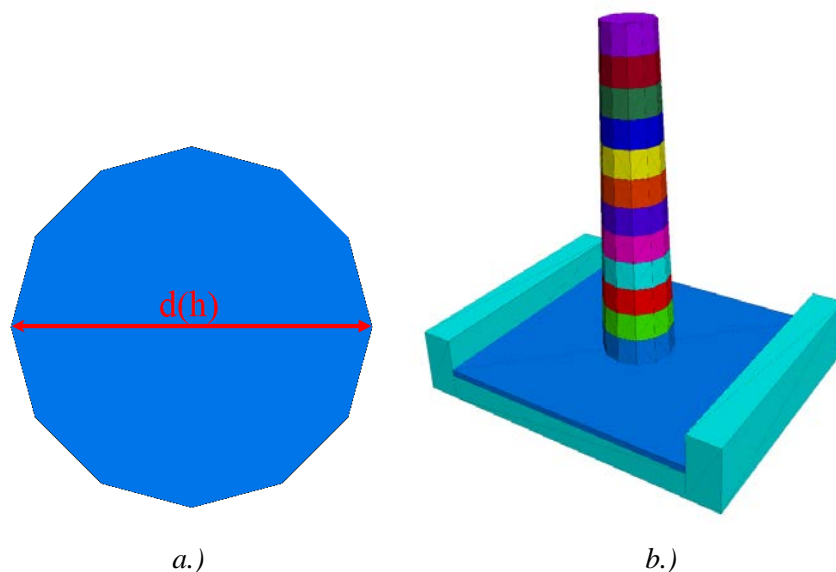
### 5.1. Geometria

A létrehozott modellnek figyelembe kell vennie az ókori oszloptörzsek kialakításának alapvető geometriai sajátosságait. Egy-egy oszlop definiálásához szükség van az oszloptörzs magasságára ( $h$ ), a lábazat feletti ( $d_{top}$ ) és fejezet alatti átmérőjére ( $d_{base}$ ), az oszlopdobok számára ( $n$ ). Az elkészült parametrikus modell segítségével könnyedén definiálhatók tetszőleges kialakítású oszloptörzsek (18. ábra).



18. ábra – Numerikus modell – geometriai kialakítás

Mivel a szoftverben a diszkrét elemek csak poliéderek lehetnek, ezért a görbült felületeket síkokkal kellett helyettesítenem. Az oszlopdobok kör keresztmetszetét egy 12 élű szabályos síkidommal helyettesítettem. A kész geometriai modell a 19. ábrán látható.



19. ábra – a.) kör keresztmetszet közelítése; b.) geometriai modell

---

## 5.2. Anyagjellemzők

Mint azt a 4.3 fejezetben láthattuk, 3DEC környezetben, merev elemekkel nem végezhető el a billegő oszlopok vizsgálata, mivel a szoftver a blokkokhoz tartozó tehetetlenségi nyomatékokat közelítő módon számítja, mindhárom irányban azonosnak tekinti. A numerikus modellben ezért deformálható, lineárisan rugalmas elemeket alkalmaztam. Míg merev elemek esetén a számításhoz szükséges (blokkhoz tartozó) anyagjellemző csak az elem testsűrűsége lenne, addig deformálható elemek használatakor ez kiegészül a lineárisan rugalmas anyagi viselkedés paramétereivel, melyek közül a rugalmassági modulust, illetve Poisson-tényezőt definiáltam a modellben.

A numerikus modell validációjához gránit anyagjellemzőit határoztam meg laborkísérletek segítségével. Az ókori oszlopok vizsgálatához használt mészkő anyagjellemzőket Sarhosis [4] munkájából vettem át.

Numerikus modell validációjában szereplő laborkísérletekhez gránittömböket alkalmaztak. A kísérletben használt gránit kőzet anyagjellemzőinek pontos meghatározásához laboratóriumi vizsgálatokat végeztem el. A kísérletekhez megkaptam a Ther és Kollár eredeti kísérletében [2] használt gránitblokkok egyikét. Ezen a mintán az Építőanyagok és Mérnökgeodézia Tanszék Laboratóriumában egyirányú nyomószilárdsági kísérleteket végeztem el az anyag rugalmassági modulusának meghatározásához. A vizsgálat elvégzéséhez szükséges szabványosított, henger alakú minták készítése, melyet a kapott tömbből nagy teljesítményű vizes magfúróval tudtam kivágni (20a. ábra). Összesen tizennégy darab 100 mm magas és 45 mm átmérőjű hengert állítottam elő, ezzel teljesítve a kőzetek vizsgálatánál javasolt 2:1-es magasság/átmérő arányt. A mintadarabokat ezután kiszáritottam, ugyanis a víz (mint összenyomhatatlan közeg) jelenléte a próbatest teherbírását csökkentené. A kiszáradt mintákon egyirányú nyomószilárdsági vizsgálatot végeztem el (20b. ábra). A mérés során az erő-elmozdulás diagramot rögzítette a berendezés, amelyből feszültség-alakváltozás diagramot készítettem (21. ábra).



