



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

HAZAY MÁTÉ

ÉPÍTŐMÉRNÖK HALLGATÓ (M. Sc.)

**Izotrop és anizotrop anyagú gerendák
modelljeinek összehasonlítása 3D
numerikus szimulációk eredményeivel**

TDK DOLGOZAT

Konzulens:
Dr. Bojtár Imre egyetemi tanár

Budapest, 2015. november



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani konzulensemnek, **Dr. Bojtár Imrének**, a dolgozatom megírása során nyújtott segítségéért. Továbbá köszönettel tartozom **Dr. Gáspár Zsoltnak**, hasznos szakmai tanácsaiért és a munkám alapos szemrevételezéséért.



Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	5
Jelölésrendszer	7
1. Történelmi áttekintés	9
2. Izotrop anyagú gerendák mechanikai vizsgálata	18
2.1. Izotrop anyagú gerendák modelljeinek elméleti bemutatása	18
2.1.1. Klasszikus gerendamodell elmélete	18
2.1.2. Nyírási alakváltozást figyelembevevő 2D gerendamodellek általános bemutatása	26
2.1.3. Timoshenko gerendamodell elmélete.....	29
2.1.4. Harmadfokú nyírási gerendamodell	38
2.1.5. Hiperbolikus nyírási deformációs gerendamodell bemutatása	42
2.1.6. Háromdimenziós lineáris gerendamodell	45
2.1.7. Másod-, és magasabbfokú háromdimenziós gerendamodellek	49
2.2. Izotrop anyagú konzol analitikus megoldása különböző gerendamodellekkel.....	49
2.2.1. Konzol lehajlásának meghatározása klasszikus gerendaelmélettel	50
2.2.2. Konzol lehajlásának meghatározása Timoshenko-elmélettel.....	51
2.2.3. Konzol lehajlásának meghatározása harmadfokú nyírási gerendamodellel	52
2.2.4. Konzol lehajlásának meghatározása hiperbolikus gerendaelmélettel.....	54
2.3. Numerikus számítások eredményeinek összehasonlítása	56
2.3.1. A numerikus vizsgálatok célja.....	56
2.3.2. A végeselemes modell.....	56
2.3.3. Téglalap keresztmetszetű gerendák numerikus eredményeinek összehasonlítása	61
2.3.4. Kör keresztmetszetű gerendák numerikus eredményeinek összehasonlítása	66
2.3.5. I keresztmetszetű gerendák numerikus eredményeinek összehasonlítása	70
2.3.6. Vékonyfalú zártszelvény keresztmetszetű gerendák numerikus eredményeinek összehasonlítása.....	73
2.3.7. Statikailag határozatlan gerendák feszültségeinek vizsgálata	76
2.4. Numerikus eredmények tanulságainak összefoglalása	80
3. Szendvics keresztmetszetű gerendák mechanikai vizsgálata	84
3.1. Szendvics keresztmetszetű gerendák bemutatása	84
3.2. Szendvics keresztmetszetű gerendák modelljeinek bemutatása	85
3.2.1. Szendvics keresztmetszetű gerendák mechanikai viselkedése.....	85
3.2.2. Mérnöki szendvicselmélet	86
3.2.3. Timoshenko-elmélet.....	88



3.3. Numerikus számítások eredményeinek bemutatása	93
3.4. Numerikus eredmények tanulságainak összefoglalása	117
4. Anizotrop anyagú gerendák mechanikai vizsgálata	121
4.1. Bevezetés.....	121
4.2. Anizotrop anyagú szerkezetek anyagmodelljei.....	126
4.3. Anizotrop anyagú gerendák vizsgálata	135
4.3.1. Általános anizotrop anyagú konzol vizsgálata	136
4.3.2. Kapcsolt, monoklinális anyagú konzol vizsgálata.....	150
4.3.3. Nem kapcsolt, monoklinális anyagú konzol vizsgálata.....	155
4.4. Anizotrop anyagú gerendák feszültségeinek és elmozdulásainak numerikus vizsgálata. 162	
4.4.1. Általános anizotrop anyagú konzol numerikus vizsgálata.....	162
4.4.2. Kapcsolt monoklinális anyagú konzol numerikus vizsgálata.....	172
4.4.3. Nem kapcsolt monoklinális anyagú konzol numerikus vizsgálata	176
4.5. Anizotrop anyagú gerendák vizsgálatának összefoglalása	179
5. Összefoglalás	181
Irodalomjegyzék	183



Bevezetés

Jelen TDK dolgozat egy **több részből álló sorozat** negyedik tagja. Ezeknek a munkáknak¹ egyik célja, hogy az érdeklődő BSc és MSc építőmérnök hallgatók kiegészíthessék szilárdságtani ismereteiket, átfogó képet kapjanak a szilárdságtan egyetemi tanulmányaik során kevésbé vizsgált, ugyanakkor a gyakorlati mérnöki munka számára fontos témaköreiről. További célunk, hogy elősegítsük, előkészítsük az egyes témakörök más tananyagba való integrálódását².

Munkámban az elemi szilárdságtan egyik alapvető feladatával, egyenes tengelyű és állandó keresztmetszetű **hajlított gerendák lehajlásainak és feszültségeinek vizsgálatával foglalkozom**. Ez egy olyan téma, amely immáron több mint fél évezrede foglalkoztatja a tudósokat és a mérnököket. Jóllehet sok esetben az adott kor legnagyobb elméi vizsgálták ezt a kérdést, és munkájuk eredményeként számtalan különböző modell és megoldási technika született, ennek ellenére a téma még ma sem tekinthető teljesen lezártnak, a kutatások továbbra is aktívan folynak. Ezek a modellek - az általános kontinuummechanikai megközelítéshez képest - bizonyos elhanyagolásokat tartalmaznak, amiknek köszönhetően ugyan a feladatok megoldása egyszerűsödik, azonban ezen egyszerűsítések miatt egy adott mérnöki probléma esetén mindig felvetődik a modell alkalmazhatósági körének kérdése is.

Dolgozatom **célja**, hogy átfogó, **összehasonlító elemzést** adjak a **különböző modellekről**, bemutatva az egyes modellekben alkalmazott elméleti megfontolásokat, egyszerűsítéseket. A modellek elméleti hátterének részleteit, esetleges hiányosságait megismerve **numerikus - végeeselemes - szimulációk** segítségével vizsgálom az egyes modellek alkalmazhatóságát, az eredmények közötti eltéréseket különböző geometria és terhelés esetén, alapvetően azért, hogy kézzelfogható javaslattal szolgáljak az adott helyzetben hatékonyan alkalmazható modellekről.

Munkámat **történelmi áttekintéssel** kezdem. Igyekszem megmutatni, hogy a hajlított gerenda, mint mechanikai fogalom, hogyan alakult ki és fejlődött az évszázadok alatt, és kik voltak azok a nagy tudósok, akik jelentősen hozzájárultak a témakörben megszerzett tudásunkhoz. Ezután röviden megemlítem a gerendák mechanikai viselkedésével kapcsolatos közelmúltbeli és jelenlegi kutatások főbb irányzatait.

Az ezt követő, **második fejezetben** egyenes tengelyű, homogén, **izotrop anyagú gerendákkal** foglalkozom. Először részletesen tárgyalom a lehetséges modellek elméleti hátterét, az analitikus levezetésekén túl külön kitérve az egyes modellekben alkalmazott feltételrendszerekre. Ezt követően konkrét feladatok numerikus vizsgálatára térek rá, mely során összevetem az egyes izotrop gerendamodellekkel kapott eredményeket 3D végeeselemes

¹ - *Vass Viktória*: A Saint-Venant-elv matematikai hátterének bemutatása (2008),
- *Bocskai Zoltán*: Az elemi szilárdságtan csavarási feladatának vizsgálata (2010),
- *Pap Zsuzsa Borbála*: Egyenes, illetve erősen görbült gerendák nyírófeszültségeinek elméleti és numerikus elemzése (2011).

Valamennyi dolgozat letölthető a Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék honlapjáról.

² A lábjegyzetben felsorolt többi munkához hasonlóan ennek a dolgozatnak az eredményei is a BSc/MSc szilárdságtan oktatásban kerülnek felhasználásra.



kontinuummodellek eredményeivel. A numerikus számítások elemzését, értelmezését már az elméleti elhanyagolások ismeretének tükrében végzem el. A fejezetet az eredmények tanulságainak összefoglalásával zárom.

A homogén izotrop anyagú modellek után a **harmadik fejezetben** rétegesen izotrop (**szendvics**) **keresztmetszetű gerendák** mechanikai viselkedésével foglalkozom. Először itt is bemutatom a lehetséges modellek elméleti háttérét, hangsúlyozva a modellek közötti eltéréseket, majd rátérek konkrét feladatok numerikus vizsgálatára. Az eredmények bemutatásakor ezúttal is a különböző modellek és 3D végeleemes szimulációk adta eredmények összehasonlító elemzését végzem el. A fejezetet a kapott eredmények összefoglaló értékelésével zárom.

Dolgozatom **negyedik fejezetében anizotrop anyagú gerendák** mechanikai vizsgálatával foglalkozom. Ez a témakör az utóbbi évtizedekben kiemelt szerepet kapott a nemzetközi kutatásokban. Ennek oka elsősorban a mesterséges anyagok (elsősorban a kompozitok) térnyerése, melyeket különböző területeken (például építőiparban, repülőgép tervezésben) előszeretettel alkalmaznak a legújabb mérnöki problémák megoldására. Ez a témakör a dolgozat írásának időpontjában nem képezi az alapvető egyetemi tananyag részét, ezért a bevezetés után egy részletes elméleti összefoglalással indítok. Először bemutatom az anizotrop anyagok különböző eseteit, hangsúlyozva, hogy az egyes esetekben az anyagi viselkedés - és annak leírási módja - miben különbözik az izotrop anyagokéhoz képest. Ezt követően térek rá a hajlított gerendák vizsgálatára, ahol az egyes anizotrop anyagú esetekre bemutatom a feladat analitikus megoldását. Az olykor meglehetősen bonyolult analitikus módszer csupán néhány speciális esetben vezet egzakt megoldáshoz, ezért röviden kitérek a feladat numerikus megoldásának lehetőségére is. Ezután az előzőekben ismertetett megoldási technikákat konkrét feladatok megoldására alkalmazom, a kapott eredményeket pedig ezúttal is 3D végeleemes szimulációk eredményeivel hasonlítom össze. Az eredmények értékelésekor elsősorban a különböző megoldási módszerek adta eredmények közötti **eltérésekre** fókuszálok. Ezen felül szemléltetem az anizotrop anyagú gerendák viselkedésének sajátosságait, ugyanis az *anyagi szintű rugalmas kapcsolódás* a szerkezetek viselkedésében olyan jelenségekhez vezethet, melyeket korábban az izotrop gerendáknál nem figyelhettünk meg. A fejezet végén összefoglalom az anizotrop gerendák vizsgálatánál tapasztalt legfontosabb tanulságokat.

A dolgozatomat végül egy **összefoglaló fejezettel** zárom, ahol összegyűjtöm a különböző anyagú és felépítésű gerendák mechanikai vizsgálatok tapasztalt legfontosabb tanulságokat. Itt egy rövid értékelést készítek, ahol megemlítem, hogy az adott témakörnél melyek voltak azok a modellek, melyek a leginkább megbízhatónak bizonyultak. Ezen értékelések alapján egy ajánlást fogalmazok meg a modellek adott esetekben történő alkalmazhatóságáról, abban a reményben, hogy a mérnökök (és a leendő mérnökök) ezt az információt hasznosítani tudják jövőbeli munkáik során.



Jelölésrendszer

Ez a két oldal tartalmazza a gerendamodellek bemutatásánál alkalmazott **főbb jelöléseket**. A további - itt nem szereplő - változókat minden esetben külön magyarázom. A történelmi áttekintés során történeti hűségből az eredeti jelöléseket használtam.

Tengelyek

- x - keresztmetszet vízszintes súlyponti tengelye
- y - keresztmetszet függőleges súlyponti tengelye
- z - gerenda hossztengele

Geometriai méretek

- b - keresztmetszet szélességi mérete
- h - keresztmetszet magassági mérete
- L - gerenda (effektív) hossza
- t - kéregréteg falvastagsága
- h_h - magréteg vastagsága

Általános helyzetű pont eltolódásai

- u - eltolódás az x tengely mentén
- v - eltolódás az y tengely mentén
- w - eltolódás a z tengely mentén

Gerenda hossztengeleén fekvő pont eltolódásai

- u_0 - eltolódás az x tengely mentén
- v_0 - eltolódás az y tengely mentén
- w_0 - eltolódás a z tengely mentén

Keresztmetszet elfordulása

- ϕ_x - elfordulás az x tengely körül
- ϕ_y - elfordulás az y tengely körül

- ϕ_z - elfordulás a z tengely körül

Görbületek

- k_z^x - z tengely x irányú eltolódásokból származó görbülete
- k_z^y - z tengely y irányú eltolódásokból származó görbülete

Alakváltozások

- ε_x - x irányú fajlagos nyúlás
- ε_y - y irányú fajlagos nyúlás
- ε_z - z irányú fajlagos nyúlás
- γ_{xy} - xy síkbeli fajlagos szögtorzulás
- γ_{xz} - xz síkbeli fajlagos szögtorzulás
- γ_{zy} - zy síkbeli fajlagos szögtorzulás
- ε_{z0} - semleges tengely fajlagos nyúlása

Feszültségek

- σ_x - x irányú normál feszültség
- σ_y - y irányú normál feszültség
- σ_z - z irányú normál feszültség
- τ_{xy} - x normálisú síkban lévő, y irányú nyírófeszültség
- τ_{xz} - x normálisú síkban lévő, z irányú nyírófeszültség
- τ_{zy} - z normálisú síkban lévő, y irányú nyírófeszültség



- σ_a - kéregben keletkező hosszirányú normálfeszültség
- σ_h - magban keletkező hosszirányú normálfeszültség

Anyagjellemzők

- E - izotrop anyag rugalmassági modulusa
- E_x - rugalmassági modulus x irányban
- E_y - rugalmassági modulus y irányban
- E_z - rugalmassági modulus z irányban
- G - izotrop anyag nyírási modulusa
- G_{yz} - yz síkra jellemző nyírási modulus
- G_{xz} - xz síkra jellemző nyírási modulus
- G_{xy} - xy síkra jellemző nyírási modulus
- ν - izotrop anyag Poisson-tényezője
- ν_{xy} - ε_x és ε_y alakváltozások közötti kapcsolatot leíró Poisson-tényező
- $\nu_{z,xy}$ - ε_z és γ_{xy} alakváltozások közötti kapcsolatot leíró Poisson-tényező
- $\nu_{yz,xz}$ - γ_{yz} és γ_{xz} alakváltozások közötti kapcsolatot leíró Poisson-tényező
- E_a - kéreg rugalmassági modulusa
- E_h - mag rugalmassági modulusa
- G_a - kéreg nyírási modulusa
- G_h - mag nyírási modulusa
- $\underline{\underline{A}}$ - anyagi merevségi mátrix
- $\underline{\underline{C}}$ - anyagi hajlékonysági mátrix
- $\underline{\underline{Q}}$ - redukált anyagi merevségi mátrix

Keresztmetszeti jellemzők

- A - keresztmetszeti terület
- Ω - keresztmetszet kontúrja
- S_x - keresztmetszet x tengelyre vonatkozó statikai nyomatéka
- S_y - keresztmetszet y tengelyre vonatkozó statikai nyomatéka
- I_x - keresztmetszet x tengelyre vonatkozó inercianyomatéka
- I_y - keresztmetszet y tengelyre vonatkozó inercianyomatéka
- I_{xy} - keresztmetszet centrifugális nyomatéka

Terhek

- F - y irányban ható koncentrált erő
- q_y - y irányban ható megoszló erő
- X_b - x irányban ható térfogati erő
- Y_b - y irányban ható térfogati erő
- Z_b - z irányban ható térfogati erő

Feszültségi eredők

- N - normálerő
- V_y - y irányú nyíróerő
- V_x - x irányú nyíróerő
- M_x - x tengely körül forgató hajlítónyomaték
- M_y - y tengely körül forgató hajlítónyomaték

1. Történelmi áttekintés

Ismereteink szerint³ hajlított gerendák vizsgálatával először **Leonardo da Vinci**⁴ foglalkozott. A reneszánsz alatt a tudományok iránti érdeklődés fellendült, sok esetben a kor neves művészei is foglalkoztak építészettel és egyéb mérnöki munkákkal. Így fordulhatott elő, hogy *Leonardo* a gerendák vizsgálatának szentelje ideje egy részét. Ő maga a következőképpen vélekedett erről: *"A mechanika a matematikai tudományok paradicsoma, hiszen itt learatjuk a matematika gyümölcsét"*. *Leonardo* hajlított konzolok vizsgálata közben felismerte, hogy a támasztól legmesszebb lévő rész hajlik le leginkább, valamint, hogy a konzolhossz és a teherbírás között fordított arányosság áll fent. *Leonardo* ezen felül rugók hajlítását is vizsgálta és egy számunkra rendkívül fontos jelenséget fedezett fel:

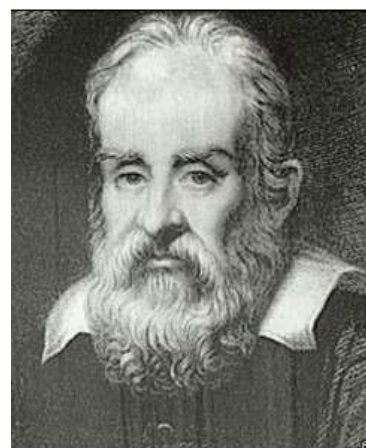


1. ábra Leonardo da Vinci arcképe

"Ha egy rugót meghajlítunk, a konvex rész vékonyabb, a konkáv rész pedig vastagabb lesz. A változás a keresztmetszetben lineáris, és a rugók metszetének súlypontjában lesz mindig zérus..."

Ma ezeket a feljegyzéseket és a hozzá kapcsolódó vázlatokat tekintjük az első megfigyeléseknek egy hajlított rúdelem viselkedésének leírása kapcsán.

A következő tudós, aki gerendák vizsgálatával foglalkozott **Galileo Galilei**⁵ volt. *Galilei* hajlított konzolokkal végzett kísérleteket, melyeket az ő egyik művében⁶ szereplő vázlat szemléltet (3.ábra). Látható, hogy a terhet a "C" pontban a konzolvégen függesztette fel, és így vizsgálta a gerendák határteherbírását. A kísérletek elvégzése után *Galilei* az alábbi megállapításokat tette: *"Tisztán látszik, hogy amikor a gerenda tönkremegy, a repedés a "B" pontban a bevágás szélén jelenik meg, ami egyben a "BC" sík forgáspontja..."*. *Galilei* korábban tiszta húzó kísérleteket is végzett, és az ott tapasztalt határerőt *"abszolút törési ellenállásnak"* nevezte el. A hajlítási



2. ábra Galileo Galilei arcképe

³ A történelmi áttekintés elkészítésekor elsősorban a [1] és [2] alatti művekben fellelhető információra támaszkodtam.

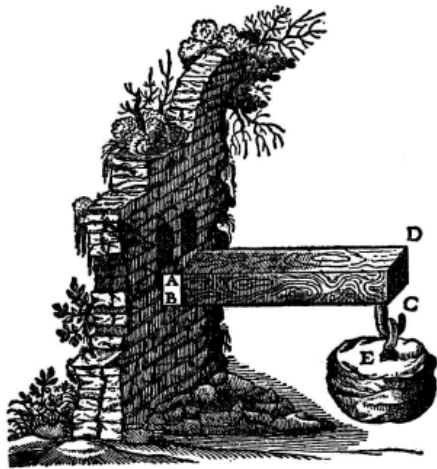
⁴ 1452-1519. Itáliai származású polihisztor, a reneszánsz - és talán az egész emberi történelem - egyik legnagyobb művésze és tudósa volt. Széles körben minden idők egyik legnagyobb festőjének tartják számon, aki a festészetén túl - többek között - szobrászattal, építészettel, matematikával, anatómiával, zeneszerzéssel és költéssel is foglalkozott.

⁵ 1564-1642. Olasz természettudós, aki elsősorban csillagászzal, fizikával és matematikával foglalkozott. Távcsővel végzett csillagászati megfigyeléseit igazi mérföldkönek tartják a tudomány fejlődésében.

⁶ *"Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno á due nuove Scienze (1638)"*



vizsgálatok során nem írt fel hosszirányú egyensúlyi egyenletet, és a függőleges erőket sem vette számítása, hanem azt feltételezte, hogy a falnál a teherbírás kimerülésekor ugyanaz a belső ellenállás keletkezik, mint húzott rudak esetében.



3. ábra Galilei kísérletének vázlata

Galilei ebből adódóan konstans feszültségeloszlással számolt, ezért a mai számításainkhoz képest háromszor akkora teherbírási értéket kapott. Mindennek ellenére abban a korban ezek a megállapítások komoly eredménynek számítottak, és modelljét még sokáig használták a mérnökök, figyelembe véve azt a tényt, hogy ha a gerendák határteherbírásában a képlékeny tartalékot is figyelembe vesszük, akkor a Galilei-modellel és a mai számításokkal kapott határteherbírás értékek között már jóval kisebb különbség lesz. Ezen felül Galilei megvizsgálta, hogy téglalap keresztmetszetek esetén - melyeknek "nagy" szélessége és "kis" vastagsága van - milyen arányt figyelhetünk meg a teherbírásra vonatkozóan akkor, ha a terhelést a

szélességi vagy a vastagsági mérettel párhuzamosan alkalmazzuk. E vizsgálatok eredményeként Galilei még egy számunka nagyon fontos megállapítást tett: *"Bármelyik rúd, amelyiknek szélességi mérete nagyobb mint a vastagsága, nagyobb teherbírásra képes akkor, ha az élére állítjuk, mintha lefektetjük."*

A következő kutató, akit meg kell említenünk, **Edme Mariotte**⁷. Mariotte mechanikai vizsgálatait húzókísérletekkel kezdte. Őt nem csak a rúd szakító-ellenállása érdekelte, hanem odafigyelt a rúd rugalmas tulajdonságaira, és felfedezte, hogy a megnyúlás az alkalmazott erővel arányos. Ezen felül megállapította, hogy a törés akkor következik be, amikor a megnyúlás eléri egy bizonyos határértéket. Mariotte a Versailles-i Palota vízvezetékrendszerének tervezése kapcsán kezdett hajlított gerendák szilárdságával foglalkozni. Kísérleteket végzett, és rájött, hogy Galilei modellje túlbecsüli a teherbírást, ezért kidolgozta saját modelljét. Mariotte a kísérletei alapján Leonardóhoz hasonlóan megfigyelte, hogy a hajlított konzol



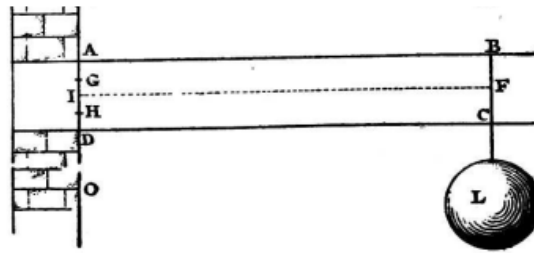
4. ábra Edme Mariotte arcképe

felső részén az elemi szálak hosszabbak, míg alul rövidebbek lesznek. Úgy gondolta, hogy a húzott-nyomott részeket elválasztó sáv a gerenda közepén található. Ennek a gondolatmenetnek a következtében Mariotte a modelljében a felső szálak megnyúlása és az alsó szálak összenyomódása között lineáris feszültségeloszlást feltételezett.

⁷ 1620-1684. Francia fizikus, a Francia Tudományos Akadémia egyik legelső tagja, aki Boyle-tól függetlenül fedezte fel a gázok állapotváltozására vonatkozó törvényt.



Gondolatmenetének megértéséhez vizsgáljunk meg egy $a \cdot h$ méretű téglalap keresztmetszetű konzolt. Jelölje a konzol hosszát l , a konzolvégen alkalmazott koncentrált erőt L , a húzási tesztből származó törési ellenállást pedig S ($S = a \cdot h \cdot \sigma$).



5. ábra Mariotte hajlító kísérlete

Ha *Mariotte* feltételezésének megfelelően lineáris "feszültségeloszlással" számolunk, akkor a "D" pontra felírt nyomatéki egyensúlyi egyenletből az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\frac{2}{3} \frac{S}{2} h = Ll \rightarrow L = \frac{Sh}{3l}. \quad (1.1)$$

Mariotte az előbb ismertetett módszerhez hasonlóan meg akarta határozni a húzott részhez tartozó határerőt, ehhez a nyomatéki egyenletet a keresztmetszet közepére írta fel:

$$L_{\text{húzó}} \cdot l = \frac{S}{2} \frac{2}{3} \frac{h}{2} \rightarrow L_{\text{húzó}} = \frac{Sh}{6l}. \quad (1.2)$$

Egyensúlyi okokból a nyomott rész törési ellenállása is ugyanekkora, a kettő összege pedig megadja a teljes törési határerőt. Megjegyezzük, hogy ha *Mariotte* ebben a levezetésben a szilárdság általa használt $S/2$ -es értékét a felére csökkenti, akkor már a 1600-as évek végén ismerték volna a vizsgált feladat "helyes" eredményét. Ennek ellenére *Mariotte* a húzott és nyomott szálak közötti lineáris változás feltételezésével sokkal járult hozzá a gerendák feszültségvizsgálatában megszerzett tudásunkhoz.

Jacob Bernoulli⁸ nevét a mérnökök a hajlított gerendákkal kapcsolatos vizsgálatairól világszerte ismerik. *Bernoulli* nem a gerendák szilárdságát, hanem az elmozdulásait kezdte vizsgálni. Felhasználta *Mariotte* hipotézisét, miszerint a húzott és nyomott zónákat egy folytonos felület választja el, ezt *Bernoulli* "semleges tengelynek" nevezte el. Vizsgáljuk meg a 7. ábrán az "ABDF"-el jelölt ds hosszúságú elemi tartományt. Ha a hajlítás következtében az AB keresztmetszet az "FD"-hez képest elfordul egy "A" ponton átmenő tengely körül, akkor a szálak hosszváltozása arányos lesz a szálak "A" ponttól mért távolságával. *Bernoulli* felhasználta *Robert E. Hooke* anyagmodelljét, így a húzott szálakban



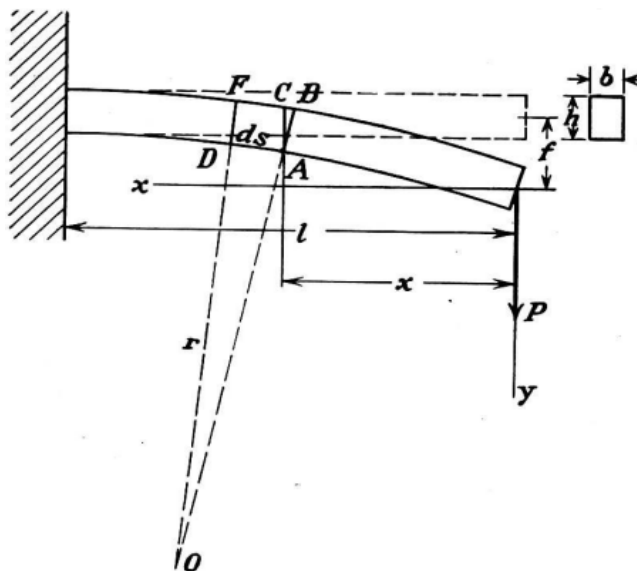
6. ábra Jacob Bernoulli arcképe

⁸ 1654-1705. Svájci matematikus, a híres *Bernoulli* család egyik jeles képviselője, aki - a gerendák mechanikai vizsgálatán kívül - elsősorban a valószínűségszámításban és a szétválasztható változójú differenciálegyenletek témakörében alkotott maradandót.

keletkező eredőjére az alábbi eredményt kapta:

$$\frac{1}{2} \frac{m \Delta ds}{ds} bh, \quad (1.3)$$

ahol "b" és "h" a keresztmetszet méretei, "m" pedig a gerenda rugalmas anyagi tulajdonságaitól függő állandó.



7 ábra Bernoulli cikkében szereplő vázlat

Ezután *Bernoulli* felírta ennek az erőnek a nyomatékát az "A" pontra, és úgy gondolta, hogy ez a nyomaték megegyezik az "x" távolságban lévő "P" erő szintén az "A" pontra vett nyomatékával:

$$\frac{1}{2} \frac{m \Delta ds}{ds} bh \frac{2}{3} h = Px, \quad (1.4)$$

Fentiekből *Bernoulli* a megnyúlt, és az eredeti elemi szálak hosszainak arányára az alábbi megállapítást tette:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{h}{r}, \quad (1.5)$$

így végül az alábbi eredményt kapta:

$$\frac{C}{r} = Px \rightarrow C = \frac{mbh^3}{3}. \quad (1.6)$$

Az elfordulási pont helyének téves felvétele miatt *Bernoulli* végül a "C" konstansra rossz eredményt kapott, de a keresztmetszetek merev lapokként való elfordulásának a gondolata, és a fenti képlet általános alakjának felírása hatalmas előrelépés volt. Ennek köszönhetően a világ mérnökei bármilyen névkombinációban is hivatkozzanak a *klasszikus gerendamodellre*, *Jacob Bernoulli* neve semmiképpen sem hiányozhat.



8. ábra Leonhard Euler arcképe

Jacob unokaöccse, *David Bernoulli*⁹ hívta fel egy másik nagy tudós, **Leonhardt Euler**¹⁰ figyelmét a gerendák mechanikai vizsgálatára. *Euler* nagyra tartotta *Jacob Bernoulli* eredményeit, így az ő munkájára támaszkodva kezdte a gerendák vizsgálatát. Először kiegészítette *Bernoulli* képletét a görbületi sugár helyettesítésével:

$$C \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = Px. \quad (1.7)$$

Tekintve, hogy *Euler* a vizsgálatait nem korlátozta kis elmozdulásokra, így a nevezőben szereplő y' nem hanyagolható el, ezért a feladat igen bonyolulttá válik. *Euler* sorfejtéssel integrálta a fenti egyenletet és kimutatta, hogy ha a konzol elmozdulása kicsi, akkor a "C" paraméterre az alábbi eredményt kapjuk (ahol "f" a konzolvég lehajlása):

$$C = \frac{Pl^2(2l-3f)}{6f}. \quad (1.8)$$

Látható, hogy ha a számlálóban lévő $3f$ tagot elhanyagoljuk, akkor a konzolvég eltolódására már egy ismerős összefüggést kapunk:

$$f = \frac{Pl^3}{3C}. \quad (1.9)$$

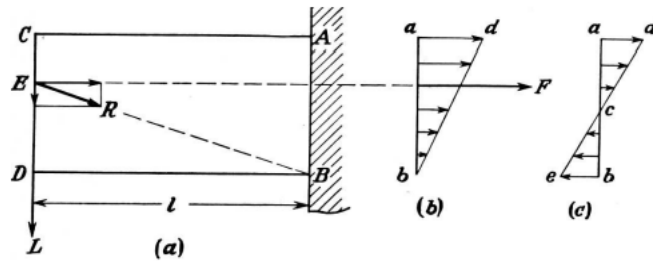
Az alapvetően matematikus *Eulert* nem foglalkoztatta a C paraméter fizikai tartalma, ő maga ezt "abszolút rugalmasságnak" nevezte el, és azt javasolta, hogy kísérleti úton határozzák meg a mérnökök. *Euler* úgy gondolta, hogy ez az érték a keresztmetszet magassági méretének négyzetétől függ.

Antoine Parent¹¹ a következő tudós, akinek nevét és munkásságát feltétlenül meg kell említeni. *Parent* észrevette, hogy *Mariotte* képlete, melyet a négyszög keresztmetszet határerejére vezetett le, kör és körgyűrű esetén nem ad megfelelő értéket. Ezért felülbíráltta *Mariotte* hipotézisét, mely szerint a lineáris erőmegoszlás a konzol talppontjától indul. *Parent* módosítását az alábbi ábra szemlélteti:

⁹ 1700-1782. Svájci matematikus és fizikus. "Hydrodynamica" című könyvében lefektette a folyadékok mechanikájának alapjait. Emellett a valószínűségszámításban és matematikai statisztikában alkotott maradandót.

¹⁰ 1707-1783. Svájci matematikus és fizikus. A matematikatörténet egyik legtermékenyebb és legjelentősebb alakja, aki a matematikán túl mechanikával, folyadékok dinamikájával, optikával, csillagászzal és zeneelmélettel is foglalkozott.

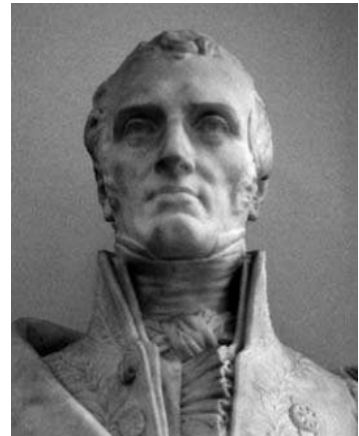
¹¹ 1666-1716. Francia matematikus. Alapvető munkája "Recherches de Mathématique et de Physique" címmel három kötetben jelenet meg Párizsban. Könyve jelentős részét 3D geometriai feladatok alkotják.



9. ábra Mariotte (b) és Parent (c) javaslata

Mariotte elmélete szerint az L és F erők eredőjének át kell menni a B elfordulási ponton. Ezzel szemben Parent azt javasolta, - a mechanika történetében először - hogy a nyomási hatásokat is figyelembe kell venni, így két egyenlő nagyságú háromszögre bontotta az erők megoszlását (9.c ábra). Eredményül a Mariotte által számított érték felét kapta, így ő írta fel **elsőként** a rugalmas feszültségeloszlásra vonatkozó helyes összefüggést.

Az építőmérnökök által egyik legismertebb név, **Henri Navier**¹² következik a sorban. Navier már nem csak konzolokat vizsgált, hanem általánosságban tekintett a hajlított tartók kérdésére. Ő volt az első, aki kimutatta a hajlítás síkjának és a keresztmetszetek főtehetetlenségi irányainak a kapcsolatát. Elfogadta Bernoulli hipotézisét arról, hogy keresztmetszetek sík lapokként fordulnak el és, hogy a rugalmas szálak merőlegesek a metszetre. Navier nem a gerendák határteherbírásával foglalkozott, hanem kifejezetten a rugalmas viselkedésre, a Hooke-modell érvényességi tartományára összpontosított. A metszetre felírt egyensúlyi egyenletekkel igazolta, hogy a semleges tengelynek át kell mennie a keresztmetszet súlypontján, a rugalmassági modulus és a tehetetlenségi nyomaték ismeretében pedig levezette az egyenes hajlításnál ma is használt képletet:



10. ábra Henri Navier arcképe

$$\frac{EI}{\rho} = M \text{ és } EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad (1.9)$$

ahol ρ a görbületi sugar, az x a gerenda hossz tengelyének irányába mutat, $y(x)$ pedig a lehajlásfüggvény.

¹² 1785-1836. Francia építőmérnök és fizikus. A Francia Tudományos Akadémia tagja és a Becsületrend lovagja. Többek között neki köszönhetjük a mai egyetemi sillabuszok szerinti egységes oktatási stílus kidolgozását. Fügőhidak tervezésével és építésével is foglalkozott.



11. ábra Saint-Venant arcképe

A gerendaelmélet fejlődésében *Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant*¹³-nak is elvülhetetlen érdemei vannak. "Nagy összegző" lévén *Saint-Venant* részletesen elemezte *Bernoulli* és *Navier* hipotézisét, és kimutatta, hogy a sík lapként elfordult keresztmetszetek, valamint a tiszta húzó- és nyomófeszültségek kialakulása csak tiszta hajlítás esetén igazak. Rávilágított arra, hogy a keresztmetszetek keresztirányban is torzulnak a *Poisson*-hatásnak megfelelően. *Saint-Venant* ezek után megvizsgálta a nyírófeszültségek hatását, és az ezek következtében bekövetkező keresztmetszeti torzulás mértékét. Ő volt az első, aki elemezte a ferde hajlítás hatását, melyre vonatkozóan kidolgozta az úgynevezett *általános módszert*. Mindezen felül *Saint-Venant* volt az is, aki a gerendák (kis) elmozdulásainak számítására használatos *nyomatéki terhek módszerét* kidolgozta.

Az eddigiekben áttekintettük a *klasszikus gerendaelmélet* kialakulásának legfontosabb állomásait, és láttuk, hogy mennyi idő, és hány kiváló tudós munkája kellett mindehhez. Egyúttal azt is láttuk, hogy *Saint-Venant* rávilágított a *klasszikus elmélet* egyes hiányosságaira, melynek hatására a kutatók folytatták a gerendák mechanikai vizsgálatát, melynek eredményeként új elméletek láttak napvilágot. A következő, gyakorlati számítások során gyakran használt modellre 1921-ig kellett várnia a mérnököknek, amikor is **Stepan Prokopovych Timoshenko**¹⁴ publikálta az úgynevezett **elsőrendű nyírási modelljét** [3,4]. Ebben a modellben *Timoshenko* figyelembe vette a nyírási deformáció hatását¹⁵ azzal a feltételezéssel, hogy a nyírási alakváltozások egyenletesen oszlanak meg a keresztmetszet mentén. Ez a feltételezés nem felel meg a valóságnak és ezzel a ténnyel maga *Timoshenko* is tisztában volt. Az ellentmondás feloldására *Timoshenko* egy ún. *nyírási korrekciós tényezőt*¹⁶ vezetett be, mely figyelembe veszi, hogy a nyírási szögtorzulás nem egyenletes eloszlású a keresztmetszeten. Az egyes keresztmetszetekre jellemző *nyírási korrekciós tényező* ismeretében a *Timoshenko-modell* egy viszonylag egyszerűen használható,



12. ábra Timoshenko arcképe

¹³ 1797-1886. Francia matematikus és mérnök. A Francia Tudományos Akadémia tagja, aki a mechanika számos területén ért el maradandót.

¹⁴ 1878-1972. Ukrán nemzetiségű mérnök, akit a modern mérnöki mechanika atyjának tartanak. Az Ukrán Tudományos Akadémia alapító tagja, a Michigan Egyetem, később pedig a Stanford Egyetem professzora volt.

¹⁵ Valójában már 1859-ben, *Jacques Antoine Charles Bresse* francia tudós [5] alatti művében publikált egy modellt, melyben figyelembe vette a nyírási deformációk hatását, ám ez még nem vált olyan széles körben használt és elfogadott modellé, mint később *Timoshenko* elmélete.

¹⁶ A korrekciós tényező tulajdonképpen nem más, mint egy olyan tényező, mellyel az egyenletes nyírási alakváltozással számolt eredményeket szorozva (vagy osztva) a "pontos" eredményeket kapjuk.



robosztus módszernek bizonyult, melyet a mérnökök még ma¹⁷ is előszeretettel használnak a mindennapos munkájuk során. Tekintve, hogy a mérnökök már lassan egy évszázada használják ezt a modellt, a szakirodalomban olykor a *Bernoulli-Navier*- és a *Timoshenko-modellre* együttesen a "*klasszikus modellek*" gyűjtőnévvel hivatkoznak¹⁸, mely hűen tükrözi a *Timoshenko-modell* megítélését a mérnökök körében.

Annak ellenére, hogy megfelelően megválasztott *korrekciós tényező* esetén az *elsőrendű nyírási modell* használata a gyakorlati számítások során "pontosnak tekinthető" eredményekhez vezet, *Timoshenko modellje* elméleti szempontból továbbra is hibás feltételrendszeren alapul. Ezért a kutatók tovább foglalkoztak a gerendák mechanikai vizsgálatának elméleti kérdéseivel, és az erre vonatkozó kutatások még ma is aktívan folynak. A "*közelmúltbeli*" **törekvések** eredményeként mára számtalan különböző modell született, melyek két nagy csoportba sorolhatók aszerint, hogy a korábban említett két modell mely hiányosságait és alkalmazhatósági korlátait hivatottak feloldani.

A gerendamodellek talán legnépesebb csoportjába azok a **magasabbrendű nyírási modellek** tartoznak, melyek így vagy úgy, - továbbra is **izotrop** anyagú gerendák - **keresztmetszetének deformációit** próbálják minél pontosabban leírni. Ezek a modellek elvetik a *sík keresztmetszetek elvét*, a keresztmetszetek öblösödését pedig olyan - ún. *torzulási függvényekkel* írják le, melyek teljesítik az előírt peremfeltételeket, ebből adódóan a *korrekciós tényező* használatára nincsen szükség. Ide sorolhatók a [6], [7] és [8] alatti cikkekben közölt modellek, melyek egyaránt *harmadrendű polinommal* írják le a keresztmetszetek öblösödését. Némiképp más megközelítéssel dolgoznak azok a modellek, melyek valamilyen trigonometrikus függvénnyel írják le a keresztmetszeti pontok tengelyirányú eltolódásait. Itt említeném meg a [9] cikkben publikált modellt, ahol az elmozdulásmezőt definiáló egyenletekben hiperbolikus függvények szerepelnek. Mivel ezek a modellek már nem támaszkodtak a sík keresztmetszetek elvére, így a keresztmetszeteket a síkjukra merőlegesen már nem tekintették merevnek, azonban a keresztmetszet síkjában történő deformációkat továbbra is elhanyagolták. A keresztmetszet deformációit minél pontosabban leírni próbáló modellek csoportjának sajátos példája a [10] alatt található modell, melyben már a keresztmetszet síkbeli deformációit is figyelembe vehetjük.

A gerendamodellek másik nagy csoportjába azok a modellek sorolhatók, melyek a homogén, izotrop anyagú gerendák mellett ettől **eltérő anyagú** és felépítésű gerendák mechanikai vizsgálatára is alkalmasak. Ide sorolhatók azok a modellek melyek **rétegesen izotrop** (szendvics) **keresztmetszetű gerendák** vizsgálatára születtek. Erre a [11] és [12] alatti művekben találhatunk példákat. Ennek a csoportnak szintén nagyon fontos tagjai azok a modellek, melyek **anizotrop anyagú gerendák** mechanikai vizsgálatára alkalmasak. Ezzel a témakörrel kapcsolatban mindenekelőtt a [13] alatti művet kell megemlíteni, mely általános anizotrop - és ennél speciálisabb (pl. ortotrop) anyagú gerendák - vizsgálatára kínál egy

¹⁷ Ma már leggyakrabban végelelemes számításoknál használjuk ezt a modellt, melynek a klasszikus modellel szemben - a nyírási alakváltozások figyelembevételén túl - fontos előnye, hogy a matematikai finitizálás során C^0 folytonos bázisfüggvények használata is elegendő.

¹⁸ Ennek ellenére ebben a dolgozatban a *Timoshenko-modellre* nem használom a "klasszikus" jelzőt, ezzel egyedül a *Bernoulli-Navier-modell*t illetem.



lehetséges megoldási módot. Egy későbbi [14] alatti forrásban az anizotropia különböző eseteire további lehetséges megoldási módszert találunk, mely általánosabb - rúd hossza mentén változó terhelési - esetben is használható. Fontos megemlíteni, hogy ahol a *Lekhnitskii-megoldás* alkalmazható, ott a két módszer használata ugyanazon eredményekhez vezet. A probléma megoldása általában egy parciális differenciálegyenlet, vagy - az ún. *kapcsolt modellek* esetén - egy differenciálegyenlet-rendszer megoldását igényli, melyre általában csak numerikusan, például a *véges differenciák módszerének* alkalmazásával van lehetőségünk.

A mechanika fejlődésével világossá vált, hogy bizonyos mérnöki problémák¹⁹ leírására az elemi szilárdságtan összefüggései nem alkalmasak. Ez a felismerés vezetett a **rugalmasságtan** és így a **3D kontinuum modellek** kialakulásához. A *kontinuummechanika* máig is tartó intenzív fejlődése a XIX. században kezdődött, amikor *Navier* 1821-ben felírta az *egyensúlyi egyenletek* általános alakját. Ezt hamarosan *Cauchy* eredményei követték, aki az egyes anyagi pontok feszültségállapotát tanumányozta. Ezt követően olyan neves tudósok járultak hozzá a szilárd testek *elmozdulásairól, alakváltozásairól és feszültségeiről* megszerzett tudásunkhoz, mint *Bernoulli, Lord Kelvin, Poisson, Lamé, Green, Saint-Venant, Betti, Airy, Kirchhoff, Lord Rayleigh, Love, Timoshenko, Kolosoff, Muskhelishvili* és még sokan mások. Kutatásaik során számtalan analitikus megoldás született, melyek specifikusan egy adott probléma²⁰ pontosabb vizsgálatát tették lehetővé. A XX. század második felében a *numerikus módszerek* (kiváltképp a **végeselem módszer**) megjelenése tágabb problémakör vizsgálatát tette lehetővé, így forradalmasította a *kontinuummodellek* használatát a mindennapi mérnöki gyakorlatban. A *kontinuummechanika* egy érdekes fejlesztési irányzatát az ún. *magasabbrendű kontinuumok* képviselik²¹, melyeknél - a *klasszikus kontinuummodellel* ellentétben - az egyes pontok az eltolódási szabadságfokok mellett további, pl. elfordulási szabadságfokokkal is rendelkeznek²².

¹⁹ Ide sorolhatók a lokális hatásoknak köszönhetően kialakuló feszültségkoncentrációk, illetve azok a feladatok, amelyeknél a szilárd test méretei minden irányban azonos nagyságrendbe esnek.

²⁰ Itt érdemes példaként megemlíteni *Airy-feszültségfüggvény* használatán alapuló *tárcsa-megoldását*, mellyel pontosabban számíthatjuk a tárcsákban keletkező feszültségeket. A *tárcsákra* kidolgozott *feszültségfüggvényes* eljárás egyúttal rámutat a *klasszikus gerendamodell* egyes hiányosságaira. Ebben a dolgozatban kifejezetten a *gerendamodellek* eredményeit hasonlítom össze a 3D kontinuummodellek "pontosnak" feltételezett - végeselemes számítással kapott - eredményeivel, így a tárcsafeladat vizsgálatától jelen keretek között eltekintek. Ennek ellenére az anizotrop gerendák rugalmasságtani vizsgálatokor szükség lesz *feszültségfüggvények* alkalmazására.

²¹ Ide sorolható például a *Cosserat-kontinuum* és a *Mindlin-kontinuum*.

²² Ezeket a modelleket gyakran az inhomogenitások leírására használják. Jelen dolgozat keretei között kizárólag homogén gerendákkal foglalkozom, így a továbbiakban elfogadom a *klasszikus kontinuummechanika* feltételezéseit.

2. Izotrop anyagú gerendák mechanikai vizsgálata

Ebben a fejezetben **egyenes tengelyű, homogén, izotrop** anyagú hajlított **gerendákkal** foglalkozom. Először bemutatom az izotrop gerendamodellek elméleti hátterét, majd az egyes modellekkel kiszámítom egy koncentrált erővel terhelt konzol analitikus megoldását. Az így kapott értékeket 3D *végeselemes szimulációk* eredményeivel hasonlítom össze. A fejezetet a modellek összefoglaló értékelésével zárom.

2.1. Izotrop anyagú gerendák modelljeinek elméleti bemutatása

Ma a - klasszikus kontinuummechanikára épülő - gerendaelméletek három alapvető típusát különböztetjük meg. Az **első csoportba** a **klasszikus gerendaelmélet** tartozik, melyben az alakváltozástenzor elemi közül csak a hosszirányú megnyúlást - ε_z - vesszük figyelembe. A keresztirányú nyírási alakváltozásokat - γ_{zy}, γ_{zx} - elhanyagoljuk, így azt feltételezzük, hogy a keresztmetszeti síkok, melyek a referenciatengelyre kezdetben merőlegesek voltak, a terhelés után is síkok maradnak, és merőlegesek lesznek a deformált tengelyre. Mindezek hatására ebben az elméletben csak egy függő változónk van. A **második csoportba** a **nyírási gerendamodellek** tartoznak. Ide soroljuk *Timoshenko elsőrendű nyírási modelljét, a harmadrendű- és a magasabb rendű nyírási modelleket, a réteges ("szendvics") gerendák nyírási modelljét*, stb. Ezek a modellek figyelembe veszik a keresztirányú nyírási alakváltozásokat - γ_{zy}, γ_{zx} - és így a keresztmetszetek síkra merőleges torzulását, vagyis a keresztmetszeti pontok síkra merőleges irányú kitérését, melyet a keresztmetszet öblösödésének nevezünk. *Timoshenko* modelljében két függő változónk van, míg a *magasabb rendű modellek* esetén három vagy több függő változóval van dolgunk. A gerendamodellek **harmadik csoportját** a **háromdimenziós gerendamodellek** alkotják, melyek a síkbeli, és a síkra merőleges keresztmetszeti torzulást is figyelembe veszik. A keresztmetszetek síkbeli torzulása a keresztirányú (normál) alakváltozások - $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ - és a síkbeli nyírási szögtorzulás - γ_{xy} - következtében jön létre. Ezeknek az alakváltozásoknak megfelelően keresztirányú normálfeszültségek - σ_x, σ_y - és síkbeli nyírófeszültség - τ_{xy} - alakulnak ki, vagyis a *háromdimenziós gerendaelméletek* a teljes térbeli feszültségállapot modellezésére alkalmasak. Az alakváltozásoknak és a feszültségeknek a vizsgálatához még több változóra van szükségünk, ezért a *végeselem-módszer* segítségével általában csak numerikusan oldjuk meg az ilyen típusú feladatokat. A továbbiakban az egyes modellek elméletének részletes bemutatásával foglalkozom.

2.1.1. Klasszikus gerendamodell elmélete

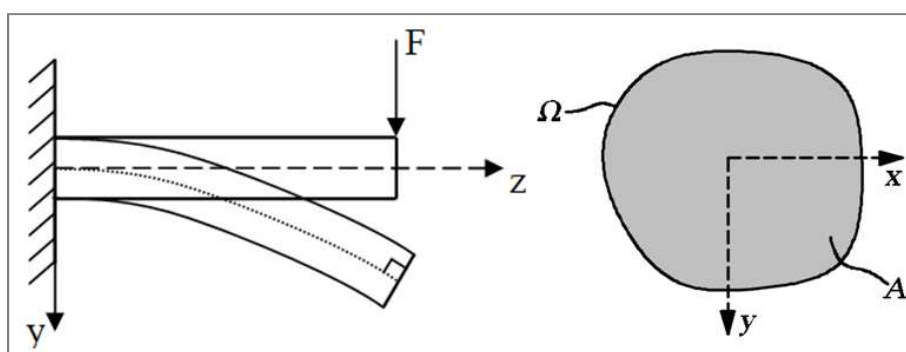
A **klasszikus gerendamodell** elméleti hátterének bemutatását egy általános - kontinuummechanikai megközelítésű - levezetéssel kezdem²³. Általános statikus terhelési

²³ A klasszikus gerendamodell elméleti hátterének bemutatásakor elsősorban a [10] és [15]-ös művekben található levezetésekre támaszkodom

esetre bemutatom a *klasszikus elméletnél* alkalmazott elmozdulásmezőt, az ebből származtatott alakváltozásokat és feszültségeket, utána pedig rátérek az egyenes hajlítással egyidejű nyírás hatásának vizsgálatára. A levezetéseket a kis elmozdulások (és alakváltozások) tartományára korlátozom.

A *klasszikus gerendaelmélet* alkalmazásakor kezdetben három közelítést, elhanyagolást teszünk:

- a **keresztmetszeteket** a síkjukban végtelenül **merevnek** tekintjük,
- a keresztmetszetek elfordulnak a semleges tengely (felület) körül, és az elfordulás után is **síkok** maradnak,
- a keresztmetszetek a deformált állapotban is **merőlegesek** maradnak a semleges tengelyre.



2.1 ábra Hajlított konzol viselkedése a Bernoulli-Navier-féle kinematikai feltevések alapján²⁴

Az **első feltevés** szerint a keresztmetszetek nem deformálódnak a síkjukban, ezért a síkbeli elmozdulás komponensek - u és v - csak a keresztmetszetek hosszirányú koordinátájától függhetnek:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} u(x, y, z) = u_0(z), \\ v(x, y, z) = v_0(z). \end{cases} \quad (2.1)$$

A **második feltevésből** - mely szerint a keresztmetszetek síkok maradnak - következik, hogy a keresztmetszeti pontok síkra merőleges (vagyis hosszirányú) eltolódás komponensének nagysága lineárisan függ a síkbeli koordinátáktól:

$$w(x, y, z) = w_0(z) - \phi_y(z)x + \phi_x(z)y. \quad (2.2)$$

A **harmadik feltétel** következtében a nyírási alakváltozásokat - γ_{zy} és γ_{zx} - elhanyagoljuk:

²⁴ Munkámban kizárólag a hajlítással egyidejű nyírás esetével foglalkozom. A levezetések során azzal a feltételezéssel élek, hogy a koncentrált erő hatásvonala áthalad a keresztmetszet nyírási középpontján.



$$\gamma_{zy} = \gamma_{zx} = 0. \quad (2.3)$$

Ebből következik, hogy a fenti (2.1)-es egyenletek segítségével az elfordulások kifejezhetők a síkbeli elmozdulások deriváltjaként:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \phi_y + \frac{du_0}{dz} = 0 \\ \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \phi_x + \frac{dv_0}{dz} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_y = -\frac{du_0}{dz}, \\ \phi_x = -\frac{dv_0}{dz}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ezek után az **elmozdulásmező** az alábbi alakot ölti:

$$u = u_0, \quad (2.5a)$$

$$w = w_0 - \frac{du_0}{dz}x - \frac{dv_0}{dz}y, \quad (2.5b)$$

$$v = v_0. \quad (2.5c)$$

Matematikai nézőpontból a *klasszikus gerendamodellben* alkalmazott elmozdulásmező egy *MacLaurin-féle sorfejtésnek* is tekinthető, ahol a síkbeli elmozduláskomponenseknél nulladrendű közelítést, a tengelyirányú elmozduláskomponenseknél pedig elsőrendű közelítést alkalmazunk. Ezen felül megállapíthatjuk, hogy - általános terhelési esetben - az elmozdulásmező *három* ismeretlen változót tartalmaz.

A gerenda elmozdulásaira tett megkötéseink, elhanyagolásaink következtében az **alakváltozás**-komponensek közül egyedül a tengelyirányú nyúlások különböznek nullától. A hosszirányú alakváltozást a következőképpen írhatjuk fel:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw_0}{dz} - \frac{d^2u_0}{dz^2}x - \frac{d^2v_0}{dz^2}y = \varepsilon_{z0} + k_z^x x + k_z^y y, \quad (2.6)$$

ahol ε_{z0} a semleges tengely fajlagos nyúlása, k_z^x és k_z^y pedig a görbületek, melyek - kis elmozdulások esetén - az eltolódások második deriváltjaként számíthatók.

A σ_z hosszirányú normál **feszültség** az ε_z tengelyirányú alakváltozásból származtatható a *Hooke-modell* segítségével:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\left(\varepsilon_{z0} + k_z^x x + k_z^y y\right), \quad (2.7)$$

ahol E a gerenda anyagának rugalmassági modulusa.

A **feszültségi eredőket** a feszültségek keresztmetszeti területen történő integrálásával kaphatjuk meg. Például a normálerőt az alábbi módon számíthatjuk:



$$N(z) = \int_A \sigma_z dA = \int_A E(\varepsilon_{z0} + k_z^x x + k_z^y y) dA = E \left(\varepsilon_{z0} \int_A dA + k_z^x \int_A x dA + k_z^y \int_A y dA \right) = E(\varepsilon_{z0} A + k_z^x S_y + k_z^y S_x). \quad (2.8)$$

ahol S_x és S_y a statikai nyomatékokat jelölik. Hajlítással egyidejű nyírás esetén természetesen $N(z) = 0$, vagyis a hosszirányú feszültségek hosszirányú vetületi értelemben egyensúlyi erőrendszert kell, hogy alkossanak. Ezt az alábbi egyenlet fejezi ki:

$$\int_A \sigma_z dA = 0. \quad (2.9)$$

Tekintve, hogy tiszta egyenes hajlítás - és kis elmozdulások - esetén ε_{z0} , valamint k_z^x és k_z^y görbületek közül az egyik, (például k_z^x) a nullával egyenlő, így a normálfeszültségekre vonatkozó (2.7)-es összefüggés az alábbi képletre redukálódik:

$$\sigma_z = E k_z^y y. \quad (2.10)$$

A (2.10)-as egyenlet (2.9)-es egyenletbe való behelyettesítésével alábbi összefüggést kapjuk:

$$k_z^y \int_A y dA = k_z^y S_x = 0. \quad (2.11)$$

Amennyiben a *triviális megoldástól* eltekintünk (vagyis a görbület nem nulla), - a fenti összefüggés alapján - a statikai nyomaték kell, hogy nullára adódjon. Ez azt jelenti, hogy a keresztmetszet *semleges tengelyre* vonatkozó statikai nyomatéka kell, hogy zérus legyen, ennek pedig az a következménye, hogy a semleges tengely egybeesik a keresztmetszet súlyponti x tengelyével!

Ezek után a feszültségek nyomatéki eredőjét - továbbra is általános terhelési esettel számolva - egy területintegrállal határozhatjuk meg az alábbi módon:

$$M_x(z) = - \int_A \sigma_z y dA = - \int_A E(\varepsilon_{z0} + k_z^x x + k_z^y y) y dA = -E \left(\varepsilon_{z0} \int_A y dA + k_z^x \int_A xy dA + k_z^y \int_A y^2 dA \right) = -E(\varepsilon_{z0} S_x + k_z^x I_{xy} + k_z^y I_x), \quad (2.12)$$

ahol S_x a keresztmetszet x tengelyre vonatkozó statikai nyomatéka, valamint I_{xy} a centrifugális-, és I_x pedig a keresztmetszet hajlítási inercianyomatéka. Hasonlóképpen az y tengely körül forgató nyomaték is meghatározható:

$$M_y(z) = \int_A \sigma_z x dA = \int_A E(\varepsilon_{z0} + k_z^x x + k_z^y y) x dA = E \left(\varepsilon_{z0} \int_A x dA + k_z^x \int_A x^2 dA + k_z^y \int_A xy dA \right) = E(\varepsilon_{z0} S_y + k_z^x I_y + k_z^y I_{xy}). \quad (2.13)$$



Amennyiben tiszta, egyenes - például x tengely körüli - hajlítással van dolgunk, akkor a fenti (2.10)-es és (2.12)-es egyenleteket összevonva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$M_x(z) = -E \int_A \varepsilon_z y \, dA = -EI_x k_z^y \rightarrow k_z^y = -\frac{M_x(z)}{EI_x}. \quad (2.14)$$

A (2.8)-as, (2.12)-es és (2.13)-as egyenleteket mátrix formában is felírhatjuk:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ -M_x \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & S_y & S_x \\ S_y & I_y & I_{xy} \\ S_x & I_{xy} & I_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{z0} \\ k_z^x \\ k_z^y \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

ahol:

$$\underline{\underline{I_A}} = \begin{bmatrix} A & S_y & S_x \\ S_y & I_y & I_{xy} \\ S_x & I_{xy} & I_x \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

a keresztmetszet *másodrendű inerciamátrixa*.

A (2.8)-as, (2.12)-es és (2.13)-as egyenletek nagyban leegyszerűsödnek, ha referenciarendszernek a keresztmetszet x_c és y_c *főtengelyeit* használjuk. Ekkor az egyenletrendszer olyan alakot ölt, amelynél az *inerciamátrix* diagonális szerkezetű:

$$\begin{bmatrix} N_C \\ M_{y_c} \\ -M_{x_c} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_c} & 0 \\ 0 & 0 & I_{x_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{z_c 0} \\ k_{z_c}^x \\ k_{z_c}^y \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Ebből a *hossztengelyirányú alakváltozás* és a *görbületek* kifejezhetők az igénybevételek függvényében az alábbi módon:

$$\varepsilon_{z_c 0} = \frac{N_C}{EA}, \quad (2.18a)$$

$$k_{z_c}^x = \frac{M_{y_c}}{EI_{y_c}}, \quad (2.18b)$$

$$k_{z_c}^y = -\frac{M_{x_c}}{EI_{x_c}}. \quad (2.18c)$$

A hosszirányú normálfeszültségek az igénybevételekből - általános terhelési esetben - a következő módon számíthatók:



$$\sigma_z = \frac{N_C}{A} + \frac{M_{y_c}}{I_{y_c}} x - \frac{M_{x_c}}{I_{x_c}} y. \quad (2.19)$$

Tiszta egyenes hajlítás esetén természetesen a *Bernoulli-Navier-képlethez* jutunk:

$$\sigma_z = -\frac{M_{x_c}}{I_{x_c}} y. \quad (2.20)$$

Ezek után - egyfajta következtetésképpen - felírhatjuk azokat a **differenciálegyenleteket**, melyek a keresztmetszetek elfordulását és eltolódásait jellemzik:

$$\frac{d^2 u_{C0}}{dz^2} = \frac{M_{y_c}}{EI_{y_c}}, \quad (2.21a)$$

$$\frac{d^2 v_{C0}}{dz^2} = -\frac{M_{x_c}}{EI_{x_c}}, \quad (2.21b)$$

$$\phi_{y_c} = -\frac{du_{C0}}{dz}, \quad (2.21c)$$

$$\phi_{x_c} = -\frac{dv_{C0}}{dz}. \quad (2.21d)$$

Eddig megismertük a *klasszikus modell* alapfeltevéseit, és ezek következményeit az elmozdulások, alakváltozások, feszültségek és igénybevételek vizsgálatában. Most térjünk át arra a speciális esetre, amit a numerikus példánál is vizsgálni fogunk, nevezetesen az egyenes **hajlítással egyidejű nyírás** témakörére. Levezetéseinket továbbra is a kis elmozdulások tartományára korlátozzuk, így az u és v elmozdulások egymástól függetlenek.

Az előbb említett feltételek esetén a hajlított gerenda hossz tengelyén fekvő pontok tengelyirányú eltolódását elhanyagoljuk, vagyis:

$$w_0(z) = 0. \quad (2.22)$$

Jelen esetben a gerenda hossz tengelyén lévő pontok csak y irányban képesek eltolódní. Ekkor a rúdtengely irányú eltolódások mellett a gerendatengelyen fekvő pontok hossz tengelyirányú - membrán jellegű - alakváltozását is elhanyagoljuk:

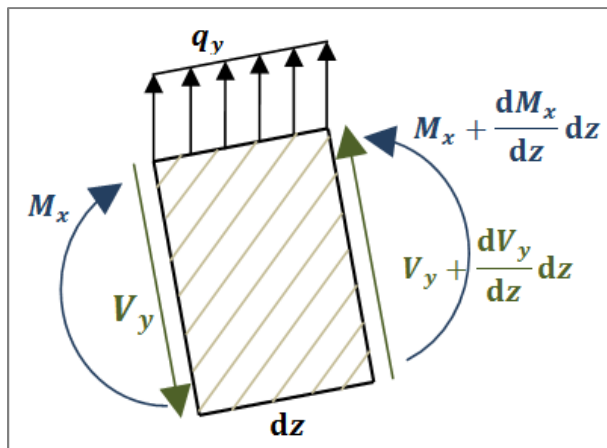
$$\varepsilon_{z0} = 0. \quad (2.23)$$

Ha megvizsgáljuk egy dz hosszúságú gerenda elem y irányú vetületi egyensúlyát, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{dV_y}{dz} dz \cos \phi_x + q_y dz = 0, \quad (2.24)$$

ahol q_y a gerendára ható függőleges megoszló teher intenzitása. A nyíróerőt a τ_{zy} feszültségek keresztmetszeti területen történő integrálásával határozhatjuk meg:

$$V_y = \int_A \tau_{zy} dA. \quad (2.25)$$



2.2 ábra A belső erők alakulása és az elemi hosszúságú gerendaelem deformációi a klasszikus gerendamodellel szerint

A dz hosszúságú gerendaelem x tengely körüli nyomatéki egyensúlyát a következő egyenlettel fejezhetjük ki:

$$\frac{dM_x}{dz} dz + \frac{1}{2} V_y dz + \frac{1}{2} \left(V_y + \frac{dV_y}{dz} dz \right) dz = 0, \quad (2.26)$$

ahol az M_x nyomaték ezúttal is a (2.12)-es összefüggéssel határozható meg.

Mivel vizsgálatainkat a kis elmozdulások tartományára korlátozzuk, így a következő egyszerűsítést alkalmazhatjuk:

$$\cos \phi_x \approx 1. \quad (2.27)$$

Ezen felül a nyomatéki egyensúlyi egyenletből elhagyhatjuk a magasabb rendű tagot:

$$\frac{1}{2} \frac{dV_y}{dz} dz^2 \approx 0, \quad (2.28)$$

így az egyensúlyi egyenletek az alábbi egyszerű alakot öltik:

$$\frac{dV_y}{dz} + q_y = 0, \quad (2.29a)$$

$$\frac{dM_x}{dz} + V_y = 0. \quad (2.29b)$$



Ha a nyíróerőt kifejezzük a (2.29b) egyenletből, és visszahelyettesítjük a (2.29a) egyenletbe, akkor a következő összevont **egyensúlyi egyenletet** kapjuk:

$$-\frac{d^2 M_x}{dz^2} + q_y = 0. \quad (2.30)$$

Egyenes hajlítással egyidejű nyírás esetén a vizsgált keresztmetszet egy tetszőleges pontjának **eltolódáskomponensei** az alábbi módon határozhatók meg:

$$w = -y \frac{dv_0}{dz}; \quad v = v_0; \quad u = 0. \quad (2.31)$$

A lineáris geometriai egyenleteket felhasználva az **alakváltozásmező** meghatározására a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -y \frac{d^2 v_0}{dz^2}; \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_x = \gamma_{zx} = \gamma_{yx} = 0. \quad (2.32)$$

Az így kapott alakváltozásmező nyilvánvalóan **hibás** már kis elmozdulások esetén is. Például az ε_y és ε_x keresztirányú alakváltozások a *Poisson-hatásnak* megfelelően még akkor sem lehetnek zérus értékűek, ha a gerendára nem hat keresztirányú terhelés. Ezt az ellentmondást jól szemlélteti, hogy ha a fenti - $\varepsilon_y = \varepsilon_x = 0$ - egyenletet behelyettesítjük az izotrop anyagmodell kapcsolati összefüggéseibe:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

akkor a hosszirányú normál feszültségekre az alábbi - hibás - összefüggést kapjuk:

$$\sigma_z = E \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \varepsilon_z. \quad (2.34)$$

Amennyiben az előzőek helyett a $\sigma_x = \sigma_y = 0$ közelítéssel számolunk, akkor a (2.33)-as kapcsolati egyenletekbe való behelyettesítés után az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = -Ey \frac{d^2 v_0}{dz^2}, \quad \tau_{zy} = 0. \quad (2.35)$$



Ezt behelyettesítve a (2.12)-es egyenletbe, az $M_x(z)$ nyomatékra a következő kifejezés adódik:

$$M_x(z) = \int_A E \frac{d^2 v_0}{dz^2} y^2 dA = EI_x \frac{d^2 v_0}{dz^2}. \quad (2.36)$$

Ezt az összefüggést a (2.30)-as, majd a (2.29b) egyensúlyi egyenletbe behelyettesítve az alábbi eredményre jutunk:

$$-\frac{d^2 \left(EI_x \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right)}{dz^2} + q_y = 0, \quad (2.37a)$$

$$\frac{d \left(EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} \right)}{dz} + V_y = 0. \quad (2.37b)$$

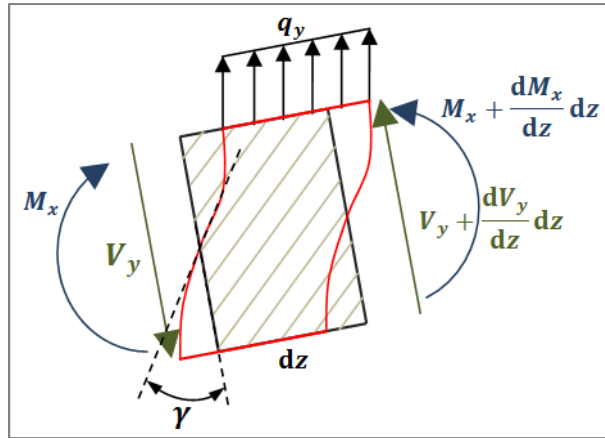
A (2.34)-es összefüggés mellett további ellentmondást is felfedezhetünk a levezetésben. A (2.35)-ös kifejezésben szereplő $\tau_{zy} = 0$ **eredmény is helytelen**, hiszen ha ezt behelyettesítjük a (2.25)-ös egyenletbe, akkor a nyíróerő zérusra adódik, ami nyilvánvalóan nem elégíti ki a (2.29)-es egyensúlyi egyenleteket.