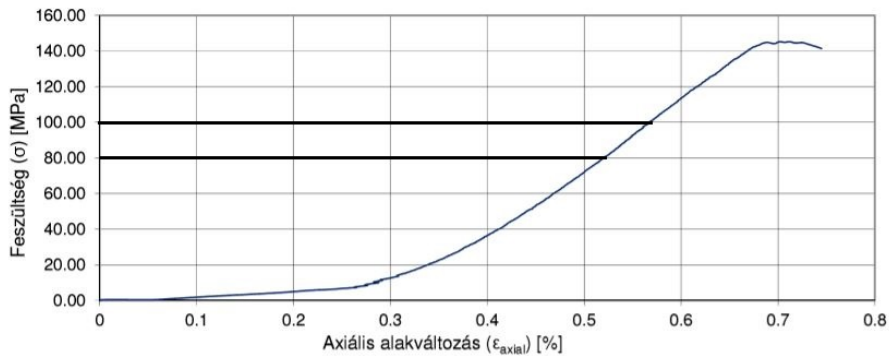
a.)



b.)

20. ábra – Vizsgálatok: a.) mintavétel, b.) egyirányú nyomószilárdság vizsgálata

A rugalmassági modulus megállapításához a kísérletből kapott feszültség-alakváltozás görbének lineáris részét használtam fel (21.ábra). A rugalmassági modulus értékét a normál feszültség megváltozásának, a fajlagos nyúlás megváltozásához viszonyított arányából számítottam. A numerikus modellben a 10 minta alapján meghatározott rugalmassági modulus átlagértékét, 35 GPa-t alkalmaztam. A gránit Poisson-tényezőjét a laboratóriumban nem tudtam meghatározni, mivel a próbatest tönkremenetele hirtelen, robbanásszerű, a szétrepülő gránitdarabok pedig könnyen kárt tehetnek a műszerben. Ezért a Poisson-tényezőt szakirodalmi adatok alapján vettem fel 0.3-ra.



$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$$

21. ábra – Feszültség alakváltozás diagram és a kiemelt lineáris rész

A felhasznált gránit sűrűségét a tömb tömege és térfogata alapján számítottam, mely 2670 kg/m<sup>3</sup>-ra adódott. A gránit anyagjellemzőit foglalja össze az 1. táblázat.

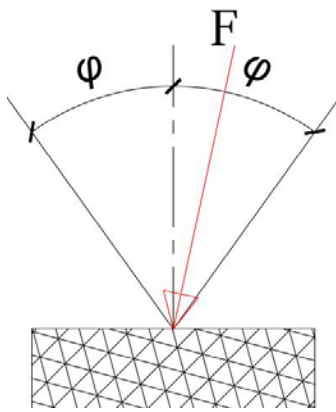
	<b>Rugalmassági modulus - E</b>	<b>Poisson-tényező - ν</b>	<b>Testsűrűség - ρ</b>
<b>Gránit</b>	35 GPa	0.30	2670 kg/m <sup>3</sup>
<b>Mészkö</b>	40 GPa	0.25	2680 kg/m <sup>3</sup>

1. táblázat – Diszkrét elemek mechanikai paramétereit

A kapcsolatok viselkedését az alábbi anyagjellemzők definiálják:

- Súrlódási szög –  $\varphi$  [°]
- Kontakt normálmerevség –  $k_n$  [Pa/m]
- Kontakt nyírómerevség –  $k_s$  [Pa/m]

Az elemek megcsúszása a Coulomb-féle súrlódási törvény alapján történik. A kapcsolatok lineárisan rugalmasan viselkednek normál- és tangenciális irányban mindaddig, amíg az átadódó erő a súrlódási kúpon belül van (22a. ábra). A kapcsolat megcsúszik, ha a kapcsolat síkjában működő erő nagyobb, vagy egyenlő a kapcsolat síkjára merőleges erő és a súrlódási tényező szorzatánál. ( $\mu = \tan(\varphi)$ ). Az érintkező felületek közti súrlódási szög függ a felületek minőségétől (érdességétől). A megmaradt mintadarabokat a laboratóriumban kisebb elemekre szeleteltem, melyeken többször megismételve mértem a gránitblokk vágott felületéhez tartozó csúszási-súrlódási tényezőt (22b. ábra). A modellben itt is a mért adatok átlagát, 20°-ot alkalmaztam.



a.)



b.)

	Mért súrlódási szög
1. kísérlet	19°
2. kísérlet	21°
3. kísérlet	18°
4. kísérlet	22°
<b>Átlagérték:</b>	<b>20°</b>

c.)

22. ábra – Súrlódási szög meghatározása a gránit csiszolt felületén

A kapcsolatok merevségét Jiang és Esaki [1] kísérletei alapján vettem fel, melyben a szerzők különböző mállottsági fokokra határozták meg a kapcsolati merevségeket. Dilatációs szöget minden esetben zérusnak tekintettem. A kapcsolatoknál használt paramétereket foglalja össze a 2. táblázat.

	Súrlódási szög $\varphi$	Kapcsolati normálmerevség $k_n$	Kapcsolati nyírómerevség $k_s$
<b>Gránit (vágott felület)</b>	20°	10.0 GPa/m	5.00 GPa/m
<b>Mészkö</b>	30°	4.00 GPa/m	2.00 GPa/m

2. táblázat– Kapcsolatok mechanikai paramétereit

### 5.3. Terhelés, peremfeltételek és csillapítás

A szimulációk során elsőként a perfekt geometriát definiáltam, azaz minden elem függőleges helyzetben jelenik meg a modellben. A modellek legalsó eleme tipikusan egy minden irányban rögzített támaszelem. Ezt a modellt saját önsúlya alatt nyugalomba hoztam, melyhez a szoftver ún. adaptív globális csillapítását alkalmaztam. A dinamikai vizsgálatok elvégzése előtt a szoftverben a tömeg skálázását és az egyéb csillapításokat kikapcsoltam.

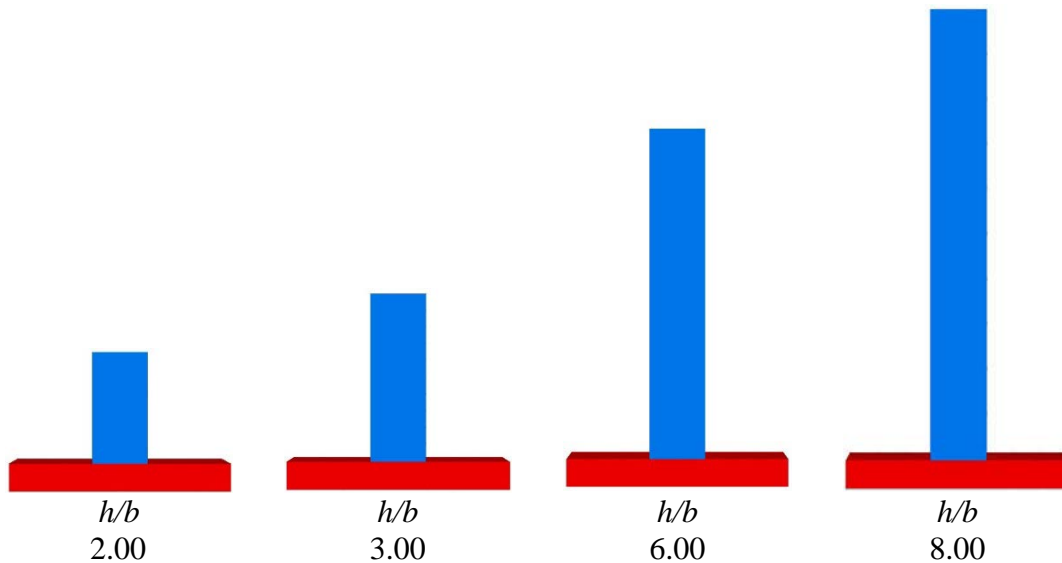
A rázóasztalon végzett kísérletek esetén a vizsgált testeket megtámasztó támaszelem sebességét írtam elő az idő függvényében. A rázóasztal végezhet periodikus, illetve időben tetszőlegesen változó mozgást is.



---

## 6. Egy billegő blokk numerikus vizsgálata

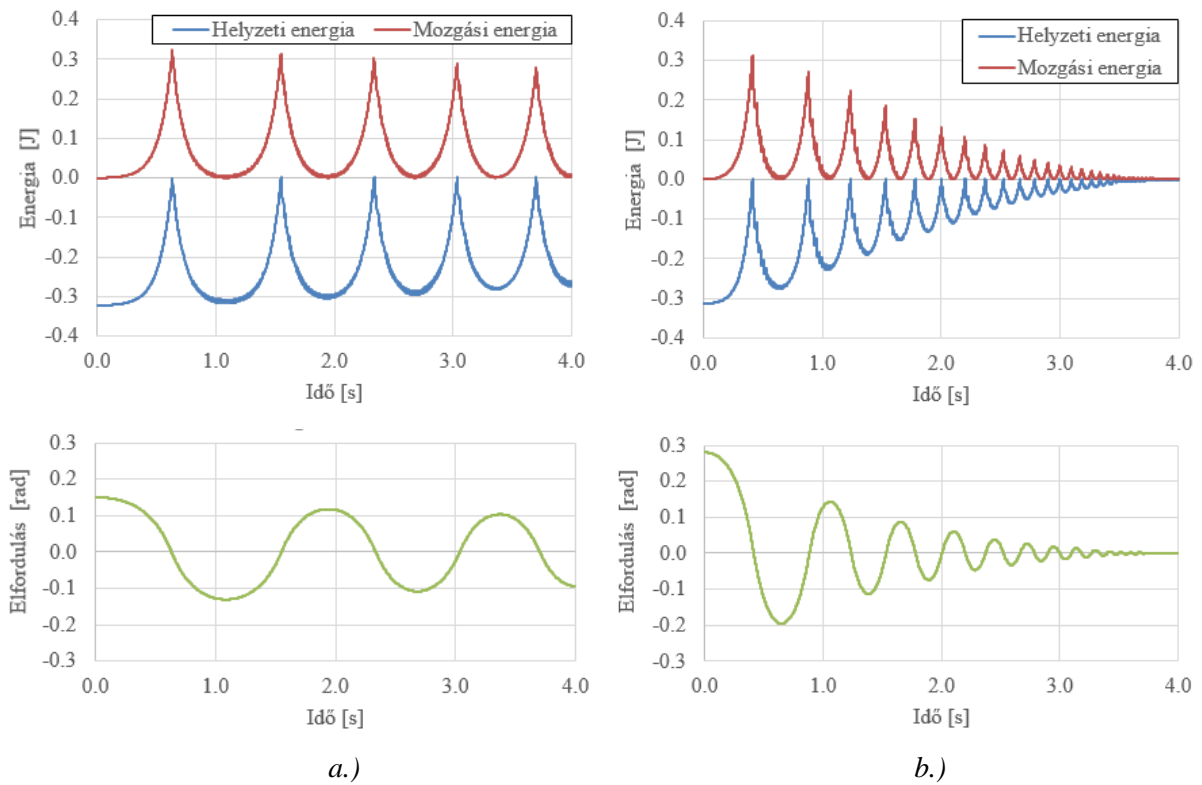
A dolgozat keretében numerikus szimulációk segítségével vizsgáltam egyetlen, téglatest alakú blokk rögzített felületen történő billegő mozgását. A vizsgált, különböző karcsúságú ( $h/b = [2.0; 3.0; 3.7; 5.0; 6.0; 7.0; 8.0]$  - 23. ábra) elemeket függőleges pozíciójukból kitérítettem egy előre definiált szöggel, majd a modellt egyensúlyba hoztam. A kezdeti kitérés mértékét úgy határoztam meg, hogy ~90%-t vettem a statikus esetben felborulást okozó kitérésnek ( $\theta_{crit}$ ). Ezután a rendszert magára hagytam és azt vizsgáltam, hogy a sorozatos ütközések után milyen mértékben alakul át a test mozgási energiája.