Az említett inkonzisztenciák azokból a feltételezésekből származnak, amelyeket a *klasszikus gerendamodell* bevezetésénél tettünk. A nyíróerő jelenléte következtében nyírófeszültségek is keletkeznek ($\tau_{zy} \neq 0$), ez pedig **nyírási alakváltozással** jár ($\gamma_{zy} \neq 0$). A nyírási alakváltozás a gerenda felületén zérus, valamint feltételezésünk szerint a maximális értékeket a referenciatengelynél veszi fel. Mindez a keresztmetszet **öblösödéséhez** vezet, ami ellentmond a *klasszikus gerendaelméletnél* tett feltételezéseinknek. Hajlítással egyidejű nyírás esetén a **keresztmetszetek nem** maradnak **síkok**, és **nem is merőlegesek** a gerenda deformált hossz tengelyére. Az ellentmondások feloldására a kutatók számos, nyírási deformációt is figyelembevevő gerendamodellt hoztak létre, a következőkben ezen modellek elméleti hátterének elemzésével foglalkozom.

2.1.2. Nyírási alakváltozást figyelembevevő 2D gerendamodellek általános bemutatása

A gerendamodellek második nagy csoportjába az ún. **2D nyírási gerendamodellek** tartoznak, amelyek - a *klasszikus gerendamodellel* ellentétben - **figyelembe veszik** a keresztmetszetek **síkra merőleges torzulását - öblösödését** -, azonban a **Poisson-hatás** miatt létrejövő síkbeli torzulást már **nem képesek kezelni**. A következőkben vizsgáljuk meg, hogy a *kétdimenziós nyírási modellek* hogyan - mely paraméterek bevezetésével - képesek a *nyírási alakváltozás* hatását figyelembe venni.

Jelen esetben is feltételezzük, hogy a gerendatengelyen fekvő pontok hosszirányú eltolódása és alakváltozása elhanyagolható, vagyis a (2.22)-es és (2.23)-as feltétel most is fennáll.



2.3 ábra A belső erők alakulása és az elemi hosszúságú gerendaelem deformációi a nyírási alakváltozás figyelembevételével

A **nyírási alakváltozás** hatását két új változó bevezetésével vehetjük figyelembe²⁵. A vizsgált keresztmetszet x tengely körüli **nyírási elfordulásának** jellemzésére szolgáló változót $\gamma(\mathbf{z})$ -vel, a keresztmetszeti pontok síkra merőleges eltolódásainak arányát jellemző **nyírási öblösödési függvényt** pedig $g(\mathbf{y})$ -nal jelöljük. Ekkor az **elmozdulásmező** az alábbi összefüggésekre módosul:

$$w = -y \sin \phi_x + \gamma g \cos \phi_x; v = v_0 - y(1 - \cos \phi_x) + \gamma g \sin \phi_x; u = 0. \quad (2.38)$$

Most is felhasználjuk a kis alakváltozásoknál alkalmazott közelítéseket:

$$\sin \phi_x \approx \phi_x; \cos \phi_x \approx 1; \frac{dv_0}{dz} \approx \phi_x. \quad (2.39)$$

Ezeket behelyettesítve a fenti, (2.38)-as egyenletekbe - és ezúttal is elhanyagolva a nemlineáris tagokat - a következő összefüggéseket kapjuk:

$$w = -y \frac{dv_0}{dz} + g \gamma; v = v_0; u = 0. \quad (2.40)$$

Látható, hogy ezekben az egyenletekben a (2.31)-es képletekhez képest az újdonság a $g\gamma$ tag jelenléte, ami figyelembe veszi a keresztmetszetek nyírásból származó elfordulását és öblösödését. Ezek után a lineáris geometriai egyenleteket felhasználva az alábbi **alakváltozásokat** kapjuk:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -y \frac{d^2 v_0}{dz^2} + g \frac{d\gamma}{dz}; \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{dg}{dy} \gamma; \varepsilon_y = \varepsilon_x = \gamma_{zx} = \gamma_{yx} = 0. \quad (2.41)$$

Statikus esetben az egyensúlyi egyenletek formailag ugyanazt az alakot öltik, melyeket a *klasszikus gerendamodellnél* is már megfigyelhettünk:

²⁵ A nyírási gerendamodellek általános bemutatásakor a [15]-ös könyben található változókat és levezetéseket vettem alapul.



$$-\frac{d^2 M_x}{dz^2} + q_y = 0; \quad \frac{dM_x}{dz} + V_y = 0. \quad (2.42)$$

Mint láttuk, itt a fő **különbség** - a *klasszikus gerendamodellhez* képest - az elmozdulásmezőt és az alakváltozásmezőt leíró (2.40)-es és (2.41)-es összefüggésekben megjelenő - *nyírási alakváltozásokat* figyelembe vevő - **plusz tagok** voltak. A **feszültségek** származtatása ennek megfelelően - a *Hooke-modell* felhasználásával - a következőképpen történhet:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = -E \left(y \frac{d^2 v_0}{dz^2} - g \frac{d\gamma}{dz} \right), \quad \tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G \frac{dg}{dy} \gamma. \quad (2.43)$$

Ha bevezetjük az alábbi jelölést:

$$V_{zx} = \int_A E y g \, dA, \quad (2.44)$$

és felhasználjuk a nyomatékra már ismert (2.12)-es összefüggést, akkor a feszültségek behelyettesítésével a nyomatéki igénybevételre az alábbi képletet kapjuk:

$$M_x = EI_x \frac{d^2 v_0}{dz^2} - V_{zx} \frac{d\gamma}{dz}. \quad (2.45)$$

Ezt behelyettesítve a (2.42)-es egyenletek közül az elsőbe, akkor az összevont **egyensúlyi egyenlet** az alábbi alakot ölti:

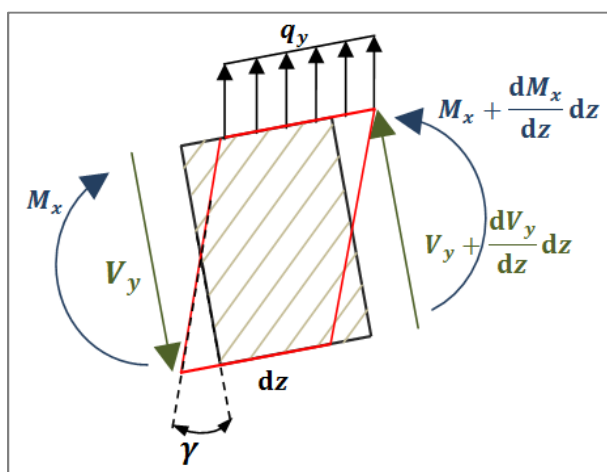
$$\frac{d^2 \left(EI_x \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right)}{dz^2} - \frac{d^2 \left(V_{zx} \frac{d\gamma}{dz} \right)}{dz^2} - q_y = 0. \quad (2.46)$$

A levezetéseket látva levonhatjuk azt a következtetést, hogy a *klasszikus gerendamodellnél* látott inkonzisztenciák egy részét a *kétdimenziós nyírási modelleknek* sikerült feloldani. Jelen esetben τ_{zy} **nyírófeszültségre** - hajlítással egyidejű nyírás esetén - már **nem zérus** értéket kapunk, így megfelelően megválasztott $\gamma(z)$ és $g(y)$ függvényekkel a nyírófeszültségek keresztmetszeti területen történő integrálásával megkaphatjuk a V_y nyíróerő helyes értékét. Megjegyzem, hogy a σ_z hosszirányú normálfeszültségek számításában már figyelembe vettük a nyírási alakváltozásokat - ahogy a (2.43)-as összefüggés mutatja -, így pontosabb értéket kapunk, mint a *Bernoulli-Navier-modell* esetén. Az alakváltozásmező azonban elméleti szempontból még mindig hibás. A keresztirányú normál alakváltozások - ε_y és ε_x - még mindig zérus értékkel szerepelnek, vagyis a **Poisson-hatás elhanyagolása** még ezen modellek esetén is fennáll. Eddig a *kétdimenziós nyírási modelles család* általános levezetését ismerttettem, azonban a $\gamma(z)$ és $g(y)$ változók különböző megválasztásával többféle modellhez jutunk, amelyek eltérő pontossággal képesek egy-egy feladat megoldására. A következőkben - az

eddigyi levezetésekre és megállapításokra támaszkodva - bemutatom az egyes nyírási modellek sajátosságait.

2.1.3. Timoshenko gerendamodell elmélete

A **Timoshenko-modell** abban különbözik a *klasszikus gerendamodelltől*, hogy az ott felsorolt harmadik egyszerűsítéstől most eltekintünk, vagyis a keresztmetszeteket a síkjukban most is végtelenül merevnek tekintjük, és a semleges tengely körüli elfordulásuk következtében a **keresztmetszetek** továbbra is síkok maradnak, viszont a deformáció után már **nem** lesznek **merőlegesek** a semleges tengelyre.



2.4 ábra A belső erők alakulása és az elemi hosszúságú gerendaelem deformációi lineáris öblösödési függvény esetén

A *Timoshenko-modell* elméleti háttérének ismertetését ezúttal is egy általános, terhelési eset vizsgálatával kezdem. Bemutatom az ebben a modellben használatos elmozdulásmezőt, és levezetem az ebből származtatható alakváltozás-komponenseket és feszültségkomponenseket. Rávilágítok a *Bernoulli-Navier-modell* és a *Timoshenko-modell* közötti hasonlóságokra, és felhívom a figyelmet a fő különbségekre. Ezek után pedig rátérek az egyenes hajlítással egyidejű nyírás esetére, majd megmutatom, hogy a *Timoshenko-modell* milyen $g(y)$ és $\gamma(z)$ paraméterekkel dolgozik, és azok hogyan határozhatók meg.

A fent említett kinematikai feltételezések alapján az **elmozdulásmező** formailag megegyezik a *klasszikus modellnél* látottakkal:

$$u(x, y, z) = u_0(z), \quad (2.47a)$$

$$w(x, y, z) = w_0(z) + \phi_y(z)x + \phi_x(z)y, \quad (2.47b)$$

$$v(x, y, z) = v_0(z). \quad (2.47c)$$

A tengelyirányú fajlagos **alakváltozásra** vonatkozó (2.48)-as összefüggésben sem látunk különbséget a *Bernoulli-Navier-modellhez* képest:



$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw_0}{dz} + \frac{d\phi_y}{dz} x + \frac{d\phi_x}{dz} y. \quad (2.48)$$

A két modell közötti fő **különbség a nyírási alakváltozásokat** leíró összefüggésekben van. Mint említettem, a *Timoshenko-modellnél* nem hanyagoljuk el a γ_{xz} és γ_{zy} nyírási alakváltozásokat:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \phi_y + \frac{du_0}{dz}, \quad (2.49a)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \phi_x + \frac{dv_0}{dz}. \quad (2.49b)$$

Ennek az a következménye, hogy a keresztmetszetek ϕ_y és ϕ_x elfordulásai már nem feltétlenül lesznek egyenlők az eltolódások első deriváltjaival.

A **feszültségek** a *Hooke-modell* és a (2.48)-as és (2.49)-es egyenletek felhasználásával az alábbi összefüggésekkel írhatók le:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \left(\frac{dw_0}{dz} + \frac{d\phi_y}{dz} x + \frac{d\phi_x}{dz} y \right), \quad (2.50a)$$

$$\tau_{xz} = \kappa G \left(\phi_y + \frac{du_0}{dz} \right), \quad (2.50b)$$

$$\tau_{zy} = \kappa G \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right). \quad (2.50c)$$

Timoshenko modellje konstans eloszlású nyírófeszültséget és nyírási alakváltozást feltételez a keresztmetszet mentén. Tudjuk, hogy ez nem lehetséges, hiszen legalább parabola eloszlás szükséges ahhoz, hogy a keresztmetszet szélein a feszültségmentes *természetes* peremfeltételt biztosítani tudjuk. Ezt az **ellentmondást** a fenti képletekben szereplő " **κ** " **nyírási korrekciós tényező** alkalmazásával próbáljuk feloldani.

A **feszültségek eredőit** ezúttal is a feszültségek keresztmetszeti terület mentén történő integrálásával kaphatjuk meg.

- Normálerő:

$$N = \int_A \sigma_z dA = E \int_A \left(\frac{dw_0}{dz} + \frac{d\phi_y}{dz} x + \frac{d\phi_x}{dz} y \right) dA. \quad (2.51a)$$

- Hajlítónyomaték az x tengely körül:



$$M_x = -\int_A \sigma_z y \, dA = E \int_A \left(\frac{dw_0}{dz} y + \frac{d\phi_y}{dz} xy + \frac{d\phi_x}{dz} y^2 \right) dA. \quad (2.51b)$$

- Hajlítónyomaték a y tengely körül:

$$M_y = -\int_A \sigma_z x \, dA = E \int_A \left(\frac{dw_0}{dz} x + \frac{d\phi_y}{dz} x^2 + \frac{d\phi_x}{dz} xy \right) dA. \quad (2.51c)$$

- Nyíróerő az x tengely irányában:

$$V_x = \int_A \tau_{zx} \, dA = \int_A \kappa G \left(\phi_y + \frac{du_0}{dz} \right) dA = \kappa G \left(\phi_y + \frac{du_0}{dz} \right) A. \quad (2.51d)$$

- Nyíróerő a y tengely irányában:

$$V_y = \int_A \tau_{zy} \, dA = \int_A \kappa G \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right) dA = \kappa G \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right) A. \quad (2.51e)$$

Amennyiben referenciarendszernek a *főtengelyeket* választjuk, akkor a hajlítónyomatékokra és normálerőre vonatkozó egyenletek az alábbi alakra egyszerűsödnek:

$$N_C = \int_A EA \frac{dw_{C0}}{dz} \, dA = EA \varepsilon_{z0}, \quad (2.52a)$$

$$M_{y_c} = EI_{y_c} \frac{d\phi_{y_c}}{dz}, \quad (2.52b)$$

$$M_{x_c} = EI_{x_c} \frac{d\phi_{x_c}}{dz}. \quad (2.52c)$$

A *Timoshenko-modellnél* az eltolódásokat és elfordulásokat tartalmazó **differenciálegyenletek** az alábbi alakot öltik:

$$\frac{d\phi_{y_c}}{dz} = \frac{M_{y_c}}{EI_{y_c}}, \quad (2.53a)$$

$$\frac{d\phi_{x_c}}{dz} = -\frac{M_{x_c}}{EI_{x_c}}, \quad (2.53b)$$

$$\frac{du_C}{dz} = \frac{V_{x_c}}{\kappa GA} - \phi_{y_c}, \quad (2.53c)$$

$$\frac{dv_C}{dz} = \frac{V_{y_c}}{\kappa GA} - \phi_{x_c}. \quad (2.53d)$$



A következőkben rátérek az **egyenes hajlítással egyidejű nyírás** vizsgálatára. A főbb differenciálegyenletek származtatásakor ismertnek tételezzük fel a κ paramétert valamint a γ és g függvényeket²⁶.

Mivel a γ_{zy} nyírási alakváltozásokat a keresztmetszet mentén konstans eloszlásúnak tételeztük fel, az eredő nyíróerőt a következőképpen számíthatjuk:

$$V_y = \int_A \tau_{zy} dA = \kappa G \bar{\gamma} A; \gamma_{zy} = \bar{\gamma}, \quad (2.54)$$

ahol κ a *korrekciós tényező*, mely figyelembe veszi, hogy a nyírási alakváltozás valójában nem konstans a keresztmetszet mentén, $\bar{\gamma}$ pedig egy - *Timoshenko* által javasolt - *átlagos nyírási alakváltozás*.

Az, hogy a *Timoshenko-modell* feltételezése szerint a keresztmetszetek a deformáció után is síkok maradnak, abban nyilvánul meg, hogy a $g(y)$ *nyírási öblösödési függvény* értéke lineárisan függ y -tól, pontosabban:

$$g = y. \quad (2.55)$$

Ezért szokás *Timoshenko* modelljét **lineáris nyírási gerendamodellnek** is nevezni. Ha ezzel az *öblösödési függvénnyel* számolunk, akkor - állandó keresztmetszetű gerendát feltételezve - V_{zx} és M_x az alábbi módon alakul:

$$V_{zx} = \int_A E y g dA = E I_x, \quad (2.56a)$$

$$M_x = E I_x v_0'' - V_{zx} \frac{d\gamma}{dz} = E I_x v_0'' - E I_x \frac{d\gamma}{dz}. \quad (2.56b)$$

Ekkor a keresztmetszetek egyensúlyát az alábbi egyenletekkel fejezhetjük ki:

$$-\frac{d^2 M_x}{dz^2} + q_y = E I_x \frac{d^4 v_0}{dz^4} - E I_x \frac{d^3 \gamma}{dz^3} - q_y = 0, \quad (2.57a)$$

$$\frac{dM_x}{dz} + V_y = E I_x \frac{d^3 v_0}{dz^3} - E I_x \frac{d^2 \gamma}{dz^2} - \kappa G \bar{\gamma} A = 0. \quad (2.57b)$$

Az új **összevont egyenlet** pedig az alábbi formát ölti:

$$E I_x \frac{d^4 v_0}{dz^4} + \frac{E I_x}{\kappa G A} \frac{d^2 q_y}{dz^2} - q_y = 0. \quad (2.58)$$

A levezetések alapján megállapítható, hogy - noha a *Timoshenko-modell* már megkísérli figyelembe venni a nyírási alakváltozásokat, - az alkalmazott elmozdulásmező nem tükrözi

²⁶ Ezen paraméterek meghatározását később részletesen ismertetem.



hűen a valóságot, hiszen a gerenda alsó és felső peremén a nyírófeszültségekre **nem teljesül** a feszültségmentességi **peremfeltétel**. Ezen felül - kétdimenziós gerendamodell lévén - a *Timoshenko-modell* is **elhanyagolja** a **Poisson-hatást**, tehát nem számol keresztirányú normálfeszültségekkel és alakváltozásokkal. Ugyan a továbbiakban *Timoshenko* modelljénél elméleti szempontból korrektebb, magasabbrendű modellekkel is foglalkozom, egy valamivel mégis kitűnik ez a modell az összes általam bemutatott modell közül, nevezetesen:

megpróbálja kompenzálni az elméleti háttér korábbi hiányosságait

azzal, hogy egy *nyírási korrekciós tényezőnek* - κ - nevezett paraméterrel pontosítjuk az eredményeket.

Már maga *Timoshenko* is sokat foglalkozott a **korrekciós tényező meghatározásának** kérdésével (*Timoshenko*, 1921). Sok esetben még ma is - közel száz évvel a modell megszületése után - az általa javasolt értékekkel számolunk. Ez idő alatt számos további kutatást végeztek a témával kapcsolatban. A kérdés annyira összetettnek bizonyult, hogy a *nyírási korrekciós tényező* meghatározására **különböző**, egymástól szignifikánsan eltérő **módszerek** születtek. Egyes módszerek például dinamikai feltételeket használnak fel, mely során a gerendáknak a *Timoshenko-moddellel* kapott sajátfrekvenciáit (vagy a rezgés fázissebességét) egzakt megoldások eredményével teszik egyenlővé. Ezen felül léteznek statikai feltételeken alapuló módszerek, ahol a *Timoshenko-gerenda* nyírási alakváltozásait valamilyen feltételezett nyírófeszültségeloszlás felhasználásával próbálják megtalálni. Mivel egy gyakorlati feladat során a *Timoshenko-modell* használhatóságának alapfeltétele az adott keresztmetszetre vonatkozó *nyírási korrekciós tényező* értékének ismerete, a következőkben bemutatom a leggyakrabban használt analitikus, statikai feltételre épülő módszerek főbb gondolatmenetét, a levezetések végezetével pedig egy táblázatban összefoglalom a *nyírási korrekciós tényező* leggyakrabban használt keresztmetszetekre vonatkozó értékeit.

A statikai feltételekre épülő módszerek közül elsősorban *két megközelítés* terjedt el a mérnökök között.

Az első ilyen módszer az ún. **energiaelvű megközelítés**, mely a *Timoshenko-moddellel* számított, egység hosszra eső rugalmas nyírási alakváltozási energia és valamilyen pontosabb becsléssel kapott nyírási alakváltozási **energia egyenlőségén** alapszik. A *Timoshenko-modell* alkalmazásával az E_{ny} nyírási alakváltozási energia a (2.54)-es egyenlet felhasználásával az alábbi módon írható fel:

$$E_{ny} = \frac{1}{2} V_y \bar{\gamma} = \frac{1}{2} \kappa G \bar{\gamma}^2 A. \quad (2.59)$$

Ezt követően írjuk fel először a nyíróerő és az alakváltozási energia értékét a (2.43.b)-as egyenlet felhasználásával, melyben a $g(y)$ nyírási öblösödési függvény is szerepelt. Ekkor a következő összefüggéseket kapjuk:

$$V_y = \int_A \tau_{zy} dA = \int_A G \frac{dg}{dy} \gamma dA = \tilde{\gamma} GA, \quad (2.60)$$



$$E_{ny} = \frac{1}{2} \int_A \tau_{zy} \bar{\gamma} dA = \frac{1}{2} \int_A G \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 \gamma^2 dA = \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 GA, \quad (2.61)$$

ahol $\tilde{\gamma}$ a γ_{zy} alakváltozás-komponens *geometriai átlaga*:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma \int_A \frac{dg}{dy} dA}{A}, \quad (2.62)$$

$\hat{\gamma}$ pedig a *nyírási energiából* számítható átlagos érték:

$$\hat{\gamma}^2 = \frac{\gamma^2 \int_A \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 dA}{A}. \quad (2.63)$$

Összevetve a nyíróerő és az alakváltozási energia kétféleképpen kiszámított értékeit, a $\bar{\gamma}$ és κ paraméterek már meghatározhatók:

$$\bar{\gamma}_6 = \frac{\hat{\gamma}^2}{\tilde{\gamma}} = \gamma \frac{\int_A \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 dA}{\int_A \frac{dg}{dy} dA}; \quad \kappa = \frac{\tilde{\gamma}}{\bar{\gamma}} = \frac{\hat{\gamma}^2}{\tilde{\gamma}^2} = \frac{\left(\int_A \frac{dg}{dy} dA \right)^2}{A \int_A \left(\frac{dg}{dy} \right)^2 dA}. \quad (2.64)$$

Az első képlet azt mutatja, hogy $\bar{\gamma}$ a γ_{zy} nyírási alakváltozás *energiaértelmű átlaga*, a második egyenlet pedig azt, hogy κ a $\tilde{\gamma}$ nyírási alakváltozásnak *geometriai*, a $\hat{\gamma}$ alakváltozásnak pedig *energiaátlaga*.

Az *energiaelvű megközelítés* alkalmazására bemutatunk egy **egyszerű példát**, ahol egy b szélességű és h magasságú téglalap keresztmetszetű gerendát vizsgálunk. A *nyírási korrekciós tényező* κ meghatározásakor a *Zsuravszkij-féle* nyírófeszültség-eloszlást tekintjük "egzaktnak". Célunk, hogy a κ tényező alkalmazásával a *Timoshenko-féle* konstans nyírófeszültség-eloszlás ugyanazt az energiaszintet képviselje, mint a "pontosabb" *Zsuravszkij-megoldás*. A *Timoshenko-modell* konstans nyírófeszültség-eloszlása az alábbi módon írható fel:

$$\tau_{zy}^T = \frac{V_y}{bh}. \quad (2.65)$$

A nyírási alakváltozási energia a konstans nyírófeszültség-eloszlással:

$$E_{ny}^T = \frac{1}{2G} \int_A \left(\tau_{zy}^T \right)^2 dA = \frac{V_y^2}{2Gbh}. \quad (2.66)$$



Ezúttal a pontosabb nyírófeszültség-eloszlást a *Zsuravszkij-képlet* segítségével határozzuk meg az alábbi módon:

$$\tau_{zy}^{Zs} = \frac{3V_y}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right) \right]^2, \quad -\frac{h}{2} < y < \frac{h}{2}. \quad (2.67)$$

A nyírási alakváltozási energia a *Zsuravszkij-féle* nyírófeszültség-eloszlással:

$$E_{ny}^{Zs} = \frac{1}{2G} \int_A \left(\tau_{zy}^{Zs} \right)^2 dA = \frac{3V_y^2}{5Gbh}. \quad (2.68)$$

Ebben az esetben a *nyírási korrekciós tényező*:

$$\kappa = \frac{E_{ny}^T}{E_{ny}^{Zs}} = \frac{5}{6}. \quad (2.69)$$

A **második**, szintén gyakran használt **módszer** *Cowper* vezette be [16]. Ő a *nyírási egyenértékűségi tényező* meghatározására végzett levezetéseiben a **háromdimenziós rugalmasságtan** összefüggéseire és alapelveire támaszkodott. *Cowper* a keresztmetszet lehajlását, elfordulását és tengelyirányú eltolódását egyfajta középértéknek tekintve azokat az alábbi módon írta fel:

$$V^C = \frac{1}{A} \int v dA, \quad \phi^C = \frac{1}{I_x} \int y w dA, \quad W^C = \frac{1}{A} \int w dA. \quad (2.70)$$

Cowper további változókat, ún. "maradó" eltolódásokat - v_z , v_y - is bevezetett, melyek a keresztmetszet öblösödését írják le:

$$v_z = w - y\phi^C - W^C, \quad v_y = v - V^C. \quad (2.71)$$

Az így létrehozott paramétereket felhasználva az alábbi két egyenlet írható fel:

$$EI_x \frac{\partial \phi^C}{\partial z} = M, \quad \frac{\partial V^C}{\partial z} + \phi^C = \frac{1}{A} \int \frac{\tau_{yz}}{G} - \frac{\partial v_z}{\partial y} dA. \quad (2.72)$$

Cowper eddigi levezetései mindössze annyi elhanyagolást tartalmaztak, hogy a rugalmasságtan lineáris összefüggéseit használtuk fel, valamint a σ_x és σ_y keresztirányú normálfeszültségeket elhanyagoltuk. Ahhoz, hogy a (2.72.b) egyenletben szereplő integrál kiszámítható legyen, τ_{yz} és v_z ismerete szükséges. Ezek előállítása egy *Neumann-probléma* megoldására vezethető vissza, ahol $\chi(x, y)$ -t, az ún. *hajlítási függvényt* kell meghatároznunk. Néhány gyakran használt keresztmetszettípusra vonatkozóan, a $\chi(x, y)$ függvény egzakt értéke - pl. a [17], [18] és [19]-ben - megtalálható, míg más esetekben ez a függvény a *Neumann-probléma* numerikus megoldásával határozható meg. Ezt követően - τ_{yz} és v_z



ismeretében - a (2.72)-es integrál már gond nélkül meghatározható. Ezután felírhatjuk a *Timoshenko-modellhez* tartozó (2.53d) differenciálegyenletet kissé átrendezett alakját:

$$\frac{\partial V^C}{\partial z} + \phi^C = \frac{V_y}{\kappa GA}, \quad (2.73)$$

melyben már csak a κ *nyírási korrekciós tényező* az ismeretlen, így az kiszámítható. Szimmetrikus keresztmetszetek esetén a feladat úgy egyszerűsödik, hogy a (2.72)-es integrál kiszámítása helyett a (2.74)-es képlet is használható:

$$\kappa = \frac{2(1+\nu)I_x}{\frac{\nu}{2}(I_y - I_x) - \frac{A}{I_x} \int y [\chi(x, y) + x^2 y] dA}. \quad (2.74)$$

A következőkben ezzel a módszerrel is meghatározom a téglalap alakú keresztmetszetre vonatkozó *nyírási korrekciós tényező* képletét. A $\chi(x, y)$ függvény - [17] alapján - téglalap keresztmetszetre a következő:

$$\chi(x, y) = \left(\frac{2+\nu}{6}\right)(y^3 - 3yx^2) + \left[-(1+\nu)\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\nu\left(\frac{b}{2}\right)^2\right]y + \frac{4\nu(0,5b)^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{0,5b}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi x}{0,5b}\right)} \cos\left(\frac{n\pi x}{0,5b}\right). \quad (2.75)$$

Ekkor a *nyírási korrekciós tényezőre* az alábbi összefüggés adódik:

$$\kappa = \frac{5(1+\nu)^2}{6 + 11\nu + \nu^2 \left(5 - m^4 + \frac{90mS}{\pi^6}\right)}, \quad (2.76)$$

ahol:

$$m = \frac{b}{h} \text{ és } S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh\left(\frac{n\pi h}{b}\right)}{n^5}. \quad (2.77)$$

S értékét különböző keresztmetszeti arányokra a (2.1)-es táblázat tartalmazza:



m	S
0,05	0,16808
0,10	0,32603
0,15	0,46738
0,20	0,58894
0,25	0,69006
0,30	0,77185
0,35	0,83650
0,40	0,88665
0,45	0,92499
0,50	0,95396
0,55	0,97567
0,60	0,99183
0,65	1,00379
0,70	1,01262
0,75	1,01912
0,80	1,02389
0,85	1,02739
0,90	1,02995
0,95	1,03183
1,00	1,03320
2,00	1,03692

2.1 táblázat S értékei különböző keresztmetszeti arányok esetén (Forrás: [20])

Ezek alapján például egy keskeny téglalapot alapul véve - $m \rightarrow 0$ - a *nyírási korrekciós tényező*:

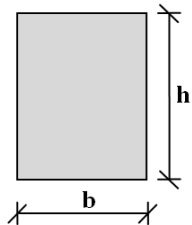
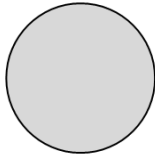
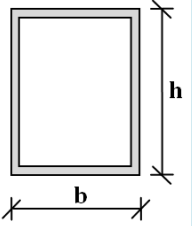
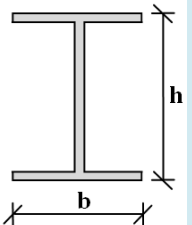
$$\kappa = \frac{5(1+\nu)}{6+5\nu}. \quad (2.78)$$

Megjegyzem, hogy az imént ismertetett két megközelítést alapul véve számos egyéb módszer is napvilágot látott, melyek kisebb-nagyobb módosításokkal kívánják a *nyírási korrekciós tényezőt* meghatározni. Az érdeklődő olvasóknak Kaneko [20] alatti művét ajánlom, melyben a különböző módszerek által szolgáltatott eredmények összehasonlítása megtalálható.

A *nyírási korrekciós tényező* meghatározásának ismertetése után táblázatosan összefoglalom a **leggyakrabban használt** keresztmetszet-típusokra jellemző κ értékeket. Ezúton is hangsúlyozom, hogy a szakirodalomban ezektől eltérő értékekkel is lehet találkozni. Jelen dolgozat keretei között nem kívánok részletesebb összehasonlító elemzést végezni az egyes fellelhető változatok között, mindössze feltüntetek néhány értéket - (2.2)-es táblázat -, melyet a mérnökök megbízhatóan alkalmazhatnak munkájuk során. Megjegyzem, hogy a



későbbi fejezetben én is ezeket az értékeket használtam a numerikus számítások során, és igen megbízhatónak²⁷ találtam őket.

Keresztmetszet		κ
		$\frac{5}{6}; \frac{5(1+\nu)^2}{6+11\nu+\nu^2\left(5-m^4+\frac{90mS}{\pi^6}\right)}$
		$\frac{6+12\nu+6\nu^2}{7+12\nu+4\nu^2}$
	$m = 0,25$	0,7566
	$m = 1,0$	0,4355
	$m = 2,0$	0,2412
	$m = 4,0$	0,1061
	$m = 0,5$	0,4771
	$m = 1$	0,2956

2.2 táblázat κ nyírási korrekciós tényező értékei különböző keresztmetszetek esetén
(Emlékeztetőül: $m=b/h$)

2.1.4. Harmadfokú nyírási gerendamodell

A lineáris nyírási gerendamodelleknél - így a Timoshenko-modellnél is - a $g(y)$ nyírási öblösödési függvény lineárisan függ az y koordinátától. A harmadrendű nyírási gerendamodelleknél ez az öblösödési függvény egy harmadfokú polinomként írható fel:

$$g_3 = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3, \quad (2.79)$$

ahol a c_i konstansok megfelelő felvétele a dolgunk. Vizsgáljunk meg például egy téglalap keresztmetszetű gerendát, melynek magasságát jelölje h . Amennyiben az alsó és felső élekre

²⁷ Ez alatt azt értem, hogy - mint azt később részletezem - ezen értékek alkalmazásával kapott eredményekben legfeljebb néhány százalékos eltérést tapasztaltam az általam "pontosnak" vélt megoldáshoz viszonyítva.



nem hat megoszló nyírási terhelés, a nyírófeszültségekre vonatkozó *természetes peremfeltétel* a következőképpen alakul:

$$\tau_{zy} \Big|_{y=\pm h/2} = 0. \quad (2.80)$$

Ebből, és a (2.43)-as egyenletből az következik, hogy:

$$\frac{dg_3}{dy} \Big|_{y=\pm h/2} = 0. \quad (2.81)$$

A γ paraméter definíciója szerint:

$$\gamma_{zy} \Big|_{y=0} = \gamma. \quad (2.82)$$

Felhasználva a (2.43)-as összefüggést, a következő megállapítást tehetjük:

$$\frac{dg_3}{dy} \Big|_{y=0} = 1. \quad (2.83)$$

A (2.79)-es, (2.81)-es és (2.83)-as egyenletek alapján meghatározhatjuk a c_i konstansokat,

$$c_1 = 1; c_2 = 0 \text{ és } c_3 = -\frac{4}{3h^2}, \quad (2.84)$$

és így már az úgynevezett *harmadfokú nyírási deformációs függvény* is felírható²⁸:

$$g_3 = y - \frac{4}{3h^2} y^3. \quad (2.85)$$

Megjegyzem, hogy az évtizedek során többféle harmadfokú elmélet is napvilágot látott. A következőkben példaként **Reddy és Bickford harmadfokú nyírási gerendamodeljét** mutatom be²⁹. Ez a modell az alábbi **elmozdulásmezővel** dolgozik:

$$w(z, y) = y\phi_x(z) - \alpha y^3 \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right), \quad (2.86a)$$

$$v(z, y) = v_0(z), \quad (2.86b)$$

ahol:

²⁸ Mint azt említettem, ez a levezetés téglalap keresztmetszetű gerendákra vonatkozott. Általában a magasabbrendű elméletek más keresztmetszetről is ugyanazt az öblösödési függvényt alkalmazzák, melyet téglalap keresztmetszetre levezettek, ily módon ezek elméleti háttéré is tartalmaz bizonyos hibákat.

²⁹ A harmadrendű gerendamodel bemutatása során a [7] alatti levezetésekre támaszkodom.



$$\alpha = \frac{4}{3h^2}. \quad (2.87)$$

Az elmozdulásmezőből következik, hogy a keresztmetszet mentén a **nyírási alakváltozások** és nyírófeszültségek eloszlása **másodfokú**, valamint - ahogy az a fenti levezetésből is látszik - a gerenda alsó és felső élén a nyírási alakváltozások és nyírófeszültségek zérus értéket vesznek fel. Az **alakváltozásmező** a következő összefüggésekkel írható le:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = y \frac{d\phi_x}{dz} - \alpha y^3 \left(\frac{d\phi_x}{dz} + \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right), \quad (2.88a)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \phi_x + \frac{dv_0}{dz} - \beta y^2 \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right), \quad (2.88b)$$

ahol:

$$\beta = 3\alpha = \frac{4}{h^2}. \quad (2.89)$$

Ekkor a *virtuális alakváltozási energiát* egy L hosszúságú gerendánál az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A (\sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{zy} \delta \gamma_{zy}) dA dz = \\ &= \int_0^L \int_A \left\{ \sigma_z \left[y \frac{d\delta\phi_x}{dz} - \alpha y^3 \left(\frac{d\delta\phi_x}{dz} + \frac{d^2\delta v_0}{dz^2} \right) \right] + \tau_{zy} \left[(1 - \beta y^2) \left(\delta\phi_x + \frac{d\delta v_0}{dz} \right) \right] \right\} dA dz = \\ &= \int_0^L \left[(M_x - \alpha P_x) \frac{d\delta\phi_x}{dz} - \alpha P_x \frac{d^2\delta v_0}{dz^2} + (V_y - \beta R_y) \left(\delta\phi_x + \frac{d\delta v_0}{dz} \right) \right] dz, \quad (2.90) \end{aligned}$$

ahol M_x a hajlítónyomaték, V_y a nyíróerő, P_x és R_y pedig az ún. *magasabbrendű feszültségi eredők*:

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA; \quad V_y = \int_A \tau_{zy} dA; \quad P_x = \int_A y^3 \sigma_z dA; \quad R_y = \int_A y^2 \tau_{zy} dA. \quad (2.91)$$

A q_y intenzitású megoszló teher potenciális energiája az alábbi összefüggéssel írható le:

$$\delta V = - \int_0^L q_y(z) \delta v_0 dz. \quad (2.92)$$

A virtuális elmozdulások tételét - $\delta W = \delta U + \delta V = 0$ - felhasználva:



$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L \left[(M_x - \alpha P_x) \frac{d\delta\phi_x}{dz} - \alpha P_x \frac{d^2\delta v_0}{dz^2} + (V_y - \beta R_y) \left(\delta\phi_x + \frac{d\delta v_0}{dz} \right) - q_y \delta v_0 \right] dz = \\
&= \int_0^L \left[\left(\widehat{V}_y - \frac{d\widehat{M}_x}{dz} \right) \delta\phi_x - \left(\alpha \frac{d^2 P_x}{dz^2} + \frac{d\widehat{V}_y}{dz} + q_y \right) \delta v_0 \right] dz + \left[\widehat{M}_x \delta\phi_x + \left(\alpha \frac{dP_x}{dz} + \widehat{V}_y \right) \delta v_0 - \alpha P_x \frac{d\delta v_0}{dz} \right]_0^L,
\end{aligned} \tag{2.93}$$

ahol:

$$\widehat{M}_x = M_x - \alpha P_x; \widehat{V}_y = V_y - \beta R_y. \tag{2.94}$$

A tetszőleges δv_0 és $\delta\phi_x$ függvényekkel szorzott tagokat a gerenda hossza mentén zérusnak választva az alábbi egyensúlyi egyenleteket kapjuk:

$$-\frac{d\widehat{M}_x}{dz} + \widehat{V}_y = 0, \tag{2.95a}$$

$$-\alpha \frac{d^2 P_x}{dz^2} - \frac{d\widehat{V}_y}{dz} = q_y. \tag{2.95b}$$

A *Reddy-Bickford-féle harmadfokú elméletnél* a következő mennyiségekre vonatkozóan írhatjuk elő a peremfeltételeket:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 \\ \frac{dv_0}{dz} \\ \phi_x \end{array} \right\}, \text{ vagy } \left\{ \begin{array}{l} \widehat{Q}_y \equiv \alpha \frac{dP_x}{dz} + \widehat{V}_y \\ \alpha P_x \\ \widehat{M}_x \end{array} \right\}, \tag{2.96}$$

ahol \widehat{Q}_y az ún. *effektív nyíróerő*. A *klasszikus- és a Timoshenko-modellel* ellentétben ennél a *harmadfokú elméletnél* nem kettő, hanem három peremfeltételt kell megadnunk a gerendavégeken.

Az igénybevételek és más **feszültségi eredők** az alábbi összefüggésekkel írhatók fel:

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA = \widehat{D}_x \frac{d\phi_x}{dz} - \alpha F_x \frac{d^2 v_0}{dz^2}, \tag{2.97a}$$

$$P_x = \int_A y^3 \sigma_z dA = \widehat{F}_x \frac{d\phi_x}{dz} - \alpha H_x \frac{d^2 v_0}{dz^2}, \tag{2.97b}$$

$$V_y = \int_A \gamma_{zy} dA = \widehat{A}_y \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right), \tag{2.97c}$$



$$R_y = \int_A y^2 \gamma_{zy} dA = \widehat{D}_y \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right), \quad (2.97d)$$

ahol:

$$(A_x, D_x, F_x, H_x) = \int_A (1, y^2, y^4, y^6) E dA; (A_y, D_y, F_y) = \int_A (1, y^2, y^4) G dA, \quad (2.98a)$$

$$\widehat{D}_x = D_x - \alpha F_x; \widehat{F}_x = F_x - \alpha H_x; \widehat{A}_y = A_y - \beta D_y; \widehat{D}_y = D_y - \beta F_y, \quad (2.98b)$$

Ha a (2.95)-ös egyensúlyi egyenleteket az elmozdulások - v_0 és ϕ_x - függvényében fejezzük ki, akkor a következő összefüggéseket kapjuk:

$$-\frac{d}{dx} \left(\overline{D}_x \frac{d\phi_x}{dz} - \alpha \widehat{F}_x \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + \overline{A}_y \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right) = 0, \quad (2.99a)$$

$$-\alpha \frac{d^2}{dx^2} \left(\widehat{F}_x \frac{d\phi_x}{dz} - \alpha H_x \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) - \frac{d}{dx} \left[\overline{A}_y \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right) \right] = q_y, \quad (2.99b)$$

ahol:

$$\overline{A}_y = \widehat{A}_y - \beta \widehat{D}_y; \overline{D}_x = \widehat{D}_x - \alpha \widehat{F}_x; \overline{F}_x = \widehat{F}_x - \alpha H_x. \quad (2.100)$$

Levonhatjuk azt a következtetést, miszerint a *harmadrendű nyírási gerendamodell* téglalap keresztmetszet esetén - a *Timoshenko-moddellel* ellentétben - **kielégíti** a keresztmetszet alsó és felső peremén érvényes **peremfeltételeket**, ebből adódóan **korrekciós tényező használatára nincsen szükség**³⁰. Ugyanakkor még mindig kétdimenziós gerendamodellről beszélünk, amely **nem képes a Poisson-hatást**, vagyis a keresztmetszet síkbeli torzulását **helyesen kezelni**.

2.1.5. Hiperbolikus nyírási deformációs gerendamodell bemutatása

A **hiperbolikus nyírási gerendamodell** a *kétdimenziós nyírási deformációs gerendaelméletek* csoportjába sorolható. Ennél a modellnél a keresztmetszeti **pontok hossz tengellyel párhuzamos irányú elmozdulásait** a magassági koordináták **szinusz hiperbolikus** függvényeként írjuk le³¹.

Az egyenletek felírásakor a *virtuális munkatételt* használjuk fel. A modell az alábbi **elmozdulásmezővel** dolgozik:

³⁰ Megjegyzem, hogy valójában mindig az adott keresztmetszetre levezetett öblösödési függvényt kellene alkalmazni ahhoz, hogy a modell elméleti szempontból korrekt legyen. Elméleti szempontból hibát vétünk azzal, ha mindig a téglalap alakú keresztmetszetre levezetett összefüggést alkalmazzuk.

³¹ A hiperbolikus modell bemutatásakor a [9] alatti műben szereplő összefüggéseket vettem alapul.



$$w(z, y) = -y \frac{dv_0}{dz} + \left[y \cosh\left(\frac{1}{2}\right) - h \sinh\left(\frac{y}{h}\right) \right] \varphi(z), \quad (2.101a)$$

$$v(z, y) = v_0(z). \quad (2.101b)$$

A (2.101a) egyenlet első tagja a *Bernoulli-Navier-elméletből* már jól ismert összefüggés, mely a hosszirányú eltolódások keresztmetszeti magasság menti lineáris eloszlását írja le. A zárójelben szereplő második tag a keresztirányú nyírási alakváltozásokat képviseli, melyek jelen feltételezésünk szerint szinusz hiperbolikus eloszlásúak a gerenda magassága mentén. A $\varphi(z)$ egy ismeretlen függvény, ami a keresztmetszet semleges tengely körüli elfordulásával van összefüggésben.

Az **alakváltozások** a következőképpen számíthatók:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -y \frac{d^2 v_0}{dz^2} + \left[y \cosh\left(\frac{1}{2}\right) - h \sinh\left(\frac{y}{h}\right) \right] \frac{d\varphi}{dz}, \quad (2.102a)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - \cosh\left(\frac{y}{h}\right) \right] \varphi. \quad (2.102b)$$

A **feszültségek** számításánál ezúttal is a *Hooke-modell* összefüggéseit használjuk fel:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z; \tau_{zy} = G\gamma_{zy}. \quad (2.103)$$

A differenciálegyenletek és peremfeltételek származtatásához a (2.102a) és (2.103)-as egyenleteket és a *virtuális munkatétel* alapelveit használhatjuk fel:

$$b \int_{z=0}^{z=L} \int_{y=-h/2}^{y=h/2} (\sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{zy} \delta\gamma_{zy}) dz dy - \int_{z=0}^{z=L} q_y \delta v_0 dz = 0, \quad (2.104)$$

ahol $q_y(z)$ a keresztirányú megoszló teher intenzitása. A *Green-féle integráltétel* felhasználásával megkapjuk az egyensúlyi differenciálegyenletet, és a hozzá tartozó peremfeltételt:

$$EI_x \frac{d^4 v_0}{dz^4} - EI_x A_0 \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = q_y, \quad (2.105a)$$

$$EI_x A_0 \frac{d^3 v_0}{dz^3} - EI_x B_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + GAC_0 \varphi = 0, \quad (2.105b)$$

ahol A_0 , B_0 és C_0 konstansok értékei a következők:

$$A_0 = \cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 12 \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \sinh\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad (2.106a)$$



$$B_0 = \cosh^2\left(\frac{1}{2}\right) + 6[\sinh(1) - 1] - 24 \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \sinh\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad (2.106b)$$

$$C_0 = \cosh^2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) [\sinh(1) + 1] - 4 \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\right), \quad (2.106c)$$

A kapcsolódó peremfeltételek a következők:

$$EI_x \frac{d^3 v_0}{dz^3} - EI_x A_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \text{ vagy } v_0\text{-t írjuk elő,} \quad (2.107a)$$

$$EI_x \frac{d^2 v_0}{dz^2} - EI_x A_0 \frac{d\varphi}{dz} = 0, \text{ vagy } \frac{dv_0}{dz}\text{-t írjuk elő,} \quad (2.107b)$$

$$EI_x A_0 \frac{d^2 v_0}{dz^2} - EI_x B_0 \frac{d\varphi}{dz} = 0, \text{ vagy } \varphi\text{-t írjuk elő.} \quad (2.107c)$$

A következőkben bemutatom a $v_0(z)$ és $\varphi(z)$ függvények általános megoldását. Ehhez először rendezzük át és integráljuk a (2.105a) egyenletet. Ekkor a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{d^3 v_0}{dz^3} - A_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{Q(z)}{EI_x}, \quad (2.108)$$

ahol $Q(z) = \int_0^z q_y dz + C_1$ az ún. általánosított nyíróerő. A (2.105b) egyenletet az alábbi alakban is felírhatjuk:

$$\frac{d^3 v_0}{dz^3} - \frac{A_0}{B_0} \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \beta \varphi = 0. \quad (2.109)$$

A (2.107)-es peremfeltételeket felhasználva egy egyszerű **differenciálegyenlethez** jutunk:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \lambda^2 \varphi = \frac{Q(z)}{\alpha EI_x}, \quad (2.110)$$

ahol az α , β és λ konstansok a következők:

$$\alpha = \frac{B_0}{A_0} - A_0, \quad \beta = \frac{GAC_0}{EI_x A_0}, \quad \lambda^2 = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.111)$$

A (2.110)-es differenciálegyenlet általános megoldása a következő:

$$\varphi(z) = C_2 \cosh(\lambda z) + C_3 \sinh(\lambda z) - \frac{Q(z)}{\beta EI_x}. \quad (2.112)$$



Ha ezt az eredményt behelyettesítjük a (2.109)-es egyenletbe, majd a kapott kifejezést háromszor integráljuk z szerint, akkor megkapjuk a $v_0(z)$ lehajlásfüggvény általános megoldását:

$$EI_x v_0(z) = \iiint q dz dz dz + \frac{C_1 z^3}{6} + \frac{A_0 EI_x}{\lambda} (C_2 \sinh(\lambda z) + C_3 \cosh(\lambda z)) + C_4 \frac{z^4}{2} + C_5 z + C_6, \quad (2.113)$$

ahol a $C_1 - C_6$ integrálási konstansok az adott feladatnál érvényes peremfeltételekből határozhatók meg.

Ez az elmélet is **teljesíti** a keresztmetszet peremén a feszültségmentességi **peremfeltételt**³², így **nyírési korrekciós tényező használatára nincsen szükség**, azonban a **keresztirányú normálfeszültségeket** ez a modell is **elhanyagolja**.

2.1.6. Háromdimenziós lineáris gerendamodell

A gerendamodellek harmadik alapvető csoportjába a **háromdimenziós modellek** tartoznak, amelyek a keresztmetszet **síkra merőleges torzulásán** (öblösödésén) túl már a **síkbeli** keresztmetszeti **torzulásokat is figyelembe veszik**. Az eddig tárgyalt gerendamodelleknél a gerenda hossz tengelyének irányában lévő elmozduláskomponens lineárisan (esetleg harmad fokban) függött a síkbeli koordinátáktól, míg a másik két irányú eltolódást konstans eloszlásúnak feltételeztük a keresztmetszet mentén. A továbbiakban az utóbbi megkötéstől eltekintünk, és egy olyan gerendamodellt vizsgálunk, ahol már **mindhárom eltolódáskomponens lineáris eloszlású** a keresztmetszet mentén. Ezt **háromdimenziós lineáris modellnek** nevezzük. A modell elméleti bemutatását ezúttal is egy általános statikus terhelési eset figyelembevételével kezdem³³.

A lineáris kiterjesztésű **elmozdulásmező** az alábbi alakot ölti:

$$u = u_0 + u_{x_2} x + u_{x_3} y, \quad (2.114a)$$

$$v = v_0 + u_{y_2} x + u_{y_3} y, \quad (2.114b)$$

$$w = w_0 + u_{z_2} x + u_{z_3} y, \quad (2.114c)$$

Látható, hogy a modell kilenc független elmozdulás-változót tartalmaz, ezek közül három - u_0 , v_0 és w_0 - a konstans tagokban, hat - u_{x_2} , u_{x_3} , u_{y_2} , u_{y_3} , u_{z_2} és u_{z_3} - pedig a lineáris tagokban szerepel.

³² Itt is igaz az - a harmadfokú gerendamodellnél tett - megállapítás, miszerint tetszőleges alakú keresztmetszet esetén az alkalmazott öblösödési függvény nem feltétlenül teljesíti a peremfeltételeket.

³³ A háromdimenziós gerendamodell levezetéseinek ismertetésekor a [10]-es könyvben szereplő összefüggéseket vettem alapul. Megjegyzem, hogy ebben a könyvben a háromdimenziós modell numerikus alkalmazásának lehetőségeit is részletesen tárgyalják a szerzők, melyre jelen dolgozat keretein belül terjedelmi okokból nem volt lehetőség.

Ha az elmozduláskomponensek ismertek, akkor az **alakváltozások** a lineáris geometriai egyenletek felhasználásával egyértelműen meghatározhatók:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{x_2}, \quad (2.115a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = u_{y_3}, \quad (2.115b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw_0}{dz} + \frac{du_{z_2}}{dz} x + \frac{du_{z_3}}{dz} y, \quad (2.115c)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{du_0}{dz} + \frac{du_{x_2}}{dz} x + \frac{du_{x_3}}{dz} y + u_{z_2}, \quad (2.115d)$$

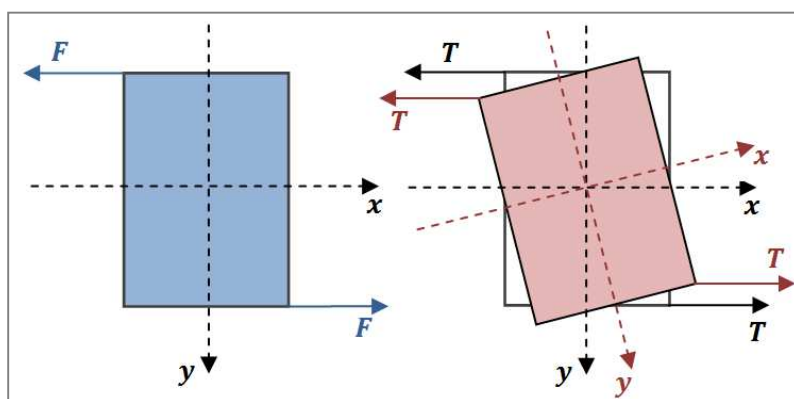
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_{x_3} + u_{y_2}, \quad (2.115e)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = u_{z_3} + \frac{dv_0}{dz} + \frac{du_{y_2}}{dz} x + \frac{du_{y_3}}{dz} y. \quad (2.115f)$$

Látható, hogy a keresztmetszet síkjában lévő alakváltozások - ε_x , ε_y , γ_{xy} - konstans eloszlásúak a keresztmetszet mentén, míg a másik három független alakváltozáskomponens - ε_z , γ_{zx} , γ_{zy} - lineáris eloszlású.

A **feszültségek** ezúttal is a *Hooke-modell* segítségével számíthatók.

A korábban elemzett gerendamodelleknél megállapíthattuk, hogy a keresztirányú alakváltozások elhanyagolása miatt mindegyik elméleti szempontból hibás alakváltozásokkal operál. Az imént bemutatott elmozdulás- és alakváltozásmezőből látjuk, hogy a *háromdimenziós lineáris modell* esetén ez a probléma már nem áll fent, és így általános terhelési esetben "**teli**" **alakváltozás-** és **feszültségtenzorral** van dolgunk. Érdekességként ennek a megállapításnak a gyakorlati jelentőségét a következő **egyszerű példán** szemléltetem:



2.5 ábra A belső erők alakulása és az elemi hosszúságú gerendaelem deformációi lineáris öblösödési függvény esetén



Képzeljünk el egy téglalap keresztmetszetű gerendát, melyet a keresztmetszet síkjában egy erőpár - csavarónyomatékot okozva - terhel. Mivel a *kétdimenziós gerendamodellek* keresztirányban konstans elmozduláskomponensekkel dolgoznak, ezek használatával - teljesen hibás - deformáció mentes eredményre jutnánk. Ezt a gondolatmenetet folytatva, azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a **kétdimenziós gerendamodellek nem képesek figyelembe venni, hogy a keresztmetszeten belül hol hat a terhelés**. Ha a teher a hajlítónyomatékon túl csavarónyomatékot is okoz, akkor a *kétdimenziós gerendamodellek* olyan eredményt adnak, melyek - a **csavarást elhanyagolva** - csak a hajlítás hatását veszik figyelembe. Ezzel ellentétben a **háromdimenziós lineáris modell használatával** már **kimutatható a keresztmetszetek elcsavarodása és síkbeli nyírási szögtorzulása ($\gamma_{xy} \neq 0$)**. Megjegyzendő, hogy a számítások bonyolultabbak lesznek, mint a kétdimenziós esetben, hiszen például egy két csomópontos végelem esetén már 18 szabadságfokú rúdelemmel kell számolnunk, a "szokásos" 12 szabadságfokú rúdelem helyett.

Felmerül a kérdés, hogy vajon mennyire pontos eredményre vezet az, hogy keresztirányban - a keresztmetszet mentén - konstans normál alakváltozásokkal számolunk. Mint tudjuk, hajlított gerendák esetén a keresztirányú alakváltozások a **Poisson-hatásból** származnak, mely szerint:

$$v_{ij} = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}}, \text{ ahol } i, j = x, y, z. \quad (2.116)$$

Mint láttuk, a *háromdimenziós lineáris modell* esetén, amikor az alakváltozásokat *kinematikai úton* (az elmozdulási szabadságfokokból származtattuk), arra az eredményre jutottunk, hogy a síkra merőleges normál alakváltozás lineáris, míg a síkbeli komponensek konstans eloszlásúak a keresztmetszet mentén. Ez azonban **ellentmond** a (2.116)-os egyenletben látottaknak, ami azt állítja, hogy a síkbeli normál alakváltozások nagysága - abszolút értékben - egyenes arányban függ a síkra merőleges normál alakváltozástól, és azzal közelítően azonos nagyságrendbe esnek. Ebből az következik, hogy amennyiben lineáris eloszlású keresztmetszeti síkra merőleges normál alakváltozással számolunk, akkor a síkbeli normál alakváltozásoknak is lineáris eloszlásúnak kell lenniük, vagyis bizonyos ellentmondást még a fenti *háromdimenziós lineáris modell* esetén is láthatunk.

Ennek az **ellentmondásnak** sajnálatos módon a gyakorlati számítások során is érezhető következménye van, nevezetesen az ún. **Poisson-záródás**, ami rontja a numerikus modellek konvergenciáját, és így az eredmények pontosságát. Az ellentmondás feloldására alapvetően az a **megoldás**, hogy a síkbeli elmozduláskomponenseknél az iménti lineárisnál **magasabbfokú közelítést** alkalmazunk:

$$u = u_0 + u_{x_2}x + u_{x_3}y + u_{x_4}x^2 + u_{x_5}y^2 + \dots, \quad (2.117a)$$

$$v = v_0 + u_{y_2}x + u_{y_3}y + u_{y_4}x^2 + u_{y_5}y^2 + \dots, \quad (2.117b)$$

Ezzel elérjük, hogy a keresztirányú normál alakváltozások a - a hossz tengely irányú alakváltozásokhoz hasonlóan - lineáris eloszlásúak legyenek a keresztmetszet mentén,



azonban így tovább nőtt az ismeretlenek száma, ami nehezíti a számítások elvégzését, még magasabb szabadságfokú rúdelemmel kell számolnunk.

A numerikus nehézségek elkerülésének érdekében egy **másik módszert** is használhatunk a fenti ellentmondás megszüntetésére. Megállapíthatjuk, hogy a *Poisson-hatás* tulajdonképpen az anyagi viselkedésből következik, ahogy ezt a (2.33)-as kapcsolati összefüggéseknél is látható normál alakváltozások kapcsolata tanúsítja. Ezt kihasználva a fenti ellentmondást a kapcsolati egyenletek - azon belül a **rugalmas együtthatók**³⁴ - megfelelő **módosításával** is lehet orvosolni. Ehhez a síkbeli alakváltozások esetén ún. **redukált merevségi együtthatókkal** kell számolunk. Ez úgy történhet, hogy a keresztirányú normál feszültségeket zérusnak feltételezve:

$$\begin{cases} \sigma_x = A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z = 0, \\ \sigma_y = A_{12}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z = 0, \end{cases} \quad (2.118)$$

kifejezzük a keresztirányú alakváltozásokat a hosszirányú normál alakváltozások függvényében:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{A_{23}A_{12} - A_{13}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \varepsilon_z, \\ \varepsilon_y = \frac{A_{13}A_{12} - A_{23}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \varepsilon_z, \end{cases} \quad (2.119)$$

majd felírjuk a hosszirányú normál feszültségekre vonatkozó összefüggést (2.33), (2.118) és (2.119) alapján:

$$\sigma_z = \left(A_{33} + A_{13} \frac{A_{23}A_{12} - A_{13}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} + A_{23} \frac{A_{13}A_{12} - A_{23}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right) \varepsilon_z, \quad (2.120)$$

ahol:

$$\left(A_{33} + A_{13} \frac{A_{23}A_{12} - A_{13}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} + A_{23} \frac{A_{13}A_{12} - A_{23}A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \right) = A_{33}', \quad (2.121)$$

a *redukált merevségi együttható*, amellyel számolnunk kell a *Poisson-záródás* elkerülése érdekében. Jelen esetben, ahol izotrop gerendával foglalkozunk:

$$A_{33}' = E, \quad (2.122)$$

vagyis a *redukált merevségi együttható* megegyezik a *rugalmassági modulussal*.

³⁴ A következő képletekben az A_{ij} jelölés az anyagi merevségi mátrix i -edik sorának j -edik elemét jelenti.



2.1.7. Másod-, és magasabbfokú háromdimenziós gerendamodellek

A **másodfokú háromdimenziós gerendamodell** származtatásához az **elmozdulásmező másodfokú** kiterjesztésére van szükség:

$$u = u_0 + u_{x_2} x + u_{x_3} y + u_{x_4} x^2 + u_{x_5} xy + u_{x_6} y^2, \quad (2.123a)$$

$$v = v_0 + u_{y_2} x + u_{y_3} y + u_{y_4} x^2 + u_{y_5} xy + u_{y_6} y^2, \quad (2.123b)$$

$$w = w_0 + u_{z_2} x + u_{z_3} y + u_{z_4} x^2 + u_{z_5} xy + u_{z_6} y^2. \quad (2.123c)$$

A geometriai egyenletek alapján a normál **alakváltozások** a következőképpen alakulnak:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{x_2} + 2xu_{x_4} + u_{x_5} y, \quad (2.124a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = u_{y_3} + 2yu_{y_6} + u_{y_5} x, \quad (2.124b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw_0}{dz} + \frac{du_{z_2}}{dz} x + \frac{du_{z_3}}{dz} y + \frac{du_{z_4}}{dz} x^2 + \frac{du_{z_5}}{dz} xy + \frac{du_{z_6}}{dz} y^2. \quad (2.124c)$$

Látható, hogy a síkbeli ε_x és ε_y alakváltozás-komponensek eloszlása lineáris, míg a síkra merőleges ε_z komponens eloszlása másodfokú. Mint tudjuk, a *Poisson-záródás* szempontjából kulcsfontosságú ε_x és ε_y eloszlása. Ugyan a *lineáris modellnél* látott, alakváltozásokra vonatkozó inkonzisztencia itt is fennáll, azonban jelen esetben ennek a "hiányosságnak" kisebb a gyakorlati következménye, ugyanis a *Poisson-záródás* csak $N \leq 1$ gerendamodellek (ahol N a modell fokszáma) esetén következik be, így a másod- ($N = 2$), és annál magasabbfokú modellek esetén már **nem szükséges a merevségi együtthatók redukálása**. Ahogy az elmozdulásmezőből látható, a *másodfokú háromdimenziós gerendamodell* végeselemes alkalmazásakor csomópontonként 18 elmozdulás-változó szerepel. A (2.123)-as egyenletek alapján már nem nehéz elképzelni, hogy - a *Pascal-háromszög* felhasználásával - az elmozdulásmező tetszőleges (N -ed) rendben kiterjeszhető. *Harmadfokú gerendamodell* esetén 30, míg *negyedfokú modell* esetén már 45 elmozdulás-változóval van dolgunk.

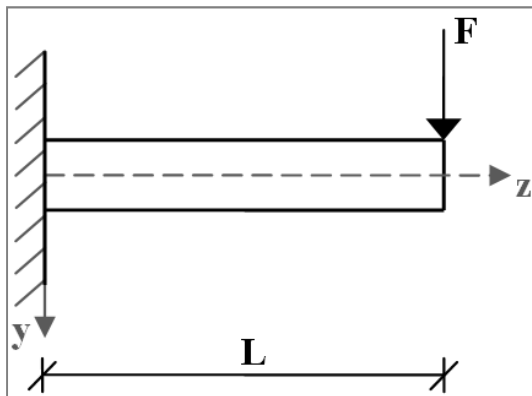
2.2. Izotrop anyagú konzol analitikus megoldása különböző gerendamodellekkel

Mielőtt rátérek a numerikus példák elemzésére, elvégzem - az iménti levezetésekre támaszkodva - a feladatok **analitikus megoldását**, hogy bemutassam az egyes modellek esetén a megoldások előállítási módját. Azt, hogy az egymáshoz képesti különbségek - a plusz tagok jelenléte - mekkora eltérést okoznak, a feladatok numerikus megoldása során elemzem.



2.2.1. Konzol lehajlásának meghatározása klasszikus gerendaelmélettel

A teljesség kedvéért a *klasszikus gerendamodellel* is bemutatom a feladat analitikus megoldását annak ellenére, hogy ez a megoldás bizonyára ismert a tisztelt olvasó számára.



2.6 ábra A numerikus számításoknál vizsgált konzol

A numerikus vizsgálatok során egy - a rúdvégen koncentrált erővel terhelt - konzolt vizsgálunk, különböző geometriai - h/L , h/b - arányokkal és keresztmetszetekkel.

Vegyük alapul a görbület és nyomaték kapcsolatát leíró differenciálegyenletet:

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EI_x} = + \frac{FL}{EI_x} \left(\frac{L-z}{L} \right). \quad (2.125)$$

Integrálva a fenti összefüggést az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\frac{dv_0}{dz} = + \frac{FL}{EI_x} \left(z - \frac{z^2}{2L} \right) + C_1, \quad (2.126)$$

$$v_0 = + \frac{FL}{EI_x} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right) + C_1 z + C_2. \quad (2.127)$$

Az integrálási konstansok értékét a peremfeltételekből határozhatjuk meg az alábbi módon:

$$\left. \frac{dv_0}{dz} \right|_{z=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0, \quad (2.128a)$$

$$v_0|_{z=0} = 0 \rightarrow C_2 = 0. \quad (2.128b)$$

Ezek alapján a **maximális lehajlás** értéke:

$$\boxed{v_0|_{z=L} = + \frac{FL^3}{3EI_x}}. \quad (2.129)$$



2.2.2. Konzol lehajlásának meghatározása Timoshenko-elmélettel

Vegyük alapul a nyomatékra és a nyíróerőre levezetett (2.53)-as egyenleteket:

$$\frac{d\phi_x}{dz} = -\frac{M_x(z)}{EI_x} = \frac{FL}{EI_x} \left(\frac{L-z}{L} \right), \quad (2.130a)$$

$$\frac{dv_0}{dz} = \frac{V_y(z)}{\kappa GA} - \phi_x = \frac{F}{\kappa GA} - \phi_x. \quad (2.130b)$$

Integráljuk az első egyenletet:

$$\phi_x = \frac{FL}{EI_x} \left(z - \frac{z^2}{2L} \right) + C_1. \quad (2.131)$$

Helyettesítsük be a most kapott összefüggést a második egyenletbe:

$$\frac{dv_0}{dz} = \frac{F}{\kappa GA} + \frac{FL}{EI_x} \left(z - \frac{z^2}{2L} \right) - C_1. \quad (2.132)$$

Integrálva ezt az egyenletet - és megtartva az elfordulásra kapott kifejezést - az alábbi egyenleteink lesznek:

$$\phi_x = \frac{FL}{EI_x} \left(z - \frac{z^2}{2L} \right) + C_1, \quad (2.133a)$$

$$v_0 = \frac{Fz}{\kappa GA} + \frac{FL}{EI_x} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right) - C_1 z + C_2. \quad (2.133b)$$

A peremfeltételeket figyelembe véve az integrálási konstansok ezúttal is egyszerűen meghatározhatók:

$$\phi_x|_{z=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0, \quad (2.134a)$$

$$v_0|_{z=0} = 0 \rightarrow C_2 = 0. \quad (2.134b)$$

Ezek után a **legnagyobb lehajlás** már meghatározható:

$$\boxed{v_0|_{z=L} = \frac{FL}{\kappa GA} + \frac{FL^3}{3EI_x}}, \quad (2.135)$$

ahol a második tag a tiszta hajlításból származó lehajlás - ahogy a klasszikus elméletnél is láttuk - az első tag pedig a nyírás hatásából származó eltolódás. Jelen feladatnál ez az **első tag jelenti a különbséget** a *klasszikus* modell és a *Timoshenko-modell* között.