23. ábra – Néhány a vizsgált karcsúságú oszlopok közül

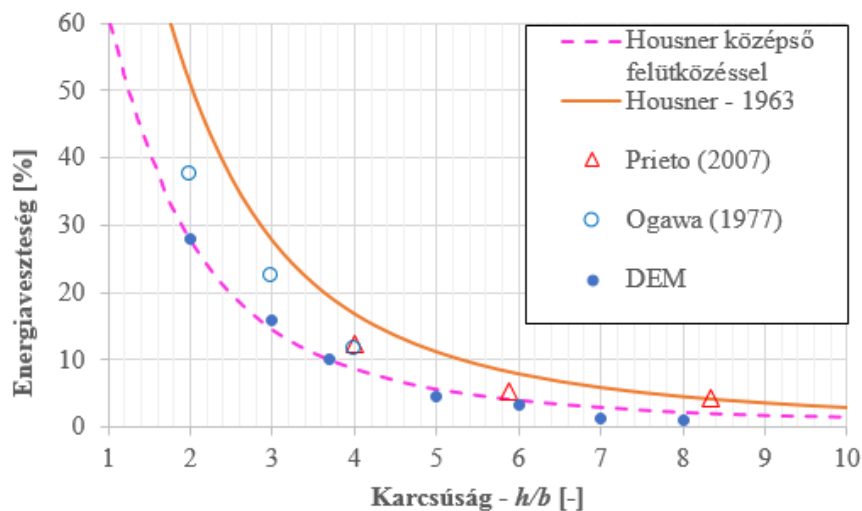
A szimulációk közben a fixen rögzített felület és a billegő blokk közti súrlódási szöget irreálisan magas értékre állítottam ( $70^\circ$ ), hogy relatív megcsúszás a felületek között ne következhesen be. A szimulációk esetén feltettem, hogy a vizsgált blokk gránitból készült, melyhez tartozó anyagjellemzőket és kapcsolati merevségeket a 1. és 2. táblázat foglalja össze.

A 24. ábrán két különböző karcsúság esetén látható, hogy a szimuláció kezdetén a kitérített blokkok mozgási energiája zérus, míg a helyzeti energiájuk (a kitérés miatt megemelkedett súlypont miatt) nem zérus. Ahogyan a forgómozgás elindul, a mozgási energia növekszik, míg a helyzeti energia csökken. Mikor a blokk eléri függőleges pozícióját helyzeti energiája zérusra csökken, mozgási energiája maximális. Ebben a pillanatban bekövetkezik az ütközés, majd a téglatest másik éle mentén billen tovább. Azonban az ütközés után a blokk már nem térül ki olyan mértékben, mint amennyire szimuláció kezdetén kitérítettem. Ez azt jelenti, hogy az ütközés során az energia egy része átalakult. A szimulációk keretében a magasra állított súrlódási szög miatt a megcsúszás lehetőségét kizártam. Egy lehetséges magyarázat, hogy az ütközés hatására a rugalmas anyagból készült blokk tárol magában bizonyos nagyságú alakváltozási energiát miközben rugalmas rezgést végez. Továbbá a modell azt mutatja, hogy ütközés után, egészen a mozgási energia ismételt zérusra csökkenéséig a kapcsolaton érintő irányban működő, nyíróerőt felvevő rugókban is felgyülemlik bizonyos mértékű energia.