2.2.3. Konzol lehajlásának meghatározása harmadfokú nyírési gerendamodellel

Az analitikus megoldást a *harmadfokú nyírési gerendamodellel* is előállítom. A konzolra figyelembe veendő peremfeltételek a következők:

$$v_0(0) = \frac{dv_0}{dz}(0) = \phi_x(0) = \frac{dM_x}{dz}(L) = M_x(L) = P_x(L) = 0. \quad (2.136)$$

A feladat megoldásához meg kell határozni a hat darab $-C_i$ - integrálási konstans. Ehhez fel kell írni a *Reddy-Bickford-féle harmadfokú elmélet* és a *klasszikus elmélet* közötti kapcsolatot. Az egyenletekben az R felső index a *Reddy-Bickford-elmélet* szerint, míg a B felső index a *Bernoulli-Navier-elmélet* szerint meghatározott változókra utal. A nyírőerőkre vonatkozó összefüggés az alábbi módon alakul:

$$\widehat{Q}_y(z) = V_y^R - \beta R_y + \alpha \frac{dP_x}{dz} = \frac{dM_x^R}{dz} = V_y^B(z) + C_1. \quad (2.137)$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a *klasszikus elmélettel* számolt nyírőerő és a *Reddy-Bickford-elmélet* szerinti *effektív nyírőerő* csupán a C_1 integrálási konstansban különbözhet. A (2.137)-es egyenletből következik, hogy:

$$C_1 = 0, \quad (2.138)$$

hiszen a nyírőerő értéke - statikailag határozott tartóknál - az alkalmazott gerendamodellről független kell, hogy legyen. A (2.137)-es egyenletet z szerint integrálva a nyomatékok kapcsolatát leíró egyenlethez jutunk:

$$M_x^R = M_x^B + C_1 z + C_2, \quad (2.139)$$

melyből a fentivel megegyező megfontolások alapján következik, hogy:

$$C_2 = 0. \quad (2.140)$$

A v_0 eltolódások z szerinti deriváltjainak kapcsolatára az alábbi összefüggés írható fel:

$$D_x \frac{dv_0}{dz} = -D_x \phi_x^R(z) + \frac{D_x}{A_y} V_y^R = D_x \frac{dv^B}{dz} + \frac{\widehat{D}_x}{A_y} V_y^R - C_1 \frac{z^2}{2} - C_2 z - C_3. \quad (2.141)$$

A (2.141)-es egyenletből, és a (2.136)-os peremfeltételekből következik, hogy:

$$C_3 = 0. \quad (2.142)$$

Ahhoz, hogy v_0 eltolódások kapcsolatát leíró összefüggéshez jussunk, integráljuk z szerint a (2.141)-es egyenletet:

$$D_x v_0 = D_x v^B(z) + \frac{\widehat{D}_x}{A_y} \left(\int V_y^R(z) dz \right) - C_1 \frac{z^3}{6} - C_2 \frac{z^2}{2} - C_3 z - C_4. \quad (2.143)$$



Látható, hogy a C_4 meghatározásához szükséges $V_y^R(z)$ nyíróerő függvénynek - és az integráltjának - az ismerete. Ehhez az alábbi másodrendű differenciálegyenletet kell megoldanunk:

$$\alpha \left(\frac{F_x \widehat{D}_x}{D_x \widehat{A}_y} - \frac{\widehat{F}_x}{\widehat{A}_y} \right) \frac{d^2 V_y^R}{dz^2} - \frac{\bar{A}_y}{\widehat{A}_y} V_y^R + \left(\frac{\widehat{D}_x}{D_x} \right) (V_y^B + C_1) = 0. \quad (2.144)$$

Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása a következő:

$$V_y^R(z) = C_5 \sinh(\lambda z) + C_6 \cosh(\lambda z) + \frac{\mu}{\lambda^2} (V_y^B + C_1), \quad (2.145)$$

ahol:

$$\lambda^2 = \frac{\bar{A}_y D_x}{\alpha (F_x \widehat{D}_x - \widehat{F}_x D_x)}; \quad \mu = \frac{\widehat{A}_y \widehat{D}_x}{\alpha (F_x \widehat{D}_x - \widehat{F}_x D_x)}. \quad (2.146)$$

A (2.136)-os peremfeltételekből - $M_x(L) = P_x(L) = 0$ - valamint a (2.97a-b) összefüggésekből következik, hogy:

$$\frac{dV_y^R}{dz}(L) = 0, \quad (2.147)$$

míg a $\frac{dv_0}{dz}(0) = \phi_x(0) = 0$ peremfeltételek alapján:

$$V_y^R(0) = 0. \quad (2.148)$$

Megjegyzem, hogy ugyan a befogásnál $V_y^R = 0$, de természetesen a gerendára ható "tényleges" nyíróerő - melyet ebben az elméletben **effektív nyíróerő**nek nevezünk, és $\widehat{Q}_y(z)$ jelöltem - **nem** lesz **nulla**, hanem - ahogy a (2.137)-es és (2.138)-as egyenletek is mutatják - megegyezik a *Bernoulli-Navier-elmélettel* számított nyíróerő értékével.

A (2.145)-ös egyenlet és a (2.148)-as peremfeltétel alapján a C_6 -os konstans már meghatározható:

$$C_6 = -\frac{\mu}{\lambda^2} F. \quad (2.149)$$

Ha ezt behelyettesítjük a (2.145)-ös egyenletbe, elvégezzük a deriválást, és felhasználjuk a (2.147)-es peremfeltételt, akkor C_5 konstansra az alábbi érték adódik:

$$C_5 = \frac{\mu}{\lambda^2} F \tanh(\lambda L). \quad (2.150)$$

Ezek ismeretében a $V_y^R(z)$ függvény, valamint ennek az integráltja már előállítható:



$$V_y^R(z) = \frac{\mu}{\lambda^2} F \tanh(\lambda L) \sinh(\lambda z) - \frac{\mu}{\lambda^2} F \cosh(\lambda z) + \frac{\mu}{\lambda^2} F, \quad (2.151)$$

$$\int V_y^R(z) dz = \frac{\mu}{\lambda^3} F \tanh(\lambda L) \cosh(\lambda z) - \frac{\mu}{\lambda^3} F \sinh(\lambda z) + \frac{\mu}{\lambda^2} Fz. \quad (2.152)$$

A (2.152)-es összefüggés (2.143)-ba történő behelyettesítésével, és a $v_0(0) = 0$ peremfeltétel felhasználásával a C_4 konstans kifejezhető:

$$C_4 = \frac{\widehat{D}_x}{D_x \widehat{A}_y} \left(\frac{\mu}{\lambda^3} F \tanh(\lambda L) \right). \quad (2.153)$$

Ekkor a (2.143)-as összefüggésből - feltételezve, hogy a *Bernoulli-Navier-elmélet* szerinti megoldás ismert - már minden tagot ismerünk, így a lehajlásfüggvény a következőképpen alakul:

$$v_0 = + \frac{FL}{EI_x} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right) + \frac{\mu}{\lambda^3} F \frac{\widehat{D}_x}{D_x \widehat{A}_y} \left(\tanh(\lambda L) \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L) + \lambda L - \tanh(\lambda L) \right). \quad (2.154)$$

Ezek alapján a **konzolvégi lehajlásra** - $z = L$ helyettesítéssel - az alábbi képletet kapjuk:

$$v_0(L) = + \frac{FL^3}{3EI_x} + \frac{\mu}{\lambda^3} F \frac{\widehat{D}_x}{D_x \widehat{A}_y} \left(\tanh(\lambda L) \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L) + \lambda L - \tanh(\lambda L) \right). \quad (2.155)$$

2.2.4. Konzol lehajlásának meghatározása hiperbolikus gerendaelmélettel

Az analitikus megoldást a *hiperbolikus gerendamodellel* is elvégeztem. A feladathoz kapcsolódó peremfeltételek a következők:

$$EI \frac{d^2 v_0}{dz^2} \Big|_{z=L} = EI \frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=L} = \frac{dv_0}{dz} \Big|_{z=0} = v_0 \Big|_{z=0} = \varphi \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.156)$$

A (2.108)-as egyenletben szereplő $Q(z)$ általánosított nyíróerő megegyezik a gerendára ható F erővel, így:

$$Q(z) = F \rightarrow C_1 = 0. \quad (2.157)$$

A (2.113)-as, valamint (2.157)-es egyenletek, és a $\varphi(0) = 0$ peremfeltétel alapján:

$$C_2 = \frac{F}{\beta EI_x}. \quad (2.158)$$



A (2.113)-as és (2.158)-as összefüggések, valamint a $\frac{d\varphi}{dz}(L) = 0$ feltételből C_3 meghatározható:

$$C_3 = -\frac{F}{\beta EI_x} \tanh(\lambda L). \quad (2.159)$$

(2.158) és (2.159) alapján:

$$\varphi(z) = \frac{F}{\beta EI_x} (\cosh(\lambda L) - \tanh(\lambda L) \sinh(\lambda z) - 1). \quad (2.160)$$

A (2.113)-as általános megoldás, és a $v_0(0) = 0$ peremfeltétel alapján:

$$C_6 = \frac{A_0 F}{\beta \lambda} \tanh(\lambda L). \quad (2.161)$$

A (2.113)-as összefüggés deriválása, és a $\frac{dv_0}{dz}(0) = 0$ peremfeltétel figyelembevételével:

$$C_5 = -\frac{A_0 F}{\beta}. \quad (2.162)$$

A (2.113)-as összefüggés további deriválásával, és a $\frac{d^2v_0}{dz^2}(L) = 0$ peremfeltétel alapján:

$$C_4 = -\frac{L^2 F}{2}. \quad (2.163)$$

Az imént meghatározott integrálási konstansok behelyettesítésével a lehajlásfüggvény a következő alakot ölti:

$$v_0(z) = +\frac{Fz^3}{3EI_x} + \frac{FA_0}{EI_x \beta \lambda} (z\lambda - \sinh(\lambda z) + \tanh(\lambda L)(\cosh(\lambda L) - 1)). \quad (2.164)$$

Ez az egyenlet az alábbi alakba írható át:

$$v_0(z) = +\frac{FL^3}{6EI_x} \left(3\frac{z^2}{L^2} - \frac{z^3}{L^3} \right) + \frac{6FL}{5GA} \left(\frac{z}{L} + \frac{\cosh(\lambda z) - \sinh(\lambda z) - 1}{\lambda L} \right). \quad (2.165)$$

Az iménti egyenletbe történő $z = L$ helyettesítéssel megkapjuk a **konzolvég lehajlását**:

$$\boxed{v_0(L) = +\frac{FL^3}{3EI_x} \left(1 + 0,6(1 + \nu) \frac{h^2}{L^2} \right)}. \quad (2.166)$$

Ennél a felírási módnál jól látható, hogy a **nyírásból származó lehajlástöbblet** értéke **másodrendben függ** a keresztmetszeti magasság és a gerenda hosszúság arányától.

2.3. Numerikus számítások eredményeinek összehasonlítása

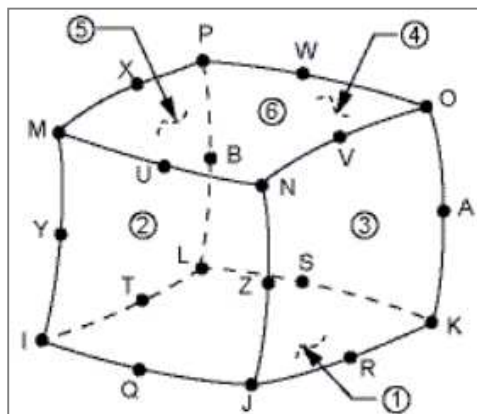
2.3.1. A numerikus vizsgálatok célja

Munkámban a különböző **gerendamodellekkel kapott eredményeket** a klasszikus **kontinuummechanikai összefüggések eredményeivel hasonlítom össze**. Úgy tekintem, hogy a kontinuummechanikai megközelítéssel pontos eredményekhez jutunk, és így az ehhez képesti eltéréseket elemzem a különböző modellek esetén. A klasszikus rugalmasságtani összefüggések bonyolultsága miatt a **kontinuummechanikai eredményeket** numerikusan, **3D végelelemes szimulációk segítségével állítom elő**. A numerikus elemzést **téglalap** keresztmetszetű gerendák (konzolok) vizsgálatával kezdem, majd a fejezet második felében további, gyakran használt - **kör**, téglalap alakú **zártszelvény** és **I - keresztmetszetekkel** is elvégzem a számításokat. A vizsgálatokat a keresztmetszeti méretek változtatása nélkül, **különböző gerendahosszakra** hajtottam végre, és az egyes modellekkel kapott eredményeket az adott h/L arány ismeretében adom meg.

2.3.2. A végelelemes modell

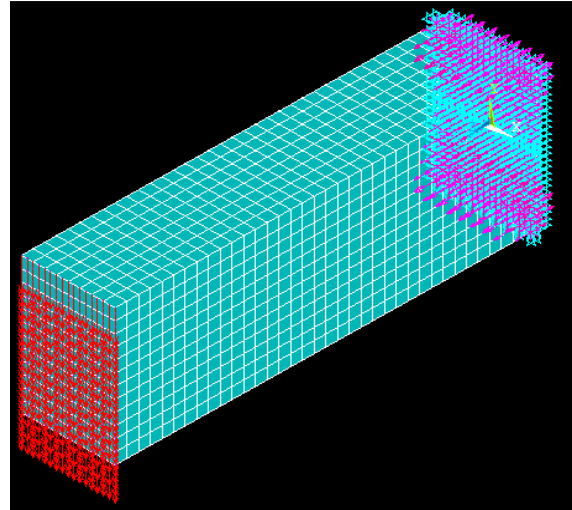
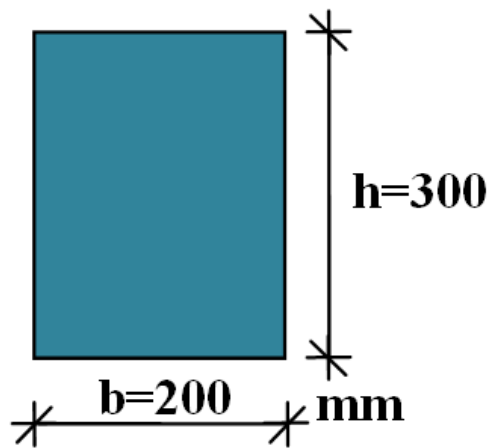
Mivel munkámban a **végelelem-módszerrel** kapott eredményeket tekintem etalonnak, fontos, hogy a numerikus számítások **megfelelő pontosságúak** legyenek. Mivel ezek döntően az alkalmazott elemszámtól és a végelelemek tulajdonságaitól függenek, ezért minden számítást **konvergenciavizsgálattal** kezdtem, hogy olyan sűrű elemfelosztással dolgozzak, amelyet a feladat megkövetel. A végelelemes futtatásokat az *Ansys 15.0* szoftverrel végeztem el.

A pontosságra való törekvésnek megfelelően a számításokhoz *Solid186*-os **testelemeket** használtam. Ez egy **20 csomópontos** végelelem, csomópontonként három - eltolódási - szabadságfokkal. Ennek a végelemnek az alkalmazásakor az elmozdulásmezőt tehát (mindhárom változójában) **kvadratisz bázisfüggvények** lineáris kombinációjaként közelítjük. Az alkalmazott végelelem a (2.7)-es ábrán látható.



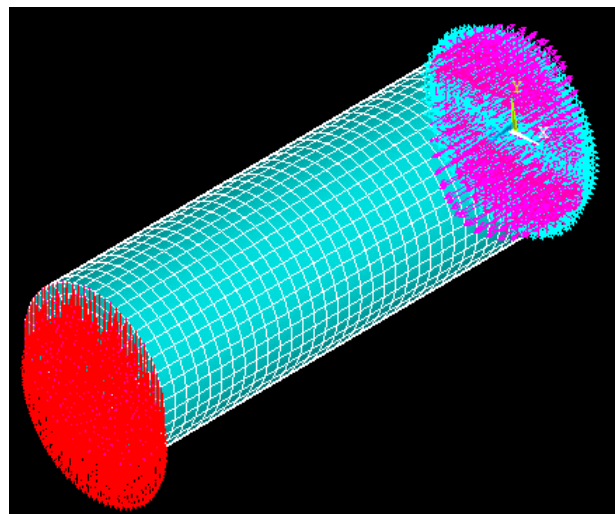
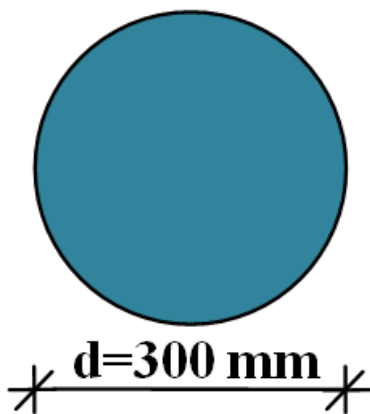
2.7 ábra *Solid 186*-os végelelem

A **téglalap keresztmetszetű** gerenda végeleemes modellje a (2.8)-as ábrán látható. A befogásnál a támaszkeresztmetszeten lévő csomópontok eltolódásait mindhárom irányban gátoltam. Tömör keresztmetszetű gerendák esetén a **koncentrált F erő** nagyságát egyenletesen **szétosztottam** a végkeresztmetszeten lévő **csomópontokra**.



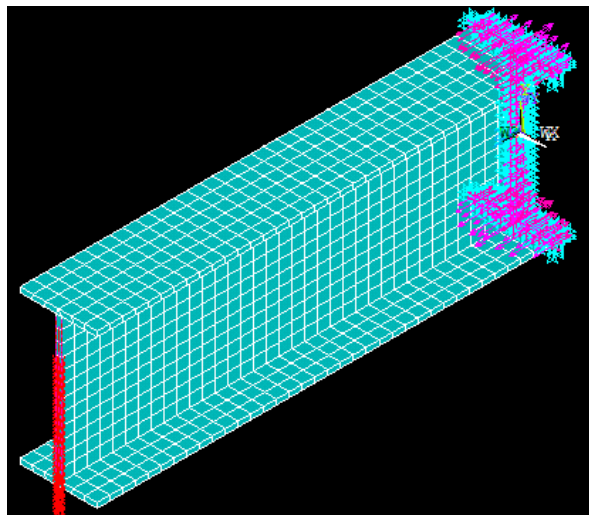
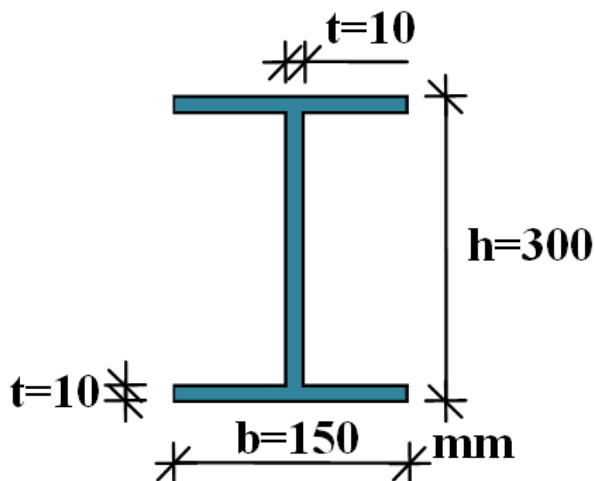
2.8 ábra Téglalap keresztmetszet és a gerenda végeleemes modellje

A számításoknál későbbiekben használt **kör keresztmetszet** és a konzol végeleemes modellje a (2.19)-es ábrán látható.

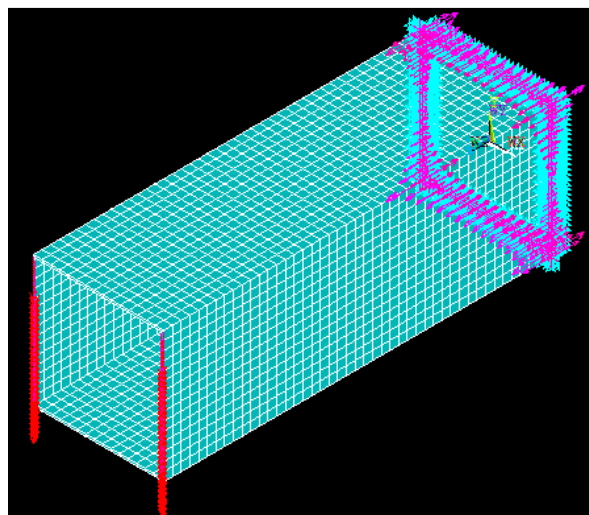
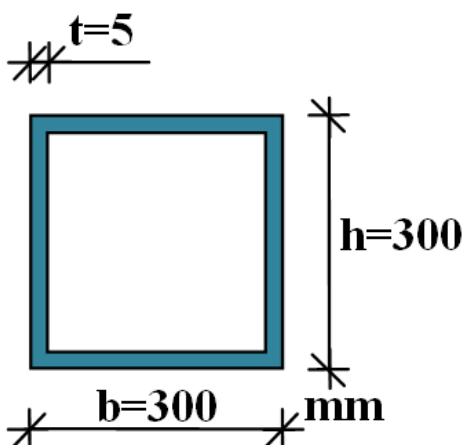


2.9 ábra Kör keresztmetszet és a gerenda végeleemes modellje

Az **I- és vékonyfalú zártszelvényű** gerendák esetén a **terhet a gerinc csomópontjaira** helyeztem rá. Az öveket közvetlenül nem terheltem, hogy az övlemezek közvetlen hajlítása ne befolyásolja a kapott feszültségek értékét. Ezeknek a gerendáknak a keresztmetszete és végeleemes modellje a (2.10)-es és (2.11)-es ábrán látható.

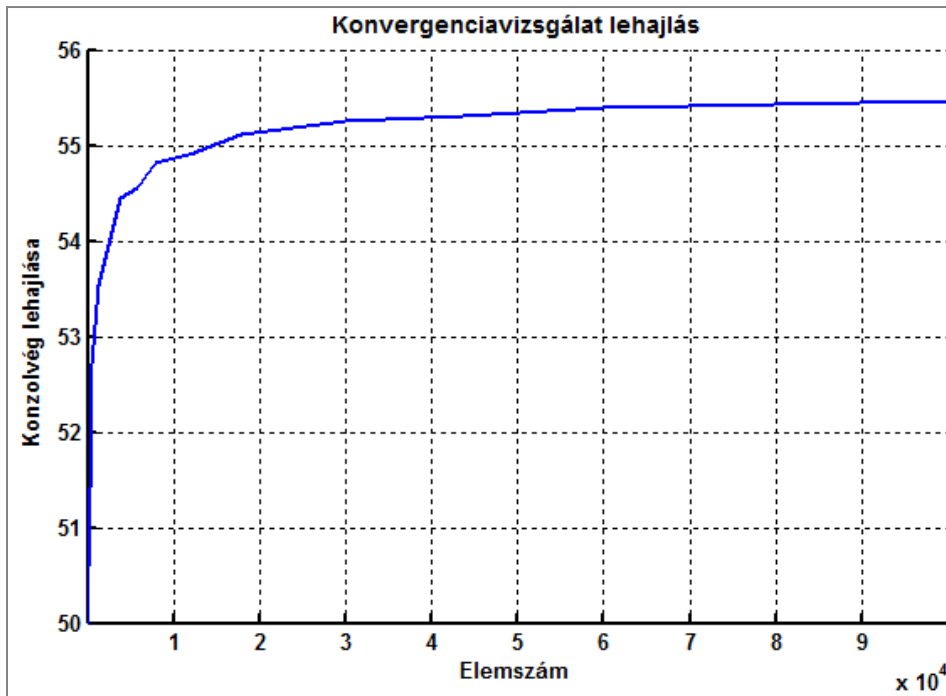


2.10 ábra I szelvény és a gerenda végelemes modellje



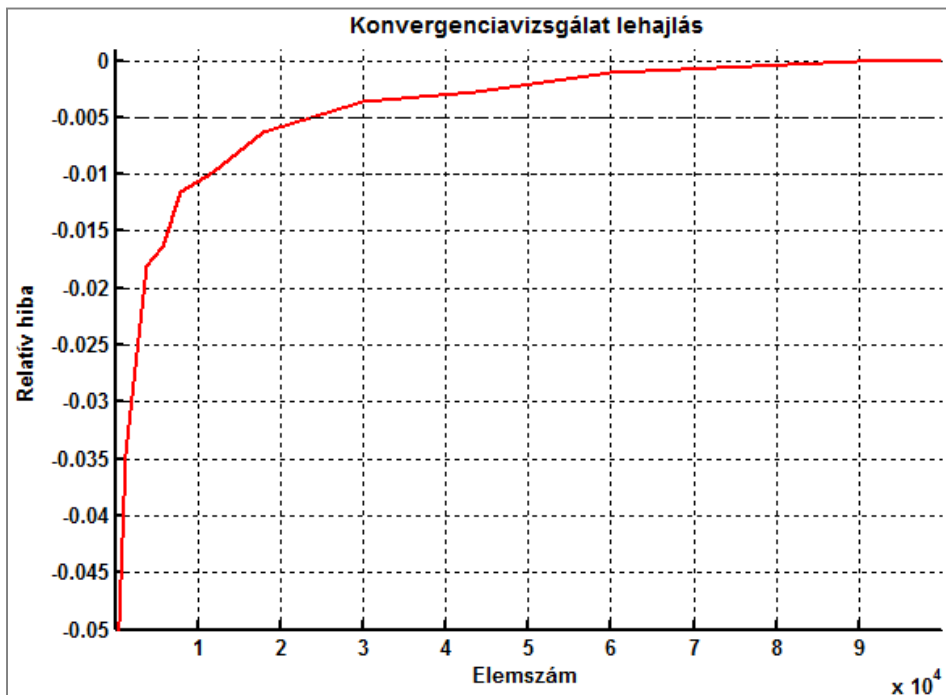
2.11 ábra Négyzet alakú zártszelvény és a gerenda végelemes modellje

A **konvergenciavizsgálatot** minden futtatás előtt elvégeztem. Ezt az ellenőrző számítást csupán egyszer részletezem, minden más esetben az itt látott módon jártam el. A vizsgálatot 20x30 cm-es téglalap alakú keresztmetszetre és 50 cm-es gerendahossz esetére mutatom be. Ez egy rövid gerenda, ahol az egyes modellek szolgáltatta eredmények százalékos eltérései már igen jelentősek lehetnek. A konvergencia ellenőrzésekor a **konzolvég lehajlását** és a középső - peremzavartól mentes - keresztmetszet ($x=0$ -hoz tartozó) **szélső szálban** ébredő **feszültségeit vizsgálom**. A konzolvég lehajlásának változása az alkalmazott elemszám függvényében a (2.12)-es ábrán látható.



2.12 ábra Konzolvég lehajlásának alakulása az elemszám függvényében

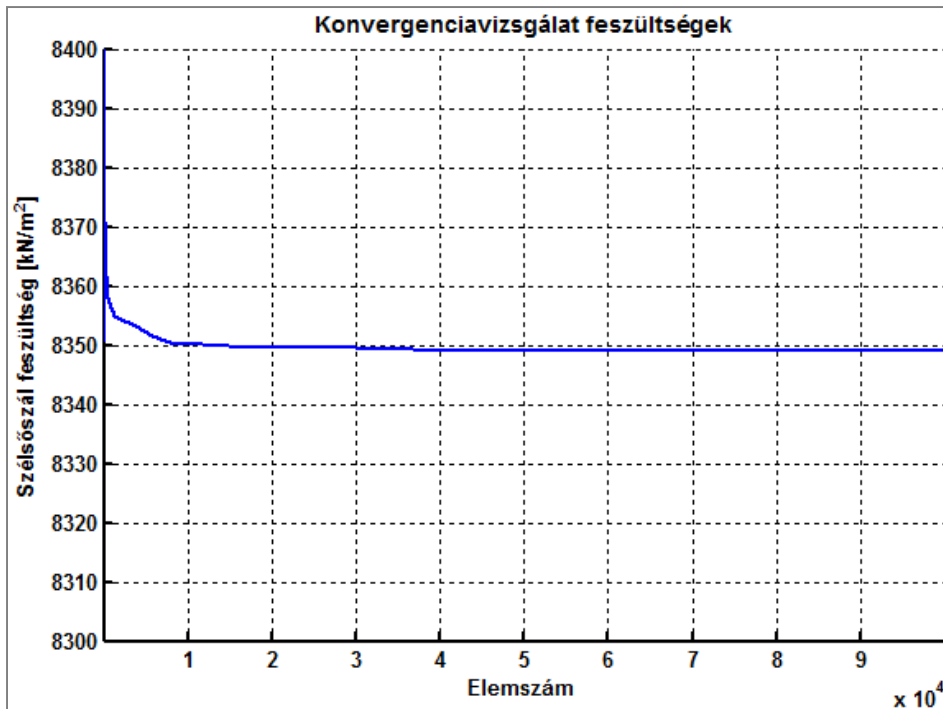
A lehajlás relatív hibájának³⁵ változása a (2.13)-as ábrán látható.



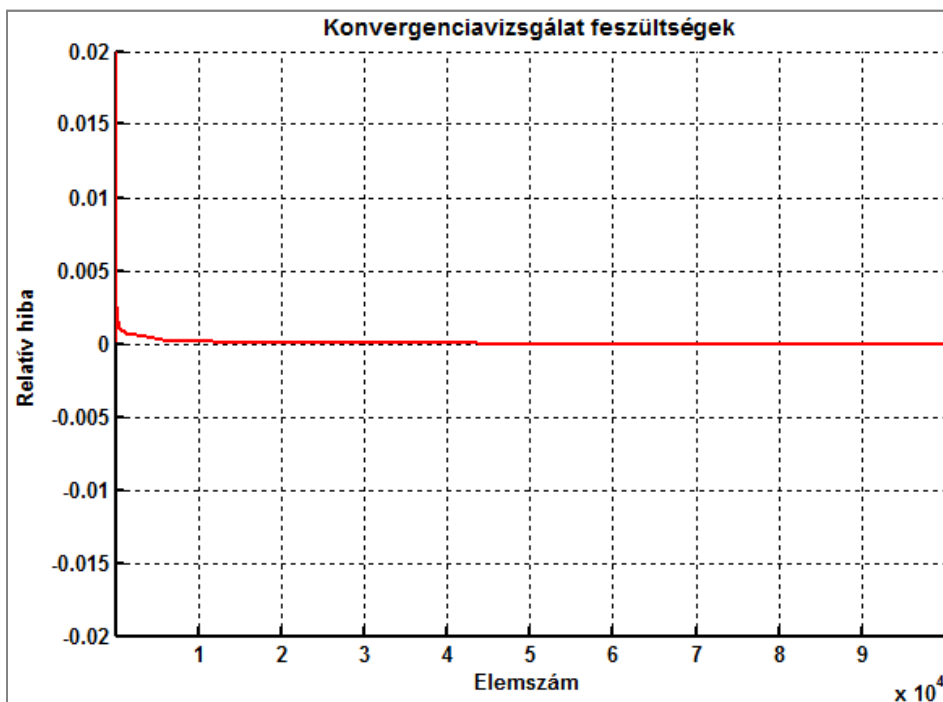
2.13 ábra Konzolvég lehajlásának relatív hibája az elemszám függvényében

A hosszirányú normál feszültségek elemszám szerinti változása a (2.14)-es, míg a relatív hiba változása a (2.15)-ös ábrán látható.

³⁵ A relatív hiba számításánál az egyes értékeket mindig az utolsó (legtöbb elemmel végzett) számítás eredményeivel vettem össze, majd a kapott különbségeket az utolsó számítás eredményéhez viszonyítottam.



2.14 ábra Középső keresztmetszet szélső szálban keletkező hosszirányú normálfeszültségének változása az elemszám függvényében



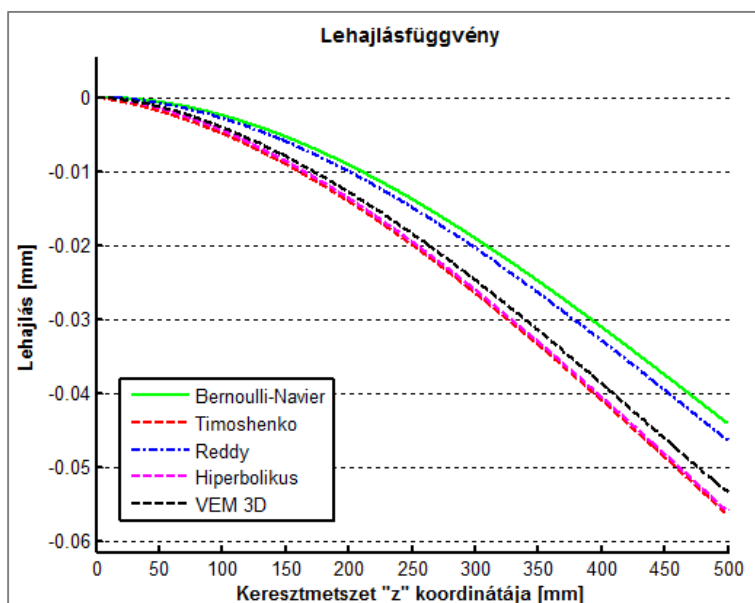
2.15 ábra Feszültségek relatív hibája az elemszám függvényében

Ahogy a (2.14)-es és (2.15)-ös ábrákon látható, jelen feladatnál a feszültségek vizsgálata már néhány ezer végeelem alkalmazása esetén is pontos eredményt ad. A lehajlások esetén a konvergencia azonban lassabbnak mutatkozott. Az (2.13)-as ábrán látható, hogy körülbelül 12.000 elem alkalmazása esetén érem el a relatív hiba 1%-os küszöbértékét, valamint kb. 25.000 elem szükséges az 5 ezreléken belüli pontosság eléréséhez. Megjegyzem, hogy a

legsűrűbb hálófelosztással végzett számítás esetén 99.900 végelelemet alkalmaztam. Ekkor az **ismeretlenek száma** megközelítette a **1.250.000**-et. A konvergenciavizsgálat alapján a futtatásokat 7 mm-es oldalméretű testelemekkel végzem el. Ez kb. 90.000 végelelemet és több mint 1.000.000 ismeretlent jelent. Így a kapott eredmények relatív hibája a valós - ténylegesen pontos - eredményekhez viszonyítva várhatóan a tízezredes nagyságrenden belül alakul.

2.3.3. Téglalap keresztmetszetű gerendák numerikus eredményeinek összehasonlítása

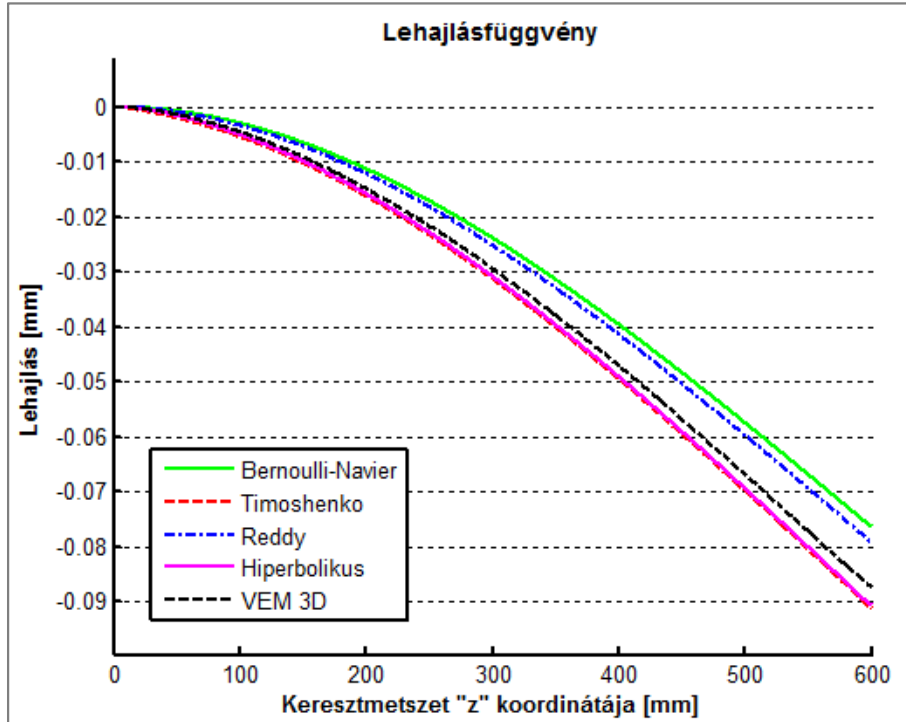
A különböző gerendamodellekkel történő analitikus számításokat a *Matlab* szoftver segítségével végeztem el. Az egyes gerendamodellekkel kapott lehajlás- és feszültségfüggvényeket a *Matlab* segítségével diagramokon ábrázolom. A végelelemes számítások eredményeit az *Ansys*-ből táblázatos formában kinyerve, szintén átültem *Matlab*-ba, így a különböző modellek eredményeit a végelelemes számítások eredményeivel egyazon diagramon ábrázolom. A következőkben bemutatom a lehajlásokra kapott eredményeket különböző - **50 cm, 60 cm, 90 cm és 150 cm-es** - **gerendahosszakra**. Emlékeztetőül: a keresztmetszet magassága 30 cm. A feladatban az anyagi állandókra az acélra jellemző értékeket használtam, úgy mint $E=210$ GPa, $G=81$ GPa és $\nu=0,3$. A konzolvégen a terhelés az esetek többségében³⁶ $F=100$ kN volt. A (2.16), (2.17), (2.18), és (2.19)-es ábrákon láthatóak a különböző modellekkel kapott lehajlások eredményei a különböző gerendahosszak esetén.



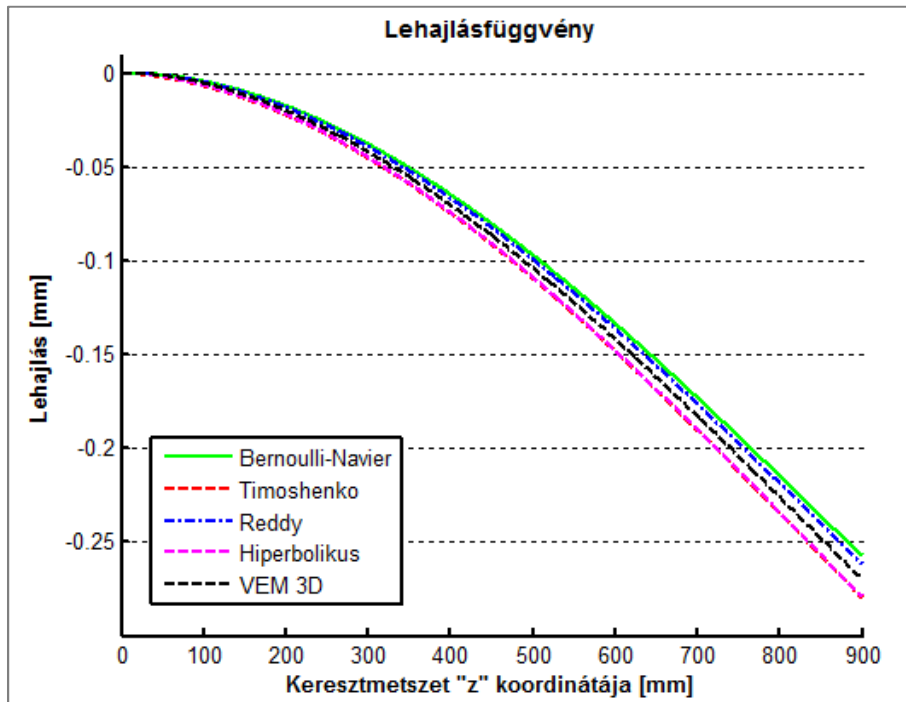
2.16 ábra 50 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda lehajlásai különböző modellek alapján³⁷

³⁶ Megemlítem, hogy bizonyos számításoknál ettől eltérő terheléssel számoltam azért, hogy a kapott lehajlások még biztosan a kis elmozdulások tartományában maradjanak. Hangsúlyozom, hogy az eredmények (lehajlások és feszültségek) abszolút, tényleges értéke most nem érdekes a számunka, **kizárólag** a különböző **gerendamodellekkel** és a 3D végelelemes **szimulációkkal kapott eredményeknek** - egymáshoz képesti - százalékos **eltéréseit vizsgálom**.

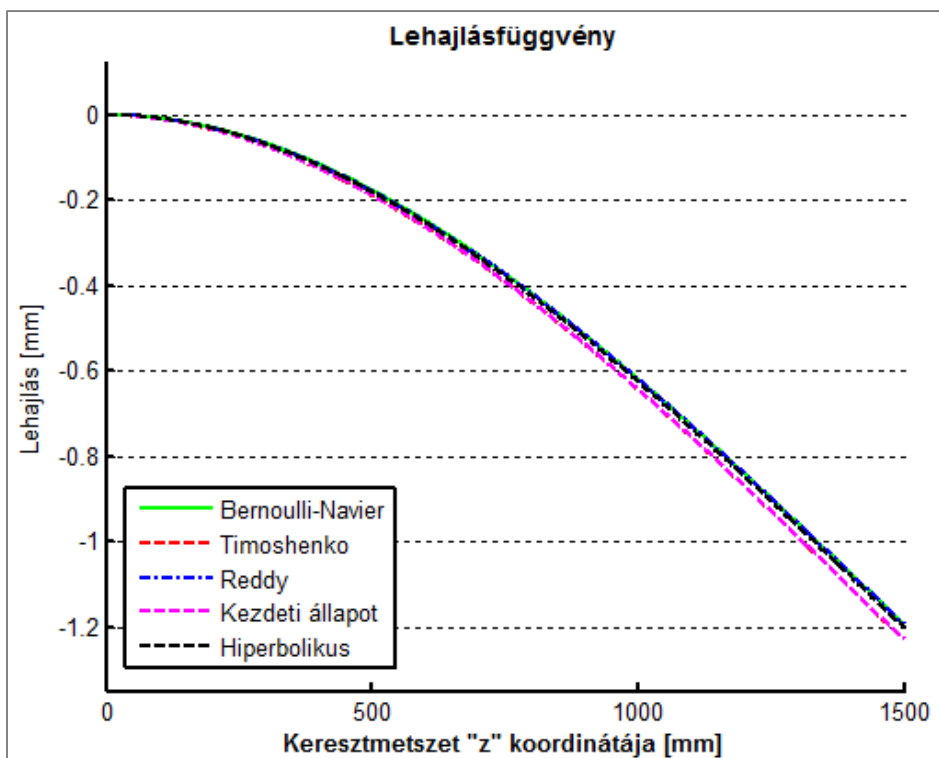
³⁷ Az ábrán szereplő negatív előjeleknek jelen esetben nincs jelentősége. Mindössze azért választottam ezt az ábrázolási módot, hogy az ábrán látható lehajlásfüggvények a lehajlott gerenda meggömbült hossz tengelyének alakjával legyenek azonosíthatók.



2.17 ábra 60 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda lehajlásai különböző modellek alapján



2.18 ábra 90 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda lehajlásai különböző modellek alapján



2.19 ábra 150 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda lehajlásai különböző modellek alapján

A téglalap keresztmetszetű konzolok végkeresztmetszetének lehajlására végzett számítások eredményeit a (2.3)-as táblázatban foglaltam össze.

h/L	0,6	0,5	0,333	0,2
Bernoulli-Navier	-17,49%	-12,73%	-4,70%	-0,82%
Timoshenko	5,52%	4,21%	3,57%	2,27%
Reddy-Bickford	-13,19%	-9,53%	-3,11%	-0,22%
Hiperbolikus	4,77%	3,76%	3,42%	2,23%

2.3 táblázat Konzolvéglehajlás százalékos eltérései a végeselemes szimulációk eredményéhez viszonyítva³⁸

Látható, hogy **rövid gerendák esetén** a vizsgált gerendamodellek eredményei százalékosan olykor **jelentősen eltérnek** a végeselemes szimulációk eredményeitől. A *Bernoulli-Navier-modell* eredménye rövid gerenda esetén közel **20%-ban** tér el a "pontos" eredménytől. Fontos kiemelni, hogy számításaim szerint a pontos lehajlás értékek a *klasszikus-* és a *Timoshenko-modell* eredményei között helyezkednek el. A számítások alapján a *Reddy-Bickford-modell* a *Bernoulli-Navier-moddellel* közel azonos eredményeket ad, míg a *hiperbolikus-moddellel* kapott lehajlások a *Timoshenko-modell* eredményeihez tartanak³⁹.

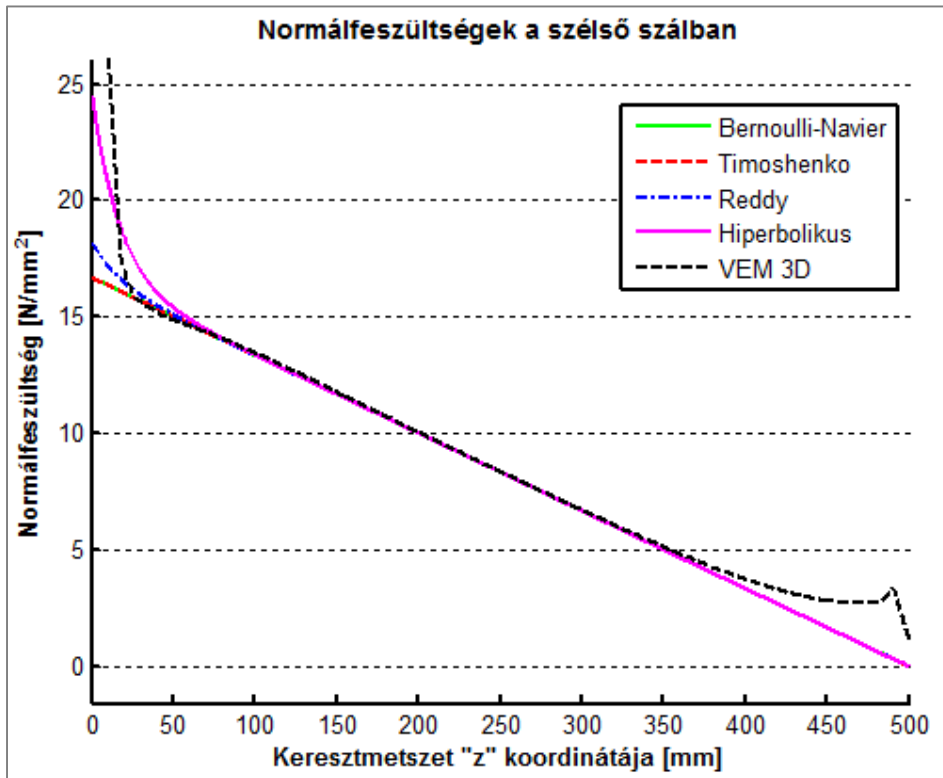
A lehajlások elemzését követően a **hosszirányú normálfeszültségek** vizsgálatára térek rá. Célom, hogy összehasonlítsam a különböző gerendamodellekkel kapott szélső szál feszültségek értékét egy **lokális hatásoktól mentes** - például konzolhossz felében lévő - **keresztmetszetenél**. A lehajlásoknál látottakhoz hasonlóan az egyes modellekkel kapott

³⁸ A táblázatban szereplő negatív előjel arra utal, hogy az adott modell alábecsüli a lehajlás értékét.

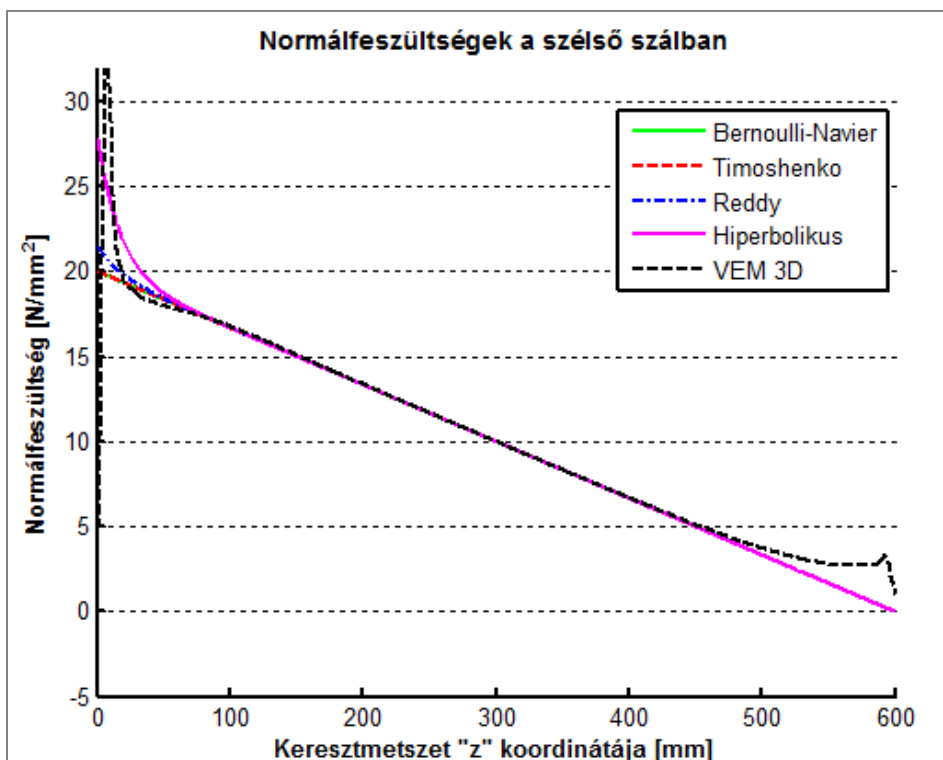
³⁹ A (2.16)-(2.19)-es ábrákon ehhez a két modellhez tartozó görbe szinte teljesen összesimult.



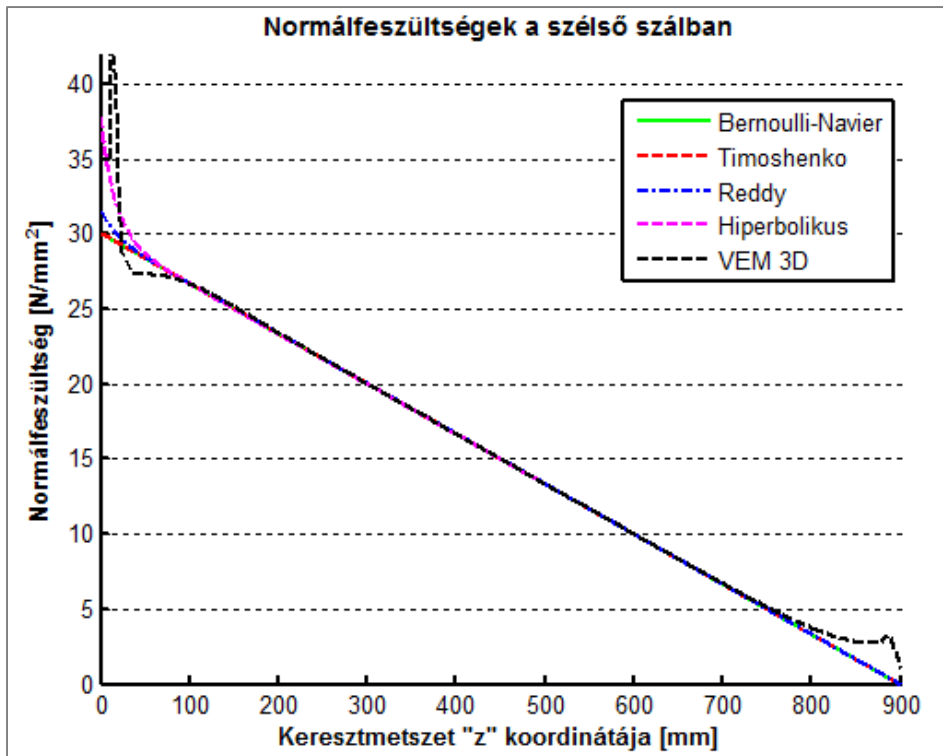
eredményeket egyazon ábrán tüntettem fel. A (2.20), (2.21), (2.22) és (2.23)-as ábrákon az ($x=0$ -hoz tartozó) szélső szál feszültségei alakulása látható a gerenda hossza mentén.



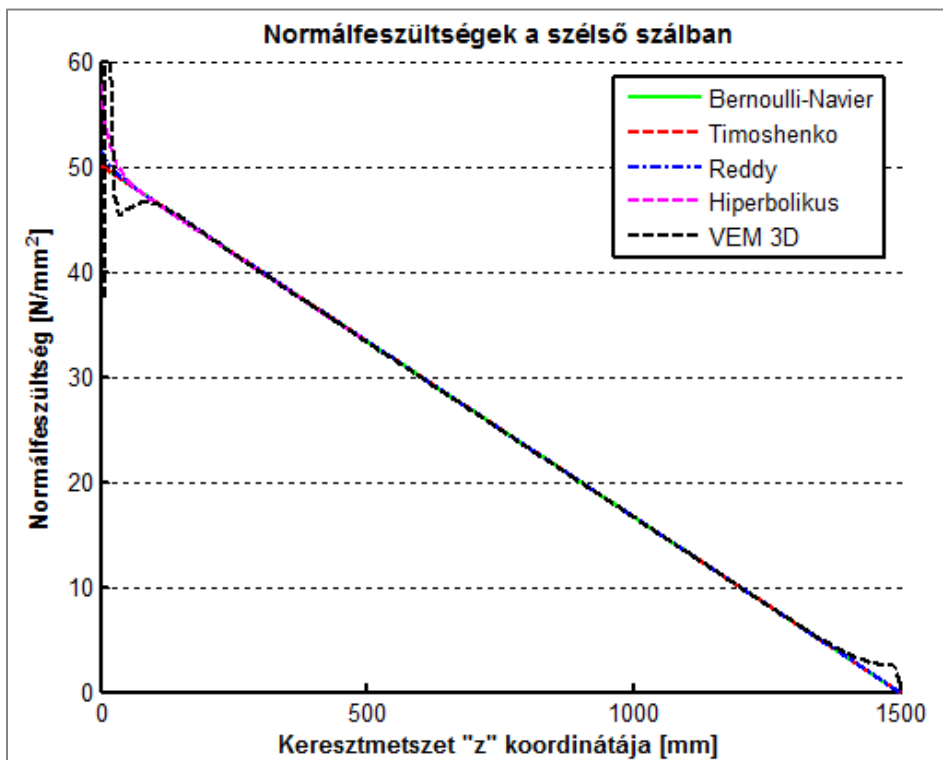
2.20 ábra 50 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda feszültségei különböző modellek alapján



2.21 ábra 60 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda feszültségei különböző modellek alapján



2.22 ábra 90 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda feszültségei különböző modellek alapján



2.23 ábra 150 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda feszültségei különböző modellek alapján

A **feszültségek vizsgálatakor** megfigyelhetjük, hogy egy általános keresztmetszet esetén az **összes vizsgált gerendamodell** nagyon jól **megközelíti** a **végeselemes szimulációk**

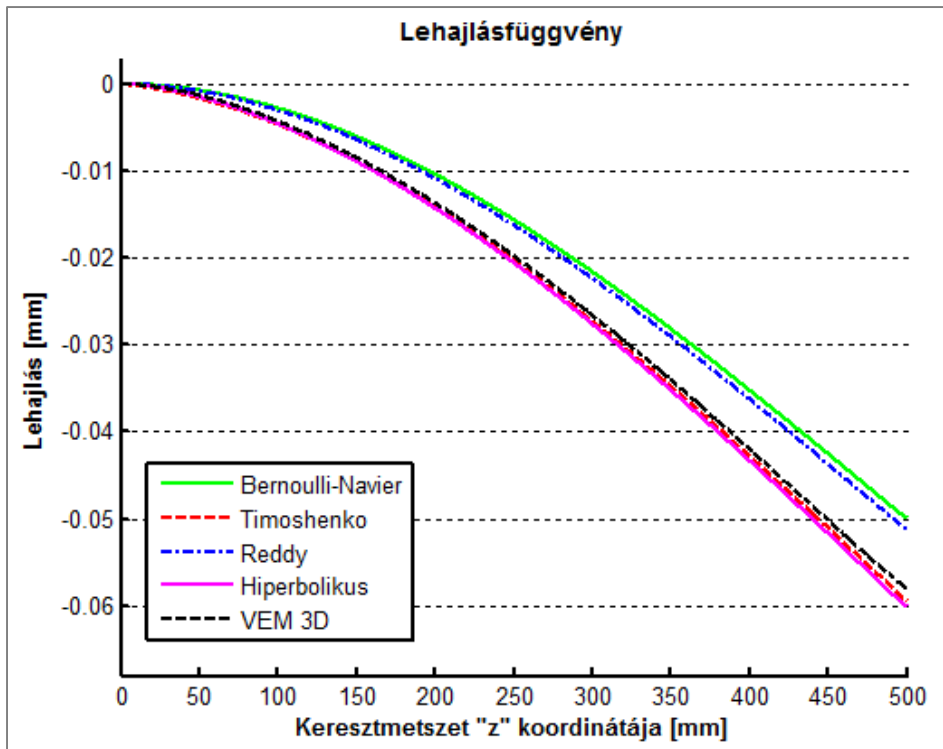


eredményét. A peremfeltételekből adódó lokális hatások következtében azonban a támaszkeresztmetszetenél a végeselemes számítások a gerendamodellekhez képest olykor merőben eltérő feszültségeket adnak. Külön említést érdemel a **hiperbolikus gerendamodell**, amely - azon túl, hogy a lehajlásokra rendszerint igen jó eredményt szolgáltat - igyekszik figyelembe venni, hogy a **lokális hatások következtében a befogásnál megnövekedett feszültségek keletkeznek**, és olykor igen **jó egyezést** mutat a kontinuum-eredményekkel. Megjegyzem, hogy a végeselemes szimulációknál nem csak a befogásnál, hanem a konzolvégen is fellépnek lokális hatások a közvetlen terhelés következtében. Ezek hatásától a *Saint-Venant-elv* következtében - mint ahogy az ábrám is megerősítik - egy általános keresztmetszet vizsgálatakor eltekinthetünk. A (2.20)-(2.23)-as ábrák alapján arra a megállapításra jutok, hogy egy **statikailag határozott tartó** vizsgálatánál, bármelyik általános keresztmetszet **feszültségvizsgálatánál minden modell esetén "pontos" eredményre** jutunk, így ezen numerikus eredmények további összehasonlító elemzését nem látjuk indokoltnak. Ez azt jelenti, hogy a gyakorlatban a kézi számításoknál elsősorban használt *Bernoulli-Navier-modell*, és a végeselemes számításoknál nagyon gyakran használt *Timoshenko-modell* téglalap keresztmetszeteknél - statikailag határozott esetben - a feszültségekre megbízható, pontos eredményt szolgáltat. Jogosan merül fel azonban a kérdés, hogy vajon statikailag határozatlan tartók esetén is ilyen mértékű egyezésről beszélhetünk-e, ahol már az igénybevételek meghatározása pusztán az egyensúlyi egyenleteket felhasználva nem vezet egyértelmű eredményhez⁴⁰.

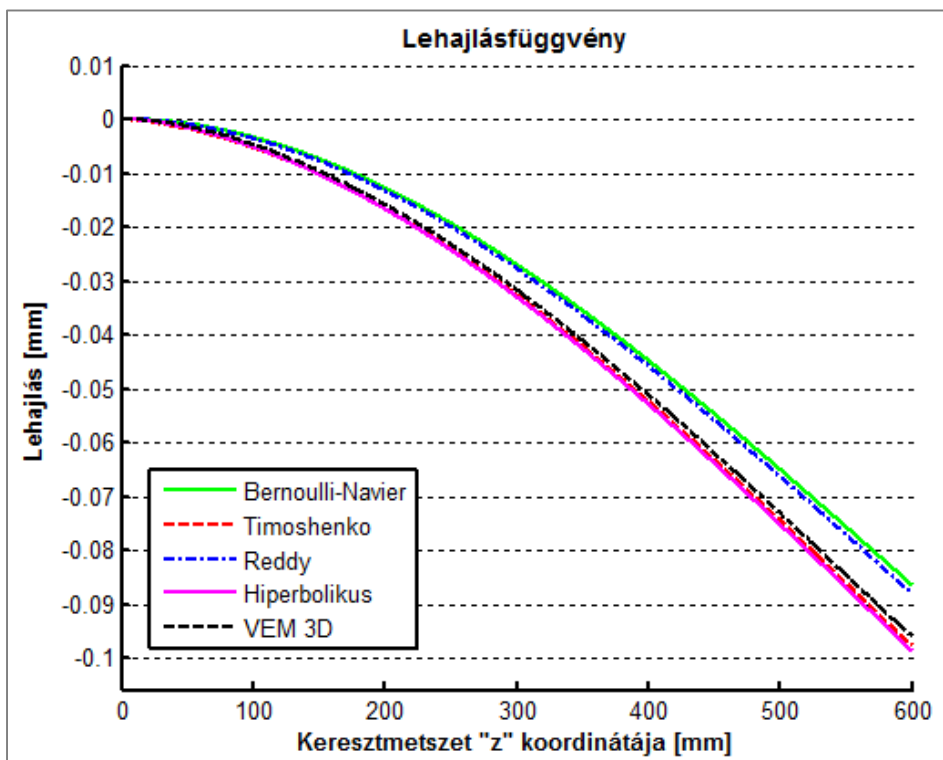
2.3.4. Kör keresztmetszetű gerendák numerikus eredményeinek összehasonlítása

Az előző pont mintájára ezúttal is először ábrákon szemléltetem a különböző modellekkel kapott eredményeket, majd táblázatokban összegzem az eltérések százalékos értékeit. A (2.24)-(2.27)-es ábrákon a lehajlások láthatóak, különböző gerendahosszak esetén. Megemlítem, hogy a 30 cm-es átmérőjű keresztmetszettel és ugyanazokkal a gerendahosszakkal végeztem el a számításokat, mint a téglalap keresztmetszet esetén, így ugyanazokról a h/L arányokról beszélhetünk, mint korábban.

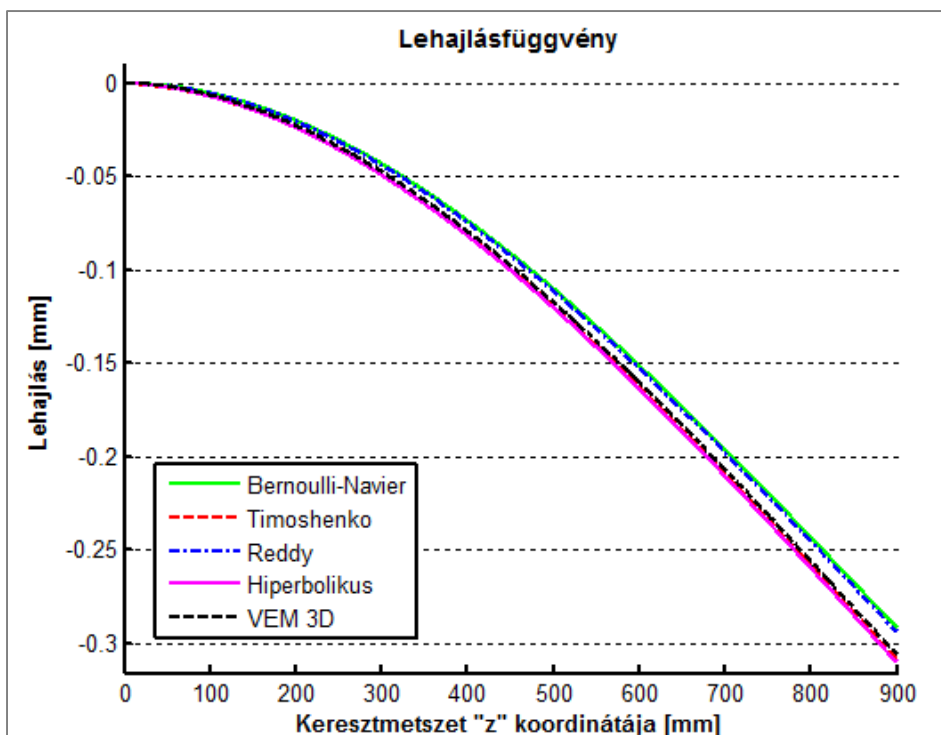
⁴⁰ Ezzel a kérdéssel később, a (2.3.7)-es alfejezetben foglalkozom.



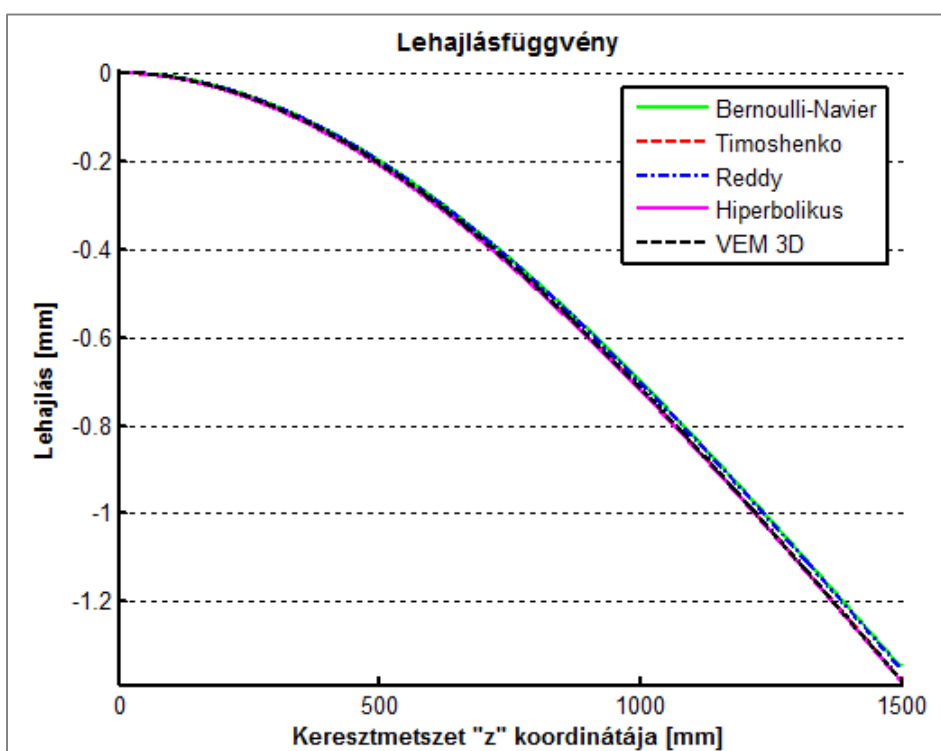
2.24 ábra 50 cm hosszú kör keresztmetszetű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



2.25 ábra 60 cm hosszú kör keresztmetszetű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



2.26 ábra 90 cm hosszú kör keresztmetszetű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



2.27 ábra 150 cm hosszú kör keresztmetszetű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



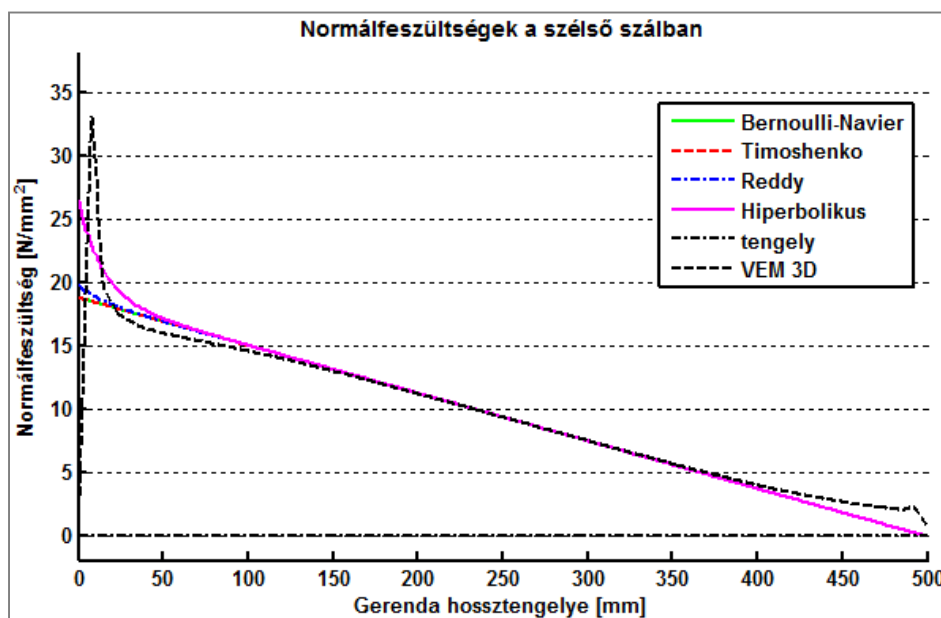
A **kör keresztmetszetű konzolok lehajlására** végzett számítások **eredményeit** a (2.4)-es táblázatban foglaltam össze.

h/L	0,6	0,5	0,333	0,2
Bernoulli-Navier	-14,03%	-10,06%	-4,82%	-2,3%
Timoshenko	2,23%	1,76%	0,74%	0,24%
Reddy-Bickford	-11,77%	-8,42%	-4,05%	-2,01%
Hiperbolikus	3,51%	2,74%	1,25%	0,04%

2.4 táblázat Konzolvéglehajlás százalékos eltérései a végeleemes szimulációk eredményéhez viszonyítva

Ezek a **kör keresztmetszetű** gerendákra kapott **eredmények** - legalábbis tendenciát tekintve - igen **hasonlóak a téglalap keresztmetszetről látottakhoz**. Nevezetesen, a pontos megoldás a *Bernoulli-Navier* és a *Timoshenko-modell* szolgáltatja eredmények között helyezkedik el. A *hiperbolikus gerendamodell* eredményei ezúttal is a *Timoshenko-modell* eredményéhez tartanak, és mindkettő jól közelíti a pontos eredményt. A (2.4)-es táblázat alapján látható, hogy mindkét modell - még a rövid gerendák esetén is - "mérnöki értelemben pontos", 5%-nál kisebb hibát eredményez. Ezúttal is megállapítható, hogy rövid gerendák esetén a *Bernoulli-Navier-féle* megoldás jelentősen, **10-15%-kal** eltér a pontos megoldástól. A 90 cm-es gerendánál a hiba már kisebb, mint 5%, és a gerendahossz további növekedésével ez tovább csökken.

A **feszültségek** elemzésénél ugyanarra a megállapításra jutottam, mint a téglalap keresztmetszetű gerendák esetén, vagyis egy általános keresztmetszet esetén a **modellek eredményei teljesen egybeolvadnak**, ahogy ez a (2.28)-as ábrán látható.



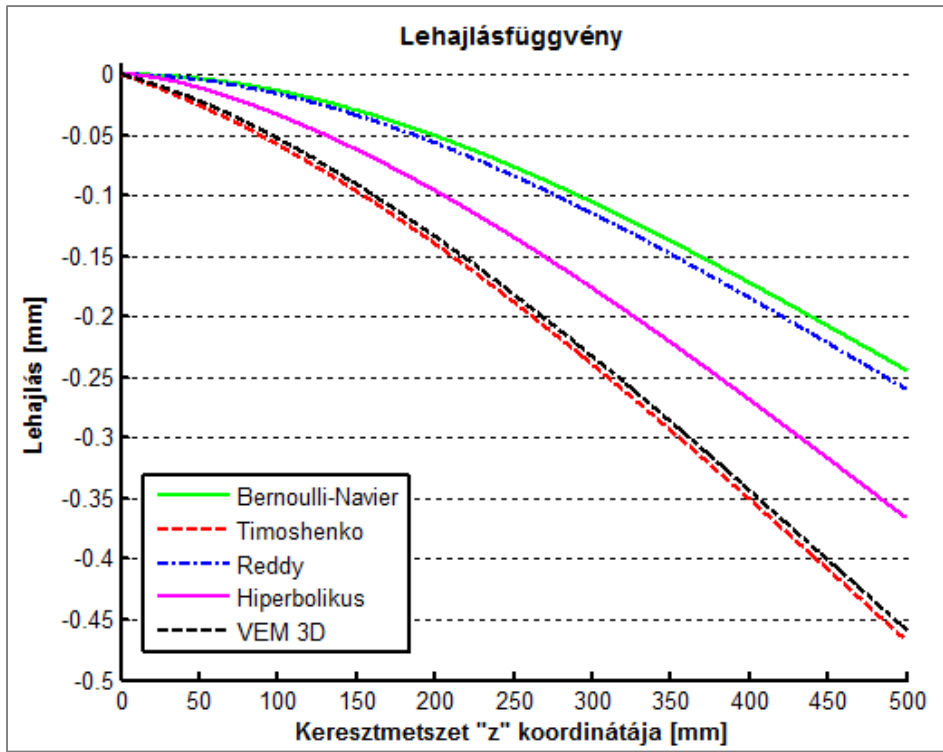
2.28 ábra 50 cm hosszú kör keresztmetszetű gerenda feszültségei különböző modellek alapján

Ezt a kiváló egyezést látva, a feszültségek eltérésének további, kvantitatív elemzésétől ezúttal is eltekintek.

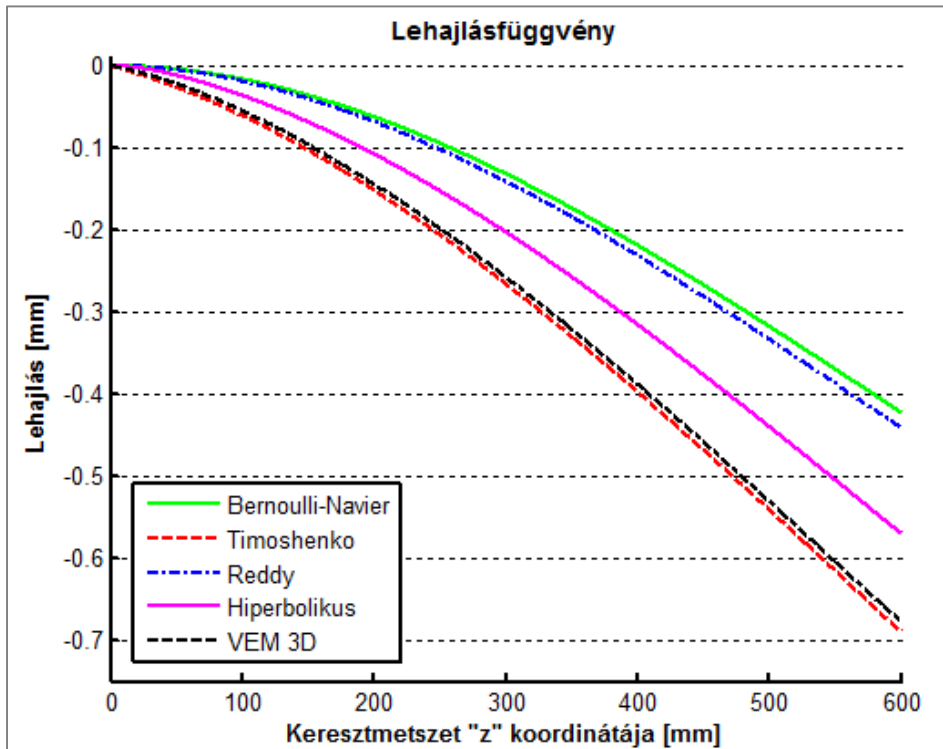


2.3.5. I keresztmetszetű gerendák numerikus eredményeinek összehasonlítása

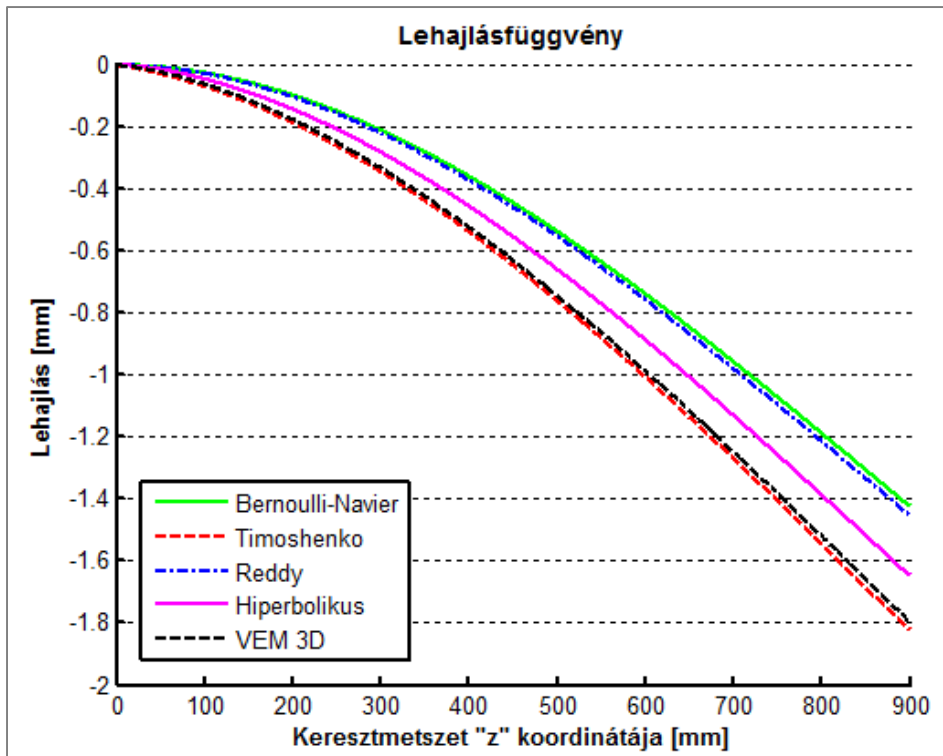
A (2.29)-(2.32)-es ábrákon láthatóak a lehajlásra kapott eredmények különböző modellek és gerendahosszak esetén.



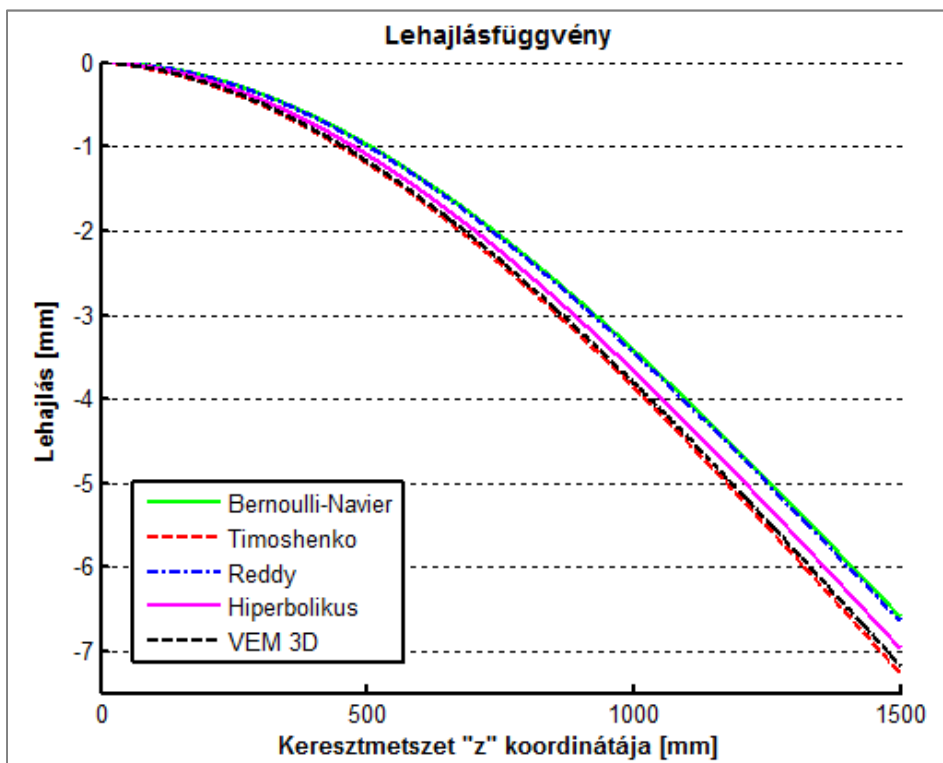
2.29 ábra 50 cm hosszú I keresztmetszetű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



2.30 ábra 60 cm hosszú I keresztmetszetű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



2.31 ábra 90 cm hosszú I keresztmetszetű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



2.32 ábra 150 cm hosszú I keresztmetszetű gerenda lehajlása különböző modellek alapján

A fenti ábrákon igen érdekes eredményt, kifejezetten **nagy különbségeket** figyelhetünk meg az egyes gerendamodellek szolgáltatta **lehajlások között**. Látható, hogy a *Timoshenko-modell* ezúttal is nagyon jól közelíti a 3D végesesemes szimulációk eredményét, azonban a



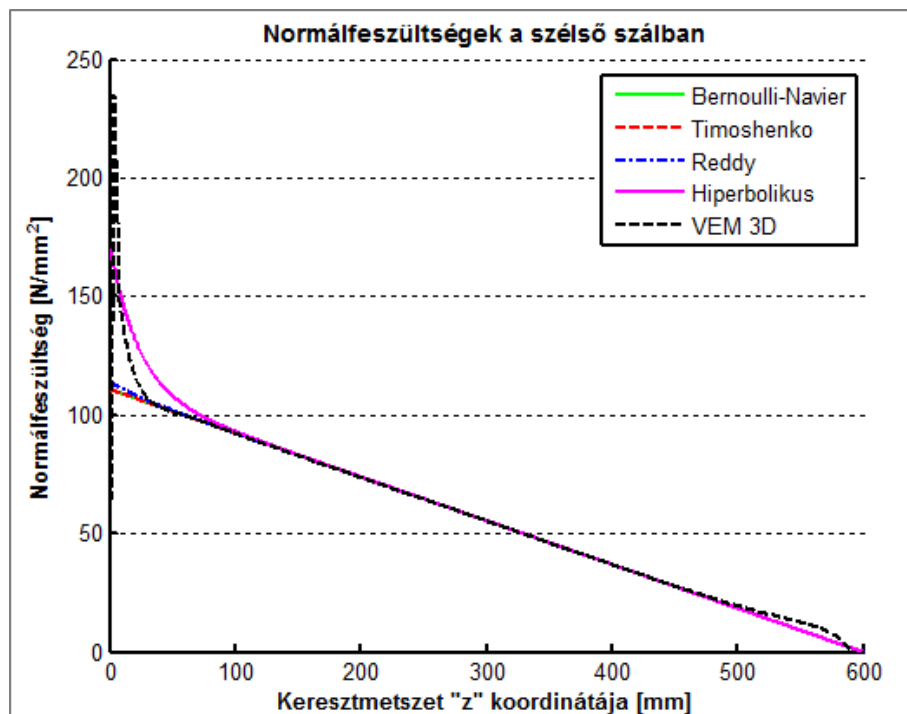
Bernoulli-Navier- és a hiperbolikus modell hibája jelentős. Ezúttal is táblázatban összegezem az eltérések százalékos értékeit.

h/L	0,6	0,5	0,333	0,2
Bernoulli-Navier	-46,82%	-37,78%	-20,86%	-8,24%
Timoshenko	1,85%	1,75%	1,49%	1,09%
Reddy-Bickford	-43,38%	-34,96%	-19,24%	-7,54%
Hiperbolikus	-20,21%	-16,00%	-8,39%	-2,98%

2.5 táblázat Konzollehajlás százalékos eltérései a végeelemes szimulációk eredményéhez viszonyítva

A (2.5)-ös táblázat megmutatja, hogy **rövid gerenda** esetén a **Bernoulli-Navier-modellel** kapott **lehajlások** a **pontos értékeknek alig több mint a felét érik el**, de még **hosszabb gerendánál** - 0,333-as és 0,2-es h/L aránynál - **sem tekinthetők "mérnöki értelemben pontosnak"**. Ezen felül látható, hogy a **hiperbolikus modell** - ami a tömör téglalap és kör keresztmetszeteknél igen jól "teljesített" - ezúttal **jelentős hibával** dolgozik. A százalékos értékek szerint a **Timoshenko-modell rövid gerendák esetén is nagyon pontos** eredményeket szolgáltat.

A **feszültségek** vizsgálata ezúttal sem kíván részletes értékelést, ugyanis a lehajlásoknál látott már-már drasztikus eltérések ellenére, a feszültségeknél **ezúttal is teljesen összesimuló görbéket kapunk**, ahogy ezt a (2.33)-as ábra mutatja. Ezúttal is jól látható, ahogy a **hiperbolikus modell** a befogás környezetében a lineáris eloszlástól eltérő, annál nagyobb feszültségekkel dolgozik.

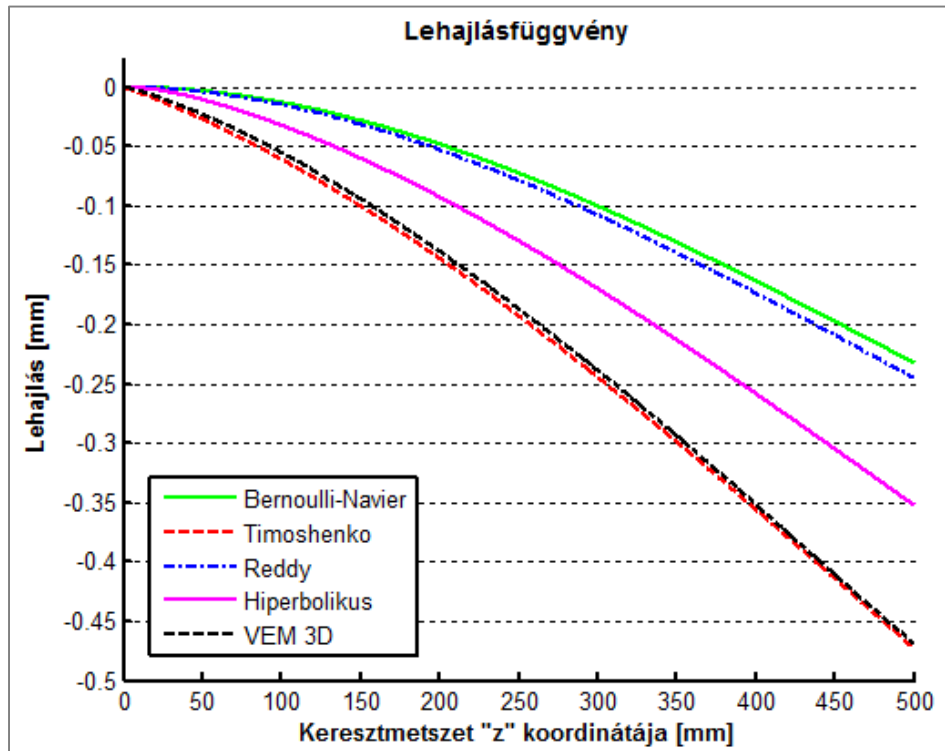


2.33 ábra 60 cm hosszú I keresztmetszetű gerenda feszültségei különböző modellek alapján

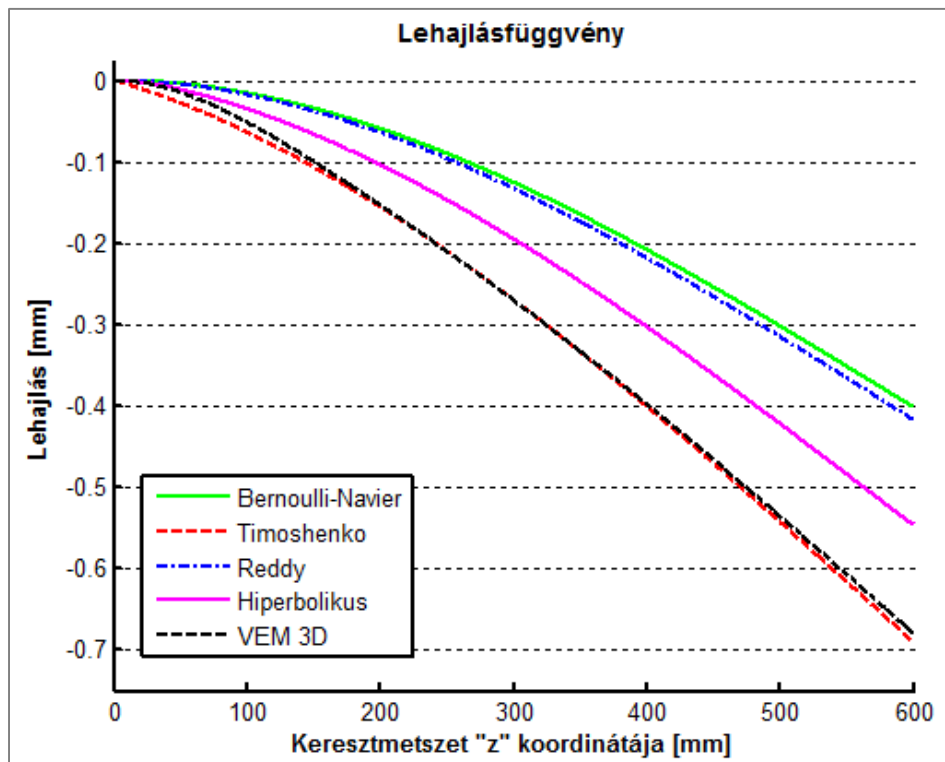


2.3.6. Vékonyfalú zártszelvényű gerendák numerikus eredményeinek összehasonlítása

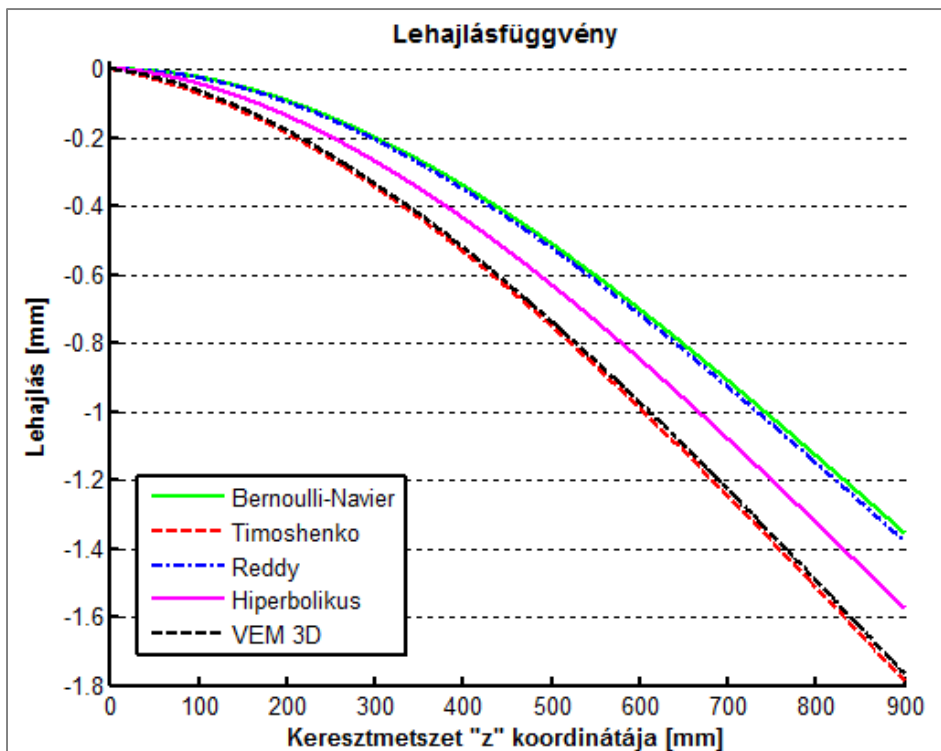
A (2.34)-(2.37)-es ábrákon láthatóak a lehajlásra kapott eredmények.



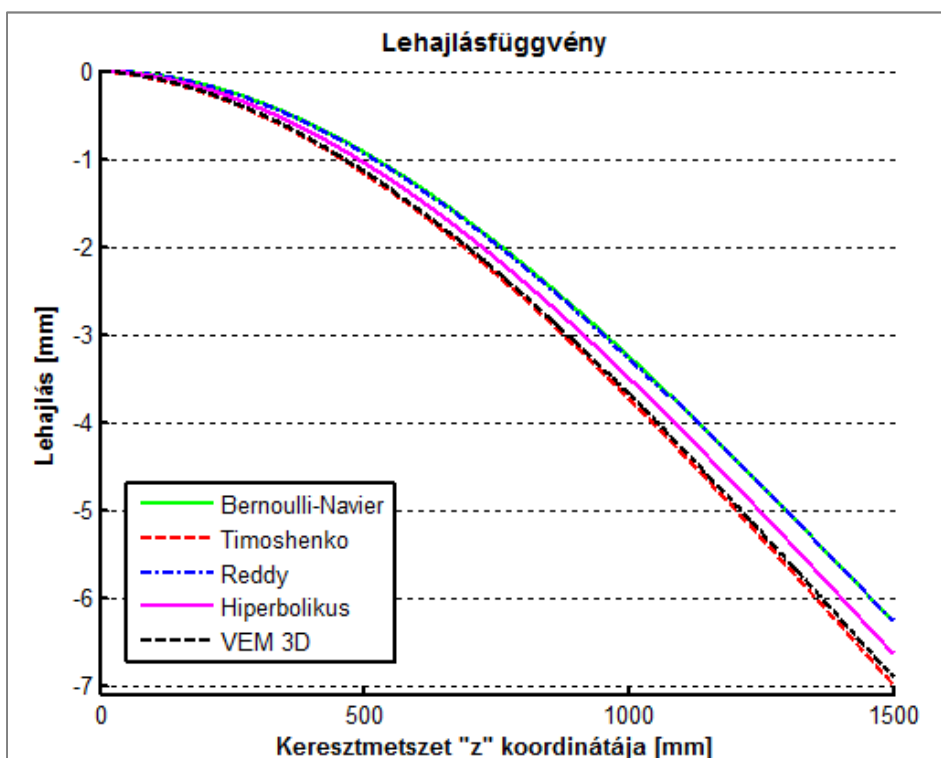
2.34 ábra 50 cm hosszú vékonyfalú zártszelvényű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



2.35 ábra 60 cm hosszú vékonyfalú zártszelvényű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



2.36 ábra 90 cm hosszú vékonyfalú zártszelvényű gerenda lehajlása különböző modellek alapján



2.37 ábra 150 cm hosszú vékonyfalú zártszelvényű gerenda lehajlása különböző modellek alapján

A (2.34)-(2.37)-es ábrákon **ugyanaz** a **tendencia** látható, **mint** amit az **I km-nél** is megfigyelhettünk, nevezetesen **rövid gerenda esetén a Bernoulli-Navier-elmélettel** kapott



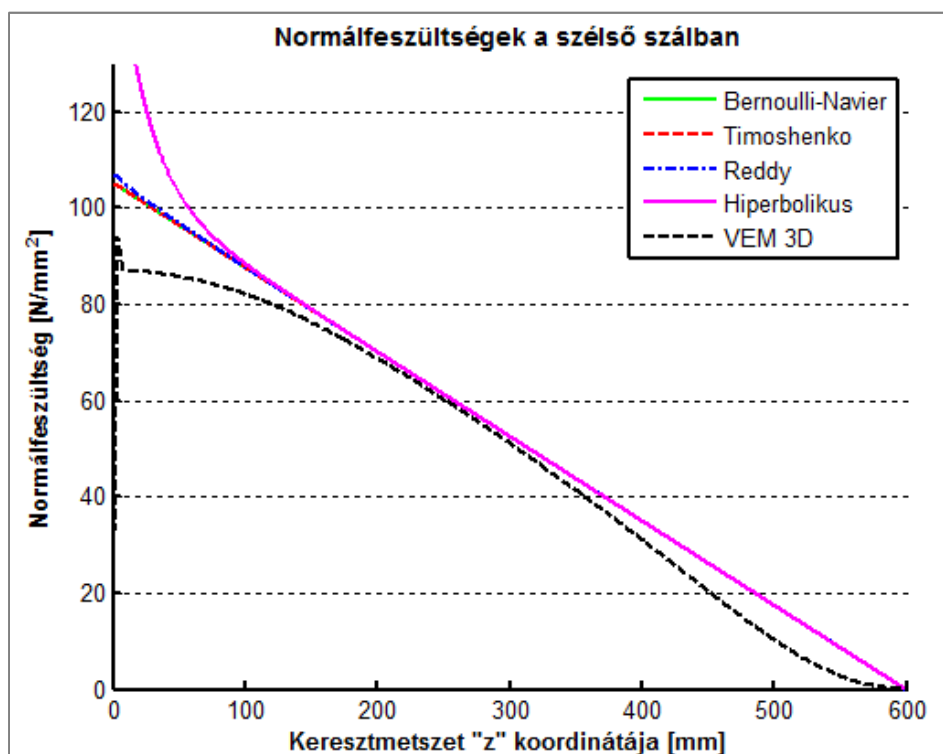
eredmények jelentősen eltérnek a pontos megoldástól, de még 0,2-es h/L aránynál is szembeötlő a különbség. A százalékos eltéréseket a (2.6)-os táblázat mutatja.

h/L	0,6	0,5	0,333	0,2
Bernoulli-Navier	-50,57%	-41,01%	-23,44%	-9,39%
Timoshenko	0,67%	1,45%	1,05%	1,04%
Reddy-Bickford	-47,82%	-38,71%	-22,10%	-8,80%
Hiperbolikus	-25,02%	-19,67%	-10,97%	-4,02%

2.6 táblázat Konzollehajlás százalékos eltérései a végeelemes szimulációk eredményéhez viszonyítva

A (2.6)-os táblázat alapján elmondható, hogy a modellek eltérései még az I km-nél látottakat is meghaladják. Az **50 cm-es gerenda** esetén a **Bernoulli-Navier-megoldás** immáron **kevesebb mint a felét adja a pontos lehajlásnak**. A **Timoshenko-modell** jelen esetben is **jó egyezést mutat a végeelemes szimulációk eredményével**, míg a **hiperbolikus modell** eredményei **számottevően eltérnek ettől**.

A teljesség kedvéért megmutatom, hogy egy általános keresztmetszetben a különböző gerendamodellekkel kapott **feszültségek** ezúttal is **jó egyezést mutatnak**, ahogy ez a (2.38)-es ábrán is látható.



2.38 ábra 60 cm hosszú vékonyfalú zártszelvényű gerenda feszültségei különböző modellek alapján ($x=0$ -nál)

Mint a (2.38)-as ábrán látható, ezúttal a numerikus szimulációk eredményei némiképp eltérnek a gerendamodellek szolgáltatotta feszültségektől. Ez abból adódik, hogy a terhelést a zártszelvény gerinceiben működtettem, így a normálfeszültség eloszlása keresztirányban nem tökéletesen egyenletes a keresztmetszeten. Ez az eltérés - látva a feszültségek kiváló



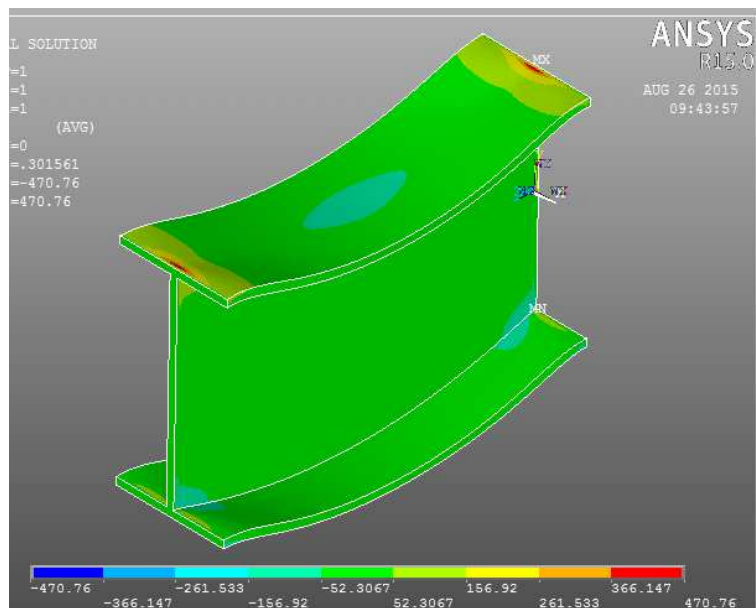
egyezését bármely keresztmetszet és h/L arány esetén - irreleváns a numerikus eredmények elemzése szempontjából.

2.3.7. Statikailag határozatlan gerendák feszültségeinek vizsgálata

Az előző pontokban bemutattam, hogy a különböző gerendamodellek használatával a gerendák lehajlását - a 3D kontinuummechanikai modellhez képest - csak kisebb-nagyobb hibával határozhatjuk meg. Annak ellenére, hogy a számított lehajlásoknál - a 3D végeelemes szimulációk eredményeihez viszonyítva - olykor igen nagy eltéréseket figyelhettünk meg, a feszültségek vizsgálatakor - a lokális hatásoktól eltekintve - minden esetben szinte tökéletes egyezést tapasztaltunk. Ennek az az oka, hogy az általam vizsgált gerenda statikailag határozott konzol volt, amelynél az igénybevételek és a feszültségek alakulása független volt a tartó elmozdulásaitól. Ennek ismeretében azonban jogosan merülhet fel a kérdés, hogy:

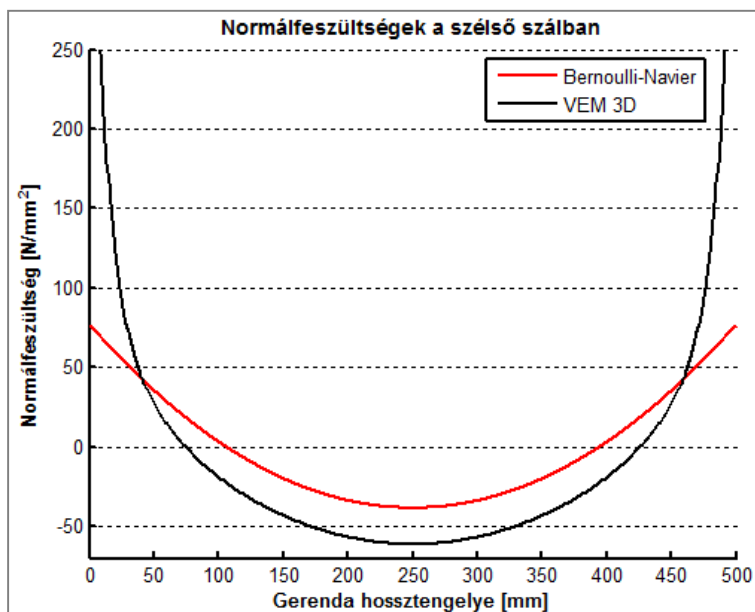
- Vajon statikailag határozatlan szerkezetek esetén - az elmozdulásokon túl - már a feszültségek vizsgálatakor is megfigyelhetünk számottevő különbségeket?
- Ha igen, akkor a gerenda h/L arányának függvényében körülbelül milyen nagyságrendű hibával dolgozunk a mindennapos rutin szerint végrehajtott kézi számításaink során?
- A hiba ismeretében fontos feltenni a kérdést, hogy vajon a biztonság javára, vagy pedig annak kárára tévedünk a közelítő számításaink során?

Az ebben a pontban végzett vizsgálatokkal, és az eredmények kiértékelésével a fenti kérdésekre kívánok választ adni. Ehhez egy **mindkét végén befogott tartót** vizsgálok különböző h/L arányok esetén. A számításokat a korábban is használt **I km**-re végzem el, ugyanis ennél a szelvénynél korábban a lehajlások eredményei között jelentős különbségeket tapasztaltam. Minden esetben a szélső szálban keletkező normálfeszültségeket vizsgálom. Elkészítem a befogott-befogott gerenda **3D végeelemes modelljét** és az így kapott feszültségeket a **klasszikus gerendamodell** eredményeivel hasonlítom össze. Azért a *Bernoulli-Navier-modellre* esett a választás, mert ez a modell teljesen elhanyagolja a nyírási alakváltozások hatását, így a korábban vizsgált modellek közül ez dolgozik a legnagyobb hibával, továbbá a kézi, közelítő számítások során ezt a modellt használják leggyakrabban a mérnökök. A végeelemes modell a (2.3.5)-ös pontban használttól csupán abban különbözik, hogy jelen esetben a tartó mindkét végén gátoltam a csomópontok eltolódását, a terheket pedig a gerinc csomópontjai között egyenletesen szétosztottam a tartó hossza mentén. A terheket ezúttal is a gerenda gerincén lévő pontjaiban helyeztem el, hogy az övek közvetlen hajlítása ne befolyásolhassa a feszültségek alakulását. A (2.39)-es ábrán az 50 cm hosszú gerenda végeelemes modellje és a hosszirányú normálfeszültségek alakulása látható.



2.39 ábra 50 cm hosszú befogott-befogott I km-ű gerenda hosszirányú normálfeszültségei

A fenti ábrán látható, hogy a befogásnál jelentős mértékű peremzavar lép fel, hiszen a lokális hatások következtében a feszültségek a tartó első és utolsó centimétereiben akár egy nagyságrenddel is megnövekednek⁴¹. Ezt látva, a feszültségek összehasonlításakor a tartó kezdeti- és végkeresztmetszetének vizsgálatától eltekintek, és inkább a lokális hatásoktól mentes keresztmetszetekre fókuszálók. Kezdjük a vizsgálatot az 50 cm hosszú gerendával. A (2.40)-es ábrán a középső ($x=0$), felső szélső szálaban keletkező hosszirányú normálfeszültségek gerenda hossza menti eloszlását láthatjuk a *Bernoulli-Navier-modellel* és a *végeselemes szimulációkkal* végzett számítások alapján.

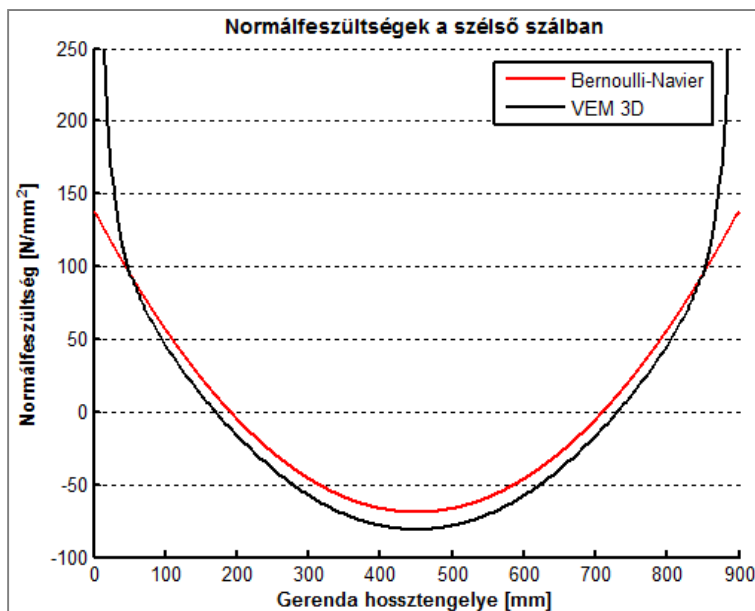


2.40 ábra 50 cm hosszú befogott-befogott I km-ű gerenda hosszirányú normálfeszültségei

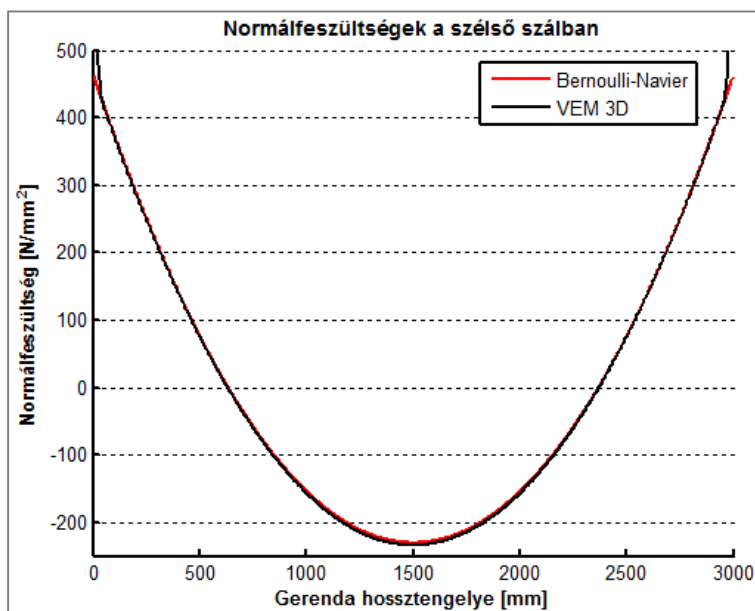
⁴¹ Megjegyzem, hogy sok esetben a feszültségek a támasz és az attól néhány centiméterre lévő kiugróan nagy értékek között számottevően lecsökkentek.



A fenti ábráról rögtön kitűnik az, amit már a (2.39)-ábrán is megfigyelhettünk, nevezetesen, hogy a peremek környezetében a *végeselemes* számításokkal kapott feszültségek jelentősen megnövekednek. Ezen felül azonban az is jól látható, hogy a gerenda középső keresztmetszeteiben is számottevő különbséget figyelhetünk meg a két eredmény között. Ez a hiba a *nyírási alakváltozások* hatásából származik, és mint ilyen, a hiba mértéke és a gerenda h/L aránya között egyenes arányosság áll fent. Ezt alátámasztja a (2.41)-es és (2.42)-es ábra, ahol egy 90, és egy 300 cm hosszú gerenda feszültségeit láthatjuk.



2.41 ábra 90 cm hosszú befogott-befogott 1 km-ű gerenda hosszirányú normálfeszültségei



2.42 ábra 300 cm hosszú befogott-befogott 1 km-ű gerenda hosszirányú normálfeszültségei

Látható, hogy 90 cm-es gerendánál még mindig szembeötlő eltérést láthatunk, de 3 m-es gerendánál már alig beszélhetünk különbségekről. A középső keresztmetszetre vonatkozóan a

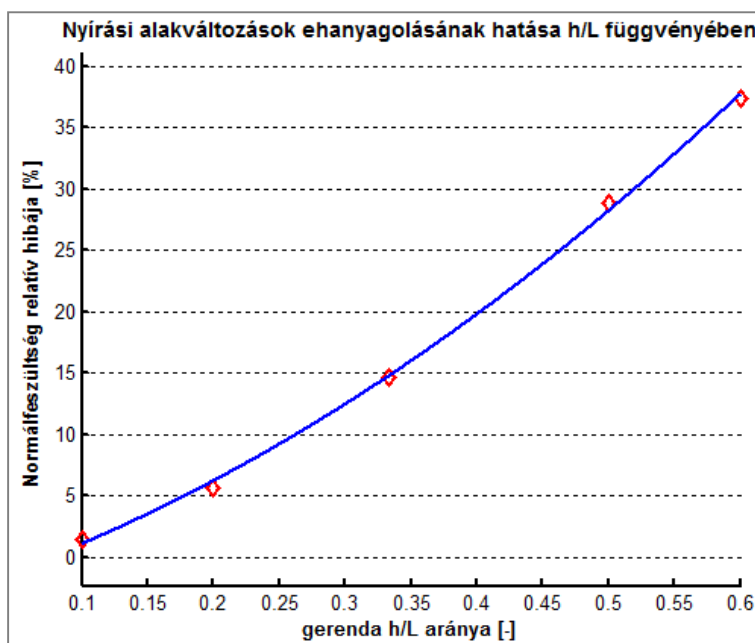


klasszikus modell eredményeinek a 3D végeelemes szimulációk eredményeihez viszonyított relatív hibáját a (2.7)-es táblázat tartalmazza.

h/L	0,6	0,5	0,333	0,2	0,1
Bernoulli-Navier	-37,31%	-28,87%	-14,70%	-5,71%	-1,47%

2.7 táblázat Normálfeszültségek százalékos eltérései a végeelemes szimulációk eredményéhez viszonyítva⁴²

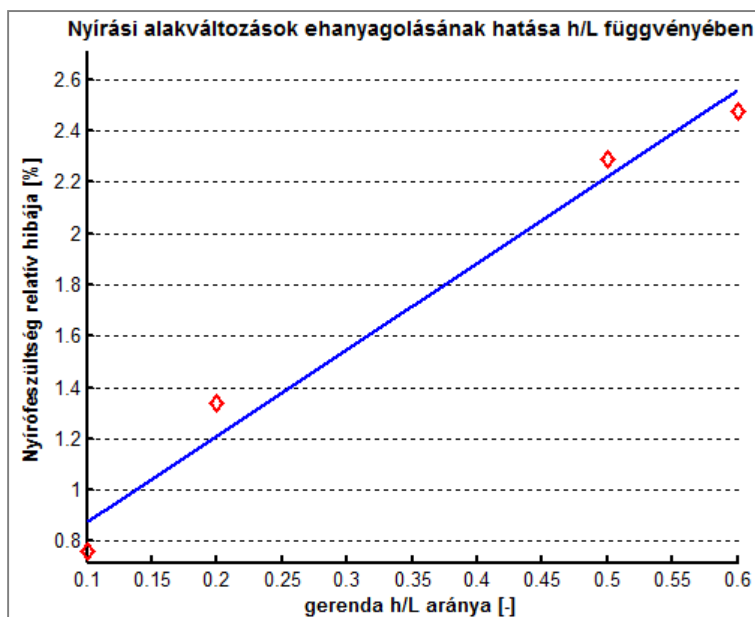
Shames és Dym a [21] alatti könyvükben bebizonyították hogy a nyírási alakváltozások elhanyagolásának normálfeszültségekre gyakorolt hatása másodrendben függ a h/L aránytól. A (2.43)-as ábrán látható módon, egy másodrendű polinomális regresszióval megvizsgáltam, hogy a (2.7)-es táblázatban szereplő értékek, igazolják-e Shames és Dym elméletét.



2.43 ábra Polinomális regresszió: nyírási alakváltozás elhanyagolásának hatása a hosszirányú normálfeszültségekre

A (2.43)-as ábra alapján az eredményeim alátámasztják Shames és Dym állítását. A (2.44)-es ábrán ábrázolom a nyírófeszültségek relatív hibáját. Az iménti szerzőpáros bemutatta, hogy a nyírófeszültségek hibája elsőrendben függ a h/L aránytól.

⁴² A hiba negatív előjele arra utal, hogy a klasszikus modell alábecsülte a feszültegeket.



2.44 ábra Lineáris regresszió: nyírási alakváltozás elhanyagolásának hatása a hosszirányú normálfeszültségekre

A (2.44)-es ábrán látható, hogy a nyírófeszültségek relatív hibája sokkal kisebb, mint amit korábban a normálfeszültségeknél tapasztaltunk. Egyúttal az is látható, hogy a regresszió során a nyírófeszültségeknél az eredményeim kissé nagyobb hibával illeszkednek az elmélet szerinti egyenesre.

Végezetül megállapítható, hogy a *Bernoulli-Navier-modell* a normálfeszültségek esetén bizony olykor jelentős hibával dolgozik. Rövid gerenda esetén a relatív hiba a 30%-ot is meghaladhatja, de még 0,2-es h/L aránynál is 5%-nál nagyobb relatív hibáról beszélhetünk olyan km-nél, ahol viszonylag nagy az inercia/terület arány. Nyírófeszültségeknél jóval kisebb relatív hibát tapasztaltam, az minden esetben 5%-nál kisebbre adódott. Fontos megállapítás, hogy a nyírási alakváltozás elhanyagolásából származó hibával a biztonság kárára tévedünk.

2.4. Numerikus eredmények tanulságainak összefoglalása

Az előző pontok megmutatták, hogy **rövid gerendák** esetén a különböző gerendamodellekkel kapott **lehajlások** olykor **jelentősen eltérhetnek** egymástól. Az eltérések mértéke - mint ismert - nagyban függ a gerenda h/L arányától és a keresztmetszet alakjától.

A **klasszikus gerendamodell** szolgáltatja lehajlások rövid gerendáknál az összes keresztmetszet esetén **számottevő eltérést** mutatnak a pontos eredményekhez képest. Ez az eltérés $h/L \approx 0,5$ esetén tömör - **téglalap** és **kör** - keresztmetszeteknél körülbelül **15-20%**, míg $h/L \approx 0,333$ -nál már 5%-nál kisebb hibáról beszélhetünk. Fontos hangsúlyozni, hogy a megvizsgált vékonyfalú **I** és **négyzet alakú zárt keresztmetszetek** esetén a hiba az előbbieknél több mint kétszerese: **46-51%**. Tehát a *Bernoulli-Navier-modell* eredményei rövid gerenda esetén olykor még a felét sem érik el a tényleges lehajlásoknak, és még $h/L \approx 0,2$ -nél is éppen hogy csak 10%-on belüli a hiba!



A **Timoshenko-modell eredményei** nagyon **megbízhatónak** tűnnek, ugyanis minden esetben **5%**, vagy annál **kisebb hibáról** beszélhetünk. A *Timoshenko-modell* elméleti hiányosságait az előző fejezetben részletesen taglaltam. Kiemeltem, hogy az a feltételezés, miszerint a keresztmetszet mentén egyenletes a nyírófeszültség és a nyírási alakváltozás eloszlása nem igaz, és ezen hiányosság "kompenzálásához" a κ **nyírási** korrekciós tényező használatára van szükség. Ez azt eredményezi, hogy a **modell eredményei** éppen **annyira** lesznek **megbízhatóak, mint** a felvett **κ korrekciós tényező értéke**. A *nyírási korrekciós tényező* felvételére több módszer született, ezeket az előző fejezetben tárgyaltam, valamint néhány gyakran használt keresztmetszetre a **(2.2)-es táblázatban** összefoglaltam az ajánlott κ értékeket. A fenti numerikus eredmények megerősítik, hogy a vizsgált keresztmetszetek esetén a használt κ értékek megfelelőek.

A **Reddy-Bickford-féle harmadfokú nyírási modell** eredményei nem igazán meggyőzőek. Minden esetben csak viszonylag **kis mértékben tér el a klasszikus modell eredményeitől**, ami felveti a kérdést, hogy vajon megéri-e a jóval hosszadalmasabb és bonyolultabb számítást elvégezni. Elmondható, hogy amennyiben olyan keresztmetszettel dolgozunk, amelyre ismert a *nyírási korrekciós tényező* értéke, a **Timoshenko-modell egyszerűbb és pontosabb megoldást szolgáltat**.

A **hiperbolikus modellel** kapott eredmények **vegyes** érzésekre adhatnak okot. A **tömör keresztmetszetek** esetén **jó eredményeket** kaptam, a hiba ilyenkor minden esetben 5%-on belül alakult. Ezzel ellentétben a **vékonyfalú szelvények** esetén **jelentős**, olykor **20-25%-os eltéréseket** tapasztaltunk a *hiperbolikus modell* és a 3D végesesemes eredmények között. Ez igen meglepő, tekintve, hogy ez a modell a teljesen megszokott keresztmetszeti jellemzőkkel - A, I - dolgozik. Megjegyzem, hogy a *hiperbolikus modellt* bemutató cikkben [9], kizárólag **téglalap** keresztmetszetekkel foglalkoztak a szerzők, és nem tettek említést arról, hogy más keresztmetszetek esetében ez a gerendaelmélet mennyire "pontos". Téglalap keresztmetszetű konzolok esetén - $\kappa = 5/6$ alkalmazásakor - bizonyított, hogy a *hiperbolikus modell* és a *Timoshenko-modell* ugyanazt a konzolvég lehajlást adja, nevezetesen:

$$v_0(L) = + \frac{FL^3}{3EI_x} \left(1 + 0,6(1 + \nu) \frac{h^2}{L^2} \right). \quad (2.167)$$

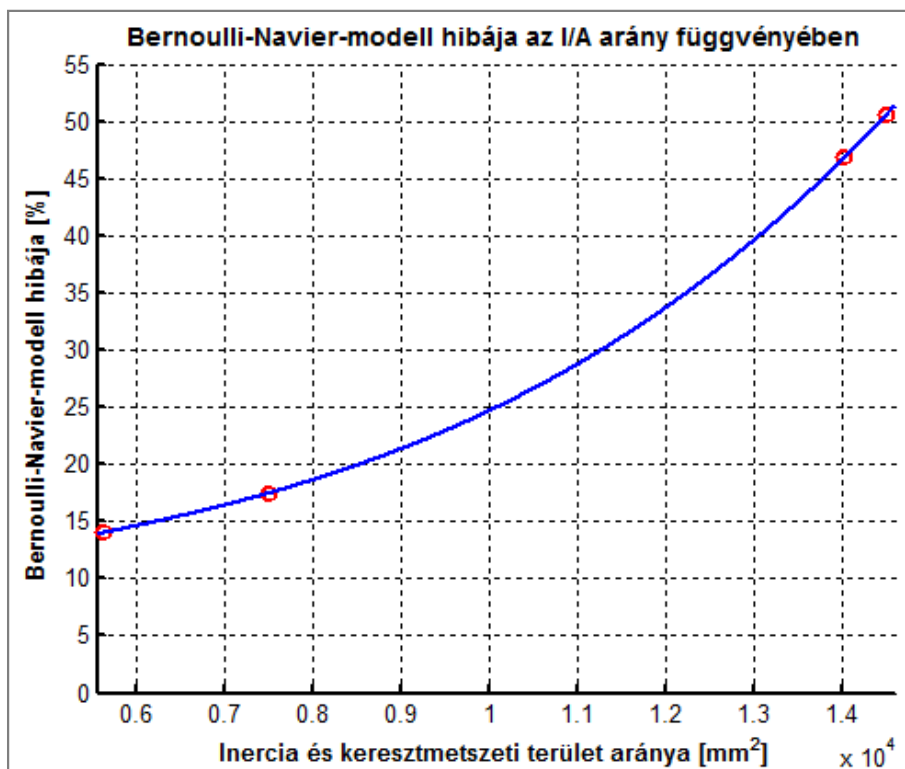
Numerikus eredményeim azt sugallják, hogy a *hiperbolikus modellnek komoly hiányossága* van, nevezetesen: **megbízhatósága erősen függ a keresztmetszet alakjától**. A (2.167)-es képlet megmutatja, hogy bizonyos κ érték esetén ez a modell a *Timoshenko-féle* eredményekhez tart (amely minden esetben jól közelítette a pontos eredményeket), azonban egy másik keresztmetszetenél - míg a *Timoshenko-modell* a *nyírási korrekciós tényező* módosításával "alkalmazkodik" a feladathoz - a *hiperbolikus modell* továbbra is a (2.167)-es formula alapján dolgozik. A (2.2)-es táblázat megmutatja, hogy a kör keresztmetszet esetén az alkalmazandó κ -*tényező* értéke nem tér el olyan jelentősen a $\kappa = 5/6$ -tól, így a *hiperbolikus modell* hiányossága itt még nem volt szembeötlő. Azonban a vékonyfalú szelvényeknél, ahol a κ -*tényező* értéke körülbelül a fele a téglalaphoz alkalmazott értéknek, ez a hiányosság nagyon is nyilvánvalóvá válik. Fogalmazhatunk úgy is, hogy a *hiperbolikus modell úgy*



dolgozik, mintha minden keresztmetszet esetén a $\kappa = 5/6$ -os érték lenne megfelelő. Ez azt a hibát eredményezi, hogy olyan keresztmetszetek esetén, ahol kisebb a κ -tényező értéke, ez a modell a nyírási alakváltozásból származó lehajlás csak egy részét képes figyelembe venni, ezért az eredmények a Bernoulli-Navier- és a Timoshenko-modell szolgáltatata lehajlások között helyezkednek el.

A hiperbolikus modell olyan szempontból is érdekes, hogy az analitikus levezetésekénél látott $\varphi(z)$ függvényen keresztül a modell a befogás környezetében nemlineáris, megnövekedett normálfeszültség eloszlással dolgozik, és így "kísérletet tesz" a lokális hatások miatti feszültségcsúcsok leírására.

A kapott numerikus eredmények alapján alapvető különbség mutatkozik abban, hogy milyen keresztmetszetű gerendát vizsgálunk. A tömör keresztmetszetekhez képest az optimalizált, vékonyfalú szelvények esetén a gerendamodellek eltérései olykor drasztikusak, esetenként még az 50%-ot is meghaladhatják. Véleményem szerint ennek oka abban rejlik, hogy a zártszelvény és I km esetén a keresztmetszeti terület-inercia és így a nyírási merevség-hajlítási merevség aránya lecsökken, ezért a nyírási alakváltozások hatása jelentősebbé válik, mint a tömör keresztmetszetek esetén. A klasszikus modell hibájának százalékos alakulását - a végeeselemes szimulációk eredményéhez viszonyítva - ($h/L=0,6$ esetén) az inercia és a keresztmetszeti terület arányának függvényében a (2.39)-es ábra szemlélteti:



2.39 ábra Klasszikus gerendamodell hibájának százalékos alakulása az inercia és a keresztmetszeti terület arányának függvényében ($h/L=0,6$ esetén)

A gerendák feszültségvizsgálata arra az eredményre vezetett, hogy statikailag határozott tartóknál egy általános keresztmetszet esetén minden gerendamodell ugyanarra a



normálfeszültség értékre vezet, és ez tökéletes összhangban van végeselemes szimulációk eredményével. Vagyis annak ellenére, hogy a *Bernoulli-Navier-modell* a lehajlások tekintetében olykor komoly hibákkal dolgozik, a feszültségekre megbízható eredményeket szolgáltat. A numerikus szimulációk esetén a minkét konzolvégen lokális hatások léptek fel, a terhelési- és a támaszviszonyok miatt. Ismét megemlítjük, hogy a *hiperbolikus modell* a támasz környezetében megnövelt, nemlineáris feszültségeloszlással dolgozik, és az így kapott feszültségek jobban közelítik a numerikus szimulációk eredményeit, mint a *klasszikus* és a *Timoshenko-modell*.

3. Szendvics keresztmetszetű gerendák mechanikai vizsgálata

Ebben a fejezetben rétegesen izotrop, ún. szendvics keresztmetszetű gerendák mechanikai vizsgálatával foglalkozom. A fejezet elején röviden ismertetem a szendvics keresztmetszetű gerendák viselkedésénél tapasztalt sajátosságokat, melyeket korábban, a homogén izotrop gerendáknál nem figyelhettünk meg. Ezt követően rátérek az egyes szendvics-elméletek bemutatására, mely során hangsúlyozom az egyes modelleknél tett feltételezéseket és elhanyagolásokat. Ezután numerikus számításokat végzek, majd az egyes modellek eredményeit *3D végeselemes szimulációk* eredményeivel hasonlítom össze. A fejezetet az eredmények tanulságainak összefoglalásával zárom.

3.1. Szendvics keresztmetszetű gerendák bemutatása

A **szendvicspanelek** olyan szerkezeti elemek, melyek **két merev kéregből**, és az ezeket elválasztó - általában **könnyű - magból állnak**⁴³. A kéreg leggyakrabban valamilyen fémből (alumíniumból vagy acélból), üvegből, fából vagy szálerősítésű polimerből készül. A mag általában alacsony szilárdságú anyagból, leggyakrabban szilárd habból (poliuretánból, polietilénből vagy polisztirolból) épül fel. Az esetek többségében a keresztmetszeti arányok olyanok, hogy a **kéreg** egy igen **vékony** - csak néhány milliméter vastag - réteg, míg a **mag** ennél jóval **vastagabb**, melynek méretét elsősorban a mechanikai és épületfizikai szempontokat szem előtt tartva kell felvenni. Egy ilyen szendvicspanel látható a (3.1)-es ábrán.



3.1 ábra Szendvics panel⁴⁴

Az ilyen szerkezeti felépítésből a hagyományos homogén elemekhez képest **több előny** is származik. Mechanikai szempontból a legfontosabb előny az, hogy a mag elválasztó szerepe miatt - a **csekély önsúlynövekedés** dacára -, a **keresztmetszet inerciája nagy mértékben növekszik**. Épületfizikai szempontból, az elemek **jó hőszigetelő** képességét kell kiemelni, melyet szintén a közbülső magrétegnek köszönhetünk. Leggyakrabban a könnyűszerkezetes

⁴³ Ebben a fejezetben - terjedelmi okokból - kizárólag ilyen felépítésű keresztmetszettel foglalkozom. Ennél több rétegből álló laminált gerendák vizsgálatára jelen dolgozat keretein belül nem kerül sor.

⁴⁴ Forrás: <http://www.directindustry.com/prod/cel-components-srl/product-38588-495073.html>



építési módnál használnak ilyen szendvicselemeket, ahol függőleges vagy vízszintes térelhatároló szerep jut nekik. Ennél speciálisabb alkalmazási területeikkel is találkozhatunk, például a repülőgépek egyes elemeit, valamint a helikopterek rotorját is előszeretettel készítik szendvicsszerkezetekből.

3.2. Szendvics keresztmetszetű gerendák modelljeinek bemutatása

3.2.1. Szendvics keresztmetszetű gerendák mechanikai viselkedése

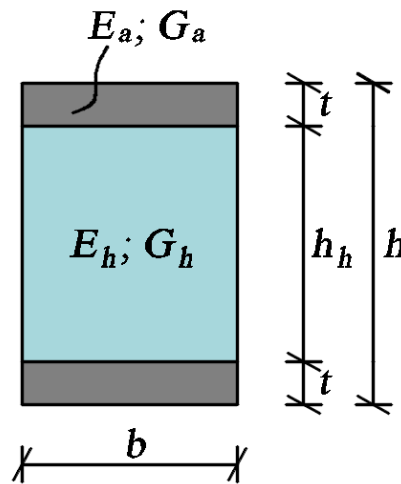
A szendvics keresztmetszetű gerendák mechanikai vizsgálata rendkívül érdekes témakörnek bizonyul. Ennek az az oka, hogy a gerendák keresztmetszeteinek inhomogenitása a gerendák mechanikai viselkedésében olyan következményekkel jár, melyet korábban - az izotrop gerendáknál - nem figyelhettünk meg. Elmondható, hogy a **gerendák viselkedése nagyban függ** attól, hogy az egyes rétegek **milyen anyagból** készültek, hiszen az egyes rétegek anyagára jellemző **rugalmassági modulusok arányának megváltoztatásával a gerenda mechanikai viselkedése is alapjaiban megváltozik**. További figyelemreméltó mechanikai érdekesség, hogy az egyes elméletek megbízhatósága nagy mértékben függ a keresztmetszet **geometriai arányaitól**. Ezekből adódóan érdemes megvizsgálni, hogy a kéregvastagság növelésével és a rugalmassági modulusok arányának változtatásával a kapott eredmények pontossága hogyan változik.

Korábban - a (2.39)-es ábrán - megmutattam, hogy a hajlítási és nyírási merevség hányadosának növekedésével a *nyírási alakváltozás* elhanyagolásából származó hiba is rohamosan növekszik. Elmondható, hogy *szendvics keresztmetszetű gerendák* esetén a **hajlítási merevség és a nyírási merevség aránya gyakran a tízezres nagyságrendbe esik**. Ennek oka az, hogy a nyírási merevség drasztikusan lecsökken a homogén keresztmetszethez képest azért, mert a keresztmetszeti terület jelentős részét a kis nyírási modulussal rendelkező mag foglalja el. Ez oda vezet, hogy *szendvics keresztmetszetű gerendák* esetén a **nyírási alakváltozásoknak kiemelt szerepe van**, így a *nyírási alakváltozás* elhanyagolása jelentős - általában nem megengedhető - mértékű hibákhoz vezet. Ez tehát egy fontos következménye annak, hogy a rétegek rugalmassági modulusa általában nagyságrendekkel eltér egymástól. Fontos azonban megemlíteni, hogy nem ez az egyetlen - a *szendvics keresztmetszetű gerendák* mechanikai viselkedésénél tapasztalt - következménye annak, hogy a gerenda keresztmetszete eltérő anyagú részekből épül fel.

Rétegekből álló hajlított tartók vizsgálatakor az elemi szilárdságtan úgy jár el, hogy amennyiben a rétegek nem tudnak egymáson elcsúszni (az elcsúszás ellen nyírófeszültségek lépnek fel), akkor a lehajlásra és feszültségekre vonatkozó összefüggésekben az összetett keresztmetszetre vonatkozó inerciával lehet számolni. Nagyon fontos észrevétel azonban, hogy noha a most vizsgált esetekben a rétegek elcsúszását kizárjuk, a fenti megállapítás nem mindig vezet jó eredményre. Ennek az az oka, hogy szendvicspaneleknél, amikor a belső **vastag mag nagyon kis merevségű** anyagból készül, akkor - a rétegek elcsúszásának kizárása ellenére - a **két kéreg-réteg együttdolgozása nem megfelelően biztosított**. Ugyan a kéreg és a mag találkozásánál fellép valamekkora nyírófeszültség, ám ennek értéke a nullához tart abban az esetben amikor a kéreg fémből, míg a mag valamilyen szilárd habból (pl. *polietilén*,

poliuretán, stb.) készül. Ilyen esetben a **rugalmassági modulusok 3-4 nagyságrenddel is eltérhetnek**, ami azt okozza, hogy a **gerenda valóságos viselkedése** már akár **közelebb állhat ahhoz** az esethez, **amikor az inerciát** a két kéreg-rétegre külön-külön, az **együttműködés feltételezése nélkül számítjuk**. Annak a kérdésnek az eldöntése, hogy milyen rugalmassági modulus arány esetén lehet összetett szerkezettel, és mikortól kell már külön dolgozó rétegekkel számolni, alapvető fontosságú, hiszen a két esethez tartozó inerciaértékek között általában több nagyságrendnyi különbség van! Mint látni fogjuk, azon elméletek eredményei, melyek ezt a hatást nem veszik figyelembe, igen megbízhatatlannak bizonyulnak, hiszen számításaik olykor több nagyságrenddel eltérhetnek a pontos értékektől.