24. ábra – Egyetlen billegő blokk mozgása: a.)  $h/b=6.0$  b.)  $h/b=3.0$

A fenti szimulációkat elvégeztem mind a hét, általam vizsgált karcsúsági arányon. Minden karcsúsági arány esetén fél periódusonként leolvastam a helyzeti energia szélsőértékét, meghatároztam az egy ütközés során elvesző energiát, majd az adott karcsúsághoz tartozó energiaveszteségek számtani átlagát vettem. Az így meghatározott, adott karcsúsághoz tartozó értékeket ábrázolja a 25. ábra. Az ábra alapján elmondható, hogy a diszkrét elemes szimulációval meghatározott energiaveszteségek a kísérletekhez viszonyítva alacsonyabbak, azonban közel egyeznek Ther [8]-ban közölt, közbenső felütközést feltételező eredményeivel.



25. ábra – Diszkrét elemes szimulációval meghatározott energiaveszteségek az analitikus megoldásokkal összehasonlítva.

---

## 7. Kettő, illetve három blokkból álló rendszer vizsgálata

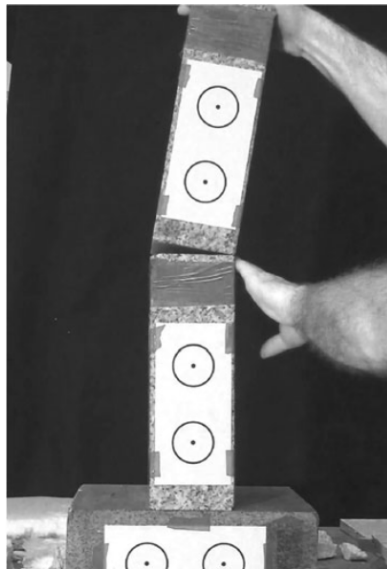
Ahhoz, hogy egy numerikus modellt kellő magabiztossággal alkalmazni tudjunk valós problémák megoldására, elengedhetetlen, hogy a modellt kísérleti eredményekkel szemben validáljuk. A 5. fejezetben részletezett numerikus modellt Ther és Kollár [2] kísérleteivel hasonlítottuk össze.

Ther és Kollár által elvégzett első kísérletben két, egymásra helyezett gránitblokk mozgását rögzítették, miután a felső kőtömböt előre meghatározott mértékben kimozdították függőleges helyzetéből és a rendszert magára hagyták. A második kísérletben 3 egymásra helyezett kőtömb mozgását vizsgálták rázóasztal segítségével létrehozott gerjesztéssel.

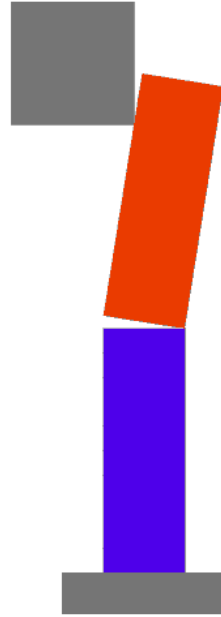
### 7.1. Kétköbök kísérlet

A kísérletben két gránit blokkot helyeztek egymás fölé (26a. ábra). A kőtömbök magassága 300 mm, szélessége 100 mm, míg mélysége 200 mm volt. A kísérletben az érintkező felület élei 2-2 mm-es fózolással rendelkeztek, így az érintkező felület szélessége 96mm. A kísérlet elején a felső blokkot kibillentették függőleges helyzetéből ( $\varphi_2 = 0.153$  rad), majd a rendszert magára hagyták. A kísérlet során az egyes kőtömbök elfordulását mérték a függőlegeshez képest. A kísérletben az alsó tömb  $t = 0.13s$  -nál kismértékben elfordult óramutató járásának megfelelően (27. ábra). A felső blokk  $t = 0.187s$  -nál csapódott hozzá az alsó blokkhoz, majd a bal oldali él mentén, óramutató járásával ellentétesen billent tovább. Ezután a felső elem billegő mozgást végzett az alsó elemen, végül a két elem együttesen folytatta mozgását.

Elsőként, a numerikus modellben a kísérleti elrendezést oly módon törekedtem létrehozni, hogy a felső blokk geometriáját már az előírt elfordulás segítségével definiáltam. Ez esetben a számítás kezdetekor a felső blokk él mentén érintkezett az alsó blokkal. Annak ellenére, hogy a szoftver elviekben képes kezelni két egymással párhuzamos él érintkezését, a fentiek alapján kialakított modellben a számítás elkezdésével a két blokk jelentős mértékben (~1-2cm) egymásba metsződött. Ennek oka valószínűleg a helytelen kontaktfelismerésből fakadt. Emiatt úgy döntöttem, hogy a két blokkot függőleges pozíciójukban egymásra helyezve definiálom. Ezután a modellt a tömbök önsúlyával terheltem és egyensúlyba hoztam. Egy segédelem (26b. ábra bal felső szürke elem) segítségével a felső blokkot az előírt mértékben kimozdítottam függőleges helyzetéből. Ezalatt az alsó elem elmozdulásait gátoltam (ahogy a kísérletben is gátolja a blokk vízszintes mozgását a kísérletet elvégző személy a bal kezével). Ebben az esetben egy jól definiált felület-felület kapcsolatból jutottam el egy (a szoftver által helyesen érzékelt) él-él kapcsolatig. A modellt ezen megtámasztási viszonyok mellett is egyensúlyba hoztam, majd a segédelemet eltávolítottam és az alsó elemről is eltávolítottam a mozgását gátló peremfeltételeket.