A modellek bemutatásakor a következő jelöléseket használom⁴⁵:



3.2 ábra Szendvics keresztmetszet jelölései

3.2.2. Mérnöki szendvicselmélet

A **mérnöki szendvicselméletben** ugyanazokkal a kinematikai feltételezésekkel élünk, melyeket korábban - homogén, izotrop gerendákra - a *Bernoulli-Navier-elmélet* kapcsán már ismertettem. A feltételezések szerint a hosszirányú normál alakváltozások ezúttal is lineárisan változnak a keresztmetszet magassága mentén:

$$\varepsilon_z(z, y) = -y \frac{d^2 v_0}{dz^2}. \quad (3.1)$$

A D hajlítási merevséget az alábbi módon írhatjuk fel:

$$D = E_a \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{-h_h/2} y^2 dx dy + E_h \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h_h/2}^{h_h/2} y^2 dx dy + E_a \int_{-b/2}^{b/2} \int_{h_h/2}^{h/2} y^2 dx dy. \quad (3.2)$$

Jelen feladatnál ez a következő összefüggésre vezet:

⁴⁵ Az ábrán szereplő indexek az "acél" és a "hab" elnevezésre utalnak.



$$D = 2E_a \left(\frac{bt^3}{12} + bt \left(\frac{h_h}{2} + \frac{t}{2} \right)^2 \right) + \frac{E_h b h_h^3}{12}. \quad (3.3)$$

Megjegyzem, hogy a *hajlítási merevség* az **öszvér-elmélet** alapján is számolható. Ekkor bevezetünk egy ***n* viszonyszámot**, melyet a rugalmassági modulusok hányadosaként definiálunk:

$$n = \frac{E_a}{E_h}. \quad (3.4)$$

A számítást az **ideális keresztmetszeti jellemzőkkel** végezzük el. Ez azt jelenti, hogy a két anyagból összetett keresztmetszetet az egyikre (jelen esetben az acélra) redukáljuk, és az így kapott *ideális keresztmetszeti jellemzőkkel* a továbbiakban mint homogén keresztmetszettel számolunk. Jelen esetben az *ideális keresztmetszetre* vonatkozó inercia a közös súlyponti tengelyre a következő:

$$I_{x,i} = 2 \left(\frac{bt^3}{12} + bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)^2 \right) + \frac{b h_h^3}{12n}. \quad (3.5)$$

A *D hajlítási merevség* ekkor az $I_{x,i}$ *ideális keresztmetszetre* vonatkozó inercia, és az E_a rugalmassági modulus szorzataként számítható. A feszültségek számítására az alábbi képleteket használjuk:

$$\sigma_a = \frac{M}{I_{x,i}} y \text{ és } \sigma_h = \frac{M}{I_{x,i} n} y. \quad (3.6)$$

A konzolra vonatkozó, *Bernoulli-Navier-modellnél* látott lehajlásfüggvény és a fent levezetett hajlítási merevség alapján a *szendvics keresztmetszetű* - a gerendavégen F koncentrált erővel terhelt - *konzol* lehajlásfüggvénye az alábbi formát ölti:

$$v_0 = + \frac{FL}{D} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right). \quad (3.7)$$

Tekintve, hogy a *mérnöki szendvicselmélet* a *Bernoulli-Navier-elmélet* alapfeltevéseire épült, ezen elmélet alkalmazásakor **a nyírési alakváltozásokat elhanyagoljuk**, annak ellenére, hogy *szendvics keresztmetszetű gerendák* esetén ezeknek jelentős hatása lehet. Továbbá a fenti összefüggések bevezetésekor nem vizsgáltuk meg a **keresztmetszet együttlőzésének** kérdését. Az *öszvér-elméletnél* - a rugalmassági modulusok arányának változása ellenére - minden esetben összetett keresztmetszettel számoltunk, hiszen az *ideális keresztmetszeti jellemzőket* ugyanazokkal a képletekkel határozzuk meg. Ez oda vezethető vissza, hogy a klasszikus - acél-beton, fa-beton - öszvérszerkezeteknél a rugalmassági modulusok általában egy nagyságrendnél jobban nem térnek el egymástól, így a keresztmetszet együttlőzése - megfelelő kapcsolat esetén - biztosított. Inhomogén anyagú



keresztmetszetű gerendák hajlításánál az, hogy a keresztmetszetet együttdolgozónak tekintjük valójában a sík keresztmetszetek feltételezésére vezethető vissza. Azonban, - mint ahogy azt később látni fogjuk - szendvics keresztmetszetű gerendák esetén ez a feltételezés távol áll a valóságtól. Mindezek alapján elmondható, hogy ez az elmélet igen komoly hiányosságokat tartalmaz, melyek azt eredményezik, hogy ezt a modellt nem célszerű *szendvics gerendák* mechanikai vizsgálatakor alkalmazni. Ez különösképpen igaz akkor, amikor a belső mag anyagának rugalmassági modulusa a kéreg anyagára jellemző értéknek csupán a töredéke. Később, a numerikus számítások eredményeit látva magunk is meggyőződhetünk a fent megfogalmazott kritika helyességéről.

3.2.3. Timoshenko-elmélet

A **Timoshenko-modell** elméleti hátterét az előző fejezetben - izotrop gerendák esetére - már részleteztem. Az ott említett alapfeltevések most - a *szendvics keresztmetszetű gerendák* vizsgálatakor - is érvényesek. Ezek alapján a konzol **lehajlásfüggvényét** az alábbi képlettel határozhatjuk meg:

$$v_0(z) = + \frac{Fz}{\kappa S} + \frac{FL}{D} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right), \quad (3.8)$$

ahol D a - (3.3)-as képlettel, vagy az *ösvér-elmélettel* meghatározható - *hajlítási merevség*, míg S a *nyírási merevség*, melyet a következőképpen számolhatunk:

$$S = 2G_a b t + G_h b h_h. \quad (3.9)$$

Az izotrop gerendák vizsgálatánál már láttuk, hogy a *Timoshenko-elmélet* alkalmazásakor az egyik legfontosabb lépés a **megfelelő κ nyírási korrekciós tényező** felvétele. Mint azt a (2.3)-as alfejezetben szereplő eredményeim is mutatják, megfelelő *nyírási korrekciós tényező* alkalmazásával - a modell bizonyos elméleti hiányosságainak ellenére - igen pontos eredményeket kaphatunk. A (2.1.3)-as pontban röviden beszámoltam arról, hogy a szakirodalomban különböző módszerek léteznek a *nyírási korrekciós tényező* meghatározására. Sajnálatos módon *szendvics keresztmetszetű gerendák* esetén az egyes módszerek eredményei között olykor jelentős - akár több nagyságrendbeli - eltérést tapasztalunk a *nyírási korrekciós tényező* értékére vonatkozóan. Ez a tény előrevetíti azt, hogy *szendvicsgerendák* esetén a gerendamodelleken alapuló számításaink általában nem bizonyulnak olyan megbízhatónak, mint ahogy azt homogén, izotrop anyagú gerendáknál tapasztaltuk. Az egyes modellek eredményei viszonylag nagy szórással rendelkezhetnek, és így azok olykor jelentősen eltérhetnek a "pontos" - 3D-s *végeselemes szimulációkkal* kapott - eredményektől. A következőkben bemutatom⁴⁶ **néhány bevett eljárást a nyírási korrekciós tényező felvételére**. Ezek minőségi jellemzésére pedig a következő alfejezetben, a numerikus vizsgálatok eredményeinek ismeretében térek ki.

⁴⁶ A következő összefüggések származtatásakor elsősorban a [11] és [12] alatti művekben található levezetésekre támaszkodom.



A *nyírási korrekciós tényező* meghatározására irányuló módszerek egy sajátos csoportját képezik azok az **eljárások**, melyek szerint κ **értéke független**⁴⁷ a keresztmetszet **geometriai és merevségi viszonyaitól**. Ide tartozik az a módszer, amelynél a *nyírási korrekciós tényező* azt a szerepet tölti be, hogy a keresztmetszeten keletkező, a *Timoshenko-elmélettel* meghatározott **nyírófeszültségek átlagát**, a *rugalmaságtan* összefüggései alapján kapott nyírófeszültségek átlagával tegye egyenlővé. A rugalmaságtan egyensúlyi feltétele alapján:

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial}{\partial z} \int_{-h/2}^y \sigma_z dy, \quad (3.10)$$

ahol az integrálás a keresztmetszet tetszőleges y magassági koordinátájáig tarthat. A σ_z *hosszirányú normál*feszültségeket a *fizikai egyenletek* felhasználásával az alábbi formában írhatjuk fel:

$$\sigma_z(z, y) = E(y) y k_z^y, \quad (3.11)$$

ahol $E(y)$ arra utal, hogy *szendvics keresztmetszetű gerendák* esetén a *rugalmasági modulus* a keresztmetszet magassági mérete mentén változhat. A (3.11)-es egyenlet (3.10)-be való behelyettesítésével és a *nyírófeszültségek eredője* - V_y - és a *görbület* között fennálló

$$V_y = \frac{dM_x}{dz} = D \frac{dk_z^y}{dz}, \quad (3.12)$$

kapcsolat felhasználásával, a nyírófeszültségekre az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\tau_{zy} = -\left[\int_{-h/2}^y E(y) y dy \right] \frac{V_y}{D}. \quad (3.13)$$

A (3.13)-as képlet használatával tehát a nyírófeszültségeket a *rugalmaságtan* elmélete alapján számíthatjuk. Most írjuk fel a *Timoshenko-gerendamodell* nyírófeszültségekre vonatkozó eredményét! A *nyírófeszültségi eredő* az alábbi módon számítható⁴⁸:

$$V_y = \kappa \int_{-h/2}^{h/2} G(y) \gamma_{zy} dy. \quad (3.14)$$

Ebből pedig a τ_{zy} nyírófeszültség a következőképpen fejezhető ki:

⁴⁷ Általában a levezetésükben még szerepelnek geometriai és merevségi paraméterek is, azonban a *nyírási korrekciós tényező* képletében ezek már nem jelennek meg.

⁴⁸ Ennél a levezetésnél - az egyszerűség kedvéért - egységnyi szélességű gerendával foglalkozom, ugyanis ennél az elméletnél a nyírási korrekciós tényező értéke független a gerenda szélességi méretétől.



$$\tau_{zy} = \frac{G(y)V_y}{\kappa \int_{-h/2}^{h/2} G(y) dy} \quad (3.15)$$

A (3.15)-ös és a (3.13)-as egyenletek használatával akkor kapjuk ugyan azt a nyírófeszültséget, ha

$$\kappa = \frac{D}{\int_{-h/2}^{h/2} \left[\int_{-h/2}^y E(y)y dy \right] dy} \quad (3.16)$$

A (3.2)-es ábrán látható szimmetrikus keresztmetszetű szendvicsgerendák esetén a (3.16)-os egyenlet $\kappa=1$ -et ad eredményül.

Az előbbihez hasonló eljárás az, amikor egy *regressziót* hajunk végre, hogy a *Timoshenko-modellel* kapott **nyírófeszültség-eloszlást** a teljes keresztmetszeten vonatkozóan - integrál értelemben - megegyezzen a pontosabb számításokkal kapott nyírófeszültség eloszlással. Ekkor a *legkisebb négyzetek módszerével* járhatunk el, ahol a regresszió során a *nyírési korrekciós tényező* mint független paraméter szerepel. A részletek tárgyalásától ezúttal - terjedelmi okokból - eltekintek. Fontos megjegyzés azonban, hogy *szimmetrikus szendvics keresztmetszet* esetén ezzel az eljárással is $\kappa=1$ -et kapunk eredményül.

Jogosan merülhet fel a kérdés, hogy vajon mennyire megbízhatók ezek a módszerek, melyeknél a a *nyírési korrekciós tényező* értéke a *szendvics keresztmetszet* geometriai és merevségi viszonyaitól függetlenül meghatározható. Természetesen ezen módszerek minősítésére csak később, a numerikus számítások eredményeinek ismeretében vállalkozom, azonban előljáróban némi kételkedésre adhat okot az a gondolatmenet, hogy ha a merevségi viszonyokat megváltoztatjuk úgy, hogy az eredetileg *szendvics keresztmetszet* egy homogén, izotrop téglalap keresztmetszetté módosuljon, akkor ezekkel a módszerekkel - az általánosságban elfogadott $\kappa \approx 5/6$ -os értéktől jelentősen eltérve - továbbra is $\kappa=1$ -et kapunk eredményül.

Érdekességként egy **dinamikai vizsgálatokon alapuló módszer** alapjait is bemutatom, melynél a *szendvics keresztmetszetű gerendát* egy *diszkrét tömegekből* álló rendszerrel helyettesítik. Ekkor a kéregréteget tömegpontokkal helyettesítik, melyeket ezúttal - a magréteg helyet - *nyírési rugók* kapcsolnak össze. Ennél az elméletnél a *nyírési korrekciós tényezőt* úgy határozzák meg, hogy a diszkrét tömegekből álló rendszer **sajátfrekvenciája** megegyezzen a *Timoshenko-gerenda* tisztán nyírási elmozdulásokból számított sajátfrekvenciájával. Ekkor a *nyírési korrekciós tényező* - két egymással megegyező kéreggel rendelkező *szendvics keresztmetszetű gerenda* esetén - az alábbi összefüggéssel határozható meg:

$$\kappa = \frac{2J}{b\rho_a h_h^2}, \quad (3.17)$$



ahol J a tömegrendszer tehetetlenségi nyomatéka, a b a keresztmetszet szélessége, ρ_a pedig az egyik kéreg tömege egy elemi nagyságú felületre vonatkozóan. Figyelembe véve, hogy *szimmetrikus keresztmetszetű szendvicsgerendák* esetén a *tömegrendszer tehetetlenségi nyomatéka* az alábbi képlettel számítható:

$$J = \left(\frac{b\rho_a}{2} \right) (h_h + t)^2, \quad (3.18)$$

esetünkben a *nyírási korrekciós tényezőt* a következő összefüggésből határozhatjuk meg:

$$\kappa = \left(1 + \frac{t}{h_h} \right)^2. \quad (3.19)$$

A (3.19)-es egyenlet alapján megállapítható, hogy ez - a *dinamikai vizsgálatokon alapuló* - módszer a *nyírási korrekciós tényező* meghatározásakor a *szendvics keresztmetszet geometriáját figyelembe veszi, azonban a merevségi viszonyokat nem*. Ennek a módszernek a hatékonyságát is a numerikus számítások eredményei kiértékelésekor vizsgálom meg alaposabban.

Ezek után olyan - a *nyírási korrekciós tényező* meghatározására szolgáló - módszereket ismertetek, melyek a számítások során a szendvics **keresztmetszet geometriai- és merevségi viszonyait egyaránt figyelembe veszik**. A *nyírási korrekciós tényező* felvételére egy másik igen gyakran használt eljárás a [12] alatt található ún. **Reuss-módszer**, melynek alap gondolata, hogy a *nyírási rugalmassági modulus* értékét az alábbi módon átlagoljuk a keresztmetszet mentén:

$$\frac{1}{G_R} = \sum_{k=1}^K \frac{1}{G^k} \frac{h^k}{h}, \quad (3.20)$$

ahol G_R a *Reuss-szerinti* átlagolt *nyírási rugalmassági modulus*, K pedig a rétegek számát jelenti⁴⁹. Mivel a (3.9)-es egyenletnél szerint a G_V nyírási modulusok átlagolását az alábbi módon végeztük:

$$G_V = \sum_{k=1}^K G^k \frac{h^k}{h}, \quad (3.21)$$

így a *Reuss-módszernél* a *nyírási korrekciós tényezőt* a két átlagolt *nyírási rugalmassági modulus* hányadosaként definiáljuk:

$$\kappa = \frac{G_R}{G_V}. \quad (3.22)$$

⁴⁹ Jelen esetben $K=3$, mint az a (3.2)-es ábrán is látható.



Ez alapján a (3.2)-es ábrán látható szimmetrikus keresztmetszet esetén a *nyírási korrekciós tényező* a következőképpen alakul:

$$\kappa = \frac{1}{\left(2 \frac{t}{h} \frac{1}{G_a} + \frac{h_h}{h} \frac{1}{G_h}\right) \left(2 \frac{t}{h} G_a + \frac{h_h}{h} G_h\right)}. \quad (3.23)$$

A *Reuss-módszerrel* tehát igen egyszerűen meghatározható κ értéke. A szakirodalomban a módszer jellemzésénél megemlítik, hogy elsősorban vékony kéreggel rendelkező gerendák esetén célszerű az alkalmazása. Abban az esetben, amikor a kéregrétegek számottevő vastagsággal rendelkeznek, a módszer eredményei már kevésbé megbízhatók. Ezeket a megállapításokat - mint ahogy azt a következő alfejezetben látni fogjuk - numerikus eredményeim is igazolják.

A következő módszer azon alapszik, hogy a *rugalmasságtan összefüggéseivel* és a *lineáris nyírási elmélettel* kapott *nyírási alakváltozások* keresztmetszeti területen vett *integrálját* tegyük egyenlővé a megfelelő *nyírási korrekciós tényező* felvételével. A *rugalmasságtan* szerint ez⁵⁰:

$$A_1 = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left[\int_{-h/2}^y E(y) y dy \right] V_y}{G(y) D} dy. \quad (3.24)$$

Az *elsőrendű nyírási elmélet* szerint a *nyírási szögtorzulások* keresztmetszeti területen vett integrálja pedig:

$$A_2 = \frac{V_y h}{\kappa \int_{-h/2}^{h/2} G(y) dy}. \quad (3.25)$$

A kettő egyezőségének feltétele alapján:

$$\kappa = - \frac{D h}{\int_{-h/2}^{h/2} G(y) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{G(y)} \left[\int_{-h/2}^y E(y) y dy \right] dy}. \quad (3.26)$$

Szendvics keresztmetszet esetén ez az alábbi formát ölti:

$$\kappa = \frac{2}{3} \frac{E_a \left[1 - (h_c^*)^3 \right] + E_h (h_c^*)^3}{\left[G_a (1 - h_c^*) + G_h h_c^* \right] \left[\frac{E_a}{G_a} \left[\frac{2}{3} - h_c^* + \frac{1}{3} (h_c^*)^3 \right] + \frac{E_a}{G_h} h_c^* \left[1 - (h_c^*)^2 \right] + \frac{2}{3} \frac{E_h}{G_h} (h_c^*)^3 \right]}, \quad (3.27)$$

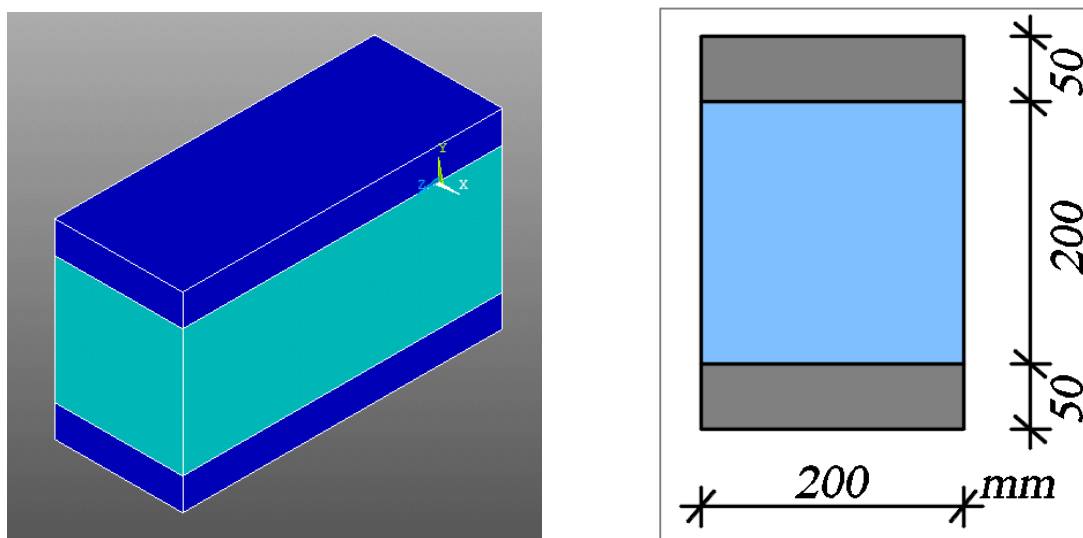
⁵⁰ Ezúttal is egységnyi szélességű gerendára végzem el a levezetést

ahol $h_c^* = h_n / h$. Ez az összefüggés kis merevségű magréteg esetén szintén nulla közeli eredményre vezet, míg nagyon vékony kéreg esetén κ értéke 1-hez tart.

Mint láttuk, a *Timoshenko-modellek* családjába tartozó *szendvics-modellek* között jelentős különbségek vannak abban, hogy a *nyírási korrekciós tényezőt* hogyan származtatják. Ebből adódóan ezek a modellek a *nyírási alakváltozások* hatását eltérő mértékben veszik figyelembe, ami jelentős különbségeket okozhat az eredményekben. Ennek pontos vizsgálata a következő alfejezet témája lesz. Ezen felül megemlítem, hogy a *keresztmetszet együttdolgozásának* kérdését egyik modell sem vizsgálja részletesen, így mindegyiknél tökéletesen együttdolgozó keresztmetszettel számolhatunk.

3.3. Numerikus számítások eredményeinek bemutatása

Azért, hogy megvizsgálhassam, hogy a keresztmetszet **geometriai viszonyai hogyan befolyásolják** a kapott **végeredmények pontosságát**, a számításokat **két keresztmetszettípusra** végeztem el. **Először** egy olyan esetet vizsgáltam, ahol a **kéregrétegek számottevő vastagsággal** rendelkeznek, majd **később** a számításokat **vékony réteggel** rendelkező keresztmetszetre is elvégeztem. "Vastag" kéreg esetén a keresztmetszeti méretek és a numerikus modell a (3.3)-as ábrán láthatóak.



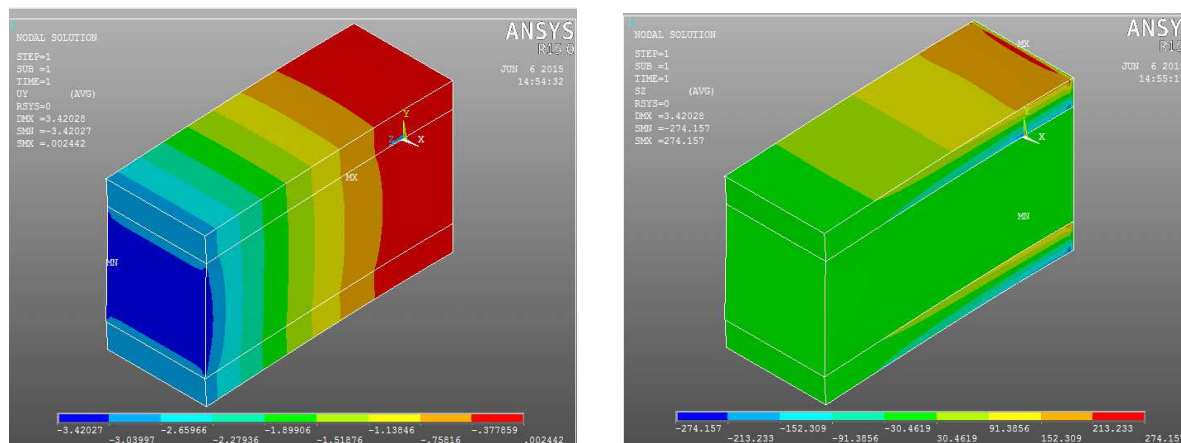
3.3 ábra $L=50$ cm szendvics keresztmetszetű gerenda numerikus modellje és keresztmetszeti méretei

A vizsgált szerkezet ezúttal is egy a gerendavégen függőleges lefele mutató koncentrált erővel terhelt konzol⁵¹. A **gerenda deformációjának** és a hosszirányú **normálfeszültségek**

⁵¹ Jelen számítások során a terhelést egyenletesen osztottam szét a gerenda végkeresztmetszetén fekvő csomópontjai mentén. Ebből adódóan, - puha magréteg esetén - a terhelt csomópontok közvetlen környezetében - a (3.4)-es ábrán látható módon - viszonylag nagy elmozdulások és alakváltozások alakulhatnak ki. Azért, hogy ez a lokális hatás ne befolyásolja a kapott eredményeket, a pontok függőleges eltolódását a kéregrétegekben határoztam meg. Jelen esetben az izotrop gerendáknál alkalmazott terhelésnél kisebb, $F=10$ kN-os terhet működtettem a végkeresztmetszeten, hogy az elmozdulások továbbra is a kis elmozdulások tartományába essenek. Szélsőséges esetben (hosszú



eloszlásának a **jellegét** a (3.4)-es ábra mutatja. A feszültségeloszlást látva megfigyelhető, hogy a **mag** a kisebb rugalmassági modulusa miatt **"kikapcsolódik" a teherviselésből**.



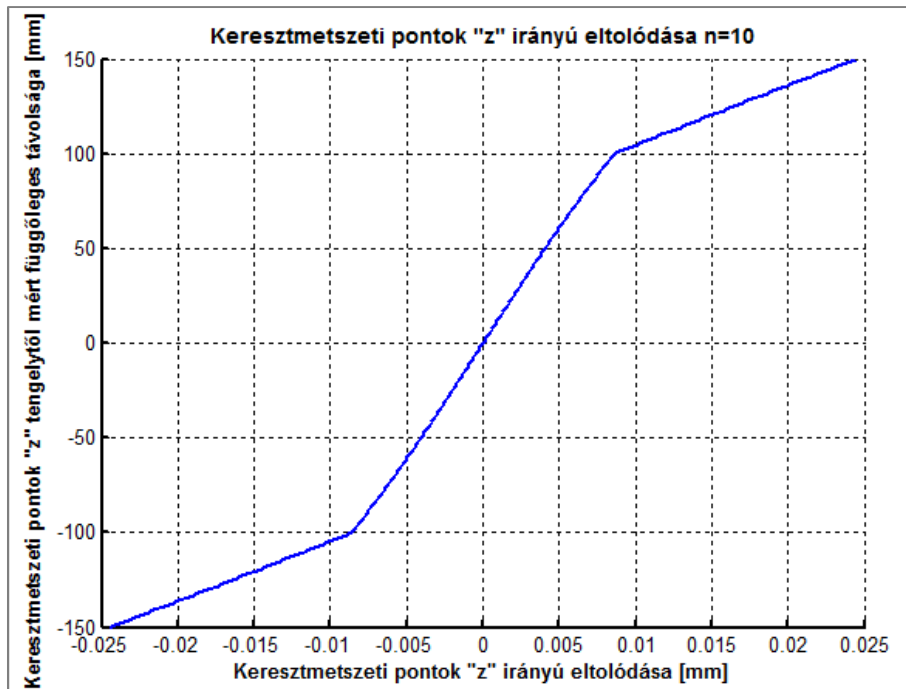
3.4 ábra Szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása és a hosszirányú normálfeszültségek eloszlása

A következőkben bemutatom a numerikus számítások eredményeit. Először a **vastag kéreggel** rendelkező gerenda vizsgálatával foglalkoztam. Mielőtt rátérnék az egyes elméletekkel kapott lehajlások vizsgálatára, először megvizsgálom, hogy a keresztmetszet **merevségi viszonyainak változása**⁵² milyen hatással van a gerenda mechanikai viselkedésére. Ehhez 3D *végeselemes* szimulációkat végeztem, és azt figyeltem, hogy a magréteg anyagára jellemző rugalmassági modulus módosításával a keresztmetszetek mentén a σ_z és τ_{zy} feszültségek és a keresztmetszeti pontok hosszirányú w eltolódásának eloszlása hogyan változik.

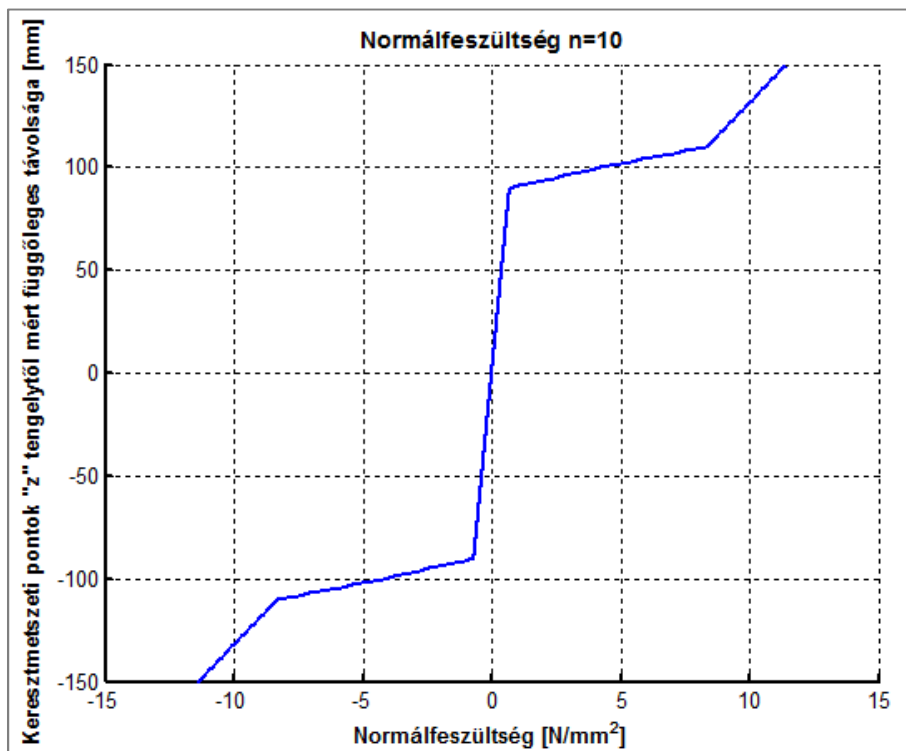
Amikor a mag anyagának merevsége "csak" egy nagyságrenddel kisebb a kéreg anyagának merevségétől ($n=10$), akkor az alábbi eloszlásokat kapjuk:

gerenda, puha mag- és vékony kégréteg esetén) a terhelést - a fenti megfontolásból - még egy nagyságrenddel csökkentettem.

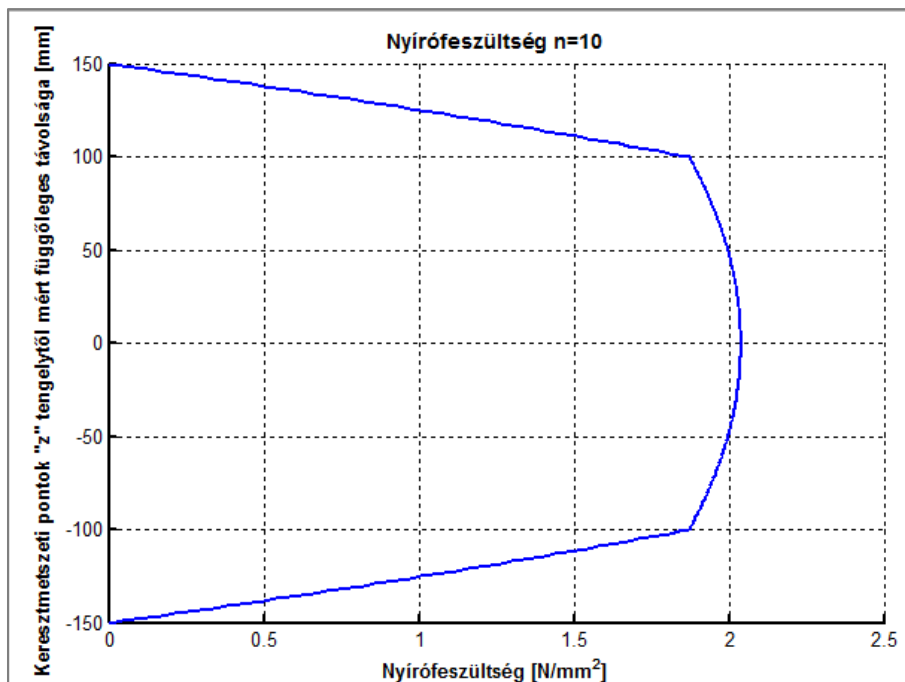
⁵² A kégréteg esetén most is az előző fejezetben használt, acélra vonatkozó anyagi jellemzőkkel dolgoztam. A magréteg esetén az anyagi jellemzőket az iménti értékhez képest folyamatosan egy-egy nagyságrenddel csökkentettem.



3.5 ábra A középső keresztmetszet $x=0$ -hoz tartozó pontjainak hosszirányú eltolódása $n=10$ esetén



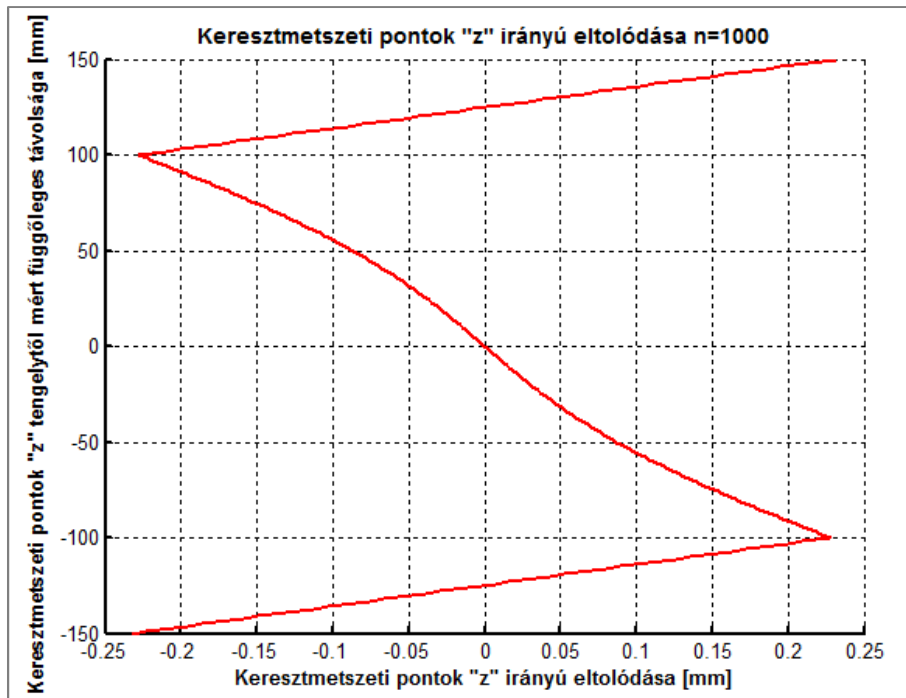
3.6 ábra Hosszirányú normálfeszültségek eloszlása ($x=0$ -nál) egy általános keresztmetszet mentén $n=10$ esetén



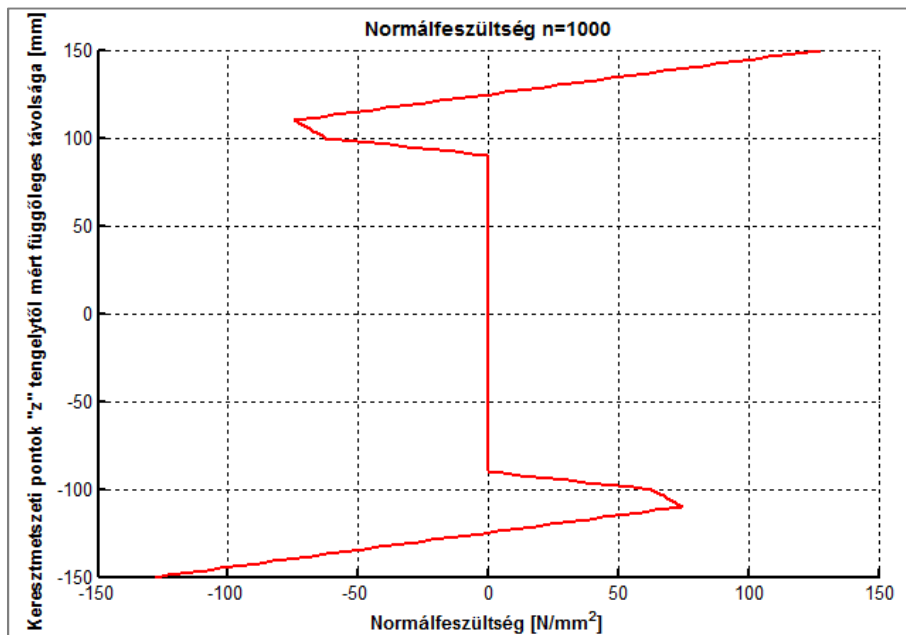
3.7 ábra Nyírófeszültségek eloszlása ($x=0$ -nál) egy általános keresztmetszet mentén $n=10$ esetén

Ezek az ábrák azt mutatják, hogy $n=10$ -nél a **mag** még viszonylag jól "**együtt dolgoztatja**" a **kéregrétegeket**. Ezt onnan láthatjuk, hogy a felső kéregrétegben végig húzó-, az alsó kéregben pedig csak nyomó normálfeszültségek keletkeztek. A keresztmetszet tehát egy összetett keresztmetszetnek megfelelő módon viselkedik, és így a keresztmetszet **elfordulása a közös súlyponti tengely körül következett be**. Mindennek megfelelően a nyírófeszültség ábrán a várt, közelítően parabola szerinti eloszlást figyelhetjük meg, ahol a magban **számottevő nyírófeszültség keletkezik**, mely garantálja a két kéregréteg együttdolgozását.

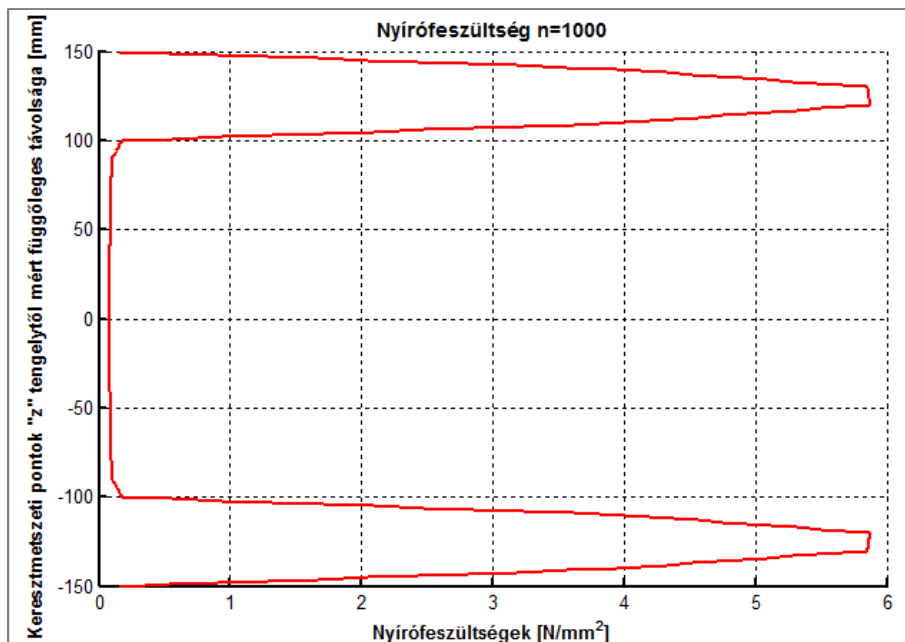
Mindezek után vizsgáljuk meg az $n=1000$ esetet, amikor már egy viszonylag kis merevségű (**puha**) **belső maggal** van dolgunk. Ekkor a következő eloszlásokat figyelhetjük meg egy általános keresztmetszet mentén:



3.8 ábra A középső keresztmetszet $x=0$ -hoz tartozó pontjainak hosszirányú eltolódása $n=1000$ esetén

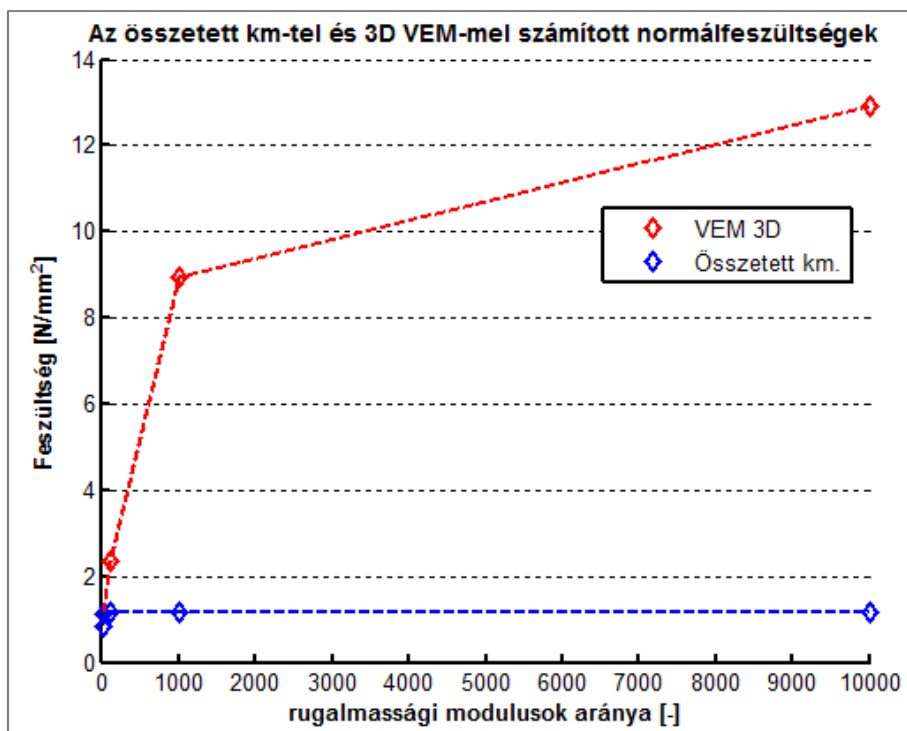


3.9 ábra Hosszirányú normál feszültségek eloszlása ($x=0$ -nál) egy általános keresztmetszet mentén $n=1000$ esetén



3.10 ábra Nyírófeszültségek eloszlása ($x=0$ -nál) egy általános keresztmetszet mentén $n=1000$ esetén

A (3.8)-as ábrán egy általános keresztmetszet pontjainak hosszirányú eltolódását ábrázoltam. Jól látható, hogy szendvics keresztmetszetű gerendák esetén a sík keresztmetszet feltételezése milyen távol állhat a valóságtól, hiszen ez esetben a **kéregrétegek pontjai már nem a közös súlypont körül fordulnak el**. Ennek megfelelően (3.9)-es ábrán látható módon a **felső kéreg alsó pontjaiban nyomófeszültség**, míg az **alsó réteg felső pontjaiban húzófeszültség ébred**. Mindez arra vezethető vissza, amit a (3.10)-es ábrán láthatunk, nevezetesen, hogy relatív puha mag esetén elenyésző, **gyakorlatilag zérus nagyságú nyírófeszültségek keletkeznek a magban**. Ez arra a megállapításra vezet, hogy - noha az egyes rétegek között csúszások nem jelennek meg - a keresztmetszet együttlőzöttségét mégsem megoldott. Véleményem szerint a **fent említett modellek alapvető hiányossága, hogy ezt a jelenséget nem veszik figyelembe**. Az izotrop gerendamodellek eredményeinek elemzésekor megfigyelhettük, hogy statikailag határozott tartó esetén - noha a nyírási alakváltozások következtében a lehajlásra kapott eredmények között volt némi különbség -, a feszültségekre pontos eredményeket kaptunk. Sajnos ez a megállapítás abban az esetben, amikor a kéregrétegek együttlőzésének vizsgálatától eltekintünk, már nem lesz igaz. Azzal, hogy a fenti gerendamodelleknél minden esetben összetett - együttlőző - keresztmetszetet feltételezünk, a kézi számítások a ténylegesnél nagyobb inerciával számolnak. Ennek hatására a *Navier-képlettel* meghatározott feszültségek a pontos értékeknél akár nagyságrendekkel kisebbek lesznek, vagyis így durva hibát véthetünk a biztonság kárára. A feszültségek pontos értékektől való eltérését a (3.11)-es ábrán illusztráltam.



3.11 ábra Középső keresztmetszet ($x=0$ -hoz tartozó) szélső szálában keletkező normál feszültség változása a rugalmassági modulusok arányának függvényében

Ez az ábra megerősíti azt a felvetést, miszerint **szendvics keresztmetszetű gerendák** esetén a **kéregrétegek együttdolgoztatása mértékének** figyelembevétele alapvető fontosságú lehet, főleg olyan esetekben, ahol a magréteg kis merevségű anyagból készül.

Noha az egyes modellek elméleti háttérének bemutatásánál szereplő egyenletekben mindig együttdolgozó keresztmetszet feltételezésével fejeztük ki a D hajlítási merevséget, a (3.11)-es ábrán szereplő nagy eltéréseket látva a további vizsgálatok során mindig végzek olyan számításokat is, ahol a gerendamodellekkel kapott eredményeket a "pontos" inerciaértékekből⁵³ határozom meg.

A továbbiakban rátérek a **vastag kéreggel** rendelkező gerenda lehajlásainak és feszültségeinek vizsgálatára, ahol az egyes modellekkel kapott eredményeket a "pontosnak" tekinthető 3D vége-selemes számítások eredményeivel hasonlítom össze. A számításokat **különböző rugalmassági modulusokkal rendelkező magréteg eseteire** végzem el, hogy láthassuk a merevségi viszonyok eredmények pontosságára gyakorolt hatását.

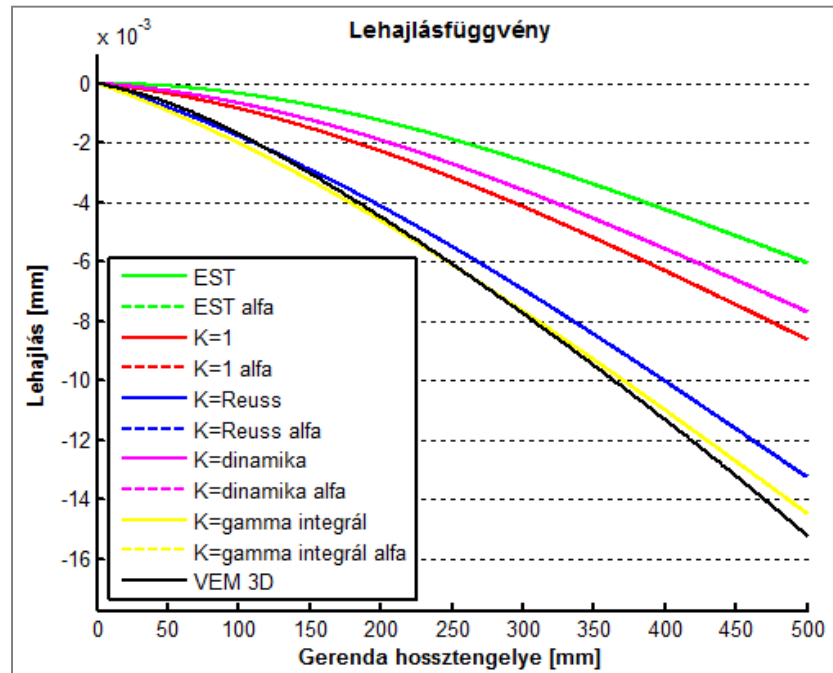
A következő ábrák az **50 cm** hosszú konzolgerenda lehajlásait mutatják. Az egyes ábrákon feltüntettem a különböző modellekkel kapott lehajlásokat⁵⁴, és a *3D vége-selemes numerikus*

⁵³ "Pontos" inerciaérték alatt azt a mennyiséget értem melynek alkalmazásával a vége-selemes szimulációkkal kapott feszültségek értékét kapjuk vissza.

⁵⁴ Az ábrákon az *alfa* elnevezés arra utal, hogy minden modell esetén elvégeztem egy olyan számítást is, ahol a vége-selemes szimulációkkal kapott "pontos" inerciaértékekkel számoltam. Ily módon a számítások során a keresztmetszet együttdolgozásának kérdését is megvizsgáltam, hiszen ekkor nem tökéletesen együttdolgozó keresztmetszettel számoltam. Az így kapott eredményeket a diagramokon a

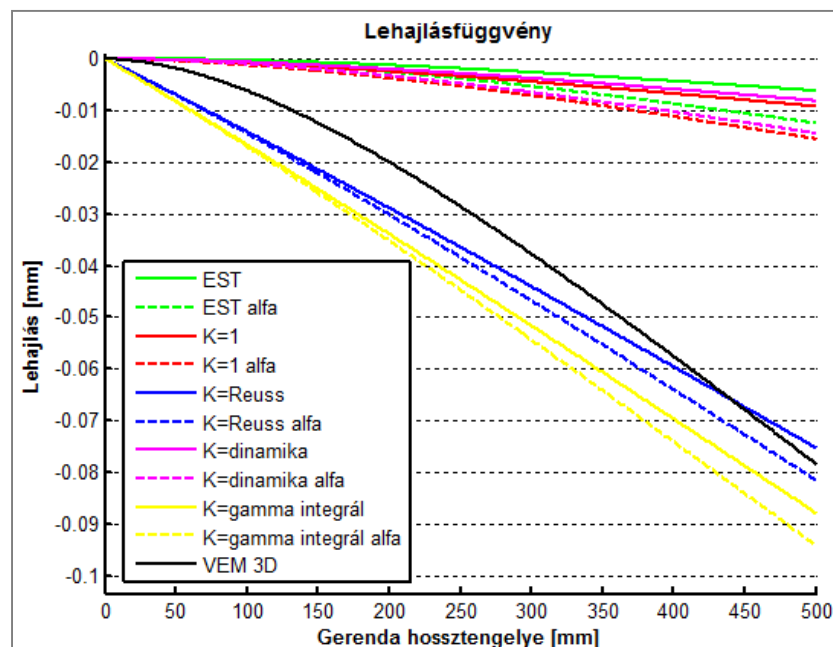


szimulációk eredményeit is. Abban az esetben, amikor a mag olyan anyagból készül, melynek rugalmassági modulusa az acélkéreg rugalmassági modulusának tizede ($n=10$), akkor a (3.12)-es ábrán látható **lehajlásokat** kaptam:



3.12 ábra 50 cm hosszú, "vastag" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=10$ esetén

Az $n=100$ -as esethez tartozó lehajlásokat a (3.13)-as ábrán láthatjuk:

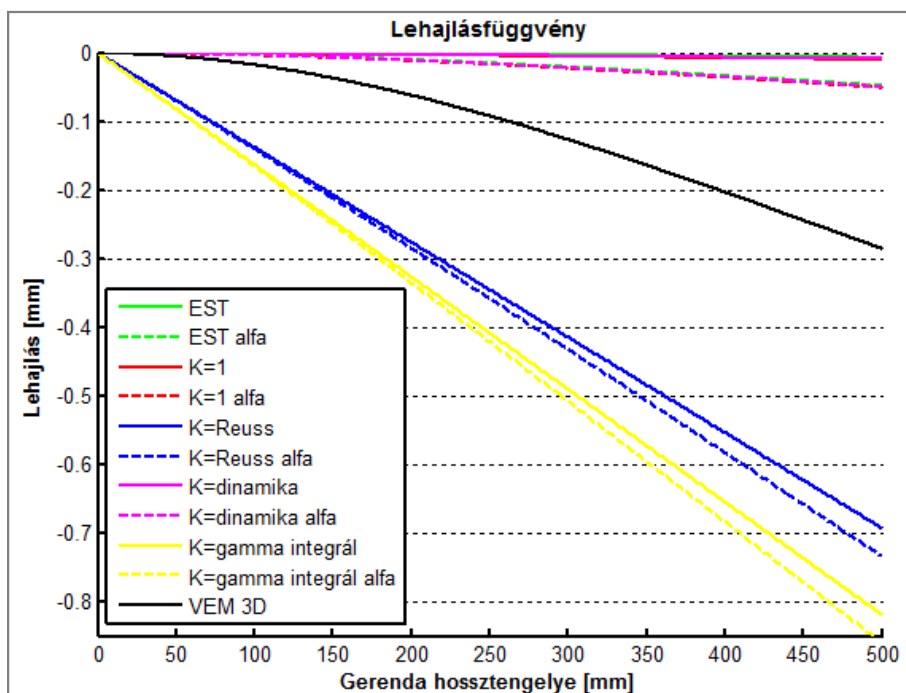


3.13 ábra 50 cm hosszú, "vastag" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=100$ esetén

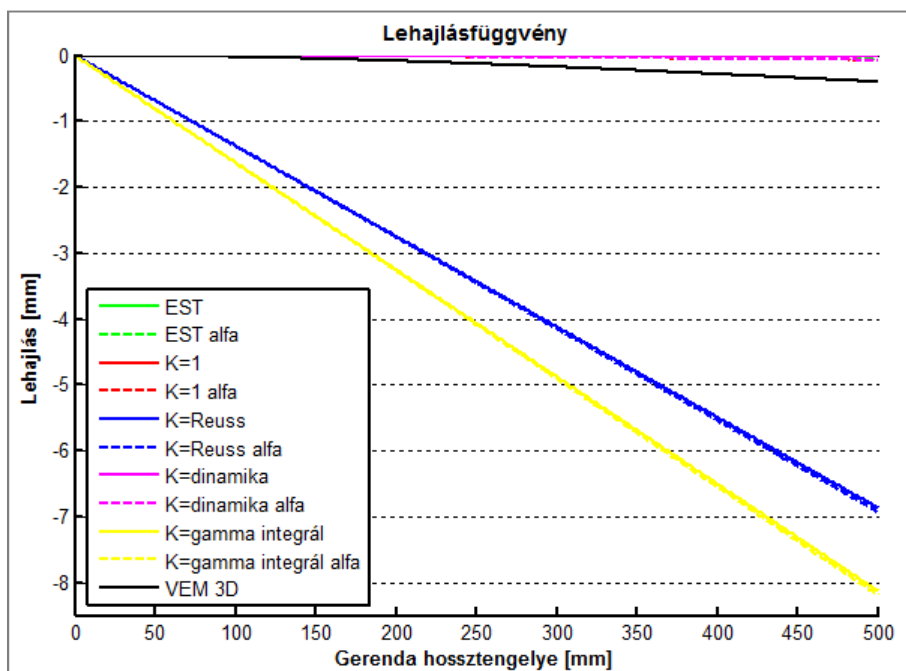
szaggatott vonalak illusztrálják. Megjegyzem, hogy sok - de nem mindegyik - esetben a szaggatott jelölés teljesen egybeolvad a folytonos vonalakkal.



Ezzel szemben $n=1000$ és $n=10000$ esetén az alábbi eredményeket kaptam:



3.14 ábra 50 cm hosszú, "vastag" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=1000$ esetén



3.15 ábra 50 cm hosszú, "vastag" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=10000$ esetén

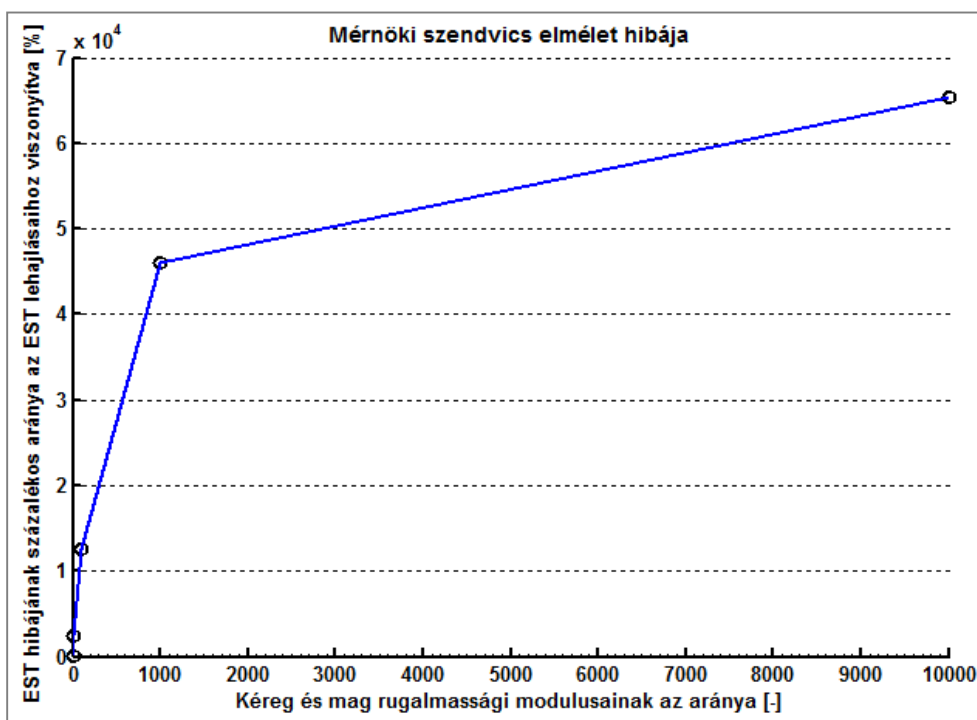
Az eddigi eredmények alapján általánosan levonhatjuk a következtetést, miszerint szendvics keresztmetszetű gerendák esetén az **eredmények szórása nagyobb** annál, mint amit izotrop gerendák esetén megfigyelhettünk. A hibák százalékos eltéréseit a 3D VEM eredményekhez viszonyítva a (3.1)-es táblázatban foglaltam össze:



n	10	100	1000	10000
MéRNÖKI elmélet	-60,53%	-92,09%	-97,79%	-98,44%
Timoshenko ($\kappa=1$)	-43,42%	-88,14%	-96,74%	-97,67%
Timoshenko ($\kappa=Reuss$)	-13,16%	-4,08%	142,64%	1605,24%
Timoshenko ($\kappa=dinamika$)	-49,34%	-89,54%	-97,13%	-97,96%
Timoshenko ($\kappa=\gamma_{zy}$ int.)	-5,27%	11,99%	186,90%	1919,05%

3.1 táblázat Konzolvéglehajlás százalékos eltérései a vége-selemes szimulációk eredményéhez viszonyítva⁵⁵

Az eredmények azt mutatják, hogy a **méRNÖKI szendvics-elmélet (EST)** az esetek döntő többségében kifejezetten **rossz eredményeket** szolgáltat. Ez abból következik, amit az elmélet analitikus bemutatásakor láttuk, nevezetesen hogy itt ennél a modellnél **nyírási alakváltozások**, és a **kérgék együttlőgozása** **sincs** megfelelően **figyelembe véve**. A fenti eredmények alapján a (3.16)-os ábrán összefoglaltam az alábbi hiányosságok következményeit:



3.16 ábra MéRNÖKI szendvics elmélet százalékos hibája a VEM eredményekhez viszonyítva

Itt azt látjuk, hogy amikor a **belső mag** – a kéreghez képest - egyre inkább eltérő rugalmassági modulussal rendelkező, **puha anyagból készül**, akkor a **méRNÖKI szendvics-elmélet eredményei megbízhatatlanná válnak**. Látható, hogy már $n=100$ esetén több mint 1000%-os hibát kaptunk. Ennek a **hibának** kétségkívül a legjelentősebb részét a **nyírási alakváltozások elhanyagolása** adja. Ezt az állítást alátámasztja az, hogy a **nyírási alakváltozást** figyelembe vevő szendvics-modellek némelyike ennél jóval pontosabb eredményt ad. Ezen felül azonban a hibák mértékének alakulásában a modell egy **másik nagy**

⁵⁵ A táblázatban szereplő értékek ahhoz az esethez tartoznak, ahol a keresztmetszetet – a szakirodalomban szereplő képleteknek megfelelően - együttlőgozónak tételeztük fel. A negatív előjel most is arra utal, hogy az adott modell alábecsülte a lehajlást.



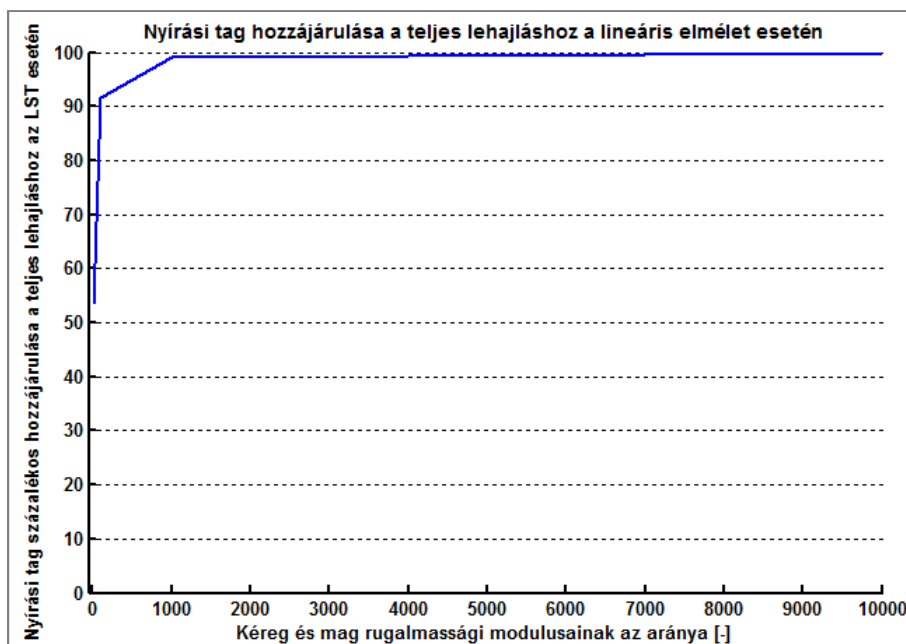
hiányossága, – a minden esetben együttdolgozó keresztmetszet feltételezése – is fontos szerepet játszik. A (3.11)-es ábrának megfelelően ennek az elhanyagolásnak a következménye elsősorban akkor érezhető, amikor a **belső mag** viszonylag **puha** anyagból készül.

Ahogy azt az előző alfejezetben láthattuk, a *nyírási korrekciós* tényező meghatározására irányuló módszerek egy része minden esetben $\kappa=1$ -es eredményre vezetett. Eredményeim azt mutatják, hogy ezek a módszerek – legalábbis „vastag” kéreg és viszonylag rövid gerenda esetén - szintén jelentős hibával dolgoznak. Továbbá megfigyelhető, hogy n növekedésével a hiba is egyre nagyobbá vált. Véleményem szerint ezen módszerek megbízhatatlansága elsősorban abból adódik, hogy ezeknél a κ -tényező meghatározásakor a keresztmetszet geometriai és merevségi viszonyai nem játszottak szerepet. Ez egy durva leegyszerűsítése a problémának, hiszen numerikus eredményeim egyértelműen alátámasztják, hogy mindkét hatásnak fontos szerepe van a *nyírási korrekciós tényező* „ideális” értékének alakulásában⁵⁶.

A *dinamikai-módszerrel* kapott eredmények is igen távol vannak a *végeselemes szimulációkkal* kapott eredményektől. Ahogy azt a (3.19)-es képlet mutatja, ennél a módszernél a keresztmetszet geometriai viszonyaitól függ a kapott *nyírási korrekciós tényező* értéke, míg a *merevségi viszonyokat* ennél a módszernél is elhanyagoljuk. Ennek megfelelően az így kapott eredmények is hasonlóképpen megbízhatatlanok, mint amelyre a $\kappa=1$ -gyel dolgozó módszerek vezettek. Valójában azzal, hogy a (3.19)-es képlet használatával a *nyírási korrekciós tényező* értéke 1-nél nagyobb lesz, a *dinamikai-módszer* kicsivel még pontatlanabb eredményre vezet, mint a $\kappa=1$ -gyel dolgozó módszerek.

A másik két módszer (*Reuss-módszer* és a *nyírási alakváltozások km-i terület menti integráljával dolgozó módszer*) az előzőekkel ellentétben a keresztmetszet *merevségi viszonyait* is figyelembe veszi a *nyírási korrekciós tényező* meghatározásakor. Ennek megfelelően $n=10$ és $n=100$ esetén ezek a módszerek megbízhatóbb eredményre vezetnek, mint a korábban tárgyalt eljárások. Ilyen, nem túl puha belső mag esetén a két módszer hibája 15%-nál kisebb volt. Azonban ezen módszerek alkalmazásakor nagyon fontos tudni, hogy ennél puhább mag – vagyis $n=1000$ és $n=10000$ – olykor rendkívül pontatlan eredményeket kaphatunk. Ennek az az oka, hogy ilyen *merevségi viszonyok* esetén a *nyírási korrekciós tényező* értéke 0-hoz tart, melynek hatására a lehajlások képletében szereplő, *nyírási alakváltozások hatását* reprezentáló tag nagyon dominánssá válik, mely a gerenda a valóságosnál sokkal lágyabb viselkedését eredményezi. Ezt igazolandó, vizsgáljuk meg, hogy például a *Reuss-módszer* esetén az egyes n arányoknál a teljes lehajlás hány százaléka származik a *nyírási alakváltozásból* hatásából.

⁵⁶ Már az izotrop anyagú gerendák vizsgálatánál megfigyelhettük, hogy a keresztmetszet geometriájának változásával az alkalmazandó *nyírási korrekciós tényező* értéke is jelentősen megváltozott. Továbbá az, hogy a mag rugalmassági modulusának csökkentésével ezen módszerek hibája növekedett, egyértelmű bizonyíték arra, hogy a κ -tényező a keresztmetszet merevségi viszonyaitól is függ.



3.17 ábra Nyírási tag hozzájárulása a teljes lehajláshoz a lineáris elmélet esetén

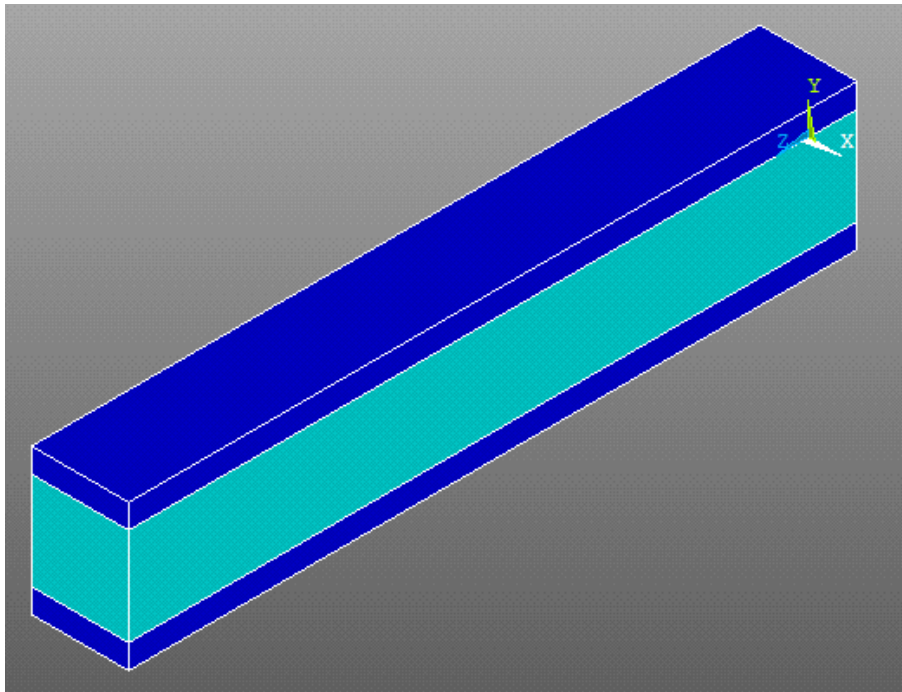
A (3.17)-es ábra megmutatja, hogy ahogy a **mag nyírási modulusa csökken**, a **nyírási alakváltozást** tartalmazó **tag egyre dominánsabbá válik** a lehajlás képletében. Ez a dominancia még a **99%-ot** is eléri, ami egy jelentősen **eltúlzott érték**. A *nyírási tag* dominanciája oda vezet, hogy a lehajlásfüggvény már-már lineáris alakot vesz fel, tehát olykor nem csak a maximális lehajlások eredményei tértek el a numerikus szimulációk eredményeitől, hanem az egyes szendvics modellek már az alakváltozások jellegét tekintve is eltérő eredményeket produkáltak.