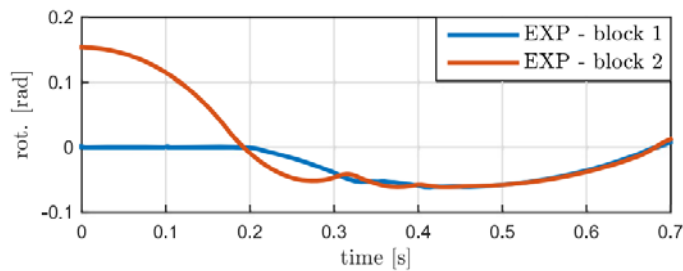
a.)



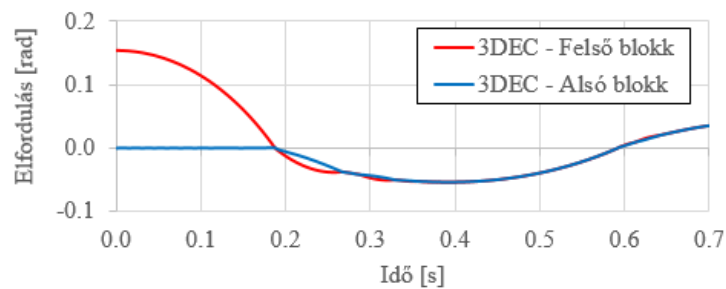
b.)

26. ábra – Kétblokkos kísérlet: a.) kísérleti elrendezés [2], b.) numerikus modell

A numerikus modell által szolgáltatott elfordulás-idő grafikont a 28. ábra mutatja. A felső blokk a kezdeti kitérített helyzetéből 0.187 s-nál érkezik vissza a függőleges állapotába, ami teljesen megegyezik az eredeti kísérleti eredménnyel. Látható, hogy ezután a felső blokk átbillen a bal oldali élére, majd a két blokk a kísérlethez hasonlóan együtt folytatja tovább a mozgását. A két blokk a numerikus modellben 0.60 s-nál tér vissza eredeti, függőleges helyzetébe, míg a kísérletben ez 0.67 s-nál történt (~10%-os eltérés). Összességében a kísérleti és numerikus szimulációk között jó egyezést találtam, a numerikus modell globálisan képes volt visszaadni a kísérletben megfigyelt jelenségeket.



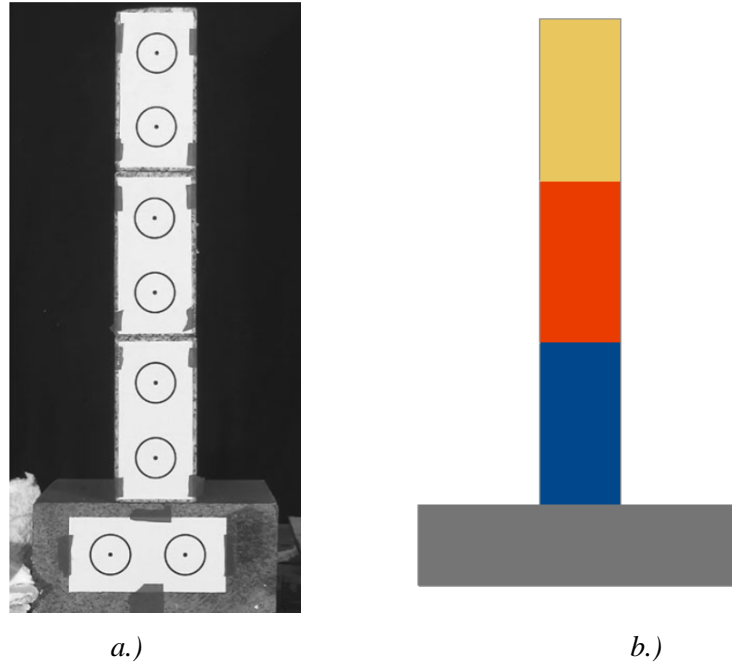
27. ábra - A kísérlet során mért elfordulás-idő diagramm [2]



28. ábra – Diszkrét elemes szimuláció

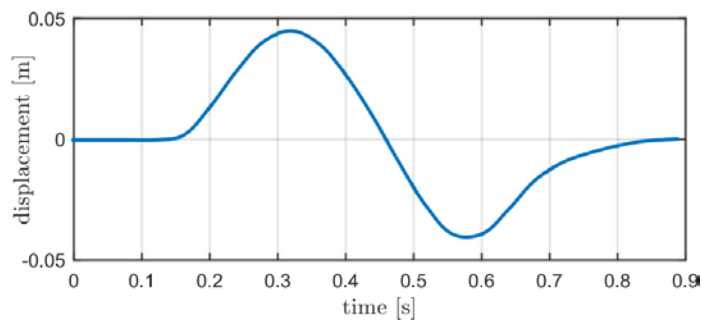
## 7.2. Három blokk a rázóasztalon

Ther és Kollár [2]-ben dokumentált második kísérletében három kötömböt helyeztek egymás fölé egy rázóasztalon. Ez esetben a kövek magassága 200 mm, szélességük 100 mm, míg mélységük 300 mm volt (29a. ábra).