A „vastag” kéreggel (50 mm) rendelkező rövid (50 cm hosszú) gerenda vizsgálata után levonhatjuk azt a végső következtetést, miszerint a vizsgált módszerek többsége jelentős hibával dolgozik, és így alkalmatlannak bizonyulnak a fenti probléma esetén. Ezek közül kivételt képezhetnek azok a módszerek, melyek a *Timoshenko-elméletnek* megfelelően figyelembe veszik a nyírási alakváltozások hatását oly módon, hogy a *nyírási korrekciós tényező* meghatározásakor a keresztmetszet geometriai és merevségi viszonyait is figyelembe veszik. Azonban fontos tudni, hogy a fenti probléma esetén ezek a módszerek is éles alkalmazhatósági korláttal bírnak, ugyanis viszonylag *puha belső mag* esetén az így kapott eredmények is megbízhatatlannak bizonyultak.

A (3.5)-ös és (3.6)-os ábrán az látszik, hogy az együttdolgoztatás mértékének figyelembevételével kapott eredmények nem különböztek számottevően azoktól, melyeket a tökéletes együttdolgozás feltételezése mellett kaptunk. Ennek az az oka, hogy $n=10$ esetén a keresztmetszet jó közelítéssel ténylegesen együttdolgozónak tekinthető, $n=10000$ esetén pedig ugyan jelentős eltérés van a pontos-, és az együttdolgozás feltételezéssel számított inerciaértékek között, ekkor a nyírási tag dominanciája miatt ez a különbség már nem okoz számottevő relatív hibát az eredményekben. Azonban $n=100$ és $n=1000$ esetén – a (3.6)-os és (3.7)-es diagramokon – az eredmények között jól látható különbséget figyelhetünk meg akkor, ha az együttdolgozás feltételezése mellett ennek pontosabb vizsgálatával is elvégezzük a

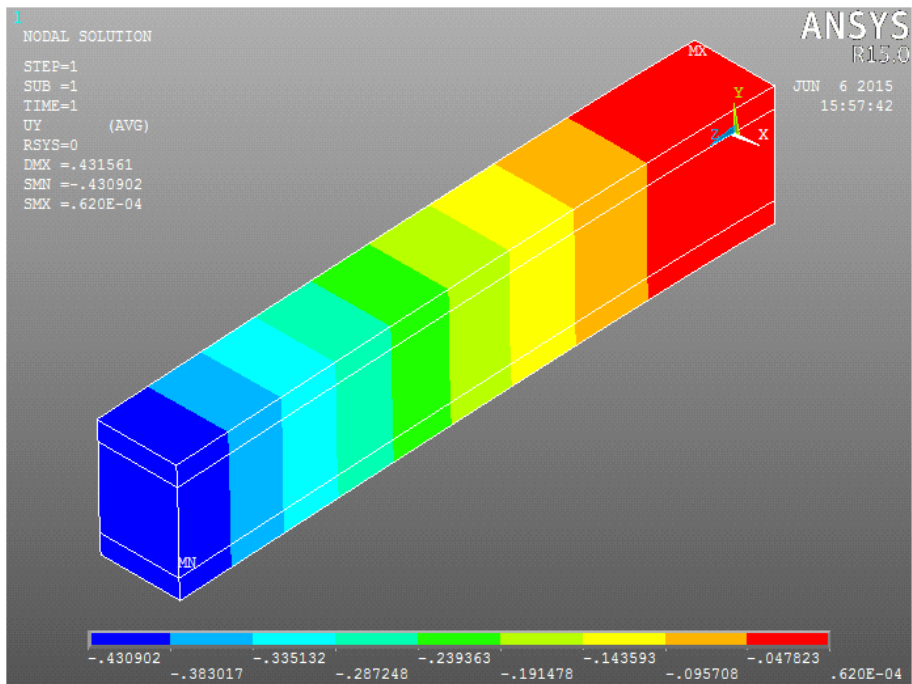
számításokat. Ugyan a csak hajlítási tagból álló *Bernoulli-Navier-megoldásnál* a részletes vizsgálattal kapott lehajlás a többszöröse is lehet az összetett km-tel számított értéknek, a pontosabb nyírási modelleknél – a nyírási tag jelenléte miatt – kisebb kb. 5-10 százalékos különbségeket láthatunk.

A 0,5 m hosszú konzol vizsgálatánál a kapott eredmények között igen nagy szórást figyelhattunk meg. Ennek elsődleges oka az, hogy itt jelentős *nyírási alakváltozásokról* beszélhettünk, melyeket a módszerek eltérő mértékben voltak képesek figyelembe venni. A következőkben rátérek a **1,5 m hosszú** – de továbbra is 30 cm magas keresztmetszetű - konzolok vizsgálatára. Azzal, hogy a gerenda h/L aránya – és így a *nyírási alakváltozások* szerepe is – lecsökkent, azt várhatjuk, hogy az eredmények szórása is csökkenni fog az előbb vizsgált esethez képest. A kérdés az, hogy ilyen karcsúbb szendvics gerendáknál az alkalmazott gerendamodellek mennyivel bizonyulnak megbízhatóbbnak. A (3.18)-as ábrán a szendvicsgerenda végeselemes modellje látható:

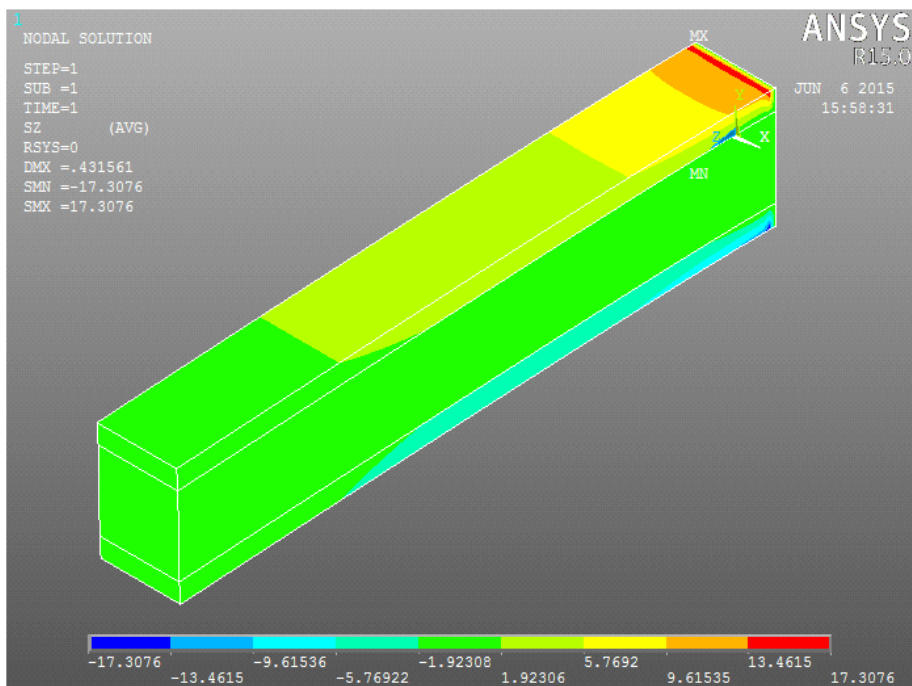


3.18 ábra 1,5m hosszú szendvics keresztmetszetű gerenda végeselemes modellje

A modell deformációi és a keletkező normálfeszültségek a következő ábrákon láthatók:



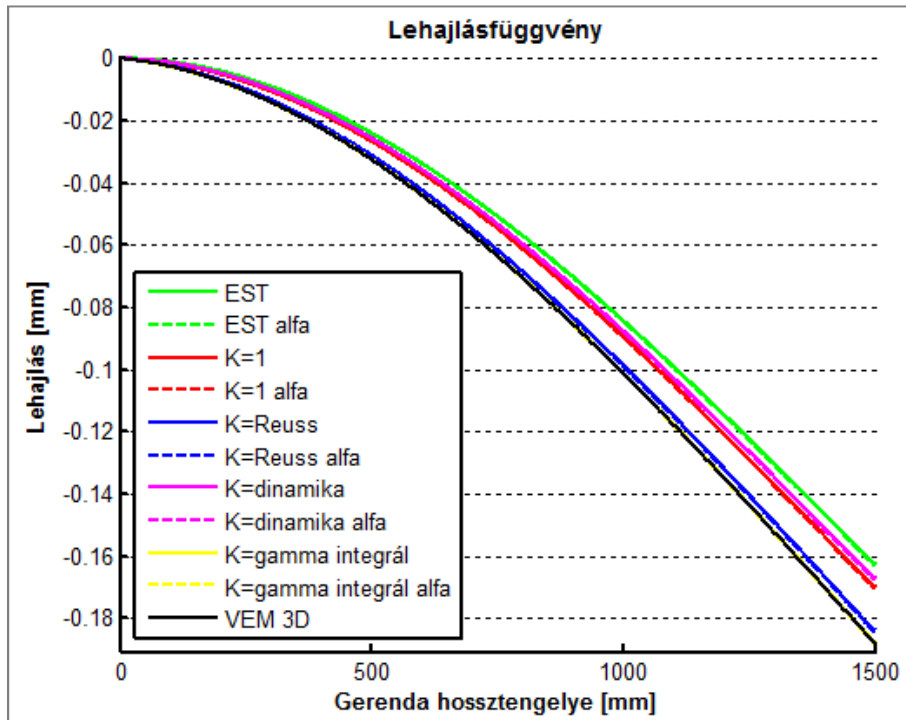
3.19 ábra 1,5m hosszú szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása



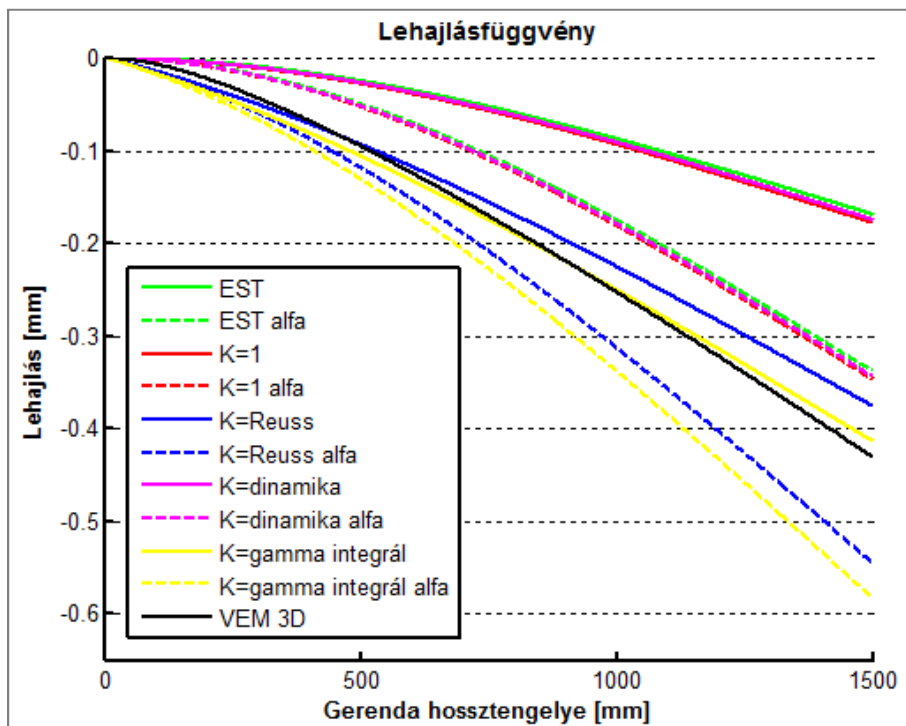
3.20 ábra 1,5m hosszú szendvics keresztmetszetű gerenda hosszirányú normál feszültségei



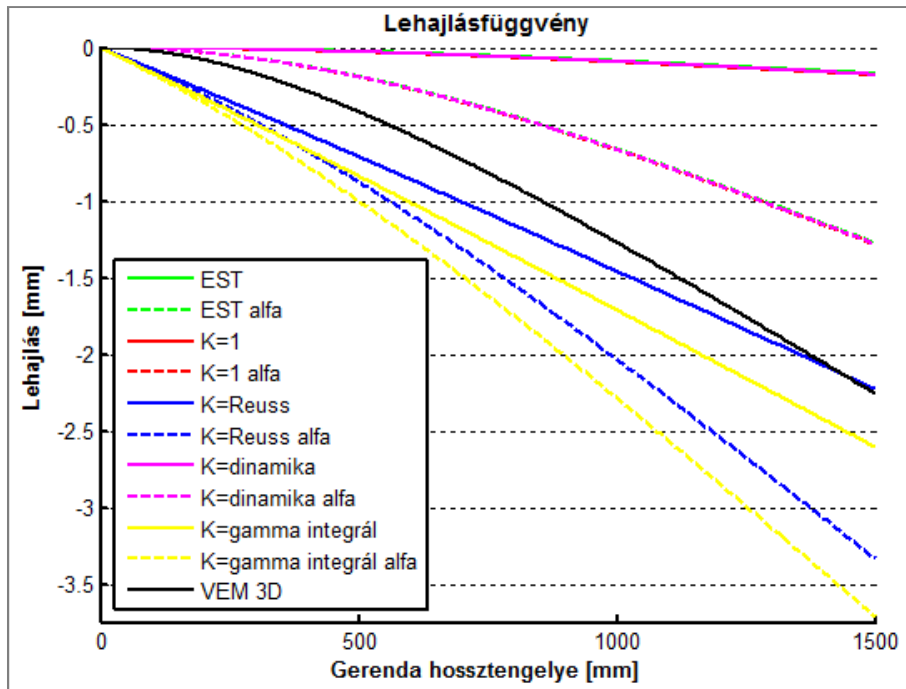
A következő ábrákon bemutatom azokat a lehajlásokat, melyeket "vastag" kéreggel rendelkező, 1,5m hosszú konzolok esetén kaptam:



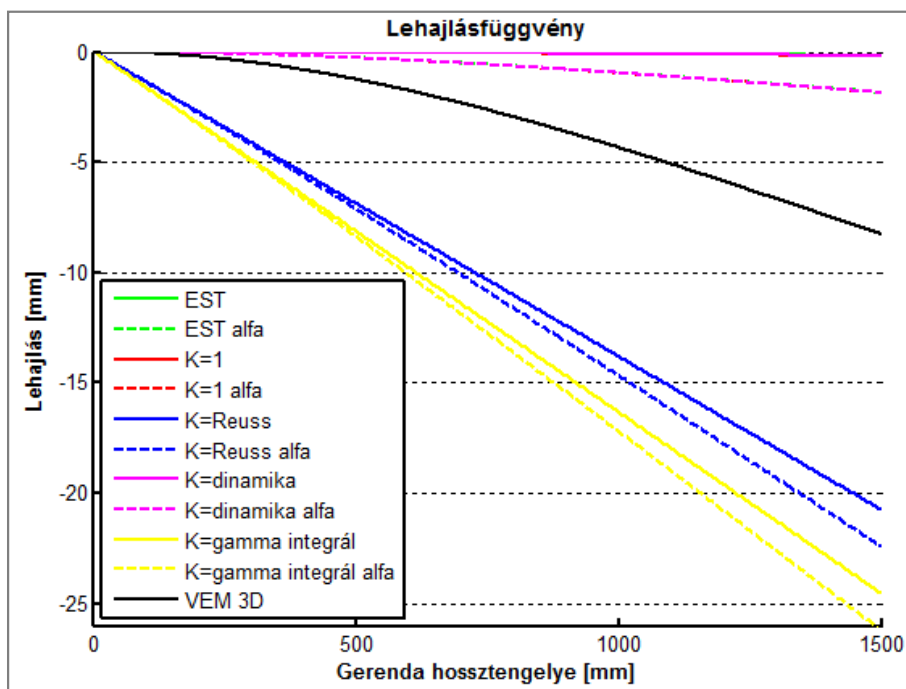
3.21 ábra 150 cm hosszú, "vastag" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=10$ esetén



3.22 ábra 150 cm hosszú, "vastag" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=100$ esetén



3.23 ábra 150 cm hosszú, "vastag" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=1000$ esetén



3.24 ábra 150 cm hosszú, "vastag" kéreggel rendelkező szendvics gerenda lehajlása $n=10000$ esetén

Ezek az ábrák azt a hatást mutatják, melyet az izotrop esetben megfigyelhettünk, nevezetesen **kisebb h/L aránynál a modellek relatív hibái egyre kisebbé válnak**. Ez elsősorban abból származik, hogy a **nyírési alakváltozás hatása** - mely rövidebb gerendánál olykor komoly hibák forrása volt, – itt **lecsökken**, a lehajlás képletében a *hajlítási tag* kezd dominálni.

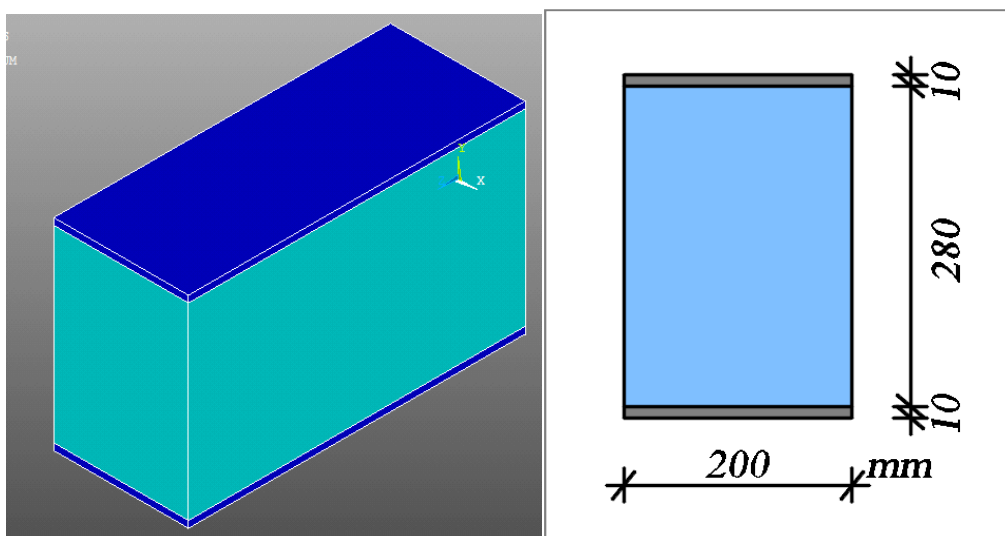
A hibák százalékos értékeit a (3.2)-es táblázat tartalmazza:

n	10	100	1000	10000
MéRNÖKI elmélet	-13,81%	-60,90%	-92,51%	-97,95%
Timoshenko ($\kappa=1$)	-9,67%	-58,81%	-92,10%	-97,84%
Timoshenko ($\kappa=Reuss$)	-2,34%	-12,90%	-1,34%	150,78%
Timoshenko ($\kappa=dinamika$)	-11,15%	-59,55%	-92,25%	-97,88%
Timoshenko ($\kappa=\gamma_{ZY}$ int.)	-0,37%	-1,79%	15,44%	196,60%

3.2 táblázat Konzollehajlás százalékos eltérései a vége-selemes szimulációk eredményéhez viszonyítva

Megállapítható, hogy amikor a kéregréteg és a belső mag anyagának rugalmassági modulusa között két nagyságrendnyi, vagy annál nagyobb eltérés van, akkor a *méRNÖKI elmélet*, a $\kappa=1$ -gyel dolgozó és a *dinamikai vizsgálaton alapuló Timoshenko-elmélet* eredményei továbbra is megbízhatatlannak bizonyulnak. A másik két - általam vizsgált - módszer, melyeknél a keresztmetszet merevségi viszonyai is befolyásolták az alkalmazott κ -tényező értékét – nem „nagyon” puha belső mag esetén – most is viszonylag megbízható eredményeket szolgáltat. Ezeknél a hiba mértéke általában 15% alatt marad. Ezen módszerek igen puha belső mag esetén megfigyelhető alkalmazhatósági korlátja ezúttal is jól kivehető, azonban jelen esetben $n=1000$ -nél még viszonylag megbízható eredményeket kaptam, vagyis a két modell alkalmazhatósági tartománya „**kibővült**” a korábban vizsgált esethez képest.

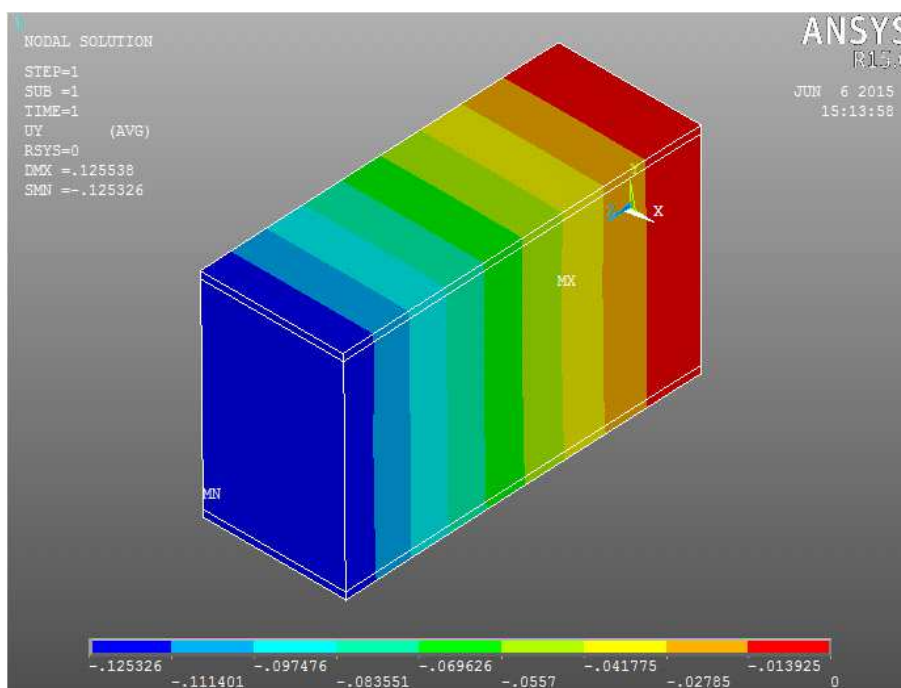
Megfigyelhettük, hogy az eredmények megbízhatósága a keresztmetszet *merevségi viszonyain* túl annak *geometriai viszonyaitól* is függ. Ebből adódóan az előbb vizsgált esetekben a kapott **hibák** bizonyos mértékben abból adódtak, hogy a **kéregrétegek „jelentős” vastagsággal rendelkeztek**. Azért, hogy megvizsgáljuk a *geometriai viszonyok* egyes modellek megbízhatóságára gyakorolt hatását, a következőkben **vékonyabb kéregrétegekkel** rendelkező keresztmetszetű tartókra is elvégzem a számításokat. Először ezúttal is **50 cm hosszú konzolok** lehajlásait és feszültségeit vizsgálom. A vizsgált keresztmetszet és a konzol vége-selemes modellje a (3.25)-ös ábrán látható:



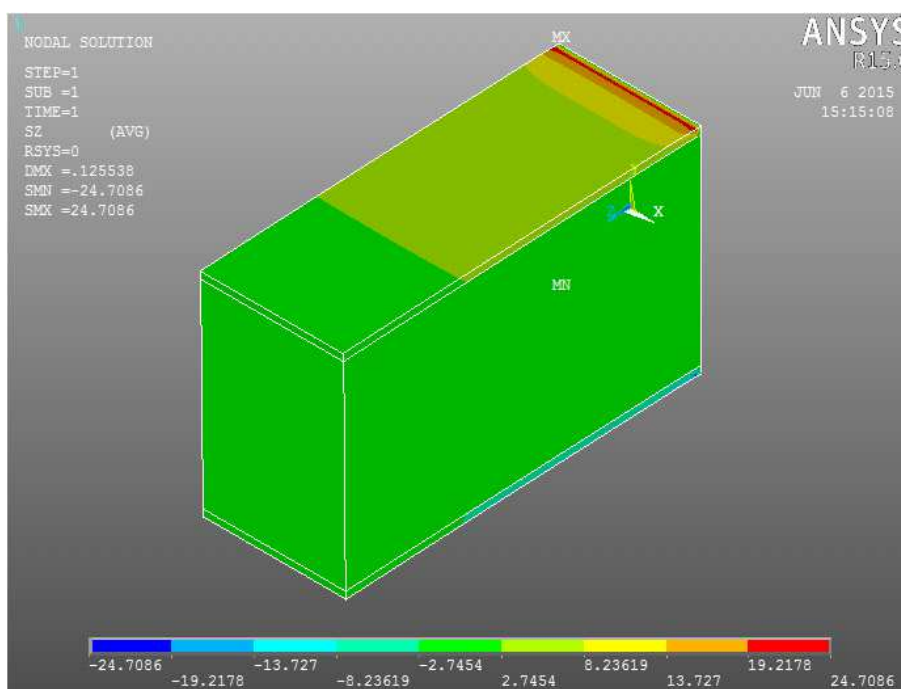
3.25 ábra $L=50$ cm szendvics keresztmetszetű gerenda numerikus modellje és keresztmetszeti méretei



A numerikus modell deformációi és hosszirányú normál feszültségei az alábbi ábrán láthatók:



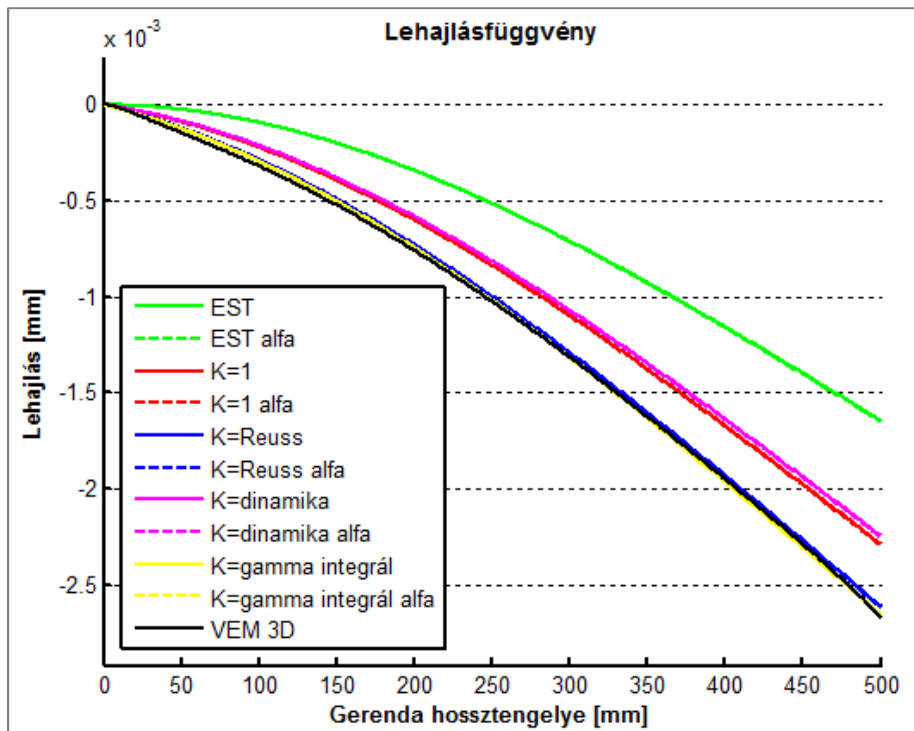
3.26 ábra 50 cm hosszú szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása



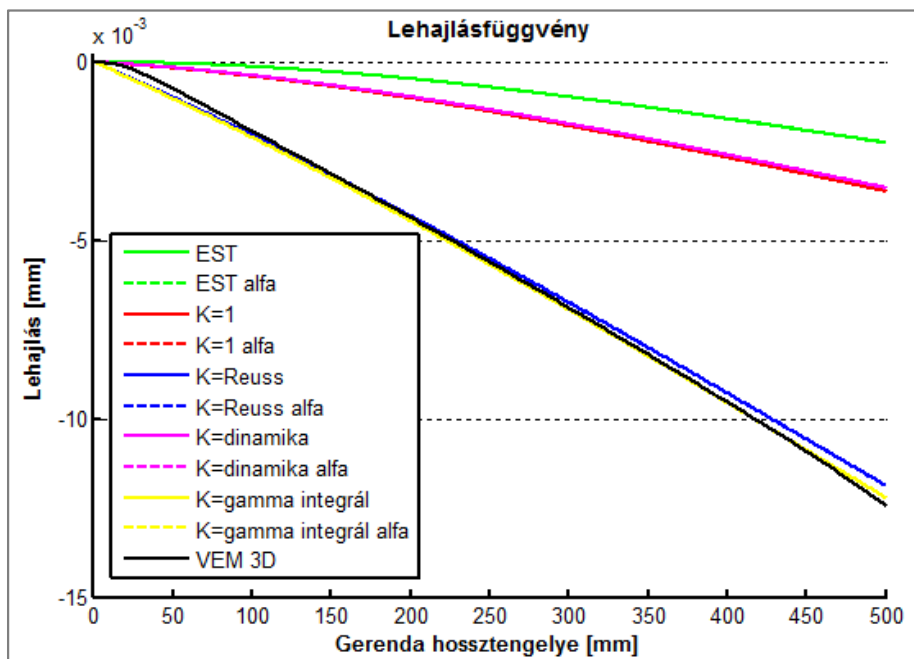
3.27 ábra 50 cm hosszú szendvics keresztmetszetű gerenda hosszirányú normál feszültségei



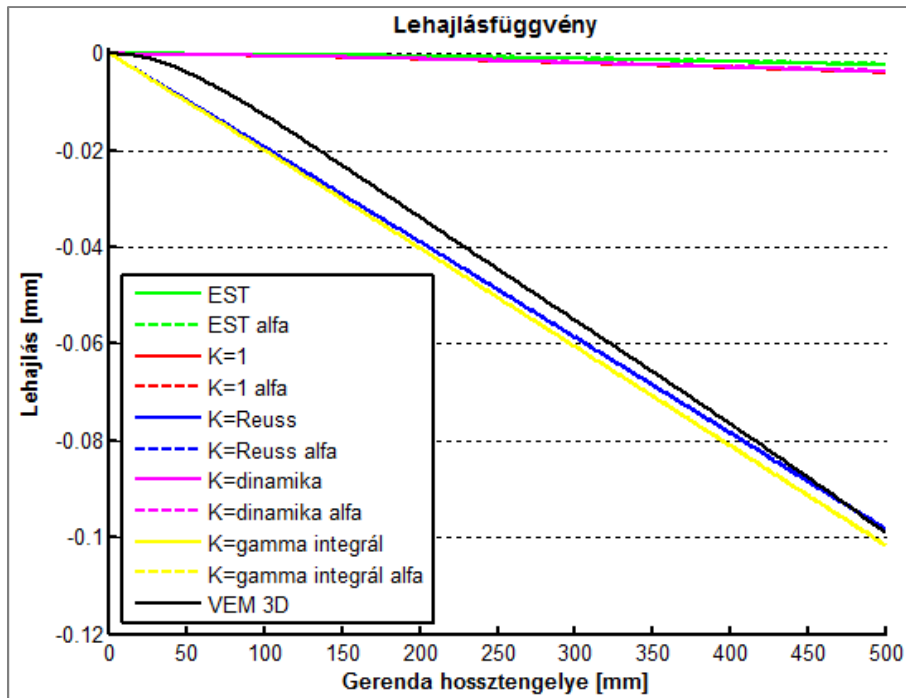
Ez esetben az alábbi lehajlásokat kaptam eredményül:



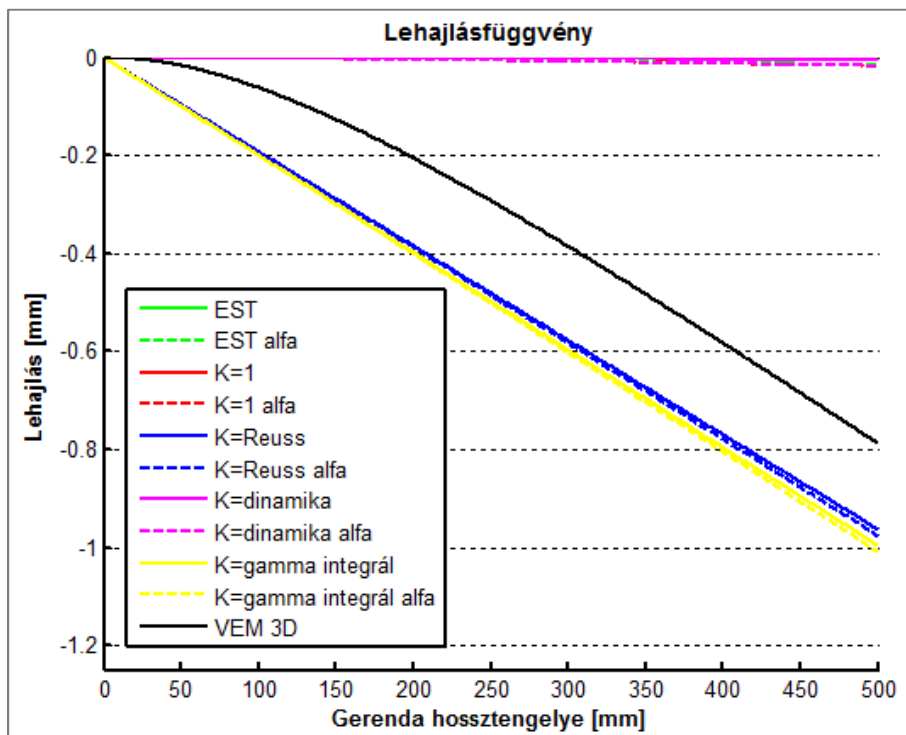
3.28 ábra 50 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=10$ esetén



3.29 ábra 50 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=100$ esetén



3.30 ábra 50 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=1000$ esetén



3.31 ábra 50 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=10000$ esetén

Látható, hogy míg viszonylag vastag kéreg esetén olykor rendkívül különböző eredményeket kaptam az egyes modellekkel, **vékony kéreg esetén** már valamivel jobb a helyzet. A különböző modellek eredményeinek százalékos eltéréseit (a vége-selemes modellek eredményeihez viszonyítva) a (3.3)-as táblázat mutatja:

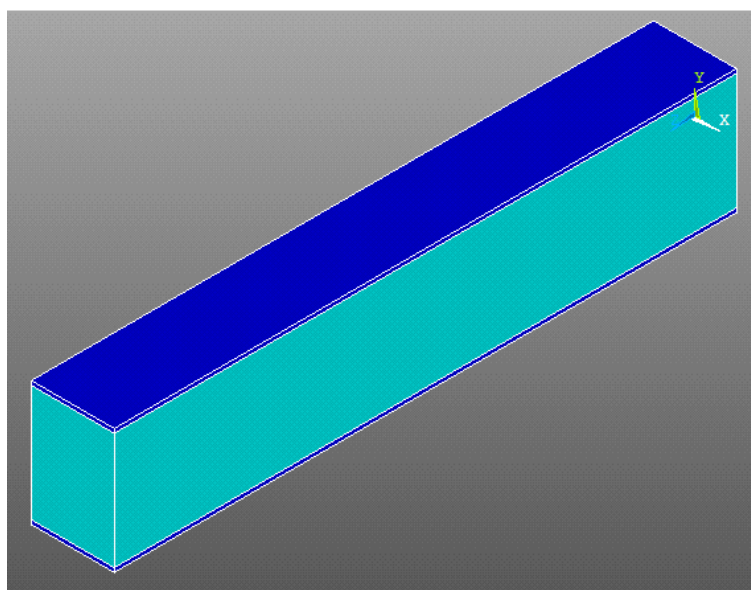
n	10	100	1000	10000
MéRNÖKI elmélet	-40,74%	-81,45%	-97,68%	-99,70%
Timoshenko ($\kappa=1$)	-14,81%	-70,97%	-96,06%	-99,50%
Timoshenko ($\kappa=Reuss$)	-3,70%	-4,03%	-0,61%	22,28%
Timoshenko ($\kappa=dinamika$)	-18,52%	-71,77%	-96,16%	-99,52%
Timoshenko ($\kappa=\gamma_{zy} \text{ int.}$)	-3,70%	-1,61%	2,73%	26,44%

3.3 táblázat Konzollehajlás százalékos eltérései a végeelemes szimulációk eredményéhez viszonyítva

A (3.3)-as táblázat megmutatja, hogy a *méRNÖKI elmélet*, és azok a modellek, melyek a *nyírási korrekciós tényező* számításánál nem veszik figyelembe a keresztmetszet merevségi viszonyait, továbbra is megbízhatatlannak bizonyulnak, hiszen a végeelemes szimulációk eredményétől merőben eltérő eredményre vezethetnek. Azok a modellek viszont, melyek a keresztmetszet merevségi viszonyait is figyelembe veszik a számítás során, - legalábbis az esetek többségében - viszonylag pontosnak bizonyulnak. Megállapítható, hogy a geometriai viszonyok ily módon jelentősen befolyásolják az egyes szendvics-elméletek megbízhatóságát, hiszen a "vastag" kéregnél tapasztalt jelentős eltérések "vékony" kéreg esetén olykor néhány százalékos eltérésre redukálódnak. Fontos hangsúlyozni, hogy a két viszonylag pontosnak bizonyuló modellre továbbra is igaz az, hogy fontos alkalmazhatósági korláttal rendelkeznek. Mint látható $n=10000$ -nél ezek a modellek is már jelentős hibával dolgoznak.

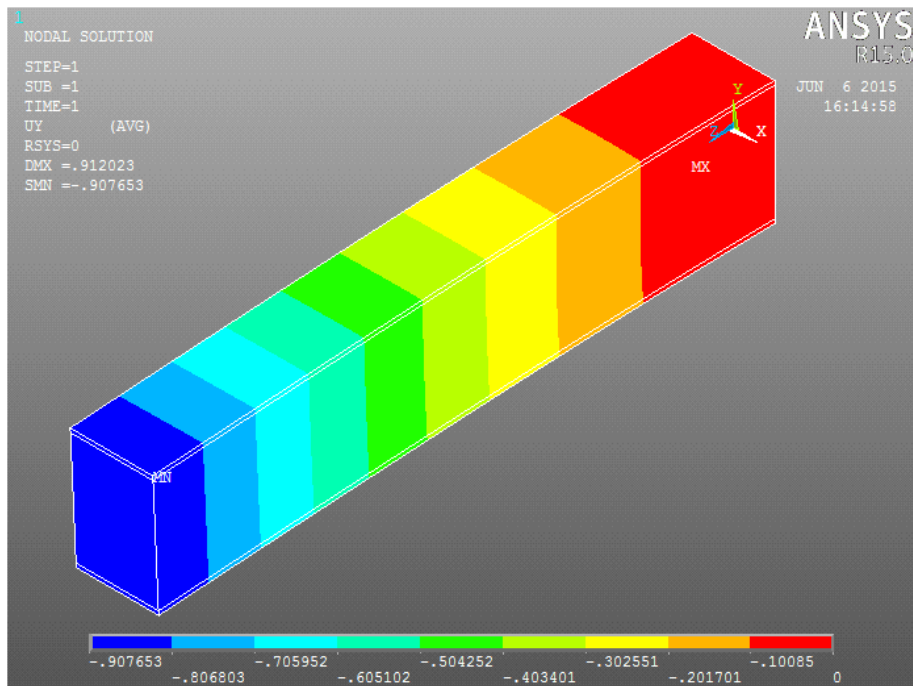
Az előzőek alapján egy olyan tendencia látszik körvonalazódni, hogy a most vizsgált szendvics-modellek annál inkább tekinthetők megbízhatóknak, minél karcsúbb (kis h/L arányú), és minél vékonyabb kéreggel rendelkező gerendát vizsgálunk. Ennek a kérdésnek az igazolására most vizsgáljuk azt az esetet amikor a konzol hossza 1,5 m, a keresztmetszet pedig megegyezik az előbb látott vékony kéreg rétegekkel épül fel.

A szendvics keresztmetszetű gerenda végeelemes modellje a (3.32)-es ábrán látható:

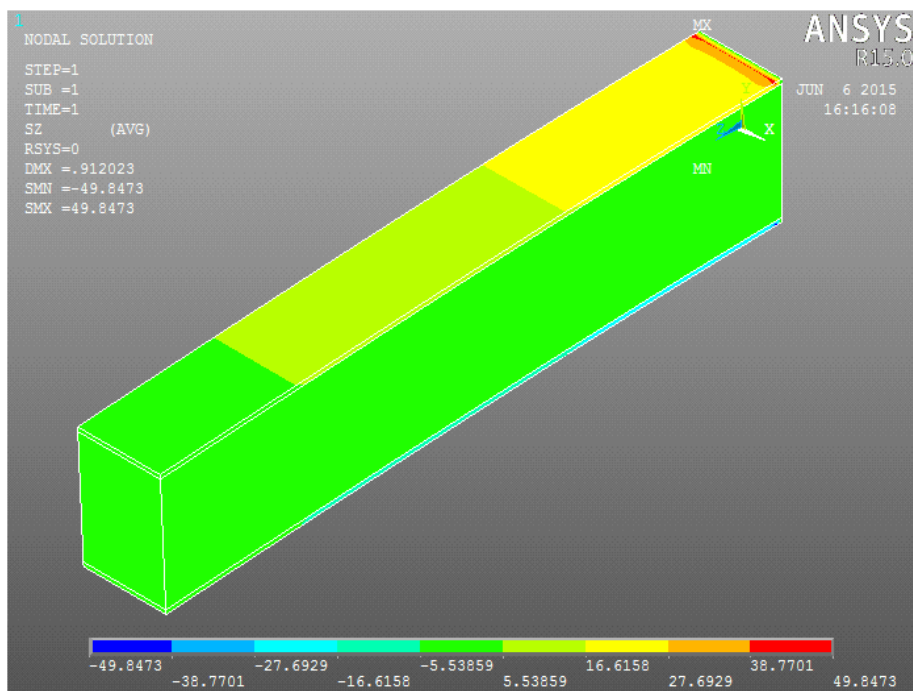


3.32 ábra 150 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda numerikus modellje

A gerenda lehajlását és a hosszirányú normál feszültségek eloszlását az alábbi ábrák mutatják:

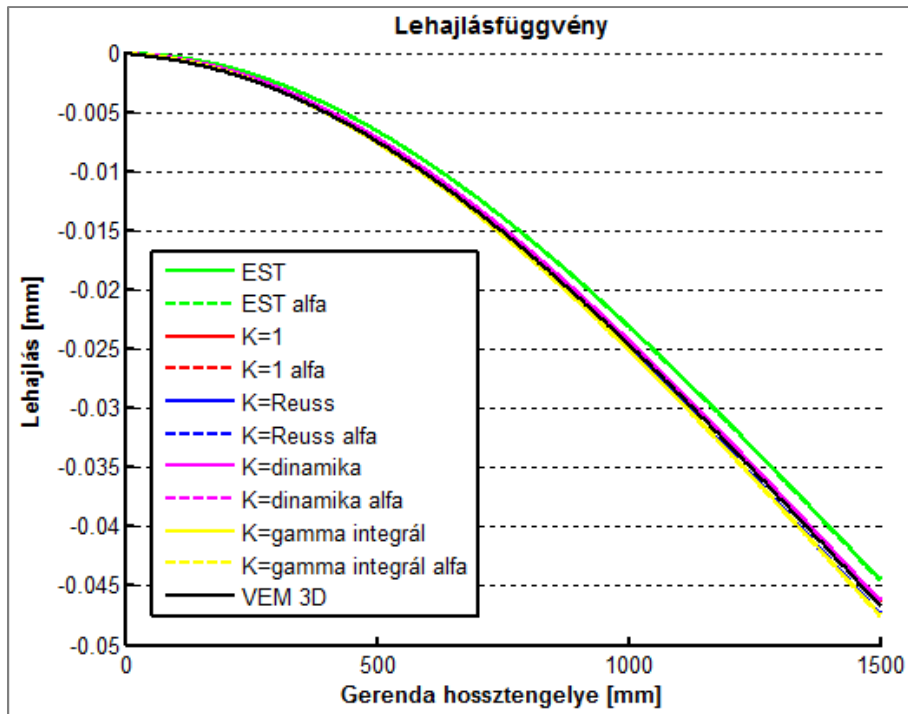


3.33 ábra 150 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása

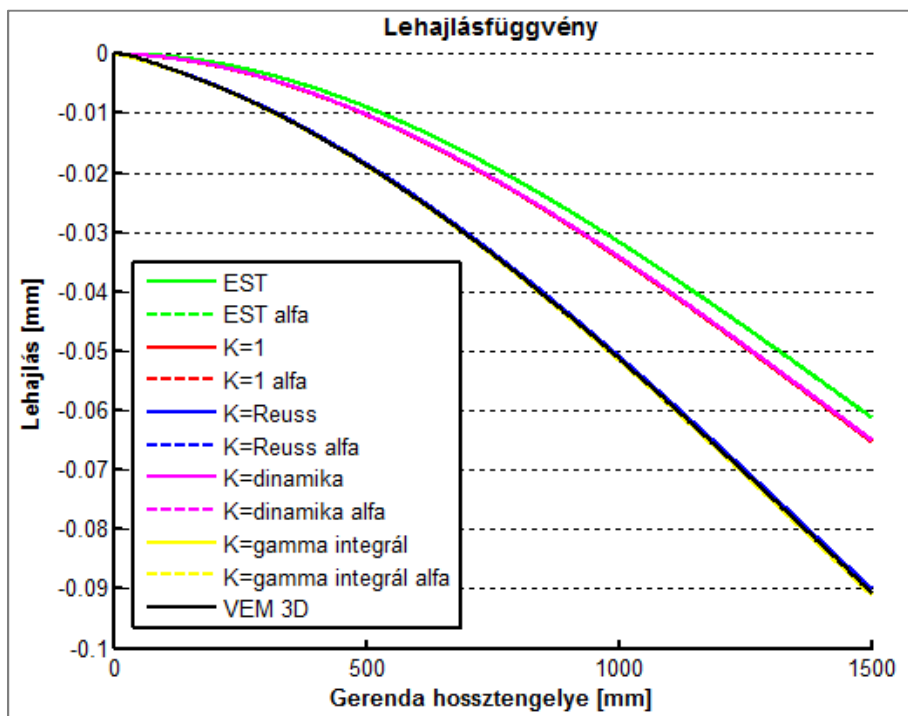


3.34 ábra 150 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda hosszirányú normál feszültségei

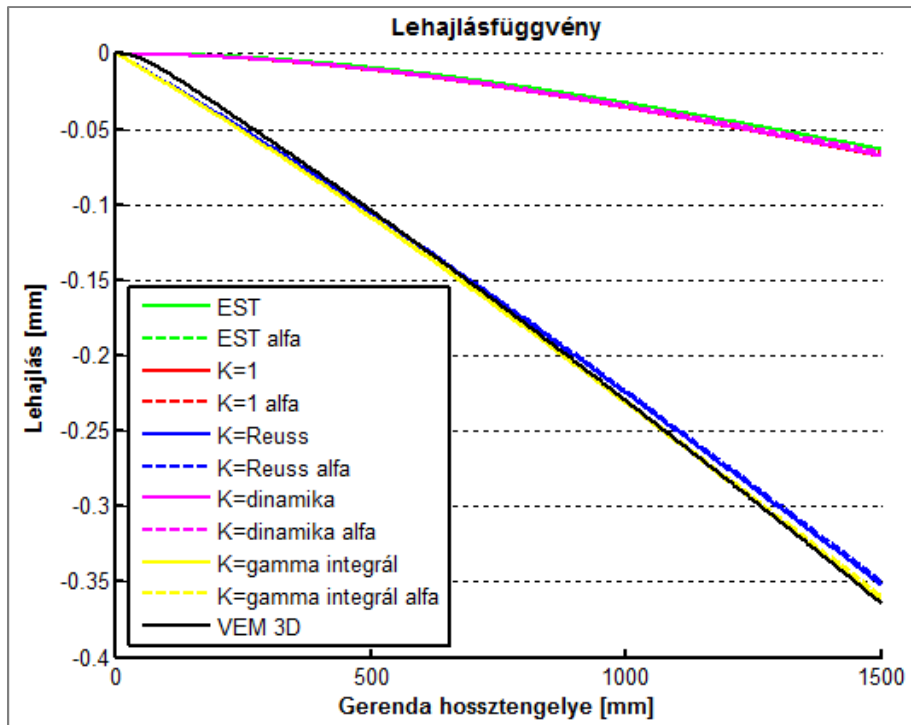
A fenti gerendára kapott lehajlásokat az alábbi ábrákon szemléltetem:



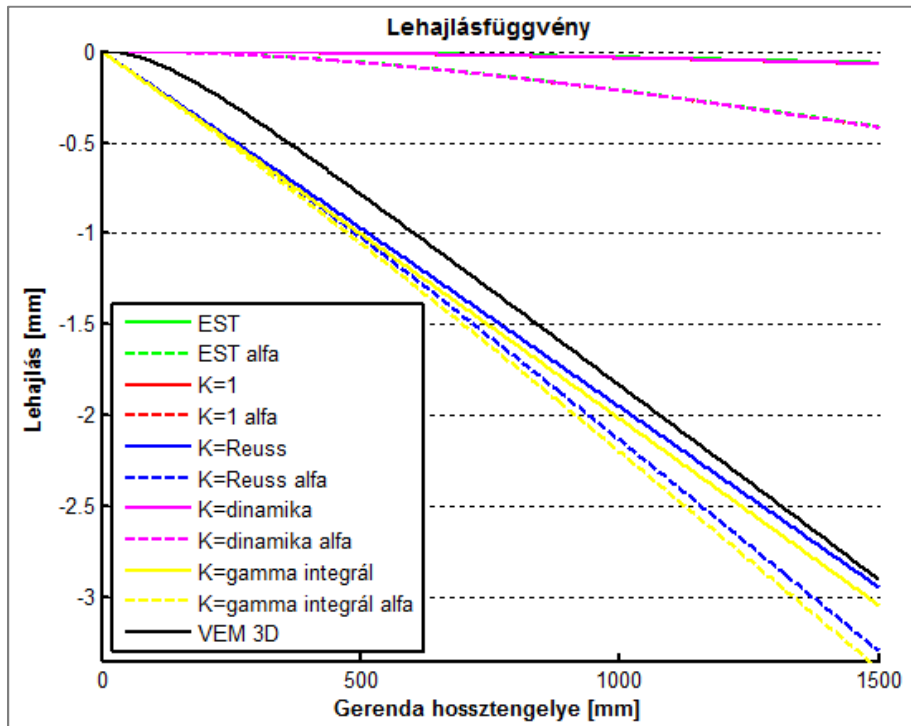
3.35 ábra 150 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=10$ esetén



3.36 ábra 150 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=100$ esetén



3.37 ábra 150 cm hosszú, "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=1000$ esetén



3.38 ábra 150 cm hosszú "vékony" kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n=10000$ esetén

A különböző modellek eredményeinek százalékos eltéréseit (a végeleemes modellek eredményeihez viszonyítva) a (3.4)-es táblázat mutatja:



n	10	100	1000	10000
MéRNÖKI elmélet	-4,93%	-32,75%	-82,59%	-97,81%
Timoshenko ($\kappa=1$)	-0,86%	-28,22%	-81,32%	-97,65%
Timoshenko ($\kappa=Reuss$)	1,28%	-1,00%	-1,26%	1,42%
Timoshenko ($\kappa=dinamika$)	-1,07%	-28,56%	-81,41%	-97,66%
Timoshenko ($\kappa=\gamma_{zy} \text{ int.}$)	1,50%	0,33%	-0,80%	4,80%

3.3 táblázat Konzollehajlás százalékos eltérései a végeelemes szimulációk eredményéhez viszonyítva

Látható, hogy az a két modell, mely a *nyírási korrekciós tényező* számításakor **figyelembe veszi** a keresztmetszet merevségi viszonyait, már igen **pontos eredményeket szolgáltat**. Ezzel ellentétben a *méRNÖKI-elmélet*, és azon *Timoshenko-modellek*, melyeknél a km. merevségi viszonyai nem játszanak szerepet a számítás során - még viszonylag karcsú gerenda és vékony kéreggel rendelkező keresztmetszet esetén is - megbízhatatlannak bizonyulnak.

3.4. Numerikus eredmények tanulságainak összefoglalása

Általánosságban elmondható, hogy a szendvics keresztmetszetű gerendák eredményeiben **nagyobb bizonytalanságokat figyelhettünk meg**, mint az izotrop gerendáknál. Ennek elsősorban az az oka, hogy a **nyírási alakváltozások** olykor **nagyon jelentőssé válnak**, és ezeket az alakváltozásokat az egyes modellek eltérően kezelik. A nyírási alakváltozások jelentősége oda vezet, hogy a *méRNÖKI-modell* már nem ad reális eredményeket, az esetek többségében ilyenkor több nagyságrendnyi hibáról beszélhetünk. A nyírási alakváltozások hatásán túl megfigyelhettünk egy másik fontos jelenséget, nevezetesen, hogy a keresztmetszet merevségi viszonyainak megváltozásával a **keresztmetszet együttdolgozása is megváltozhat**. Ez azt eredményezi, hogy a lehajlások és feszültségek meghatározásakor egy "csökkentett inercia" mennyiséggel kellene számolni. Azzal, hogy a modellek minden esetben teljesen együttdolgozóknak tekintik a keresztmetszetet, az inerciát túl, a **feszültségeket** pedig jelentősen **alulbecsülhetik**.

Eredményeim azt mutatják, hogy a **nyírási alakváltozások hatása** nagyban **függ a keresztmetszet geometriai és merevségi viszonyaitól**. Éppen ezért azok a *nyírási-modellek*, melyek a *nyírási korrekciós tényező* számításakor a fenti viszonyok közül csak az egyiket (vagy egyiket sem) veszik figyelembe - számításaim szerint - komoly hiányosságokkal bírnak. Ez oda vezet, hogy ezen modellek eredményei is olykor nagyságrendekkel eltérnek a "pontos" értékektől, így véleményem szerint - az esetek többségében - ezek még "első közelítésnek" sem fogadhatók el.

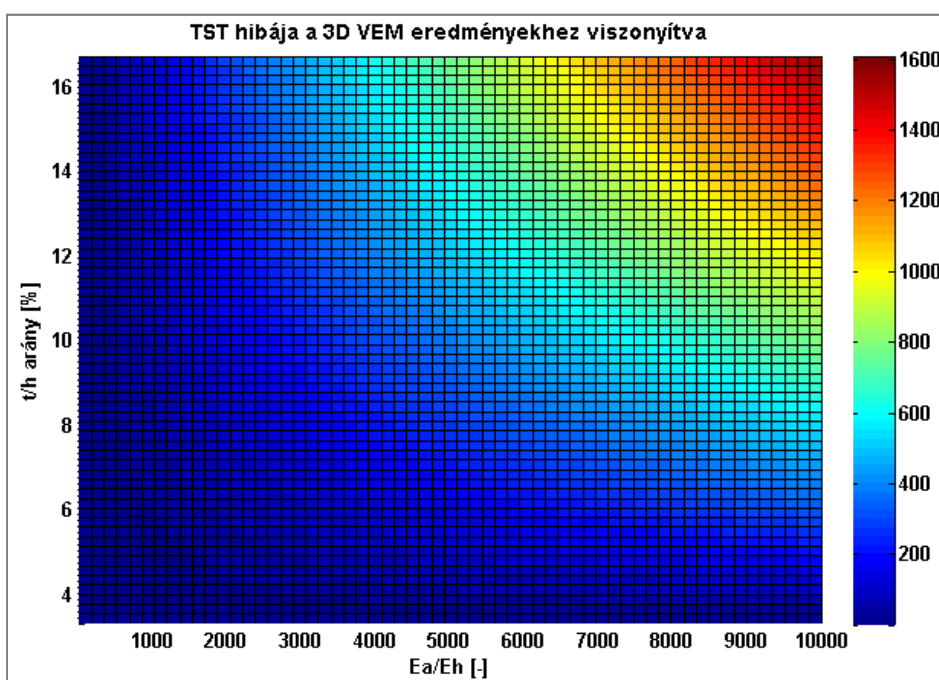
Ezekkel ellentétben azok a modellek, melyek a **felt említett viszonyok mindegyikét figyelembe veszik**, az esetek többségében "viszonylag pontos"⁵⁷ eredményre vezetnek. Azonban nagyon fontos hangsúlyozni, hogy még ezeknek a viszonylag pontosabb nyírási

⁵⁷ Ez számításaimban általában néhány - maximum 10-15%-os - eltérést jelentett a "pontos" értékektől, melyek például a *Timoshenko-modell* izotrop gerendákra vonatkozó eredményeihez képest még mindig jelentős különbségnek mondhatók.

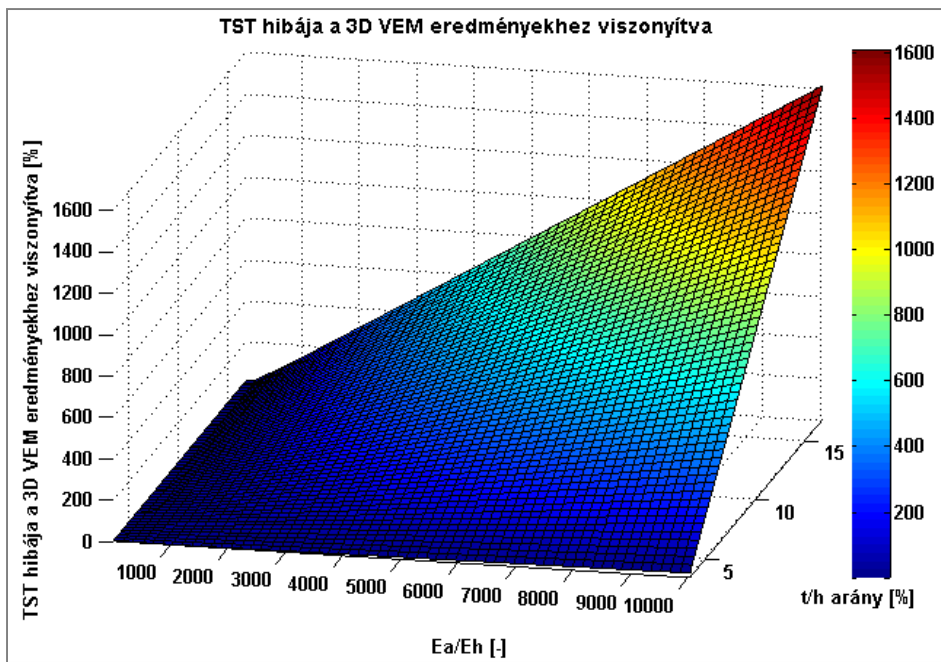


modelleknek az eredményeit is bizonyos fenntartással kell kezelni, ugyanis ezeknek a modelleknek is megvan a maguk **alkalmazhatósági korlátja**. Ez abból adódik, hogy bizonyos merevségi viszonyok esetén (amikor a belső magréteg nagyon puha anyagból készül a kéregrétegekhez képest) a *nyírási korrekciós értéke* túlzottan lecsökken. Ez a *nyírási alakváltozások* hatásának eltúlzásával, túlbecslésével jár, ami miatt a számított lehajlások számottevően meghaladják a "pontos" értékeket. Ezen modellek alkalmazhatósági korlátját a (3.39)-(3.42)-es ábrák illusztrálják.

A (3.39)-as és (3.40)-es ábra a *Reuss-módszer* hibáit mutatja. Ezeket egy felületen ábrázoltam, amelyet a *Timoshenko-modellel* (azon belül a *Reuss-módszerrel*) kapott eredmények hibáira, mint diszkrét pontokra illesztettem *spline interpolációval*. Ezek alapján a hibák jellegéről elmondható, hogy elsősorban a **kéregvastagság növelésével** és a **mag rugalmassági modulusának csökkenésével párhuzamosan nő a hiba mértéke**.

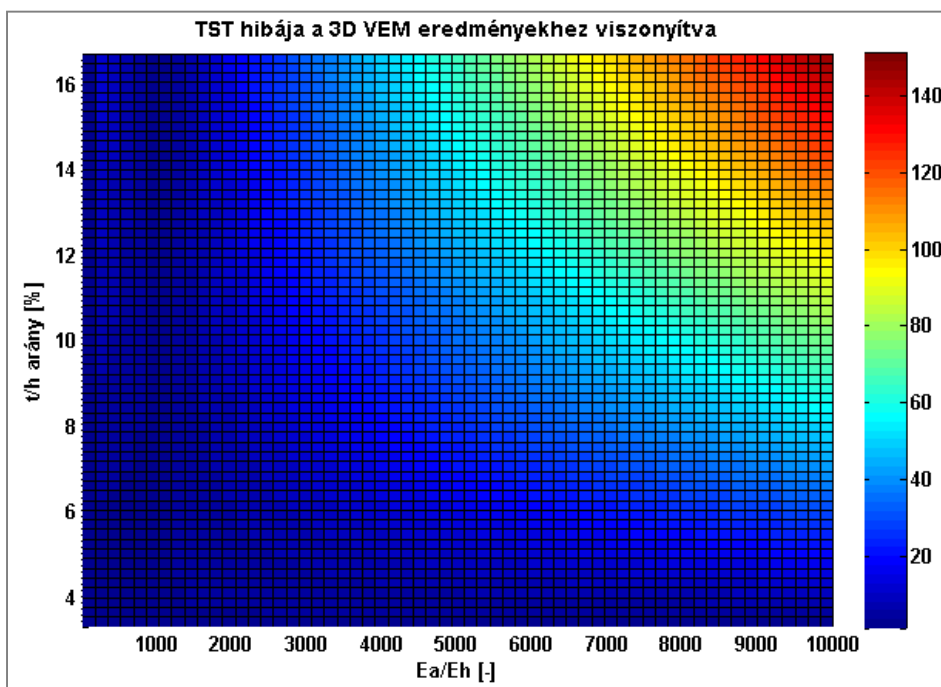


3.39 ábra Timoshenko-modell százalékos hibája a kéregvastagság és a mag rugalmassági modulusának függvényében ($h/L=0,6$)

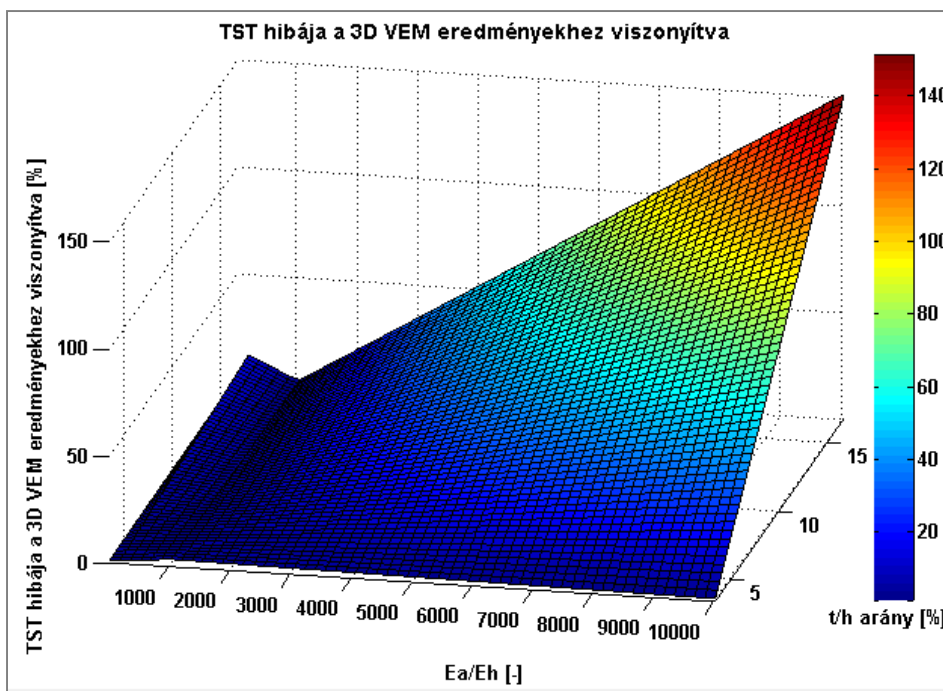


3.40 ábra Timoshenko-modell százalékos hibája a kéregvastagság és a mag rugalmassági modulusának függvényében ($h/L=0,6$)

Az iménti ábrákon a rövidebb, $L=50$ cm-es gerenda eredményeit tüntettem fel. **Hosszabb gerenda esetén** - $L=150$ cm - a **nyírási alakváltozások hatása már kisebb**, így az egyes **modellekkel** már jelentősen **kisebb hibákat kaptunk**, mint korábban a rövidebb gerendánál. A hibák jellegéről – ahogy ez a (3.41)-es és (3.42)-es ábrákon látható - ugyanaz mondható el, mint korábban:



3.41 ábra Timoshenko-modell százalékos hibája a kéregvastagság és a mag rugalmassági modulusának függvényében ($h/L=0,2$)



3.42 ábra Timoshenko-modell százalékos hibája a kéregvastagság és a mag rugalmassági modulusának függvényében ($h/L=0,2$)

A hibák nőnek a mag rugalmassági modulusának csökkenésekor és a kéregvastagság növelésekor, de abszolút értékeket tekintve már sokkal kisebb hibákról beszélhetünk, mint korábban a rövidebb gerendák esetén. Ezek alapján megállapítható, hogy a *Reuss-módszer* (és a *nyírási alakváltozások* keresztmetszeti területen vett integráljával számító módszer) alkalmazhatósága egyaránt függ a gerenda geometriai viszonyaitól (h/L arány), a keresztmetszet geometriai viszonyaitól (kéregvastagság) és a keresztmetszet merevségi viszonyaitól (n -tényező értéke).