29. ábra – Háromblokkos kísérlet: a.) kísérleti elrendezés [2], b.) numerikus modell

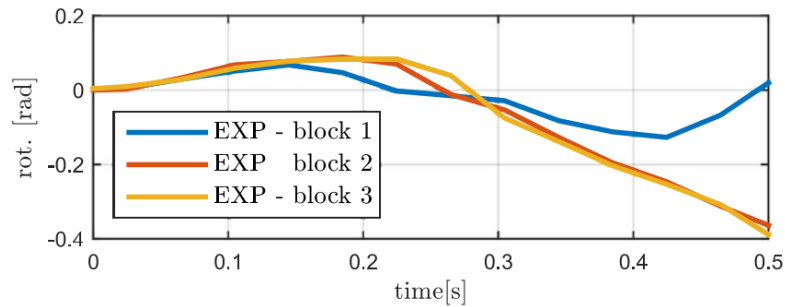
A rázóasztalt egy szinuszos függvény jellegű elmozdulásteherrel mozgatták, melynek grafikonja a 30. ábrán látható. A diszkrét elemes szoftverben a rázóasztal sebesség-idő függvényét lehet előírni, így a 30. ábrán látható grafikon digitalizálva és numerikusan deriválva megkaptam a rázóasztal sebesség-idő függvényét.



30. ábra – A rázóasztal elmozdulás-idő függvénye [2]

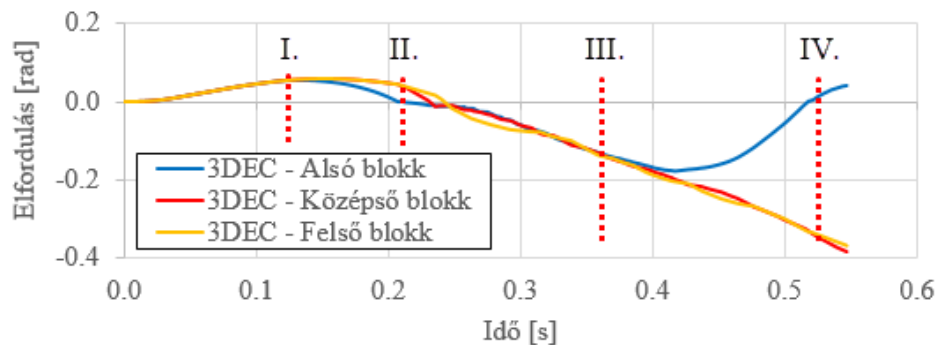
A blokkok – kísérletben mért - függőlegessel bezárt szögét a folyamat során 31. ábra rögzíti. Látható, hogy a terhelés hatására először mindhárom blokk azonos mértékben, az óramutató járásával megegyezően elfordul, majd a legalsó blokk feletti kapcsolat megnyílik és a legalsó blokk elkezd óramutató irányával ellentétesen visszabilenni. Ezt nemsokkal később követi a középső és legfelső blokk is. Kb. 0.27 s-tól kezdve a két felső blokk átbillen a legalsó blokk bal felső élére, és innentől

kezdvé együtt mozognak. A mozgás során 0.42s-nál a legalsó blokk ismételen a függőleges pozíciója felé mozog, míg végül kb. 0.5s-nál éri azt el.

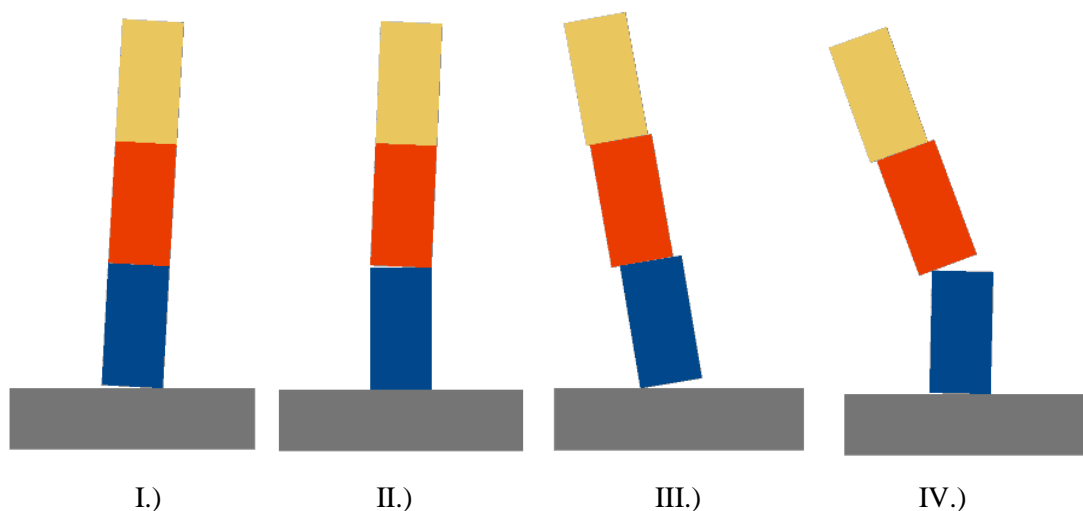


31. ábra – A kísérlet során mért elfordulás-idő diagramm [2]