4. Anizotrop anyagú gerendák mechanikai vizsgálata

Ebben a fejezetben anizotrop anyagú gerendák mechanikai vizsgálatával foglalkozom. A bevezetésben bemutatok néhány érdekes példát az anizotrop anyagok használatára a mérnöki gyakorlatban, majd pedig rátérek az anizotrop anyagok egyes típusainak ismertetésére. Az anizotropia egyes speciális eseteinek tárgyalásakor mutatok egy-egy példát az adott típusú anyagra, majd pedig ismertetem az adott anyag viselkedését leíró összefüggéseket. Minden esetben szót ejtek az adott típusú anyag viselkedésénél tapasztalt sajátosságokról. Ezek után rátérek a gerendák vizsgálatára, ahol először az anizotropia különböző eseteire bemutatom a feszültségek és elmozdulások meghatározásának analitikus módszerét. Az analitikus megoldás nehézségeit látva szót ejtek az általános esetben is alkalmazható numerikus megoldás lehetőségéről. Ezt követően rátérek a numerikus számítások elvégzésre, ahol a gerendamodellek eredményeit ezúttal is *3D végeselemes szimulációk* eredményeivel hasonlítom össze. Az eredmények elemzésekor kitérek a anizotrop gerendáknál tapasztalt viselkedési sajátosságokra, érdekességekre. A fejezetet az eredmények tanulságainak összefoglalásával zárom.

4.1. Bevezetés

Az **anizotropia** egy anyag **tulajdonságainak iránytól való függését** jelenti. Ebben a fejezetben gerendák mechanikai viselkedésével foglalkozom, így itt kizárólag a mechanikai tulajdonságok iránytól való függését, és ennek következményeit vizsgálom. A dolgozatomban - a szendvics gerendákkal foglalkozó fejezetet leszámítva - **homogén anyagú gerendák** eltolódásait és feszültségeit elemeztem, így az anyag szilárdságtani tulajdonságait az egyes pontokban azonosnak tételeztem fel, azonban anizotrop esetben ezek a tulajdonságok minden pontban függenek a pontokban felvett irányoktól.

Az anizotrop anyagú gerendák nagy figyelmet kaptak a közelmúltban. Ez elsősorban annak köszönhető, hogy **számos anyag - gyengébb vagy erősebb mértékben - anizotrop tulajdonsággal bír**. A kristályos anyagok általában anizotropok, köszönhetően a kristályrács elrendeződésének, a kristályrácsalkotók közötti kötések egyes irányokban lévő eltérő erősségének, valamint a rácshibáknak. A **természetes anyagok** közül bizonyos **kőzetek** és **fák** rendelkeznek jelentős anizotrop tulajdonsággal. Ezen felül a mérnöki gyakorlatban nagyon gyakran **mesterséges anyagok**, főként **kompozitok**⁵⁸ vizsgálatokor szükséges az anizotrop viselkedés figyelembevétele. A kompozitok mikromechanikai vizsgálatokor alapvető fontosságú a *mikroszintű inhomogenitásnak* a figyelembevétele, azonban jelen vizsgálataimat kizárólag a kompozitok **makroszintű viselkedésének** elemzésére korlátozom. Ebben a léptékben a szerkezeteinket felépítő anyag **homogénnek**, (vagy "*kvázi-homogénnek*") tekinthető. Ilyenkor a kompozit viselkedését átlagolt szilárdságtani jellemzőkkel írjuk le, és

⁵⁸ Kompozit alatt az olyan anyagot értjük, melyet kettő vagy több anyag mikroszinten történő kombinálásával hoztak létre, hogy makroszinten egy új, kedvező tulajdonságokkal bíró anyagot kapjunk.



úgy gondolkodunk, hogy **makroszinten a folytonos test minden pontja ugyanabból az anyagból áll**. Ebből a megállapításból az következik, hogy egyenleteimben az anyagi paraméterek nem függenek az adott pont helyzetétől, csupán az alkalmazott koordináta-rendszer irányától.

A **kompozitoknak** az az **előnye** más hagyományos anyagokkal szemben, hogy - amennyiben jól tervezik - az alkotó alapanyagok jó tulajdonságait ötvözik, sőt gyakran a kompozit olyan kedvező tulajdonságokkal is bír, melyekkel önállóan egyik alapanyag sem rendelkezett. A kedvező tulajdonságok ötvözésére kiváló példát szolgáltatnak az üvegszálerősítésű polimerek, ahol az üvegszálat, - egy viszonylag nagy szilárdságú, merev, de nagyon rideg anyagot, - a duktilis, de elég gyenge és lágy polimerbe helyezik, és az így kapott kompozit egy viszonylag merev, nagy szilárdságú, de mégis rugalmas és szívós anyag lesz. Kompozit anyagok létrehozásával az alábbi tulajdonságokon javíthatunk:

- szilárdság,
- merevség,
- szívósság,
- korrózióállóság,
- fajsúly,
- fáradási viselkedés,
- hőmérsékletfüggő viselkedés,
- hőszigetelés és hővezetés,
- hangszigetelés,
- esztétikus megjelenés.

Természetesen egyszerre nem érik el a fent felsorolt tulajdonságok javításának mindegyikét. Ez azért van, mert általában nem is követelmény mindegyik tulajdonság egyidejű javítása, valamint a fent felsorolt tulajdonságok, célok némelyike egymással ellentétben áll.

A **kompozit anyagok** használatának **hosszú történelme** van. Már az őskorban használtak szalmaszállal erősített agyagtéglákat (**vályogtéglákat**) az építéshez. A (4.1)-es képen a *Maliban* található *Djenne nagy mecset*, a világ legnagyobb vályogépülete látható.

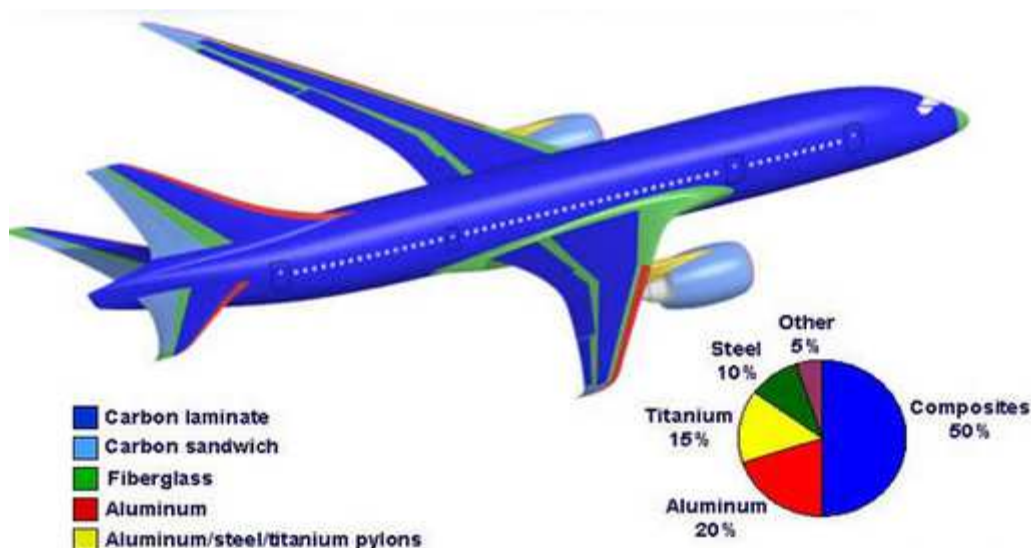


4.1 ábra A nagy mecset Djenne⁵⁹

⁵⁹ Forrás: <http://insideislam.wisc.edu/tag/great-mosque-of-djenne/>



Az ókori Egyiptomban már kb. i.e. 3000-tól használtak **furnérlemezeket**, ugyanis észrevették, hogy a farétegek újbóli elrendezésével magasabb szilárdság érhető el. Azok a középkori kardok, melyek különböző fémből készült rétegekből állnak, szintén kompozitnak tekinthetők. Manapság a **modern anyagtudomány** legújabb vívmányai a repülőknél és űrjárműveknél használt **szálerősített kompozitok**, melyekkel ma a **legnagyobb szilárdság-önsúly** és **merevség-önsúly arány** érhető el. A (4.2)-es ábrán az látható, hogy egy *Boeing 787*-típusú repülő karosszériájának egyes részei milyen kompozitból készülnek. Megfigyelhető, hogy a teljes önsúly 50%-át a kompozitok teszik ki.



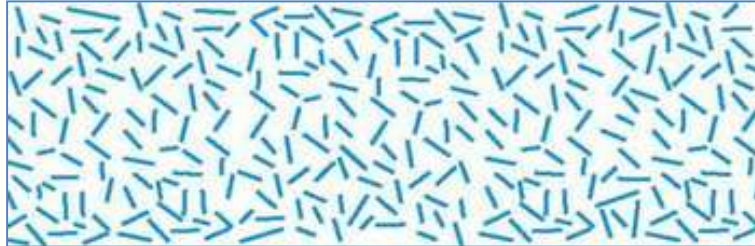
4.2 ábra Repülőgép kompozit anyagú rész⁶⁰

Általában a **kompozitoknak négy fő típusát** különböztetjük meg. Az **első típust** a **szálerősített kompozitok** alkotják, melyeknél erősítő szálakat helyezünk el a mátrixban. A szálerősítés elsősorban azért nagyon hatékony, mert a szálak sokkal erősebbek és merevebbek, mint egy ugyanabból az anyagból álló, minden irányban jelentős méretekkel bíró test. Ez elsősorban a mérethatásból származik, vagyis a szálak azért rendelkeznek számottevően nagyobb szilárdsággal és merevséggel, mert az anyag belső szerkezete kevesebb hibával terhelt annál, mint amit egy jelentős kiterjedésű testnél tapasztalunk. Erre a jelenségre jó példa az üvegszálerősítés, ahol az alkalmazott üvegszálak szilárdsága olykor a 7000 MPa-t is elérheti, holott egy üveglemeznél nagyságrendileg kb. 20 MPa-os feszültségi szinten már törést figyelhetünk meg. Ma leginkább az üvegszálak és a szénszálak állnak a figyelem központjában, de ezeken felül fémekből, grafitból és további anyagokból is készítenek szálerősítésű kompozitokat. A szálerősítés módja, és így a kapott kompozit tulajdonságai jelentősen eltérhetnek a szálak méretéből és elhelyezkedéséből adódóan. Méretüket tekintve beszélhetünk hosszabb vagy rövidebb szálakról, elrendezésük pedig lehet folytonos vagy diszkrét, egy vagy több irányba futó, random elhelyezkedésű vagy éppen szövött elrendezésű. Ezekre látunk néhány példát a (4.3)-as ábrán:

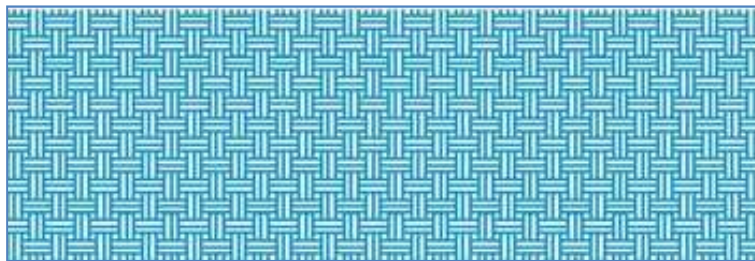
⁶⁰ Forrás: <http://www.1001crash.com/index-page-composite-lg-2.html>



4.3.a, ábra Egyirányba futó hosszú folytonos szálerősítés



4.3.b, ábra Rövid és random elhelyezkedésű szálakból álló erősítés



4.3.c, ábra Kétirányú szövött elrendezésű szálakból álló erősítés⁶¹

A fent látható elrendezések más és más anyagi tulajdonságokat eredményeznek. A (4.3.a) ábrán látható egyirányban futó szálakból álló kompozit viselkedése erősen anizotrop lesz. A szálirányban az anyag szilárdsága minden bizonnyal a többszöröse lesz a keresztirányban megfigyelhető értéknek. A (4.3.b) ábrán látható random elhelyezkedésű rövid szálak viszont makroszinten közel izotrop viselkedést eredményeznek, hiszen a szálak elrendezésében, és így az anyag mechanikai tulajdonságaiban sem figyelhetünk meg kitüntetett irányokat. A (4.3.c) ábrán látható szövött elrendezés a két síkbeli irányban nagyságrendileg azonos szilárdságot eredményez. Az ilyen szövött elrendezésű rétegekből elsősorban laminált szerkezeteket szokás készíteni.

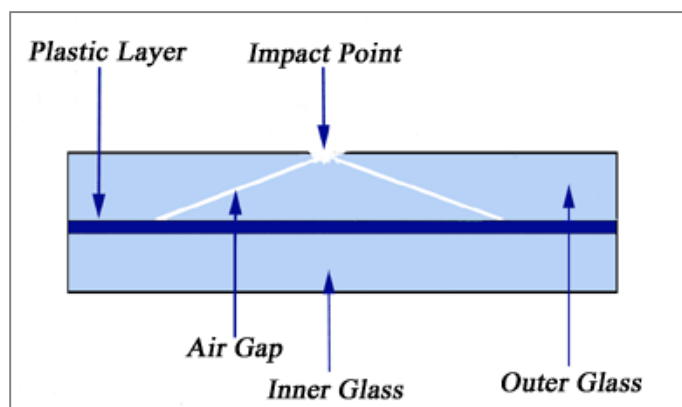
A kompozitok **másik** nagy **csoportját** a **laminált kompozitok** alkotják, melyeknél az egyes rétegek más és más anyagból állnak. Ezeket a laminált szerkezeteket úgy tervezik, hogy az egyes rétegek olyan anyagból álljanak, ahol éppen az adott anyag jó tulajdonságaira van szükség. Így érik el, hogy a kapott kompozitnál az alapanyagok legjobb tulajdonságait ötvözzék. Erre kiváló példát nyújtanak a szendvics keresztmetszetű gerendák, ahol a szélső szálak környezetében viszonylag nagy szilárdságú kéreglemezt helyezünk el, míg a semleges tengelyhez közeli belső térfogatot valamilyen kis fajsúlyú magréteggel töltjük ki, így kapva

⁶¹ Forrás:

http://fog.ccsf.cc.ca.us/~wkaufmyn/ENGN45/Course%20Handouts/14_CompositeMaterials/03_Fiber-reinforcedComposites.html



nagy teherbírás-önsúly, merevség-önsúly arányt. További példát mutatnak a védőréteggel ellátott fémszerkezetek, mint például amikor a belső, korrózióra érzékeny nagyszilárdságú alumínium ötvözetre egy viszonylag gyenge, de jó korrózióállósággal rendelkező tiszta alumíniumréteget helyezünk, hogy a keletkezett kompozit egyszerre rendelkezzen nagy szilárdsággal és jó korrózióállósággal. Példát nyújtanak a szélvédőknél használt biztonsági üvegek. Ez is egy szendvicsszerkezetnek tekinthető, ahol az üvegrétegek közé - melyek a teherbírást és a merevséget adják - vékony műanyagréteget (polivinil-butirál) helyeznek el, hogy - az üveg rideg viselkedését ellensúlyozandó - a kapott kompozit szívós anyagként viselkedjen. A szélvédő keresztmetszete - ami tehát egy rétegesen izotrop kompozit anyag - a (4.4)-es ábrán látható:



4.4 ábra A szélvédőknél használt biztonsági üveg mint szendvics szerkezet a rideg törés megakadályozására⁶²

A kompozitok következő, **harmadik csoportját a pontszerű részecskékkel erősített anyagok** alkotják. Ez esetben az erősítés és a mátrix készülhet fémes vagy nemfémes anyagból is. Arra, hogy egyik anyag sem fémes, tipikus példa a beton, ahol a homok- és kavicsrészecskéket (mint pontszerű erősítést) helyezzük el a cement mátrixban:



4.5 ábra A beton mikroszerkezete, mint pontszerű részecskékkel erősített kompozit anyag

⁶² Forrás: <https://americanglassrepair.wordpress.com/2010/07/12/windshield-cross-section/>



A fémek anyagok fémek anyagokkal történő pontszerű erősítésére a különböző fémötvözetek példáját lehet említeni. Ilyen eset, amikor ólomrészecskéket rézbe vagy acélba helyeznek, hogy a keletkezett ötvözet megmunkálhatóságát fokozzák. Az előbbieken túl fémek anyagok nemfémek anyagokkal történő erősítésére, és nemfémek anyagok fémek anyagokkal történő pontszerű erősítésére is láthatunk példát az anyagtudomány történetében és a mérnöki gyakorlatban. Az előbbire példa a fémek részecskék műanyaghoz adagolása, például a hővezetés növelésére, míg az utóbbira jellegzetes példa a *cermet*, ahol kerámia részecskéket adnak a fémmátrixba, hogy a kapott anyag egy kemény, jó hőállóságú, ugyanakkor képlékeny deformációkra képes kompozit legyen.

A kompozitok **negyedik csoportját** azok a **többfázisú anyagok** alkotják, melyeknél az előző típusok kombinációját lehet megfigyelni. Erre példa a vasbeton, ahol a már pontszerű részecskékkel erősített *mátrixkompozitba*, helyezünk el acél szálerősítést. További példa lehet a már korábban említett laminált szerkezetek esete, ahol az egyes rétegek már maguk is kompozitok, például szövött szálerősített anyagok.

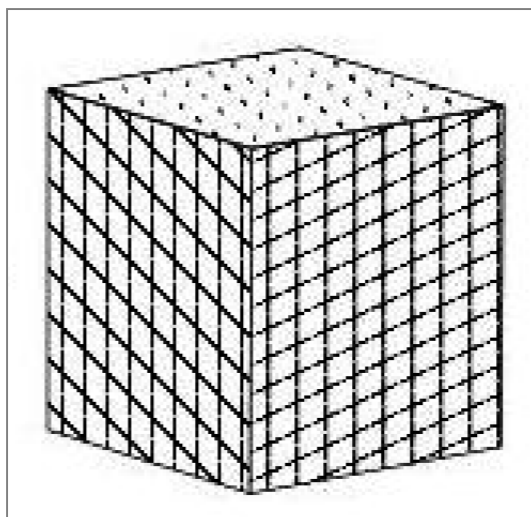
4.2. Anizotrop anyagú szerkezetek anyagmodelljei

Ahogy az iménti bevezetőben látható, egy kompozitnál a szálak elrendezése, orientáltsága különböző lehet. A **szálerősítésű kompozitoknál** az esetek többségében **anizotrop viselkedés** jellemző, azonban ennek **különböző esetei fordulnak elő** a szálak elrendezésétől függően.

Ebben az alfejezetben összefoglalom az anizotrop anyagok mechanikájának legfontosabb tudnivalóit⁶³. Bemutatom, hogy az anizotrop anyagi viselkedés milyen összefüggésekkel írható le, és összefoglalom az **anizotropia speciális eseteit**. Az egyes esetekre külön-külön felírom az anyagi *merevségi* (és/vagy a *hajlékonysági*) mátrixot, ez alapján rávilágítok az anyagi viselkedés sajátosságaira, és hangsúlyozom, hogy az adott esetben hány anyagi konstans alkalmazása szükséges. Minden esetet példával illusztrálok. Ezen példák némelyike a következő fejezetben lévő numerikus számítások alapjául szolgál majd. Az egyenletek bemutatását az összetettebb, *általános anizotropia* esetével kezdem, és onnan haladok az egyszerűbb speciális esetek felé, mígnem a feladat a legegyszerűbb izotrop esetté fajul.

Az egyes speciális anizotrop esetek azonosításakor mindig az **anizotrop test szerkezetének** esetleges **szimmetriáját keressük**. *Szerkezeti szimmetria* alatt azt értjük, hogy a test minden pontjában szimmetrikus irányokat figyelhetünk meg, mely irányokban a rugalmas anyagi paraméterek megegyeznek. Általánosságban szólva, minél magasabb fokú szimmetriát lehet megfigyelni, annál több tényező lesz az anyagi merevségi (és hajlékonysági) mátrixban zérus, és ezáltal az anyagi viselkedés egyszerűsödik. A legáltalánosabb esetben, amikor a szálak elrendezésében - és így az anyagi paraméterekben - **semiféle szimmetriát nem figyelhetünk meg**, akkor **általános anizotropiáról** beszélünk. A szálak szimmetria nélküli elrendezésére a (4.6)-os ábrán láthatunk példát.

⁶³ Az ebben és a következő alfejezetben szereplő egyenletek, összefüggések származtatásakor leggyakrabban a [14] alatti könyvben szereplő levezetésekre támaszkodtam.



4.5 ábra Általános anizotrop test szerkezete a szálak szimmetria nélküli elrendezéséből adódóan⁶⁴

Egy *általános anizotrop* anyag rugalmas viselkedését az **általánosított Hooke-törvénnyel** írhatjuk le. Ez az összefüggés megadja a feszültségek és alakváltozások kapcsolatát. Ebben a pontban *derékszögű bázisban leírható anizotropiával* foglalkozom, ahol az alakváltozás- és feszültségvektorok között az alábbi lineáris kapcsolat áll fent:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

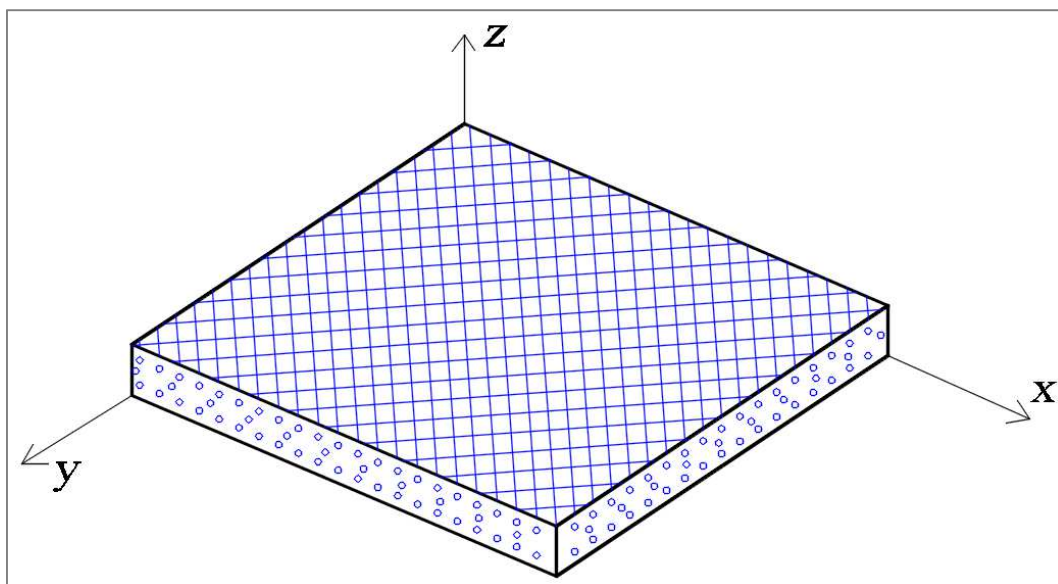
Az \underline{A} szimmetrikus merevségi mátrix a fent látható *általános anizotrop* esetben **21** független komponenset tartalmaz. A (4.1)-es összefüggés azt mutatja meg, hogy a *legáltalánosabb* esetben minden egyes feszültségkomponens mind a hat alakváltozás-komponensnek lineáris függvénye. Az inverz összefüggést, az alakváltozás-feszültség kapcsolatot is felírom:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

⁶⁴ A szálerősítéses kompozitok mechanikai viselkedéséről bővebben a [22]-es könyvben olvashatunk. Az anizotropia egyes eseteinek bemutatásakor néhány ábra és összefüggés erejéig erre a könyvre támaszkodtam.

ahol $\underline{\underline{C}}$ a szintén 21 független komponenset tartalmazó anyagi hajlékonysági mátrix. A (4.2)-es összefüggés szerint minden egyes alakváltozás-komponens mind a hat feszültség-komponensnek lineáris függvénye. Ez fizikailag azt jelenti, hogy például egy egyszerű σ_z húzófeszültség működtetése esetén **mind a hat alakváltozás-komponens megjelenik**, tehát a testen még nyírási szögtorzulást is megfigyelhetünk a tiszta húzó normálfeszültség hatására. Ez a jelenség ellentmond az izotrop esetnél tapasztaltakkal, hiszen ott egy σ_z feszültség hatására csak a három normálalakváltozás-komponens jelenik meg. Tágabban megfogalmazva, ebben az *általános anizotrop* esetben bármilyen típusú terhelés hatására mind a hat alakváltozás-komponens megjelenik. A szabadságfokok ezen kapcsolatát **rugalmas kapcsolódásnak** nevezzük. Az anizotrop anyagi viselkedés a fent említett példájában a *rugalmas kapcsolódás* közvetlenül az anyagmodellből származott. A *rugalmas kapcsolódásnak* ezt a szintjét **anyagi szintű rugalmas kapcsolódásnak** nevezzük. Az *anyagi szintű rugalmas kapcsolódásnak* természetesen fontos következménye lesz a szerkezetek viselkedésében. Azt, hogy pontosan az egyes szerkezeteknél a globális elmozdulási szabadságfokok miféle kapcsolódását figyelhetjük meg, majd később, a numerikus példánál elemzem. A *rugalmas kapcsolódásnak* ezt a következő szintjét **szerkezeti szintű rugalmas kapcsolódásnak** nevezzük.

Sok természetes és mesterséges anyag szerkezetében **bizonyos szimmetriát figyelhetünk** meg, mely azt eredményezi, hogy **21-nél kevesebb konstans is elég az anyagi viselkedés leírásához**. Az olyan anyagokat, amelyeknél **egy szimmetriasíkot** figyelhetünk meg, **monoklinális** anyagoknak hívjuk. *Szimmetriasík* alatt azt a síkot értjük melyre igaz, hogy azokban az irányban, melyek szimmetrikusak a síkra, az anyagi viselkedés megegyező. A *szimmetriasíkra* merőleges irányt az *anizotropia főirányának* nevezzük. *Monoklinális* anyagra a (4.6)-os ábrán láthatunk példát.



4.6 ábra Monoklinális anyag vízszintes szimmetriasíkkal

A (4.6)-os ábrán látható anyagnál a szálak a szimmetriasíkkal párhuzamosan futnak és elrendezésük szimmetrikus a vízszintesen fekvő szimmetriasíkra. A fent látható *monoklinális*



anyagánál, ahol az *anizotropia főiránya* a *z* tengely, az anyagi *merevségi mátrix* a következőképpen alakul:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Az anyagi *hajlékonysági mátrixot* a mérnöki gyakorlatban használatos *anyagi konstansok* segítségével az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & \frac{\nu_{xy,x}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & \frac{\nu_{xy,y}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & \frac{\nu_{xy,z}}{G_{xy}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & \frac{\nu_{xz,yz}}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu_{yz,xz}}{G_{yz}} & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ \frac{\nu_{x,xy}}{E_x} & \frac{\nu_{y,xy}}{E_y} & \frac{\nu_{z,xy}}{E_z} & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

ahol:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}, \quad E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y}, \quad E_z = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}, \quad \nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}, \quad \nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}, \quad \nu_{x,xy} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x}, \quad \nu_{yx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}, \quad \nu_{yz} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y}, \\ \nu_{y,xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_y}, \quad \nu_{zx} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}, \quad \nu_{zy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z}, \quad \nu_{z,xy} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_z}, \quad G_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{\gamma_{yz}}, \quad \nu_{yz,xz} = \frac{\gamma_{xz}}{\gamma_{yz}}, \quad G_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{\gamma_{xz}}, \quad \nu_{xz,yz} = \frac{\gamma_{yz}}{\gamma_{xz}}, \\ G_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}, \quad \nu_{xy,x} = \frac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}, \quad \nu_{xy,y} = \frac{\varepsilon_y}{\gamma_{xy}}, \quad \nu_{xy,z} = \frac{\varepsilon_z}{\gamma_{xy}}, \end{aligned}$$

és a szimmetria feltételek miatt:

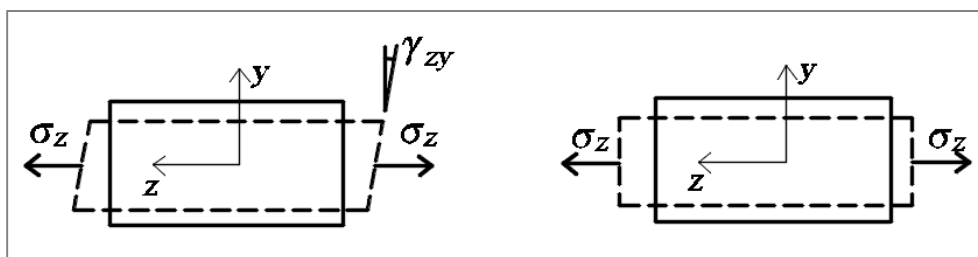
$$\frac{\nu_{x,xy}}{E_x} = \frac{\nu_{xy,x}}{G_{xy}}, \quad \frac{\nu_{y,xy}}{E_y} = \frac{\nu_{xy,y}}{G_{xy}}, \quad \frac{\nu_{z,xy}}{E_z} = \frac{\nu_{xy,z}}{G_{xy}}, \quad \frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}, \quad \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{yz,xz}}{G_{yz}} = \frac{\nu_{xz,yz}}{G_{xz}}.$$

A fenti összefüggésekből látható, hogy *monoklinális* anyagoknál az anyagi *merevségi* és *hajlékonysági* mátrix **13** független elemet tartalmaz.

Az $\underline{\underline{C}}$ *hajlékonysági* mátrixból kiolvasható a *monoklinális* anyagokra jellemző **rugalmas kapcsolódási jelenség**. Látható, hogy például a σ_x **normálfeszültség működtetése esetén a γ_{xy} szimmetriasíkbeli nyírési szögtorzulás is megjelenik**, hiszen a (4.4) alapján:

$$\gamma_{xy} = \frac{\nu_{x,xy}}{E_x} \cdot \sigma_x, \quad (4.5)$$

de a síkra merőleges nyírási alakváltozások nem alakulnak ki, hiszen $C_{41} = C_{51} = 0$. Ezt illusztrálja a (4.7)-es ábra, ahol a bal oldali *általános anizotrop* anyagnál megfigyelhető a γ_{xz} nyírési szögtorzulás, míg a jobb oldali *monoklinális* anyagnál ez az alakváltozás komponens nem jelenik meg.



4.7 ábra Általános anizotrop (bal) és monoklinális anyag (jobb) alakváltozása

Amennyiben az *anizotropia* főiránya az *x* tengely, akkor a *hajlékonysági* mátrix az alábbi alakot ölti:

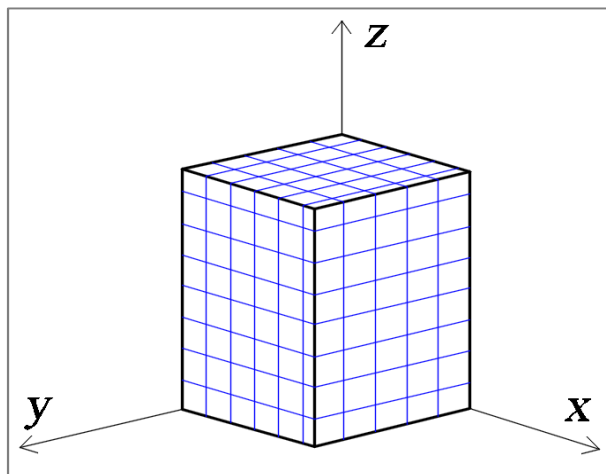
$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

míg abban az esetben, ha a *szimmetriasík* az *x-z* sík, akkor:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{46} & 0 & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$



Az olyan anyagot, melynek szerkezetében **három egymásra merőleges szimmetriasisíkot** lehet találni, **ortotropnak** nevezzük. Ilyen anyagra a (4.8)-as ábra mutat példát:



4.8 ábra Ortotrop szerkezetű szálerősítésű kompozit

Ortotrop anyagok esetén a *hajlékonysági* mátrix a mérnöki konstansok segítségével az alábbi módon írható fel:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

A *merevségi* mátrix zérustól különböző elemei az alábbiak:

$$A_{11} = \frac{E_x}{D_0} (1 - \nu_{yz} \nu_{zy}), \quad A_{12} = \frac{E_x}{D_0} (\nu_{yx} + \nu_{yz} \nu_{zx}), \quad A_{13} = \frac{E_x}{D_0} (\nu_{yx} \nu_{zy} + \nu_{zx}), \quad A_{22} = \frac{E_y}{D_0} (1 - \nu_{xz} \nu_{zy}),$$

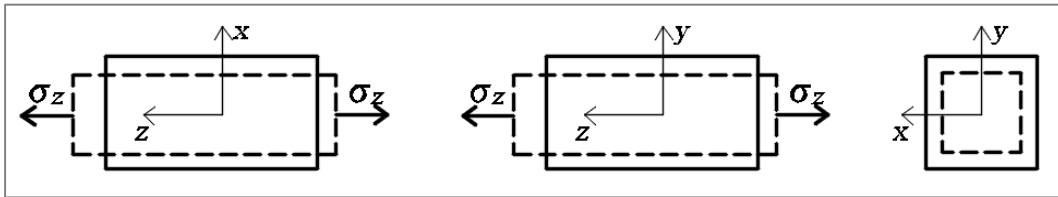
$$A_{23} = \frac{E_y}{D_0} (\nu_{zy} + \nu_{xy} \nu_{zx}), \quad A_{33} = \frac{E_z}{D_0} (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}), \quad A_{44} = G_{yz}, \quad A_{55} = G_{xz}, \quad A_{66} = G_{xy},$$

ahol:

$$D_0 = 1 - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{xz} \nu_{zx} - \nu_{yz} \nu_{zy} - \nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx} - \nu_{xz} \nu_{yx} \nu_{zy}.$$



A fentiekből látható, hogy *ortotrop* esetben **9** független modulussal írható le az anyagi viselkedés. Látható továbbá az is, hogy egy σ_x normálfeszültség **ebben az esetben már nem okoz nyírási szögtorzulást**:



4.9 ábra *Ortotrop anyag alakváltozása σ_1 normálfeszültség hatására*

Azokat az anyagokat, melyeknél az **ortotropia** olyan **speciális esete** áll elő, hogy **két koordináta irányban az anyag tulajdonsága megegyezik** (míg a harmadikban különböző), **tetragonális** anyagoknak hívjuk. Például, ha az x és y tengelyben megegyeznek az anyag tulajdonságai, akkor az *anyagi konstansok* a következők:

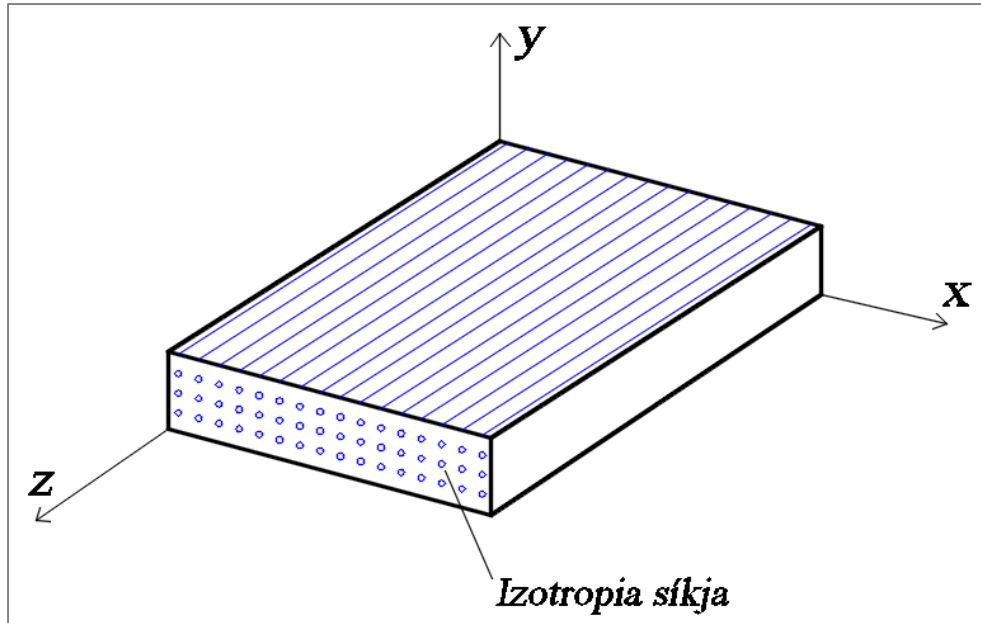
$$E_x = E_y = E, E_z = E', G_{yz} = G_{xz} = G', G_{xy} = G, \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu, \nu_{xz} = \nu_{zy} = \nu', \nu_{xz} = \nu_{yz} = \nu' \frac{E}{E'}$$

Ekkor a *hajlékonysági* mátrix a következőképpen alakul:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu'}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu'}{E'} & -\frac{\nu'}{E'} & \frac{1}{E'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Látható, hogy ilyenkor már **6** független anyagi konstans is elég az anyag viselkedésének leírásához.

Az anizotrop anyagok következő fontos csoportját a **keresztirányban izotrop** anyagok alkotják. Ebben az esetben továbbra is **három szimmetriasíkról** beszélünk, viszont az **egyik** ilyen **síkban az anyag izotropnak** tekinthető. Erre az esetre jó példák azok a kompozitok, ahol a szálak folytonosan egy irányban futnak. Ilyenkor a szálakra merőleges síkban tekinthető az anyag izotropnak. Egy ilyen példát láthatunk a (4.10)-es ábrán:



4.10 ábra Keresztirányban izotrop kompozit

Ha a szálak az x irányban futnak, akkor az anyagi konstansok a következő módon alakulnak:

$$\nu_{x,xy} = \nu_{y,xy} = \nu_{z,xy} = \nu_{y,zx} = 0, E_y = E_z, G_{xy} = G_{xz}, \nu_{xz} = \nu_{xy}, G = \frac{E}{2(1+\nu)}, G_{yz} = \frac{E_y}{2(1+\nu_{yz})}.$$

Ekkor a *hajlékonysági* mátrix a következő:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{yz})}{E_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Megemlítem, hogy azok a laminált kompozitok is *keresztirányban izotropok*, melyeknél a rétegekben a szálak véletlenszerű elhelyezkedésűek. A fenti egyenletekből látható, hogy a *keresztirányú izotrop* állapotot **5** paraméterrel írhatjuk le.



Az **ortotrop anyagok** egy **másik, speciálisabb esete** az, amikor az **anyag tulajdonságai** a **három ortogonális bázistengely mentén azonosak**. Ezt az állapotot **köbös szimmetriának** nevezzük. Ilyenkor mindössze **3** független paraméter szükséges az anyagi viselkedés leírásához, hiszen:

$E_x = E_y = E_z = E$, $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = \nu$, $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = G$. Ekkor az anyagi *hajlékonysági* mátrix a következő:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Az anyagi viselkedés további egyszerűsödésével az **izotrop** esethez jutunk, amikor az **anyag tulajdonságainak nincsen kitüntetett iránya**. Ilyenkor minden sík *szimmetriasíknak* tekinthető. Ekkor **2** független paraméter szükséges az anyag viselkedésének leírásához, ugyanis az előbb használt 3 paraméter között az alábbi kapcsolat áll fent:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.12)$$

Ekkor az anyagi *hajlékonysági* mátrix a következő alakot ölti:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$



A kompozitok közül a pontszerű részecskékkel erősített, és a sok véletlenszerűen elhelyezkedő szálat tartalmazó anyagok tekinthetők makroszinten izotropnak.

A következő alfejezetben rátérek az anizotrop anyagú gerendák vizsgálatára. Ismertetem a szakirodalomban fellelhető különféle leírási módokat, majd utána a feladatok numerikus elemzésével folytatom a dolgozatot.

4.3. Anizotrop anyagú gerendák vizsgálata

Ebben az alfejezetben **anizotrop anyagú konzolok lehajlásait és feszültségeit vizsgálom**. Céloom, hogy bemutassam a feladatok megoldását az anizotropia előző alfejezetben ismertett különböző eseteire. A vizsgált szerkezet viselkedésének összetettsége elsősorban attól függ, hogy a gerenda anyagának szerkezete milyen **szimmetria tulajdonságokkal** rendelkezik. Ennek megfelelően az egyes esetek vizsgálata során különbséget kell tennünk az alábbi alapesetek között:

- Inhomogén⁶⁵ keresztmetszet
 - Általános anizotrop anyagú gerenda
 - Kapcsolt gerenda
 - Nem kapcsolt gerenda
- Homogén keresztmetszet
 - Általános anizotrop anyagú gerenda
 - Kapcsolt gerenda
 - Nem kapcsolt gerenda

Mint azt az előző alfejezetben tárgyaltuk, **általános anizotrop anyagú gerenda** alatt azt az esetet értjük, amikor a gerenda **anyaga nem rendelkezik szimmetriasíkkal**. Ilyen esetben a feladatok megoldása igen bonyolulttá válik. A szakirodalomban két főbb megoldási módszer terjedt el erre az esetre vonatkozóan. Az egyik az ún. **Lekhnitskii-féle leírás** [13], ahol a végeredmény *komplex feszültségfüggvények* alkalmazásával határozható meg. Egy másik, jóval fiatalabb megoldási technika a **Rand-Rovenski-féle leírási mód** [14], ahol az ún. *többszintű megoldás* alkalmazásával a gerenda hossza mentén értelmezett függvényeket polinommal alakítjuk át, így a végeredmény meghatározásához egy parciális differenciálegyenlet-rendszert kell megoldani. Tekintve, hogy ez a megoldási mód általánosabb - a gerenda hossz tengelye mentén változó terhelési - esetben is alkalmazható, a továbbiakban ennek a lépéseit részletezem.⁶⁶

⁶⁵ Ebben a dolgozatban kizárólag homogén anyagú gerendákkal foglalkozom, azonban fontosnak tartom megemlíteni, hogy inhomogén esetben az anizotrop anyagú gerendák leírási módja merőben eltér a homogén esetben látottaktól. Az érdeklődő olvasó a [14] alatti könyvben erről részletesen tájékozódhat.

⁶⁶ Ennek ellenére röviden a *Lekhnitskii-féle* megoldásról is lesz szó a későbbiekben, ugyanis ellipszis keresztmetszetű, koncentrált erővel terhelt konzol esetére ily módon a feladat megoldása zárt alakban ismert. Ezért az általánosan anizotrop anyagú gerendák véges elemes vizsgálatának eredményeit ezzel az analitikus megoldással kapott eredményekkel hasonlítom majd össze.



Abban az esetben amikor a gerenda anyaga rendelkezik szimmetriasíkkal, de ez a sík **nem esik egybe a gerenda keresztmetszeti síkjával**, akkor ún. **kapcsolt gerendáról** beszélünk. Ez az elnevezés arra utal, hogy ilyen esetben a gerenda **globális elmozdulás komponensei összekapcsolódnak**. Ilyen eset az, amikor egyenes hajlítás esetén a gerenda a lehajlások túl el is csavarodik⁶⁷.

Abban az esetben, amikor a gerenda keresztmetszeti síkjai az anyagi szimmetriasíkkal egybeesnek akkor a gerenda viselkedése nagyban leegyszerűsödik. Ilyen esetben **nem kapcsolt gerendákról** beszélhetünk, utalván arra, hogy az anyagi rugalmas kapcsolódás nem jár szerkezeti rugalmas kapcsolódással, vagyis hajlítás hatására a továbbiakban már **nem figyelhető meg a gerenda elcsavarodása**.

A továbbiakban - a rúdvégen koncentrált erővel terhelt konzol esetére - ismertetem az egyes eseteknél használható megoldási technikákat. A bemutatást a legösszetettebb esettel, az általánosan anizotrop anyagú gerendák vizsgálatával kezdem, majd ezután térek rá az ennél valamivel egyszerűbb feladatok tárgyalására.

4.3.1. Általános anizotrop anyagú konzol vizsgálata

Általános anizotrop anyagra a (4.5)-ös ábrán láthatunk példát. A (4.1)-es és (4.2)-es összefüggésben bemutattam az *általánosított Hooke-modellt*, mely kapcsolatot teremt a *feszültségek és alakváltozások* között. Az összefüggésekben szereplő **teli anyagi merevségi (vagy hajlékonysági) mátrixot** látva megállapítottuk, hogy egy *általános anizotrop* anyag viselkedését **magas szintű anyagi rugalmas kapcsolódás** jellemzi, hiszen bármilyen tetszőleges terhelés hatására mind a hat alakváltozás-komponens megjelenik. A következőkben vizsgáljuk meg, hogy az *anyag szintű rugalmas kapcsolódás* egy *általános anizotrop* anyagú gerenda esetén milyen *szerkezeti szintű rugalmas kapcsolódási jelenséggel* jár. Ehhez vegyünk alapul egy, az eddigieknél még egyszerűbb példát, amikor egy gerendát csak egy M_x hajlítónyomaték terhel. Feltételezzük, hogy ebből csak σ_z feszültség komponens keletkezik, mely a (2.25)-ös *Navier-képlet* szerint számítható. Ekkor az *általánosított Hooke-modellnek* megfelelően a

$$\varepsilon_i = C_{i3}\sigma_z, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (4.14)$$

alakváltozás komponensek keletkeznek. A *kompatibilitási egyenletek* - és a konzolra vonatkozó geometriai peremfeltételek - betartása mellett az alakváltozás-komponensek integrálásával az alábbi eltolódáskomponenseket kapjuk:

$$u = \frac{M_x}{2I_x} \left(2xyC_{13} + y^2C_{36} + \underline{\underline{zyC_{35}}} \right), \quad (4.15a)$$

⁶⁷ Szigorúan véve az általánosan anizotrop anyagú gerendák is a kapcsolt modellek csoportjába tartoznak, hiszen ezeknél a gerendáknál is megfigyelhető az elcsavarodás tiszta hajlítás esetén. Ebben a dolgozatban mégis fontosnak tartom külön kezelni az általánosan anizotrop anyagú gerendák esetét attól, amikor a gerenda anyaga már bizonyos szimmetriatulajdonságokkal rendelkezik, ugyanis a két esetben használatos megoldási technika is jelentősen eltér egymástól.



$$v = \frac{M_x}{2I_x} \left(\overline{y^2 C_{23}} - \overline{x^2 C_{13}} - \overline{z^2 C_{33}} - \overline{xz C_{35}} \right), \quad (4.15b)$$

$$w = \frac{M_x}{2I_x} \left(\overline{xy C_{35}} + \overline{y^2 C_{34}} + \underbrace{2zy C_{33}} \right). \quad (4.15c)$$

A (4.15)-ös összefüggésekben egyszer aláhúzott tagok a keresztmetszetek **síkbeli torzulását** írják le. A kétszer aláhúzott tagok a **csavarást** képviselő tagok, melyek a keresztmetszetek z tengely körüli **merev test szerű elfordulását** írják le. Az egyszer felülhúzott elem a **hajlítási** tag, míg a kétszer felülhúzott tag a keresztmetszetek **síkra merőleges torzulását** írja le. Az alul összekapcsolt a **keresztmetszet elfordulásából** adódó eltolódást képviseli. Ezek alapján látható, hogy még egy tiszta, egyenes hajlítás esetén is milyen összetett egy *általános anizotrop* anyagú gerenda viselkedése. Ebből egyenesen következik, hogy a feladatok megoldása során igen bonyolult matematikai összefüggéseken át vezet út. A továbbiakban a *Rand-Rovenski-féle* megoldást [14] ismertetem, majd ezt követően térek rá a - koncentrált erővel terhelt ellipszis keresztmetszetű konzol - *Lekhnitskii-féle* megoldására.

A megoldásnál az ún. **többszintű megközelítést** alkalmazzuk, mely során a függvényeket z változós K -ad fokú polinommal közelítjük az alábbi módon:

$$G(x, y, z) = \sum_{k=0}^K G^{(k)}(x, y) z^k, \quad (4.16)$$

hogy az eredetileg háromváltozós függvény csak a keresztmetszeti koordinátáktól függjön a továbbiakban. Ekkor egy függvény integrálására és deriválására az alábbi összefüggések használhatók:

$$\int_0^z G dz = \sum_{k=0}^K G^{(k)} \frac{z^{k+1}}{k+1}, \quad G_{,z} = \sum_{k=0}^{K-1} (k+1) G^{(k+1)} z^k. \quad (4.17)$$

Ezeket felhasználva, az *egyensúlyi differenciálegyenletek* a k -edik szinten az alábbi módon írhatók fel:

$$\sigma_{x,x}^{(k)} + \tau_{xy,y}^{(k)} + (k+1) \tau_{xz}^{(k+1)} + X_b^{(k)} = 0, \quad (4.18a)$$

$$\tau_{xy,x}^{(k)} + \sigma_{y,y}^{(k)} + (k+1) \tau_{yz}^{(k+1)} + Y_b^{(k)} = 0, \quad (4.18b)$$

$$\tau_{xz,x}^{(k)} + \tau_{yz,y}^{(k)} + (k+1) \sigma_z^{(k+1)} + Z_b^{(k)} = 0. \quad (4.18c)$$

Ha bevezetjük a térfogati erők potenciálfüggvényét, mint:

$$\bar{U}_1 = - \int_0^x X_b dx = \sum_{k=0}^K \bar{U}_1^{(k)}(x, y) z^k, \quad \text{ahol } \bar{U}_1^{(k)} = - \int_0^x \left[(k+1) \tau_{xz}^{(k+1)} + X_b^{(k)} \right] dx \quad (4.19a)$$



$$\bar{U}_2 = -\int_0^y Y_b dy = \sum_{k=0}^K \bar{U}_2^{(k)}(x, y) z^k, \text{ ahol } \bar{U}_2^{(k)} = -\int_0^x \left[(k+1) \tau_{yz}^{(k+1)} + Y_b^{(k)} \right] dy \quad (4.19b)$$

és a

$$\bar{U}_{4,y}^{(k)} + \bar{U}_{3,x}^{(k)} = -(k+1) \sigma_z^{(k+1)} - Z_b^{(k)}, \quad (4.20a)$$

$$\bar{U}_{4,y}^{(K+1)} + \bar{U}_{3,x}^{(K+1)} = -\frac{P_1^{(K+1)}}{I_y} x - \frac{P_2^{(K+1)}}{I_x} y \quad (4.20b)$$

összefüggéseket, akkor a (4.18)-as differenciálegyenletek az alábbi alakra írhatók át:

$$\left(\sigma_x^{(k)} - \bar{U}_1^{(k)} \right)_{,x} + \tau_{xy,y}^{(k)} = 0, \quad (4.21a)$$

$$\tau_{xy,x}^{(k)} + \left(\sigma_y^{(k)} - \bar{U}_2^{(k)} \right)_{,y} = 0, \quad (4.21b)$$

$$\left(\tau_{xz}^{(k)} - \bar{U}_3^{(k)} \right)_{,x} + \left(\tau_{yz}^{(k)} - \bar{U}_4^{(k)} \right)_{,y} = 0. \quad (4.21c)$$

A feladat megoldásához bevezetjük a Φ és Ψ feszültségfüggvényeket a következő definíciókkal:

$$\tau_{yz} = -\Psi_{,x} + \bar{U}_4, \quad \tau_{xz} = \Psi_{,y} + \bar{U}_3, \quad (4.22a)$$

$$\sigma_x = \Phi_{,yy} + \bar{U}_1, \quad \sigma_y = \Phi_{,xx} + \bar{U}_2, \quad \tau_{xy} = -\Phi_{,xy}. \quad (4.22b)$$

A feszültségfüggvényeket is polinommal közelítjük:

$$\Phi = \sum_{k=0}^{K+1} \Phi^{(k)}(x, y) z^k, \quad \Psi = \sum_{k=0}^{K+1} \Psi^{(k)}(x, y) z^k \quad (4.23)$$

a (4.22)-as feszültségkomponensekre vonatkozó összefüggések az alábbi alakot öltik:

$$\tau_{yz}^{(k)} = -\Psi_{,x}^{(k)} + \bar{U}_4^{(k)}, \quad \tau_{xz}^{(k)} = \Psi_{,y}^{(k)} + \bar{U}_3^{(k)}, \quad (4.24a)$$

$$\sigma_x^{(k)} = \Phi_{,yy}^{(k)} + \bar{U}_1^{(k)}, \quad \sigma_y^{(k)} = \Phi_{,xx}^{(k)} + \bar{U}_2^{(k)}, \quad \tau_{xy}^{(k)} = -\Phi_{,xy}^{(k)}. \quad (4.24b)$$

A feszültségfüggvények meghatározásához, az alábbi differenciálegyenlet-rendszert kell megoldani:

$$\nabla_1^{(4)} \Phi^{(k)} + \nabla_1^{(3)} \Psi^{(k)} = g^{(k)}(x, y), \quad (4.25a)$$

$$\nabla_1^{(3)} \Phi^{(k)} + \nabla_1^{(2)} \Psi^{(k)} = f_0^{(k)} + f^{(k)}(x, y), \quad (4.25b)$$

ahol:



$$\nabla_1^{(4)} = B_{44} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2B_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + B_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad (4.26a)$$

$$\nabla_1^{(3)} = -B_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{25} + B_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (B_{14} + B_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \quad (4.26b)$$

$$\nabla_1^{(2)} = B_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2B_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (4.26c)$$

$$f_0^{(k)} = -2\Theta^{(k)} - \frac{1}{C_{33}} (C_{34}\kappa_1^{(k)} - C_{35}\kappa_2^{(k)}), \quad (4.27a)$$

$$f^{(k)} = \frac{C_{34}}{C_{33}} \bar{\varepsilon}_{z,x}^{(k)} - \frac{C_{35}}{C_{33}} \bar{\varepsilon}_{z,y}^{(k)} - 2(k+1)\bar{\phi}_z^{(k+1)} + B_{14}\bar{U}_{1,x}^{(k)} + B_{24}\bar{U}_{2,x}^{(k)} - B_{15}\bar{U}_{1,y}^{(k)} - B_{25}\bar{U}_{2,y}^{(k)} \\ + B_{45}\bar{U}_{3,x}^{(k)} + B_{44}\bar{U}_{4,x}^{(k)} - B_{55}\bar{U}_{3,y}^{(k)} - B_{45}\bar{U}_{4,y}^{(k)}, \quad (4.27b)$$

$$g^{(k)} = \frac{1}{C_{33}} (C_{36}\bar{\varepsilon}_{z,xy}^{(k)} - C_{13}\bar{\varepsilon}_{z,yy}^{(k)} - C_{23}\bar{\varepsilon}_{z,xx}^{(k)}) - B_{11}\bar{U}_{1,yy}^{(k)} - B_{12}\bar{U}_{2,yy}^{(k)} - B_{22}\bar{U}_{2,xx}^{(k)} + B_{16}\bar{U}_{1,xy}^{(k)} + B_{26}\bar{U}_{2,xy}^{(k)} \\ - B_{12}\bar{U}_{1,xx}^{(k)} - B_{15}\bar{U}_{3,yy}^{(k)} - B_{14}\bar{U}_{4,yy}^{(k)} - B_{25}\bar{U}_{3,xx}^{(k)} - B_{24}\bar{U}_{4,xx}^{(k)} + B_{56}\bar{U}_{3,xy}^{(k)} + B_{46}\bar{U}_{4,xy}^{(k)}. \quad (4.27c)$$

A fenti egyenletekben:

$$\kappa_1^{(k)} = -\varepsilon_{z,x}^{(k)}(0,0), \quad \kappa_2^{(k)} = -\varepsilon_{z,y}^{(k)}(0,0), \quad (4.28)$$

valamint B_{ij} a redukált rugalmas konstansok:

$$B_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{3j}}{C_{33}}, \quad (4.29)$$

és:

$$\bar{\phi}_z = \phi_z - \phi_{0z}, \quad (4.30)$$

ahol ϕ_{0z} a gerenda hossztengejének elcsavarodása:

$$\phi_{0z} = \int_0^z \theta(z) dz + \phi_z. \quad (4.31)$$

Itt ϕ_z^0 a merevtestszerű elfordulást jelöli, míg $\theta(z)$ a keresztmetszet fajlagos elcsavarodása. A (4.25)-ös differenciálegyenlet-rendszert az alábbi peremfeltételek mellett kell megoldani:



$$\frac{d}{ds} \left\{ \Phi_{,y}^{(k)}, \Phi_{,x}^{(k)}, \Psi^{(k)} \right\} = \left\{ -F_1^{(k)}, F_2^{(k)}, F_3^{(k)} \right\} \quad \Omega - n, \quad (4.32)$$

ahol:

$$F_1^{(k)} = -X_s^{(k)} + \bar{U}_1^{(k)} \cos(\bar{\mathbf{n}}, x), \quad (4.33a)$$

$$F_2^{(k)} = -Y_s^{(k)} + \bar{U}_2^{(k)} \cos(\bar{\mathbf{n}}, y), \quad (4.33b)$$

$$F_3^{(k)} = Z_s^{(k)} - \bar{U}_3^{(k)} \cos(\bar{\mathbf{n}}, x). \quad (4.33c)$$

A differenciálegyenlet-rendszer megoldása után a (4.24)-es összefüggések felhasználásával **öt feszültség komponens** már kiszámítható. Ha a σ_z komponenst kifejezzük az *általánosított Hooke-modellből*:

$$\sigma_z^{(k)} = \frac{1}{C_{33}} \left(\varepsilon_z^{(k)} - C_{13} \sigma_x^{(k)} - C_{23} \sigma_y^{(k)} - C_{43} \tau_{yz}^{(k)} - C_{53} \tau_{xz}^{(k)} - C_{36} \tau_{xy}^{(k)} \right). \quad (4.34)$$

akkor látható, hogy ennek meghatározásához még az $\varepsilon_z^{(k)}$ alakváltozás komponens ismeretére van szükség, melyet az alábbi összefüggésből számolhatunk ki:

$$\varepsilon_z^{(k)} = -\kappa_1^{(k)} x - \kappa_2^{(k)} y + \varepsilon_{z0}^{(k)} + \bar{\varepsilon}_z^{(k)}. \quad (4.35)$$

ahol:

$$\varepsilon_z^{(k)}(0,0) = \varepsilon_{z0}^{(k)}, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_z^{(k)} = (k+1) & \left\{ (k+2) \left[\Theta_1^{(k+1)} x - \int_0^x \left(\int_0^x \varepsilon_x^{(k+2)} dx \right) dx - \int_0^y \left(\int_0^y \varepsilon_y^{(k+2)}(0,y) dy \right) dy \right] \right. \\ & \left. + \int_0^x \gamma_{xz}^{(k+1)} dx - \gamma_{xz}^{(k+1)}(0,0) x + \int_0^y \gamma_{yz}^{(k+1)}(0,y) dy - \gamma_{yz}^{(k+1)}(0,0) y \right\}. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Az ebben a kifejezésben szereplő $\Theta_1^{(k)}$ a következő módon határozható meg:

$$\Theta_1^{(k)} = \int_0^y \left(\phi_z^{(k+1)} - \frac{1}{2} \gamma_{xy}^{(k+1)} \right) \Big|_{x=0} dy. \quad (4.38)$$

Az alakváltozások ismeretében az **eltolódásokat** most is integrálással határozhatjuk meg, az alábbi képletekkel:

$$u = \int_0^z \left(\int_0^z \kappa_1 dz \right) dz - \int_0^z \left(\int_0^z \bar{\varepsilon}_{z,x} dz \right) dz + \int_0^z \gamma_{xz} dz - W_{,x} z + U + u_r, \quad (4.39a)$$



$$v = \int_0^z \left(\int_0^z \kappa_2 dz \right) dz - \int_0^z \left(\int_0^z \bar{\varepsilon}_{z,y} dz \right) dz + \int_0^z \gamma_{yz} dz - W_{,y} z + V + v_r, \quad (4.39b)$$

$$w = \int_0^z (-\kappa_1 x - \kappa_2 y + \varepsilon_{z0} + \bar{\varepsilon}_z) dz + W + w_r, \quad (4.39c)$$

ahol u_r, v_r, w_r a merevtestszerű eltolódások. A $W(x,y)$ öblösödési függvényt az alábbi differenciálegyenletekből határozhatjuk meg (pl. $k=0$ esetén):

$$W_{,x} = \Theta_1^{(0)}(y) + \gamma_{xz}^{(0)} - \int_0^x \varepsilon_x^{(1)} dx - \frac{1}{2} \gamma_{xz}^{(0)}(0,0), \quad (4.40a)$$

$$W_{,y} = \Theta_2^{(0)}(x) + \gamma_{yz}^{(0)} - \int_0^y \varepsilon_y^{(1)} dy - \frac{1}{2} \gamma_{yz}^{(0)}(0,0), \quad (4.40b)$$

melyeket a $W(0,0)=0$ kezdeti és a

$$W_{,x}(0,0) = \frac{1}{2} \gamma_{xz}^{(0)}(0,0), \quad W_{,y}(0,0) = \frac{1}{2} \gamma_{yz}^{(0)}(0,0), \quad (4.41)$$

peremfeltételek mellett kell megoldani. Hasonló módon az $U(x,y)$ és $V(x,y)$ függvényeket az alábbi kezdeti- és peremérték-feladatból határozhatjuk meg (pl. $k=0$ esetén):

$$U_{,x} = \varepsilon_x^{(k)}, \quad U_{,y} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}^{(0)} - \phi_z^{(0)} + \phi_z^0, \quad (4.42a)$$

$$V_{,y} = \varepsilon_y^{(0)}, \quad V_{,x} = \frac{1}{2} \gamma_{yx}^{(0)} - \phi_z^{(0)} + \phi_z^0, \quad (4.42b)$$

ahol a peremfeltételek:

$$U_{,x}(0,0) = \varepsilon_x^{(0)}(0,0), \quad U_{,y}(0,0) = \frac{1}{2} \gamma_{xy}^{(0)}(0,0), \quad (4.43a)$$

$$V_{,y}(0,0) = \varepsilon_y^{(0)}(0,0), \quad V_{,x}(0,0) = \frac{1}{2} \gamma_{yx}^{(0)}(0,0), \quad (4.43b)$$

és a kezdeti feltételek most is $U(0,0)=0, V(0,0)=0$.

A többszintű megoldás során a számításokat a legmagasabb szinten kezdjük, ott meghatározzuk a szükséges paramétereket valamint megoldjuk a kezdeti- és peremérték-feladatokat, majd ezen eredményeket felhasználva a számításokat az alacsonyabb szinten folytatjuk. Ezt a procedúrát egészen addig folytatjuk, mígnem $k=0$ -hoz érünk el. A végeredményt ekkor a feszültségek, alakváltozások és eltolódások - különböző szintre



vonatkozó - **komponenseinek összegzésével** kapjuk meg. A következőkben - az előző összefüggéseket felhasználva - bemutatom a **koncentrált erővel terhelt konzol** megoldásának főbb lépéseit. Koncentrált erő esetén $K = -1$. Tekintve, hogy az alakváltozások polinomjainak legmagasabb fokszáma $k=K+2=1$, ezért a megoldás két szintből áll.

$K + 2 = 1$ szinten végrehajtandó számítási lépések:

Tekintve, hogy:

$$M_1^{(K+2)} = \frac{F^{(K+1)}}{K+2}, \quad (4.44)$$

ezért $M_1^{(1)} = F$. Ebből adódóan:

$$\varepsilon_{z0}^{(1)} = 0; \kappa_2^{(1)} = -C_{33} \frac{F}{I_x}; \kappa_1^{(1)} = 0; \sigma_z^{(1)} = \frac{F}{I_x} y; \varepsilon_i^{(1)} = C_{i3} \frac{F}{I_x} y, \quad i = x, y, z; \quad (4.45a)$$

$$\gamma_j^{(1)} = C_{j3} \frac{F}{I_x} y, \quad j = yz, xz, xy; \quad \theta^{(1)} = -C_{35} \frac{F}{2I_x}, \quad \Theta_1^{(1)} = -C_{35} \frac{F}{4I_x} y, \quad \Theta_2^{(1)} = -C_{34} \frac{F}{4I_x} x. \quad (4.45b)$$

Ezen a szinten a $\bar{\varepsilon}_z, \bar{U}_3, \bar{U}_4, f_0, f, g, \Phi, \Psi, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ mennyiségek zérus értékűek. Ezután áttérhetünk a következő szintre.

$K + 1 = 0$ szinten végrehajtandó számítási lépések:

$$\bar{\varepsilon}_z^{(0)} = (C_{35}x + C_{34}y) \left(\frac{F}{2I_x} y \right), \quad \Theta_1^{(0)} = \theta^{(0)} y - C_{36} \frac{F}{2I_x} y^2, \quad \Theta_2^{(0)} = \theta^{(0)} x + C_{13} \frac{F}{2I_x} x^2 \quad (4.46a)$$

$$\varepsilon_{z0}^{(0)} = C_{34} \frac{F}{2A}, \quad \kappa_1^{(0)} = (C_{35}I_{21} + C_{34}I_{12}) \frac{F}{2I_x I_y}, \quad \kappa_2^{(0)} = (C_{34}I_{03} + C_{35}I_{12}) \frac{F}{2I_x I_x}, \quad (4.46b)$$

Ekkor a (4.35)-ös összefüggés alapján:

$$\varepsilon_z^{(0)} = -\kappa_1^{(0)} x - \kappa_2^{(0)} y + C_{34} \frac{F}{2A} + (C_{35}x + C_{34}y) \left(\frac{F}{2I_x} y \right). \quad (4.47)$$

$$f_0^{(0)} = -2\Theta^{(0)} - \frac{1}{C_{33}} \left(C_{34} \left((C_{35}I_{21} + C_{34}I_{12}) \frac{F}{2I_x I_y} \right) - C_{35} (C_{34}I_{03} + C_{35}I_{12}) \frac{F}{2I_x I_x} \right), \quad (4.48a)$$

$$f^{(0)} = \left[\left(2C_{36} - \frac{C_{34}C_{35}}{C_{33}} \right) y + \left(4C_{13} - \frac{C_{35}^2}{C_{33}} \right) x \right] \frac{F^{(0)}}{2I_x} + (B_{45}\bar{U}_3^{(0)} + B_{44}\bar{U}_4^{(0)})_{,x} - (B_{55}\bar{U}_3^{(0)} + B_{45}\bar{U}_4^{(0)})_{,y} \quad (4.48b)$$



$$g^{(k)} = \frac{C_{36}C_{35} - C_{13}C_{34}}{C_{33}} \frac{F^{(0)}}{2I_x} - \left(B_{15}\bar{U}_3^{(0)} + B_{14}\bar{U}_4^{(0)} \right)_{,yy} - \left(B_{25}\bar{U}_3^{(0)} + B_{24}\bar{U}_4^{(0)} \right)_{,xx} + \left(B_{56}\bar{U}_3^{(0)} + B_{46}\bar{U}_4^{(0)} \right)_{,xy} \quad (4.48c)$$

A fenti kifejezésekben:

$$\{I_{30}, I_{21}, I_{12}, I_{03}\} = \iint_A \{x^3, x^2y, xy^2, y^3\} dA. \quad (4.49)$$

Ezt követi a parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\nabla_1^{(4)}\Phi + \nabla_1^{(3)}\Psi = g(x, y), \quad \nabla_1^{(3)}\Phi + \nabla_1^{(2)}\Psi = f_0 + f \quad (4.50)$$

az alábbi peremfeltételek kielégítése mellett:

$$\frac{d}{ds} \left\{ \Phi_{,y}^{(k)}, \Phi_{,x}^{(k)}, \Psi^{(k)} \right\} = \left\{ 0, 0, -\bar{U}_3^{(k)} \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) - \bar{U}_4^{(k)} \cos(\bar{\mathbf{n}}, y) \right\}. \quad \Omega\text{-n} \quad (4.51)$$

Ezután meghatározzuk a feszültség és alakváltozás komponenseket, a (4.60)-as összefüggések valamint a *Hooke-modell* felhasználásával

$$\tau_{yz}^{(k)} = -\Psi_{,x}^{(k)} + \bar{U}_4^{(k)}, \quad \tau_{xz}^{(k)} = \Psi_{,y}^{(k)} + \bar{U}_3^{(k)}, \quad (4.52a)$$

$$\sigma_x^{(k)} = \Phi_{,yy}^{(k)} + \bar{U}_1^{(k)}, \quad \sigma_y^{(k)} = \Phi_{,xx}^{(k)} + \bar{U}_2^{(k)}, \quad \tau_{xy}^{(k)} = -\Phi_{,xy}^{(k)}. \quad (4.52b)$$

Ezt követi a $\phi_z^{(0)}$ számítása az alábbi képlettel:

$$\phi_z^{(0)} = \phi_z^{(0)}(0, 0) - \int_0^x \varepsilon_{x,y}^{(k)} dx + \int_0^y \varepsilon_{y,x}^{(k)} dy + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^{(k)} - \gamma_{xy}^{(k)}(0, y) + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^{(k)}(0, 0). \quad (4.53)$$

Ebből pedig $\Theta_1^{(k)}$ a (4.38)-es képlettel már meghatározható.