A diszkrét elemes modellben a blokkok mozgását láthatjuk a 32. és 32 ábrán. A numerikus modell és a kísérlet közti különbségeket kiemelve láthatjuk, hogy a 0.15-0.20 s között a blokkok elfordulása a kísérlethez viszonyítva kisebb (I. állapot). A legalsó blokk 0.3 és 0.4 s között együtt mozgott a két felső blokkal a numerikus szimulációban, míg a kísérlet során ebben az időintervallumban a két felső blokk a legalsó elem jobb felső éle körül fordult el. Ettől eltekintve a numerikus szimuláció ez esetben is elfogadható módon produkálta a mozgás jellegét. A 33. ábra III. és IV. részén látható, hogy a blokkok kismértékben meg is csúsztak egymáson.



33. ábra – Numerikus szimuláció eredményei a 3 blokkos vizsgálat esetén



34. ábra – Három blokk mozgása az időben



---

## 8. Összefoglalás

A dolgozat keretében diszkrét elemek módszerén alapuló, 3D-s numerikus modelleket készítettem. A szimulációk során lineárisan rugalmas elemeket alkalmaztam, mivel merev elemek esetén a szoftver közelítő módon számítja a blokkok tehetetlenségi nyomatékát, ami helytelen eredményeket okozott a számítások során. A modell képes figyelembe venni a mozgás során létrejövő ütközéseket, továbbá képes a blokkok közti esetleges megcsúszás figyelembevételére.

Különböző karcsúságú billegő blokkot vizsgálva azt tapasztaltam, hogy a numerikus modellben az ütközés során bekövetkező energiaveszteség a kísérleti eredményekhez hasonlítva ([6, 7]) alacsonyabb, azonban jó egyezést mutat Ther [8] által kidolgozott, módosított Housner-féle modellel, amely közbenső felütközés figyelembevételét javasolja.

A numerikus modellt validáltam Ther [2] munkájában bemutatott kísérletekkel szemben. A kísérletben használt gránittömbök rugalmassági modulusát, illetve a felületéhez tartozó súrlódási szöveget laborkísérletek alapján határoztam meg. A numerikus modell jó egyezést mutatott a kísérleti eredményekhez viszonyítva.

A jelenlegi munka keretében nem sikerült egyértelműen tisztázni, hogy az ütközés során mivé alakul át a blokk mozgási energiája. A szimulációk bizonyos esetekben érzékenyen reagáltak a kapcsolati merevségek megváltoztatására, ezért ezen paraméterek hatását is részletesebben szükséges vizsgálni. Ezen hatásmechanizmusok megértése után kör keresztmetszetű oszloptörzsek vizsgálatát kívánom elvégezni harmonikus gerjesztésre.

---

## Hivatkozások

- [1] Housner GW. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *B Seismol Soc Am.* 1963;53:403-17.
- [2] Ther T, Kollár LP. Model for multiblock columns subjected to base excitation. *Earthq Eng Struct D.* 2018;47:418-37.
- [3] Pulatsu B, Sarhosis V, Bretas EM, Nikitas N, Lourenco PB. Non-linear static behaviour of ancient free-standing stone columns. *P I Civil Eng-Str B.* 2017;170:406-18.
- [4] Sarhosis V, Asteris P, Wang T, Hu W, Han Y. On the stability of colonnade structural systems under static and dynamic loading conditions. *B Earthq Eng.* 2016;14:1131-52.
- [5] Dimitri R, De Lorenzis L, Zavarise G. Numerical study on the dynamic behavior of masonry columns and arches on buttresses with the discrete element method. *Engineering Structures.* 2011;33:3172-88.
- [6] Ogawa N. A study on rocking and overturning of rectangular column. Report of the National Research Center for disaster prevention (18). 1977;14.
- [7] Castrillo FP. On the dynamics of rigid-block structures applications to SDOF masonry collapse mechanisms. 2007.
- [8] Ther T, Kollár LP. Refinement of Housner's model on rocking blocks. *B Earthq Eng.* 2017;15:2305-19.
- [9] Psycharis IN. Dynamic behaviour of rocking two-block assemblies. *Earthq Eng Struct D.* 1990;19:555-75.
- [10] Psycharis IN, Lemos J, Papastamatiou D, Zambas C, Papantonopoulos C. Numerical study of the seismic behaviour of a part of the Parthenon Pronaos. *Earthq Eng Struct D.* 2003;32:2063-84.
- [11] Komodromos P, Papaloizou L, Polycarpou P. Simulation of the response of ancient columns under harmonic and earthquake excitations. *Engineering Structures.* 2008;30:2154-64.
- [12] ITASCA. 3DEC - Universal Distinct Element Code Manual. Theory and Background. Mineapolis: Itasca Consulting Group; 2004.
- [13] Bagi K. A diszkrét elemek módszere. BME Department of Structural Mechanics, Budapest. 2007:5-12.