Eltolódások számítása:

Miután az előző lépésekben elértünk $k=0$ -hoz, rátérhetünk az eltolódások számítására. Ehhez először az $U(x, y)$, $V(x, y)$ és $W(x, y)$ függvények meghatározása szükséges, melyekhez (4.40)-es és (4.42)-es egyenleteket kell megoldanunk. Ezt követően pedig a (4.39)-es egyenletek felhasználásával az eltolódásokra az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$u = -\frac{\kappa_1^{(0)}}{2} z^2 - \theta^{(0)} yz + \frac{F}{2I_x} \left(C_{36}y + \frac{1}{2} C_{35}z + 2C_{13}x \right) yz + \gamma_{xz}^{(0)}(0, 0) \frac{z}{2} + U + u_r, \quad (4.54a)$$

$$v = -\frac{\kappa_2^{(0)}}{2} z^2 - \theta^{(0)} xz + \frac{F}{2I_x} \left(-C_{33} \frac{z^2}{3} - \frac{1}{2} C_{35}xz + C_{23}y^2 - C_{13}x^2 \right) z + \gamma_{yz}^{(0)}(0, 0) \frac{z}{2} + V + v_r, \quad (4.54b)$$



$$w = + \frac{F}{2I_x} (C_{33}z + C_{35}x + C_{34}y) yz + (\varepsilon_{z0}^{(0)} - \kappa_1^{(0)}x - \kappa_2^{(0)}y) z + W + w_r, \quad (4.54c)$$

ahol $x=y=0$ helyettesítéssel megkapjuk a gerendatengely eltolódásfüggvényeit:

$$u_0(z) = -\frac{\kappa_1^{(0)}}{2} z^2 + \gamma_{xz}^{(0)}(0,0) \frac{z}{2} + \phi_y + u^0, \quad (4.55a)$$

$$v_0(z) = -\frac{\kappa_2^{(0)}}{2} z^2 - \frac{F}{2I_x} C_{33} \frac{z^3}{3} + \gamma_{xz}^{(0)}(0,0) \frac{z}{2} + \phi_x + v^0, \quad (4.55b)$$

$$w_0(z) = C_{34} \frac{F}{2A} z + w^0, \quad (4.55c)$$

A továbbiakban rátérek a **Lekhnitskii-megoldás** [13] rövid ismertetésére. Tekintve, hogy az imént ismertetett *Rand-Rovenski-féle megoldás* általánosabb esetben is használható, valamint, hogy amikor a *Lekhnitskii-megoldás* használható ott a két módszer ugyanarra az eredményre vezet, ezúttal - terjedelmi okokból - eltekintek a *Lekhnitskii-féle általános megoldás* részletezésétől⁶⁸. Mostani célom a rúdvégen koncentrált erővel terhelt ellipszis keresztmetszetű konzol megoldásának zárt formában történő származtatása.

Ehhez tételezzük fel először, hogy az általános megoldás tengelyirányú normálfeszültségi komponense

$$\sigma_z = -\frac{F}{I_x} z y + \sigma_z^0(x, y) \quad (4.56)$$

módon számítható, ahol a $\sigma_z^0(x, y)$ -os járulékos tag éppen az anizotrop anyagi tulajdonság miatt veendő figyelembe. A többi feszültségkomponensről azt tételezzük fel, hogy értékük általában nem zérus, de mindegyik független a z koordinátától. Most írjuk fel a *Cauchy-egyenleteket*, illetve az anizotrop anyagi viselkedés (skalár) egyenleteit!

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{F}{I_x} y, \quad (4.57)$$

illetve

⁶⁸ Az érdeklődők a részleteket a [13]-as könyvben találhatják meg.



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + \dots \dots + C_{16}\tau_{xy} - \frac{F}{I_x}C_{13}zy, \\
 \varepsilon_y &= C_{12}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + \dots \dots + C_{26}\tau_{xy} - \frac{F}{I_x}C_{23}zy, \\
 &\dots\dots \\
 \gamma_{xy} &= C_{16}\sigma_x + C_{26}\sigma_y + \dots \dots + C_{66}\tau_{xy} - \frac{F}{I_x}C_{36}zy.
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Vezessünk be egy új jelölést:

$$D = C_{13}\sigma_x + C_{23}\sigma_y + C_{33}\sigma_z^0 + C_{34}\tau_{yz} + C_{35}\tau_{xz} + C_{36}\tau_{xy}, \tag{4.59}$$

mert így a *tengelyirányú normálfeszültség* járulékos komponense egyszerűbben felírható:

$$\sigma_z^0 = \frac{D}{C_{33}} - \frac{1}{C_{33}}(C_{13}\sigma_x + C_{23}\sigma_y + C_{34}\tau_{yz} + C_{35}\tau_{xz} + C_{36}\tau_{xy}). \tag{4.60}$$

Ezzel a jelölési rendszerrel az *általánosított Hooke-modellt* az alábbi formát ölti:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= B_{11}\sigma_x + B_{12}\sigma_y + B_{14}\tau_{yz} + B_{15}\tau_{xz} + B_{16}\tau_{xy} + \frac{C_{13}}{C_{33}}D - \frac{F}{I_x}C_{13}zy, \\
 \varepsilon_y &= B_{12}\sigma_x + B_{22}\sigma_y + \dots \dots + B_{26}\tau_{xy} + \frac{C_{23}}{C_{33}}D - \frac{F}{I_x}C_{23}zy, \\
 &\dots\dots \\
 \gamma_{xy} &= B_{16}\sigma_x + B_{26}\sigma_y + \dots \dots + B_{66}\tau_{xy} + \frac{C_{36}}{C_{33}}D - \frac{F}{I_x}C_{36}zy.
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

A (4.61)-es képletek közül a harmadikat, negyediket és ötödiket felhasználva meghatározhatók az z , y és x tengelyeknek megfelelő w , v és u eltolódásfüggvények. A többi egyenletet is felhasználva hosszas levezetés után *Lekhnitskii* a következőt kapta:

$$u = -\frac{F}{2I_x} \left(2C_{13}xy z + C_{36}y^2 z + \frac{C_{35}}{2} y z^2 \right) - \frac{A}{2} z^2 - \vartheta y z + U + u_r, \tag{4.62a}$$

$$v = \frac{FC_{33}}{6I_x} z^3 + \frac{F}{2I_x} \left((C_{13}x^2 - C_{23}y^2) z + \frac{C_{35}}{2} x z^2 \right) - \frac{B}{2} z^2 + \vartheta x z + V + v_r, \tag{4.62b}$$

$$w = -\frac{F}{2I_x} (C_{33}y z^2 + C_{35}x y z + C_{34}y^2 z) + (Ax + By + C) z + W + w_r. \tag{4.62c}$$

A D paraméter és a σ_z normálfeszültség az alábbiak szerint alakul:



$$D = Ax + By + C - \frac{F}{2I_x} (C_{35}xy + C_{34}y^2), \quad (4.63a)$$

$$\sigma_z = -\frac{F}{I_x} zy + \frac{1}{C_{33}} (Ax + By + C) - \frac{F}{2I_x C_{33}} (C_{35}xy + C_{34}y^2) - \frac{1}{2C_{33}} (C_{13}\sigma_x + C_{23}\sigma_y + C_{34}\tau_{yz} + C_{35}\tau_{xz} + C_{36}\tau_{xy}). \quad (4.63b)$$

A (4.62)-es képletekben szereplő A, B, C és ϑ az egyensúlyi feltételekből meghatározandó konstansok, U, V és W pedig olyan függvények, amelyeknek ki kell elégíteniük az alábbi egyenleteket:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = B_{11}\sigma_x + B_{12}\sigma_y + B_{14}\tau_{yz} + B_{15}\tau_{xz} + B_{16}\tau_{xy} + \frac{C_{13}}{C_{33}} (Ax + By + C) - \frac{FC_{13}}{2I_x C_{33}} (C_{35}xy + C_{34}y^2), \quad (4.64a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = B_{12}\sigma_x + B_{22}\sigma_y + \dots + B_{26}\tau_{xy} + \frac{C_{23}}{C_{33}} (Ax + By + C) - \frac{FC_{23}}{2I_x C_{33}} (C_{35}xy + C_{34}y^2), \quad (4.64b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = B_{16}\sigma_x + B_{26}\sigma_y + \dots + B_{66}\tau_{xy} + \frac{C_{36}}{C_{33}} (Ax + By + C) - \frac{FC_{36}}{2I_x C_{33}} (C_{35}xy + C_{34}y^2), \quad (4.64c)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = B_{15}\sigma_x + B_{25}\sigma_y + B_{45}\tau_{yz} + B_{55}\tau_{xz} + B_{56}\tau_{xy} + \frac{C_{35}}{C_{33}} (Ax + By + C) - \frac{FC_{35}}{2I_x C_{33}} (C_{35}xy + C_{34}y^2) + \frac{F}{2I_x} (C_{13}y^2 - C_{36}x^2) + \vartheta y, \quad (4.64d)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = B_{14}\sigma_x + B_{24}\sigma_y + \dots + B_{46}\tau_{xy} + \frac{C_{34}}{C_{33}} (Ax + By + C) - \frac{FC_{34}}{2I_x C_{33}} (C_{35}xy + C_{34}y^2) + \frac{F}{2I_x} (C_{23}y^2 - C_{13}x^2) - \vartheta x. \quad (4.64e)$$

Az egyensúlyi egyenleteket kielégítő többi feszültségkomponens meghatározására a *feszültségfüggvényes technikát* alkalmazzák ezeknél a feladatoknál. *Lekhnitskii* szerint két függvény (P és ψ) felvételére van szükség:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \tau_1, \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \tau_2, \quad (4.65)$$



ahol τ_1 és τ_2 a (4.57) alatti egyensúlyi egyenletek közül a harmadiknak a partikuláris megoldását jelentik. A (4.64)-es egyenletek közül az első három illetve utolsó kettő további deriválásával, összevonásával és a feszültségfüggvények behelyettesítésével az alábbi két differenciálegyenlethez jutunk P és ψ kapcsolataira:

$$L_4 P + L_3 \psi = \frac{F}{2I_x C_{33}} (2C_{13} C_{34} - C_{35} C_{36}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B_{14} \tau_2 + B_{15} \tau_1) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B_{24} \tau_2 + B_{25} \tau_1) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (B_{46} \tau_2 + B_{56} \tau_1), \quad (4.66a)$$

$$L_3 P + L_2 \psi = \frac{F}{2I_x C_{33}} \left[(C_{35}^2 - 4C_{13} C_{33}) x + (C_{34} C_{35} - 2C_{33} C_{36}) y \right] - 2\theta + \frac{AC_{34} - BC_{35}}{C_{33}} + \frac{\partial}{\partial x} (B_{44} \tau_2 + B_{45} \tau_1) - \frac{\partial}{\partial y} (B_{45} \tau_2 + B_{55} \tau_1). \quad (4.66b)$$

A fenti egyenletekben szereplő *negyed-, harmad- és másodrendű differenciáloperátorok* a következők:

$$L_4 = B_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2B_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + B_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad (4.67a)$$

$$L_3 = -B_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{25} + B_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (B_{14} + B_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \quad (4.67b)$$

$$L_2 = B_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2B_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (4.67c)$$

A terheletlen külső felületeken (a keresztmetszet *kontúrvonalán*) az alábbi feltételeknek is teljesülniük kell (Γ a keresztmetszet határgörbéje):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = c_1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = c_2, \quad \psi = \int_{\Gamma} (\tau_2 dx - \tau_1 dy) + c_3. \quad (4.68)$$

Ha a keresztmetszet *tömör* („egyszeresen összefüggő”), akkor a $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ értékekkel dolgozhatunk. A harmadik feltétel is egyszerűsíthető, ha elfogadjuk, hogy $\tau_2 dx - \tau_1 dy$ legyen zérus a határvonalon, így $\psi = c_3$, ahol c_3 – at tömör keresztmetszeteknél ugyancsak zérusnak választhatjuk.

A feszültségeknek a peremfeltételeket is ki kell elégíteniük. Jelen esetben:

$$\iint \tau_{xz} dx dy = 0, \quad \iint \sigma_z y dx dy = -Fz, \quad (4.69a)$$



$$\iint \tau_{yz} dx dy = -F, \quad \iint \sigma_z x dx dy = 0, \quad (4.69b)$$

$$\iint \sigma_z dx dy = 0, \quad \iint (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy = 0. \quad (4.69c)$$

A hat kifejezés közül a τ_{xz} és τ_{yz} nyírófeszültségekre adott feltétel egyszerűen bizonyíthatóan teljesül: az elsőnél például (a területi integrált (az A paraméter most a keresztmetszeti területet jelenti) *Gauss-tételével* kontúrintegrállá átalakítva és felhasználva a *harmadik Cauchy-egyenletet*):

$$\begin{aligned} \iint_A \tau_{xz} dx dy &= \iint_A \left[\tau_{xz} + x \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{F}{I_x} y \right) \right] dx dy = \iint_A \left[\frac{\partial (x\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (x\tau_{yz})}{\partial y} - \frac{F}{I_x} xy \right] dx dy = \\ &= \int_{\Gamma} x (\tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y)) d\Gamma - \frac{F}{I_x} \iint_A xy dx dy = 0. \end{aligned} \quad (4.70)$$

A másik nyírófeszültségi komponensnél:

$$\iint_A \tau_{yz} dx dy = \iint_A \left[\frac{\partial (y\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (y\tau_{yz})}{\partial y} - \frac{F}{I_x} y^2 \right] dx dy = -\frac{F}{I_x} \iint_A y^2 dx dy = -F. \quad (4.71)$$

A megmaradó *négy feltétel* használható A, B, C és ϑ ismeretlen paraméterek számítására. Közülük háromnak – részletek nélkül – az értékét megadjuk [13] alapján⁶⁹:

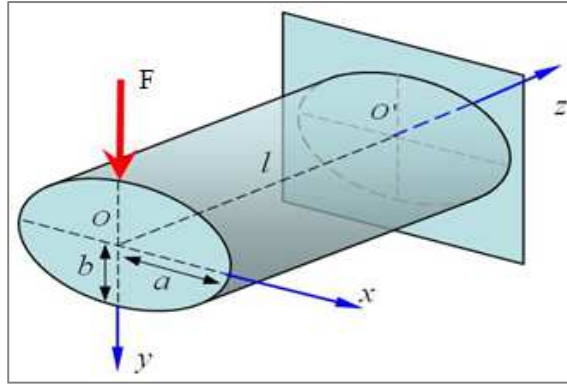
$$A = B = 0, \quad C = -\frac{F}{2A_{km}} \frac{C_{34}}{C_{33}}. \quad (4.72)$$

Egy adott feladat megoldása ezek után a két feszültségfüggvény⁷⁰ felvételétől függ. A következőkben bemutatom a legegyszerűbb feladatok egyikét, az **ellipszis-keresztmetszet** esetére levezett megoldást⁷¹. A feladat vázlata a (4.11)-es ábrán látható:

⁶⁹ A_{km} a keresztmetszet területe. A ϑ paramétert az utolsó szilárdsági peremfeltételi egyenletből lehet meghatározni.

⁷⁰ Az analitikusan eddig megoldott feladatok többségénél ezek komplex függvények.

⁷¹ Ezt a feladatot – *ortotrop anyagú* gerendára – először *Saint Venant* oldotta meg, később *Lekhnitskii* általánosította a megoldást *tetszőlegesen anizotrop* esetre.



4.11 ábra Általánosan anizotrop anyagú ellipszis-keresztmetszetű konzol

Az ellipszis alakú keresztmetszet kontúrjának egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.73)$$

A harmadik egyensúlyi egyenletnél számítandó partikuláris megoldást ennél a feladatnál a következő formában adták meg:

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \frac{F}{2I_x} (y^2 - f(x)), \quad f(x) = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2. \quad (4.74)$$

A feladatnál számítandó feszültségkomponensek a feszültségfüggvények segítségével:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{F}{2I_x} \left(y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 \right), \\ \sigma_z &= -\frac{F}{I_x} z y - \frac{F}{2A_{km}} \frac{C_{34}}{C_{33}} - \frac{F}{2I_x C_{33}} (C_{35} x y + C_{34} y^2) - \\ & - \frac{1}{C_{33}} (C_{13} \sigma_x + C_{23} \sigma_y + C_{34} \tau_{yz} + C_{35} \tau_{xz} + C_{36} \tau_{xy}). \end{aligned} \quad (4.75)$$

A feszültségfüggvények közötti kapcsolatot megadó (4.66)-os parciális differenciálegyenletek ebben az esetben a következő alakúak lesznek:

$$L_4 P + L_3 \psi = \frac{F}{I_x} (g_1 - B_{24} c^2), \quad (4.76a)$$

$$L_3 P + L_2 \psi = \frac{F}{I_x} \left[(g_2 + B_{44} c^2) x + g_3 y \right] - 2\vartheta, \quad (4.76b)$$

ahol



$$g_1 = \frac{2C_{13}C_{34}}{C_{33}} - \frac{C_{35}C_{36}}{2C_{33}} - C_{14}, \quad g_2 = \frac{C_{35}^2}{2C_{33}} - 2C_{13}, \quad (4.77b)$$

$$g_3 = \frac{3C_{34}C_{35}}{2C_{33}} - C_{36} - C_{45}, \quad c = b/a. \quad (4.77b)$$

A megoldás további lépéseinél az (4.69) alatti hatodik feltételből adódóan a 9 paraméterre nullát kaptak. Mindezeket figyelembe véve az alábbi feszültségfüggvényeket javasolták a feladat vizsgálatához⁷²:

$$P = p \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \quad (4.78a)$$

$$\psi = q \left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{xy^2}{b^2} - x \right) + r \left(\frac{x^2y}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} - y \right). \quad (4.78b)$$

A számításhoz szükséges három paramétert az (4.76) alatti egyenletek segítségével határozták meg (a másodikat kétszer lehet felhasználni, egyszer y , másodszer pedig x nulla értékénél)⁷³. Az így kapott (4.79)-es egyenletrendszerből a hiányzó p , q és r paraméterek már meghatározhatók, és így a megoldás teljessé válik.

$$\frac{4p}{a^2} \left(\frac{3B_{11}}{c^2} + 2B_{12} + B_{66} + 3B_{22}c^2 \right) - q \left(3B_{24}c^2 + B_{14} + B_{56} \right) + r \left(3B_{15} + (B_{25} + B_{46})c^2 \right) = \frac{2F}{\pi ab} (g_1 - B_{24}c^2), \quad (4.79a)$$

$$-\frac{4p}{a^2} \left(3B_{24}c^2 + B_{14} + B_{56} \right) + q \left(3B_{44}c^2 + B_{55} \right) - 2rB_{45}c^2 = \frac{2F}{\pi ab} (g_2 + B_{44}c^2), \quad (4.79b)$$

$$\frac{4p}{a^2} \left(B_{25} + B_{46} + \frac{3B_{15}}{c^2} \right) - 2qB_{45} + r \left(B_{44}c^2 + 3B_{55} \right) = \frac{2F}{\pi ab} g_3. \quad (4.79c)$$

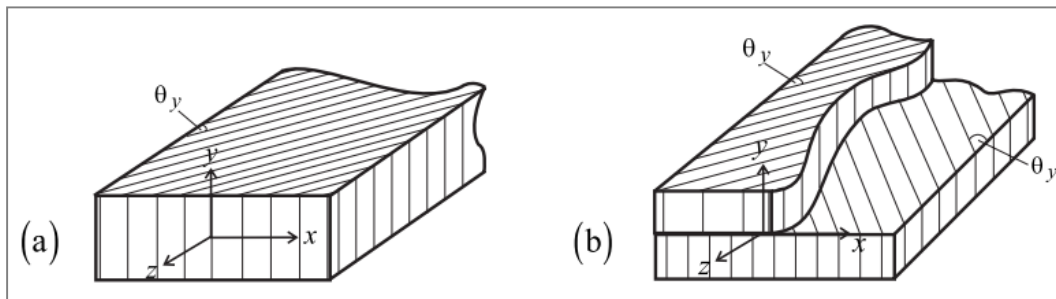
4.3.2. Kapcsolt, monoklinális anyagú konzol vizsgálata

Most vizsgáljuk meg az anizotrop gerendáknak azt az esetét, ahol a gerenda anyaga rendelkezik bizonyos *szimmetriával*, azonban a **gerenda keresztmetszeti síkja nem esik egybe az anyagi szimmetriasíkkal**. A legáltalánosabb ilyen eset, amikor az anyag csak egy *szimmetriasíkkal* rendelkezik, ezért a soron következő egyenleteket **monoklinális anyagú** gerendákra mutatom be, fenntartva, hogy az ennél - már korábban ismertetett - speciálisabb esetekre is használhatók a most származtatott összefüggések. Mindehhez vegyünk alapul egy olyan esetet, amikor a gerenda anyaga minden pontban egy szimmetriasíkkal rendelkezik, mely most essen egybe az x - z síkkal. Az ilyen anyagot **MON13y**-nak szokás jelölni, ahol a

⁷² A képletekben szereplő p , q és r meghatározandó paraméterek.

⁷³ Az ellipszis inerciája: $I_x = (\pi ab^3)/4$.

MON rövidítés a monoklinális anyagra, a 13 a feladat leírásához szükséges független anyagi konstansok számára, y pedig az anizotropia főirányára utal. Az ilyen anyag szimmetriaviszonyaira - ahol az anizotropia főiránya merőleges a gerenda hosszanti z tengelyére - a (4.12)-es ábra mutat példát.



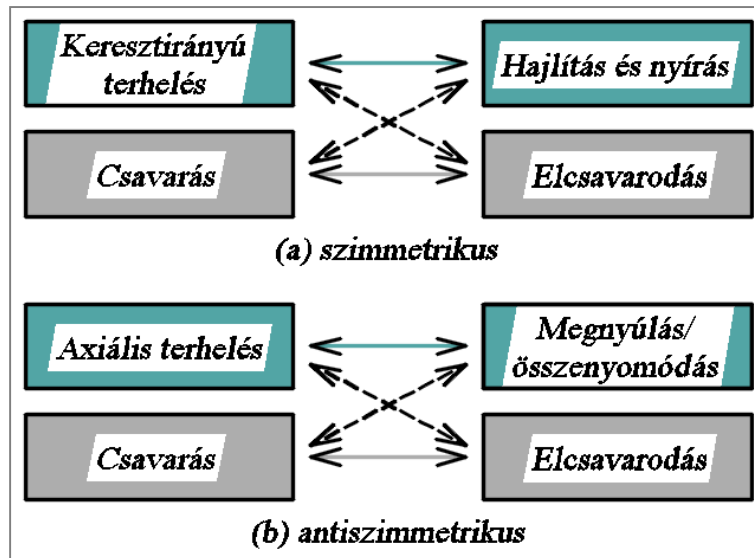
4.12 ábra *MON*_{13y} anyagú gerenda: (a) szimmetrikus és (b) antiszimmetrikus kialakítással

A fenti ábrának megfelelően az anizotrop gerendáknál meg kell különböztetni két alapvető kialakítási módot. Amikor a gerenda egy rétegből, vagy pedig több olyan rétegből áll, ahol a (4.12)-es ábrán jelölt θ_y lamináltsági szög mindegyik rétegnél azonos, akkor a gerenda *szimmetrikus kialakítású*. Ellenben, ha a gerenda több rétegből áll, és a θ_y szög előjele az egyes rétegek között eltér, akkor *antiszimmetrikus* kialakításról beszélünk.

Az ilyen anyag *hajlékonysági mátrixát* a (4.7)-es összefüggés mutatja. Ez alapján az alakváltozások és feszültségek kapcsolata a következő kifejezéssel írható le:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{46} & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

melyből látható az anyagra jellemző *rugalmas kapcsolódás*, nevezetesen, hogy egy σ_z tengelyirányú normálfeszültség a γ_{xz} nyírási szögtorzulás megjelenéséhez vezet (és hasonlóképpen, τ_{xz} feszültség hatására ε_z alakváltozás is keletkezik). Jelen esetben az **anyagi szintű rugalmas kapcsolódás már szerkezeti szintű rugalmas kapcsolódáshoz vezet**, melyet a (4.13)-as ábra illusztrál.



4.13 ábra MON13y anyagú gerenda szerkezeti kapcsolódása: (a) szimmetrikus és (b) antiszimmetrikus kialakítás esetén

A fenti ábra azt mutatja, hogy egy *szimmetrikus* kialakítású, *kapcsolt* anizotrop gerendánál, egy keresztirányú terhelés, míg egy *antiszimmetrikus* kialakítású gerendánál, egy egyszerű normálerő hatására, a keresztmetszet **elcsavarodása** következik be. Az ilyen *szerkezeti szintű rugalmas kapcsolódási jelenséggel* bíró gerendákat nevezük **kapcsolt gerendáknak**, utalván arra, hogy a gerenda *globális szabadságfokai* között bizonyos *kapcsolat* áll fent.

A következőkben - [14] alapján - egy **közelítő analitikus megoldási** technikát mutatok be, mellyel meghatározhatjuk a *monoklinális* (és ennél speciálisabb) anyagú, *kapcsolt* gerendák deformációit és feszültségeit. A módszer közelítő volta abban áll, hogy a keresztmetszetek síkbeli torzulásától eltekintünk. Ekkor a semleges tengely $u_0(z)$, $v_0(z)$ és $w_0(z)$ eltolódását és $\phi(z)$ elcsavarodását - melyek a keresztmetszetek merevtestszerű deformációit jellemik -, valamint a $\Psi(x, y, z)$ *háromdimenziós öblösödési függvényt* keressük, mellyel a keresztmetszetek *síkra merőleges* torzulását írjuk le. Megjegyzem, hogy az *öblösödési függvény* keresztmetszetre vonatkozó átlaga zérust kell, hogy adjon, vagyis:

$$\iint_A \Psi dA = 0. \quad (4.81)$$

A fenti elhanyagolások miatt az alábbi "hiányos" alakváltozásmezővel számolunk a továbbiakban:

$$\varepsilon_z = w_{0,z} - xu_{0,zz} + yv_{0,zz} + \Psi_{,z}, \quad \gamma_{yz} = x\phi_{,z} + \Psi_{,y} \quad \text{és} \quad \gamma_{xz} = y\phi_{,z} + \Psi_{,x}. \quad (4.82)$$

Ekkor a (4.80)-nál látott összefüggés helyett egy *redukált alakváltozás-feszültség kapcsolattal* dolgozhatunk:



$$\begin{bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \begin{bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

ahol:

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} Q_{33} & 0 & Q_{35} \\ 0 & Q_{44} & 0 \\ Q_{35} & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{55}}{C_{33}C_{55} - C_{35}^2} & 0 & -\frac{C_{35}}{C_{33}C_{55} - C_{35}^2} \\ 0 & \frac{1}{C_{44}} & 0 \\ -\frac{C_{35}}{C_{33}C_{55} - C_{35}^2} & 0 & \frac{C_{33}}{C_{33}C_{55} - C_{35}^2} \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

A négy "globális" (teljes keresztmetszetet jellemző) deformációs paraméter - $u_0(z)$, $v_0(z)$, $w_0(z)$, $\phi(z)$ - és az egy "lokális" deformációs paraméter - $\Psi(x, y, z)$ - meghatározásához az alábbi - egyensúlyi feltételből adódó - négy integrál- és egy differenciálegyenletet kell megoldani:

$$\iint_A (\sigma_{x,x} + \tau_{xz,z} + \tau_{xy,y} + X_b) dA = 0, \quad (4.85a)$$

$$\iint_A (\sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} + \tau_{yz,z} + Y_b) dA = 0, \quad (4.85b)$$

$$\iint_A (\sigma_{z,z} + \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + Z_b) dA = 0, \quad (4.85c)$$

$$\iint_A (\sigma_{y,y} + \tau_{xy,x} + \tau_{yz,z} + Y_b) x dA - \iint_A (\sigma_{x,x} + \tau_{xz,z} + \tau_{xy,y} + X_b) y dA = 0, \quad (4.85d)$$

$$\sigma_{z,z} + \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + Z_b = 0. \quad (4.86)$$

Az egyenletek megoldásakor az alábbi peremfeltételeket kell kielégíteni:

$$u_0 = v_0 = w_0 = u_{0,x} = v_{0,x} = \phi = 0, \quad x = y = z = 0 \text{-nál}, \quad (4.87a)$$

$$M_x = \iint_A -y \cdot \sigma_z dA, \quad M_y = \iint_A -x \cdot \sigma_z dA, \quad z = L \text{-nél}, \quad (4.87b)$$

$$Z_s = \tau_{xz} \cdot \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + \tau_{yz} \cdot \cos(\bar{\mathbf{n}}, y), \quad \Omega \text{-n} \quad (4.87c)$$

Az analitikus megoldás most is **St. Venant szemi-inverz módszerével** történhet. A továbbiakban ezt a koncentrált teherrel terhelt konzolra esetre mutatom be. A *szemi-inverz módszer* alapuló megoldás során azzal a kezdeti feltételezéssel élünk, hogy az *öblösödési függvény* az alábbi formában írható fel:



$$\Psi = -\frac{6FC_{44}}{bh^3} \left[\frac{y^3}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 y \right] - \phi_{,z} xy, \quad (4.88)$$

Ekkor az alakváltozásmezőre és az anyagmodellre vonatkozó (4.82)-es és (4.83)-as összefüggések alapján:

$$\sigma_z = y \left[Q_{33} (v_{0,zz} + \phi_{,zz} x) + 2Q_{35} \phi_{,z} \right], \quad (4.89a)$$

$$\tau_{yz} = +\frac{6F}{bh^3} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right), \quad (4.89b)$$

$$\tau_{xz} = y \left[Q_{35} (v_{0,zz} + \phi_{,zz} x) + 2Q_{55} \phi_{,z} \right]. \quad (4.89c)$$

A $\phi_{,zz} x$ -es tagok elhanyagolásakor az alábbi csavarás-hajlítás kapcsolathoz jutunk:

$$\frac{\phi_{,z}}{v_{0,zz}} = -\frac{Q_{35}}{2Q_{55}}. \quad (4.90)$$

A (4.89)-es és (4.86)-os egyenletek alapján:

$$v_{0,zz} = -\frac{12F}{bh^3} \cdot \frac{Q_{55}}{Q_{33}Q_{55} - Q_{35}^2}. \quad (4.91)$$

A (4.91)-es kifejezés z szerinti integrálásával és a (4.90)-ös kapcsolat felhasználásával az alábbi eredményre jutunk:

$$v_0 = \frac{2F}{bh^3} \cdot q_{33} z^2 (3l - z) + \frac{3F}{4bh} \frac{z}{q_{44}}, \text{ és } \phi = \frac{3F}{bh^3} \cdot q_{35} z (2l - z), \quad (4.92)$$

ahol:

$$q_{33} = \frac{A_{55}}{A_{33}A_{55} - A_{35}^2}, \quad q_{44} = \frac{1}{A_{44}} \text{ és } q_{35} = -\frac{A_{35}}{A_{33}A_{55} - A_{35}^2} \quad (4.93)$$

A (4.92)-es eredmények (4.89)-be való behelyettesítésével a feszültségekre az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\sigma_z = -\frac{12F}{bh^3} y (l - z), \quad (4.94a)$$

$$\tau_{yz} = +\frac{6F}{bh^3} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right), \quad (4.94b)$$

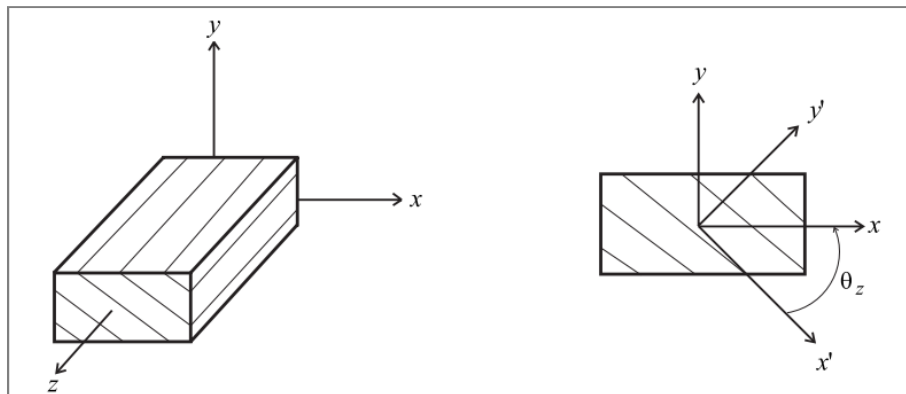


$$\tau_{xz} = + \frac{6F}{bh^3} \frac{q_{35}^2}{q_{35}q_{55} - q_{35}^2} xy. \quad (4.94c)$$

Ezek után a következőkben rátérek a *kapcsolt gerendák* legáltalánosabb esetének ismertetésére, amikor a gerenda *általános anizotrop* anyagból készül.

4.3.3. Nem kapcsolt, monoklinális anyagú konzol vizsgálata

Ezúttal vegyük alapul azt az esetet, amikor a gerenda anyaga (minden pontban) **egy szimmetriasíkkal** rendelkezik, és ez a sík **egybeesik** a gerenda **keresztmetszetének síkjával**. Az ilyen típusú anizotrop anyagú gerendát a szakirodalomban **MON13z**-nek szokás jelölni, ahol z - az **anizotropia főiránya** - egybeesik a gerenda hossz tengelyével. Az ilyen anyag viselkedését a (4.3)-as és (4.4)-es összefüggés mutatja. Megállapítható, hogy az **anyagi szintű rugalmas kapcsolódás** ebben az esetben **nem jár szerkezeti szintű rugalmas kapcsolódással**, hiszen az ε_z alakváltozás komponensre a τ_{yz} és τ_{xz} nyírófeszültségeknek nincsen hatása, és hasonlóan, a σ_z normál feszültség, valamint a γ_{yz} és γ_{xz} nyírási szögtorzulások között sincsen kapcsolat. Az ilyen típusú gerendát **nem kapcsolt** gerendának nevezzük. A vizsgált gerenda lehetséges anyagának szimmetriaviszonyaira a (4.14)-es ábra mutat egy példát.



4.14 ábra MON13z anyag szerkezete (Forrás: [14])

A (4.14)-es ábrán látható anyag a *MON13z* anyagok olyan speciális esete, amikor a koordináta-rendszer megfelelő z tengely körüli elforgatásával *ortotrop* anyaghoz jutunk⁷⁴. Ilyenkor az anyag viselkedése valójában 10 konstanssal írható le (kilenc anyagi konstans tartozik az ortotrop esethez, és egy konstans írja le a forgatást). A levezetések során továbbra is 13 független paraméterrel dolgozunk, és igaz az, hogy a megoldás ennél egyszerűbb anyagú esetekre - *ortotrop*, *tetragonális*, *keresztirányban izotrop*, *köbös* és *izotrop* anyagú gerendákra - is érvényes.

⁷⁴ Ezt az elforgatást illusztrálja a (4.14)-es ábrán szereplő jobboldali ábra. A vesszővel megkülönböztetett x' és y' bázisban az anyagi hajlékonysági mátrix az ortotrop anyagra jellemző (4.8)-as struktúrára módosul.



A megoldás **St. Venant szemi-inverz módszerével** történhet, mely során egy feltételezéssel előre felvesszük a végső megoldás matematikai formáját, mely természetesen még ismeretlen paramétereket tartalmaz. A feladat ilyenkor ezen paraméterek meghatározására irányul úgy, hogy a kapott megoldás minden előírt feltételnek megfeleljen. Az anyagmodellét látva jelen feladat során három feszültségkomponensre van szükségünk. A *szemi-inverz módszer* során ezeknek a megoldását jelen esetben - [14] alapján - egy ún. χ *hajlítási függvény* bevezetésével az alábbi alakban keressük:

$$\sigma_z = -\frac{F_y(L-z)}{I_x}y, \quad (4.95a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{F_y \cdot C_{33}}{I_x \cdot C_0}(Q^\chi + C_{45}\chi_x - C_{55}\chi_y), \quad \tau_{xz} = \frac{F_y \cdot C_{33}}{I_x \cdot C_0}(P^\chi - C_{44}\chi_x + C_{45}\chi_y), \quad (4.95b)$$

ahol a χ függvénynél szereplő alsó index az adott változó szerinti deriválást jelöli, valamint:

$$P^\chi = p_{20}^\chi x^2 + p_{11}^\chi xy + p_{02}^\chi y^2, \quad Q^\chi = q_{20}^\chi x^2 + q_{11}^\chi xy + q_{02}^\chi y^2, \quad C_0 = C_{44}C_{55} - C_{45}^2,$$

$$p_{20}^\chi = \frac{C_{45}(C_{13} + 2C_{33})}{2C_{33}}, \quad p_{11}^\chi = \frac{C_{44}(C_{13} - 2C_{33})}{C_{33}}, \quad p_{02}^\chi = \frac{C_{44}C_{36} - C_{45}C_{23}}{2C_{33}},$$

$$q_{20}^\chi = -\frac{C_{55}(C_{13} + 2C_{33})}{2C_{33}}, \quad q_{11}^\chi = \frac{C_{45}(2C_{33} - C_{13})}{C_{33}}, \quad q_{02}^\chi = \frac{C_{55}C_{23} - C_{36}C_{45}}{2C_{33}}.$$

A fenti feszültségekre vonatkozó összefüggések bizonyos egyensúlyi és peremfeltételeket kielégítenek, kivéve a

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_b = 0 \quad (4.96)$$

z irányú vetületi egyensúlyi egyenletet - ahol Z_b a térfogati erők z irányú komponensét jelöli -, valamint a gerenda külső peremére vonatkozó *természetes peremfeltételt*

$$Z_s = \tau_{xz} \cdot \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + \tau_{yz} \cdot \cos(\bar{\mathbf{n}}, y), \quad (4.97)$$

ahol $\bar{\mathbf{n}}$ a keresztmetszet kontúrjának kifelé irányított normálvektora. Ezek alapján a χ *hajlítási függvény felvételekor* az alábbi **másodrendű parciális inhomogén differenciálegyenletet kell megoldanunk:**

$$\nabla_3^{(2)} \chi = \bar{F}_{10}^\chi x + \bar{F}_{01}^\chi y \quad (4.98)$$

a keresztmetszeten (A -n), az alábbi *kezdeti feltétel:*



$$\chi(0,0) = 0, \quad (4.99)$$

és a *Neumann-típusú peremfeltétel* betartása mellett:

$$D_1^n \chi = P^z \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + Q^z \cos(\bar{\mathbf{n}}, y), \quad (4.100)$$

melyet a keresztmetszet kontúrja mentén (Ω -n) kell kielégíteni. A fenti egyenletekben $\nabla_3^{(2)}$ az *általánosított Laplace-operátor*:

$$\nabla_3^{(2)} = C_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2C_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (4.101)$$

D_1^n pedig a *Neumann-típusú peremoperátor*:

$$D_1^n = \left(C_{44} \frac{\partial}{\partial x} - C_{45} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cos(\bar{\mathbf{n}}, x) + \left(-C_{45} \frac{\partial}{\partial x} + C_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cos(\bar{\mathbf{n}}, y), \quad (4.102)$$

valamint

$$\bar{F}_{10}^z = 4C_{45} \quad \text{és} \quad \bar{F}_{01}^z = \frac{C_0 + C_{23}C_{55} + C_{13}C_{44} - C_{36}C_{45} - 2C_{33}C_{44}}{C_{33}}. \quad (4.103)$$

A χ *hajlítási függvény* meghatározása után az eltolódások az alábbi képletekkel számíthatók:

$$u = + \frac{F}{2I_x} (l-z) (2C_{13}xy + C_{36}y^2) + u^0 - \phi_z y + \phi_y z, \quad (4.104a)$$

$$v = + \frac{F}{2I_x} \left[(l-z) (C_{13}x^2 - C_{23}y^2) + C_{33} \left(l - \frac{1}{3}z \right) z^2 \right] + v^0 - \phi_x z + \phi_z x, \quad (4.104b)$$

$$w = + \frac{F}{I_x} C_{33} \left[\left(l - \frac{1}{2}z \right) zy + x^2 y + \chi \right] + w^0 - \phi_y x + \phi_x y. \quad (4.104c)$$

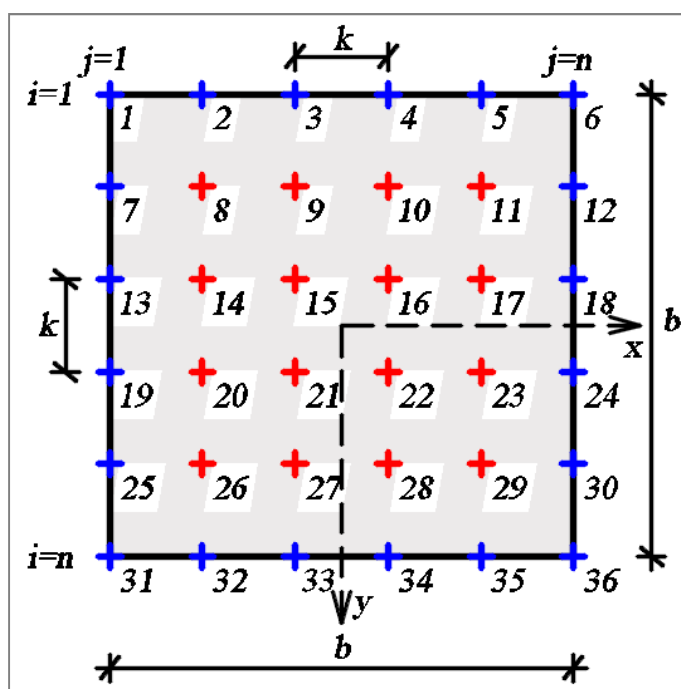
Konzol esetén a fenti egyenletekben szereplő nulla felső indexszel jelölt paraméterek az alábbi értéket veszik fel:

$$u^0 = v^0 = w^0 = \phi_z^0 = 0, \quad \phi_y = - \frac{F}{2I_x} C_{33} \chi_x(0,0) \quad \text{és} \quad \phi_x = + \frac{F}{2I_x} C_{33} \chi_y(0,0). \quad (4.105)$$

A χ *hajlítási függvény analitikus megoldására* csak nagyon **kevés példát lehet találni** a szakirodalomban, és azok olyan **speciális alakú keresztmetszetre** (pl. ellipszisre) **vonatkoznak**, ahol a szerzők már a megoldás elején ismerték (vagy feltételezték) a *homogén* egyenlet *általános megoldását*, és továbbiakban csupán a *partikuláris megoldás*

meghatározására kellett törekedniük. Munkámban ezért a fenti *kezdetiérték- és peremérték-feladat analitikus* vizsgálata helyett annak *numerikus megoldására* törekedtem, melyet a *véges differenciák módszerével* hajtottam végre. A következőkben négyzet keresztmetszetre bemutatom az általam javasolt megoldás végrehajtásának menetét.

A **numerikus megoldás** során a *kezdetiérték- és peremérték feladattal* leírt folytonos problémát *diszkrétizáljuk* úgy, hogy a keresett függvény értékét csak véges számú pontban határozzuk meg. Célszerű ezen pontok helyét úgy felvenni, hogy azok egy szabályos rácsot alkossanak. A keresztmetszeti terület ily módon történő diszkrétizálását a (4.15)-ös ábra illusztrálja.



4.15 ábra Azon keresztmetszeti pontok helyzete, ahol meghatározzuk a keresett függvény értékét

A **véges differenciák módszerének** alap gondolata az, hogy a vizsgált pontokban a differenciálegyenletet oly módon írjuk fel, hogy a benne szereplő deriváltakat *differenciahányadossal* közelítjük. Ekkor a differenciálegyenlet megoldása egy (jelen esetben) lineáris egyenletrendszer megoldására redukálódik, ahol az ismeretlenek az osztópontokhoz tartozó függvényértékek. Az i -edik sorhoz és j -edik oszlophoz tartozó osztópontban a (4.98)-es differenciálegyenlet közelítése az alábbi egyenletre vezet:

$$C_{44} \cdot \frac{1}{k^2} [\chi_{i-1,j} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i+1,j}] - 2C_{45} \frac{1}{4k^2} [\chi_{i+1,j+1} - \chi_{i-1,j+1} + \chi_{i-1,j-1} - \chi_{i+1,j-1}] +$$

$$+ C_{55} \frac{1}{k^2} [\chi_{i,j-1} - 2\chi_{i,j} + \chi_{i,j+1}] = \bar{F}_{10}^x x_j + \bar{F}_{01}^x y_i. \quad (4.106)$$

A fenti egyenlet alapján az egyenletrendszert mátrix alakban a következőképpen írhatjuk fel:



$$\left[C_{44} \cdot \frac{1}{k^2} \underline{\underline{D}}_{xx} - 2C_{45} \cdot \frac{1}{4k^2} \underline{\underline{D}}_{xy} + C_{55} \cdot \frac{1}{k^2} \underline{\underline{D}}_{yy} \right] \underline{\underline{\chi}} = \underline{\underline{b}}. \quad (4.107)$$

A $\underline{\underline{D}}_{xx}$, $\underline{\underline{D}}_{xy}$ és $\underline{\underline{D}}_{yy}$ mátrixok ritka, sávszerkezetű mátrixok. A belső pontok esetén (a fenti ábrán látható $n=6$ -os felosztást figyelembe véve) az alábbi szabályos struktúrával rendelkeznek:

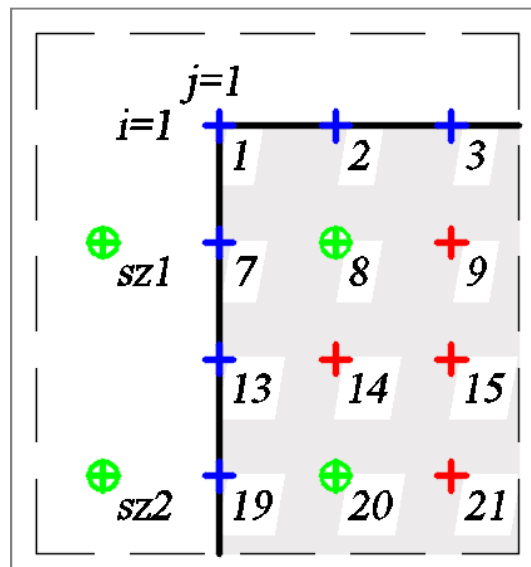
$$\underline{\underline{D}}_{xx} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (4.108)$$

$$\underline{\underline{D}}_{xy} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdot \\ \cdot & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad (4.109)$$



$$\underline{D}_{yy} = \begin{bmatrix}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \cdot & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \cdot & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{bmatrix}. \quad (4.110)$$

A mátrixok fenti alakja csak a belső pontokra vonatkozik. A peremen és az ahhoz közel eső pontoknál a fenti sávszerkezet megváltozik, hiszen ha például a (4.15)-ös ábrán látható 13-as pontban közelítjük a vegyes parciális deriváltat *centrális differenciához*, akkor ennek előállításához a (4.16)-os ábrán zöld színnel jelölt négy pontban kellene ismernünk a függvény értékét,



4.16 ábra Fiktív pontok figyelembevétele

hiszen:

$$\left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right|_{13} \approx \frac{1}{4k^2} [\chi_{sz1} - \chi_8 + \chi_{20} - \chi_{sz2}]. \quad (4.111)$$

Mint látható, az *sz1-el* és *sz2*-vel jelölt pontok kívül esnek a χ függvény értelmezési tartományán, így a (4.111)-es kifejezés direkt módon nem használható. Noha ezekben a "fiktív pontokban" valójában nem beszélhetünk függvényértékről, ezeket a "fiktív értékeket" a



(4.100)-as *Neumann-féle peremfeltételek* figyelembevételével mégis kifejezhetjük az értelmezési tartományba eső rácspontokban lévő függvényértékekkel, hiszen azt tudjuk, hogy:

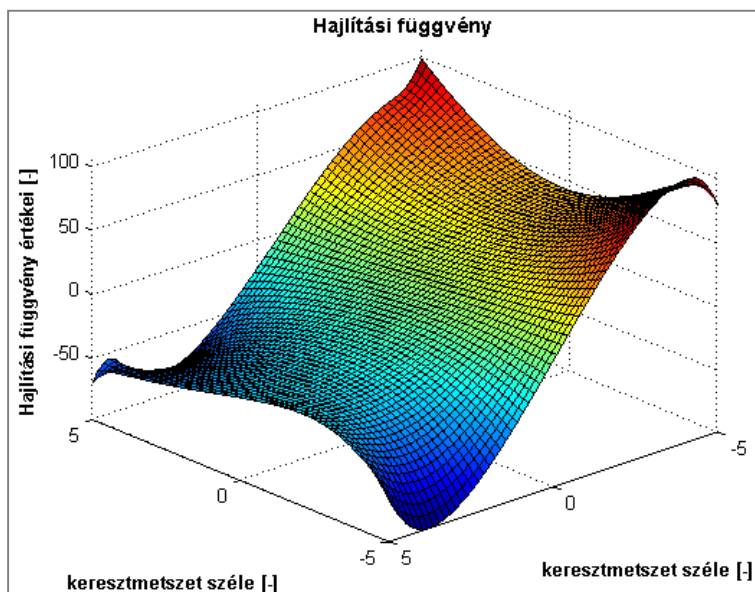
$$C_{44} \frac{\partial \chi}{\partial x} \Big|_7 - C_{45} \frac{\partial \chi}{\partial y} \Big|_7 \approx C_{44} \frac{1}{2k} [-\chi_{sz1} + \chi_8] - C_{45} \frac{1}{2k} [-\chi_1 + \chi_{13}] = p_{20}^z x_7^2 + p_{11}^z x_7 y_7 + p_{02}^z y_7. \quad (4.112)$$

Innen pedig:

$$\chi_{sz1} = - \left(p_{20}^z x_7^2 + p_{11}^z x_7 y_7 + p_{02}^z y_7 + C_{45} \frac{1}{2k} [-\chi_1 + \chi_{13}] \right) \frac{2k}{C_{44}} + \chi_8. \quad (4.113)$$

Ezt visszahelyettesítve (4.111)-be, látható, hogy a \underline{D}_{xy} mátrix 13. sora jelentősen eltér a (4.109)-as összefüggésnél látott struktúrától.

A fenti módszerrel tehát csak bizonyos - véges számú - pontban határozzuk meg a függvény értékét. Ahhoz, hogy a függvény értékét (közelítőleg) a teljes értelmezési tartományon megkapjam, *harmadfokú spline-interpolációt* végeztem el. Az így kapott *hajlítási függvény* a (4.17)-es ábrán látható.



4.17 ábra Hajlítási függvény

Az anizotrop konzolok ezzel a módszerrel kapott feszültségeit és eltolódásait, a következő fejezetben, a numerikus példánál mutatom be, összevetve a *3D végeelemes szimulációk* eredményével.

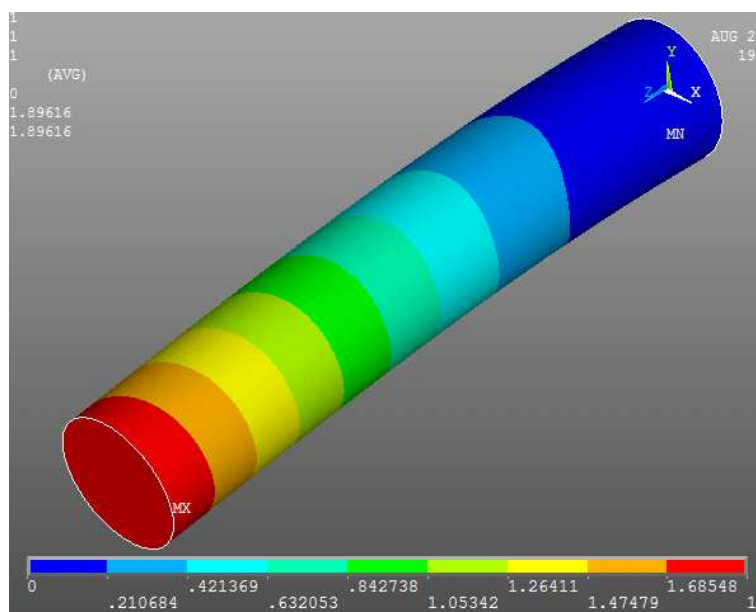
4.4. Anizotrop anyagú gerendák feszültségeinek és elmozdulásainak numerikus vizsgálata

4.4.1. Általános anizotrop anyagú konzol numerikus vizsgálata

Ebben a pontban egy általános anizotrop anyagú konzol feszültségeit és elmozdulásait vizsgálom. Először a (4.3.1)-es pontban ismertetett *Lekhnitskii-féle módszerrel* meghatározom egy 1,5 m hosszú, kör keresztmetszetű (150 mm sugarú), rúdvégen $F=100$ kN-os koncentrált erővel terhelt konzol feszültségeit és elmozdulásait, majd később, 3D *végeselemes szimulációkat* végzek ugyanezen mennyiségek számítására. A számításokat egy fiktív anyagú szerkezetre végzem el. Most is igaz az, hogy elsősorban nem az eredmények abszolút értékére, hanem a különböző módszerek eredményei között lévő eltérésekre fókuszálok. A számítások reprodukálhatósága érdekében, a (4.114)-es összefüggésben megadom a vizsgált fiktív általános anizotrop anyag *hajlékonysági mátrixát*.

$$\underline{\underline{C}} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,0476 & -0,0167 & -0,0167 & 0,0094 & 0,0187 & 0,0141 \\ -0,0167 & 0,0556 & -0,0133 & 0,0156 & 0,0313 & 0,0234 \\ -0,0167 & -0,0133 & 0,0667 & 0,0144 & 0,0287 & 0,0216 \\ 0,0094 & 0,0156 & 0,0144 & 0,1818 & 0,0333 & 0,025 \\ 0,0187 & 0,0313 & 0,0287 & 0,0333 & 0,125 & 0,025 \\ 0,0141 & 0,0234 & 0,0216 & 0,025 & 0,025 & 0,1667 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{MPa}}. \quad (4.114)$$

A konzol végeselemes modellje és a gerenda elmozdulásai a (4.18)-as ábrán látható.

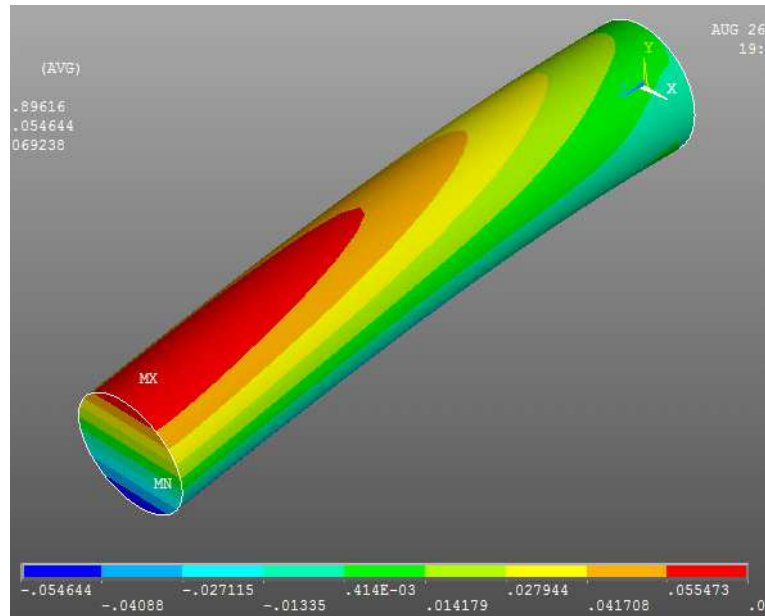


4.18 ábra Általános anizotrop anyagú kör km-ű konzol elmozdulásai

Tekintve, hogy az általános anizotrop anyagú gerendák is a **kapcsolt** gerendák családjába sorolhatók, a gerenda a lehajlason túl - a *szerkezeti szintű rugalmas kapcsolódásnak*

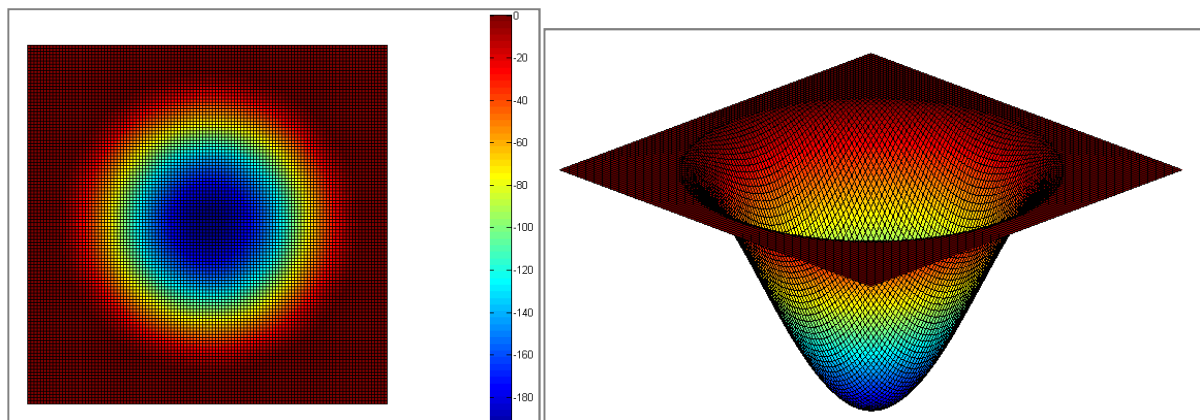


megfelelően - elcsavarodást is produkál, ahogy erről a (4.19)-es ábrán is meggyőződhetünk, ahol a pontok vízszintes elmozdulásait ábrázoltam.



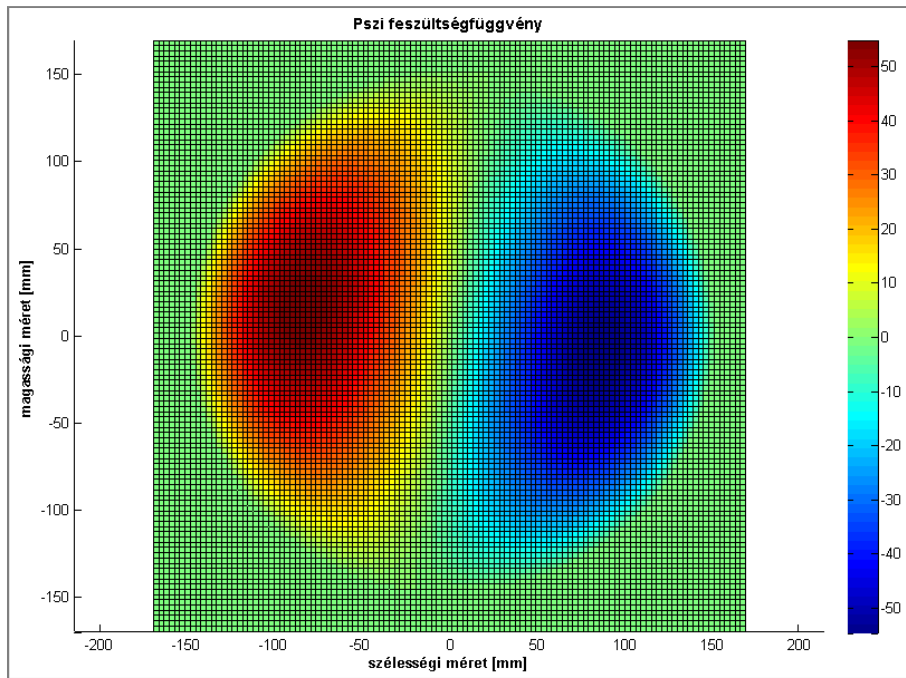
4.19 ábra Általános anizotrop anyagú konzol pontjainak x irányú eltolódása

A továbbiakban ismertetem az így kapott eredményeket. A *Lekhnitskii-megoldásban* szereplő (4.79)-es egyenletrendszer megoldása után az $F(x,y)$ feszültségfüggvényre a (4.20)-as ábrán látható eredményt kaptam.

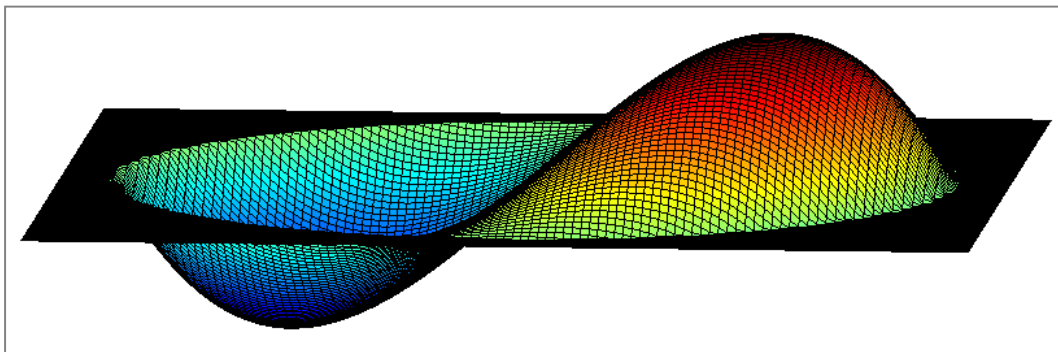


4.20 ábra $F(x,y)$ feszültségfüggvény (az értékek N -ban értendők)

A $\Psi(x,y)$ feszültségfüggvényre az alábbi eredményt kaptam:

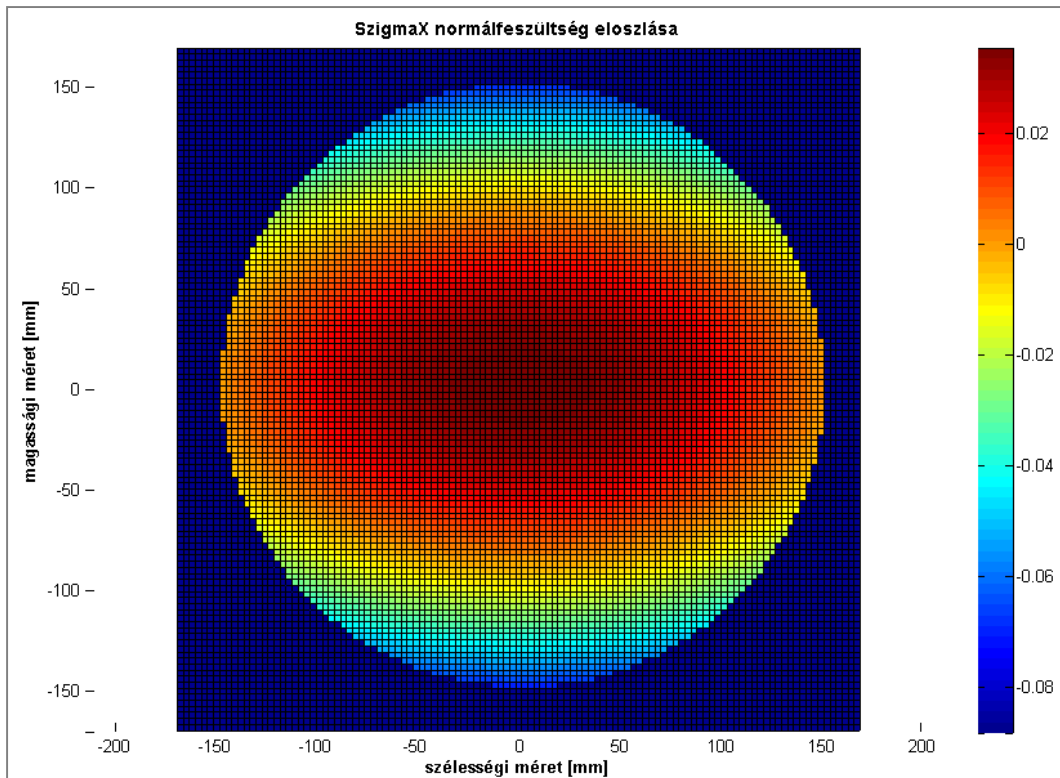


4.21.a ábra $\Psi(x,y)$ feszültségfüggvény (az értékek N/mm dimenzióban értendők)



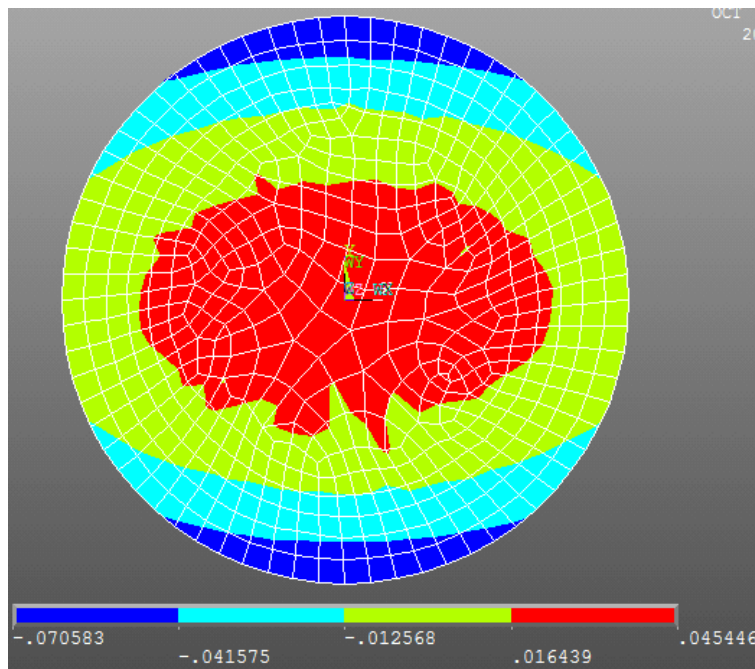
4.21.b ábra $\Psi(x,y)$ feszültségfüggvény

A feszültségfüggvények ismeretében - a (4.75)-ös egyenletek segítségével - már meghatározhatók az egyes feszültségkomponensek. Az analitikus megoldással a σ_x keresztirányú normálfeszültség keresztmetszetek menti eloszlására a (4.22)-es ábrán látható eredményt kaptam.



4.22 ábra σ_x keresztirányú normál feszültség keresztmetszetek menti eloszlása az analitikus megoldás szerint
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)

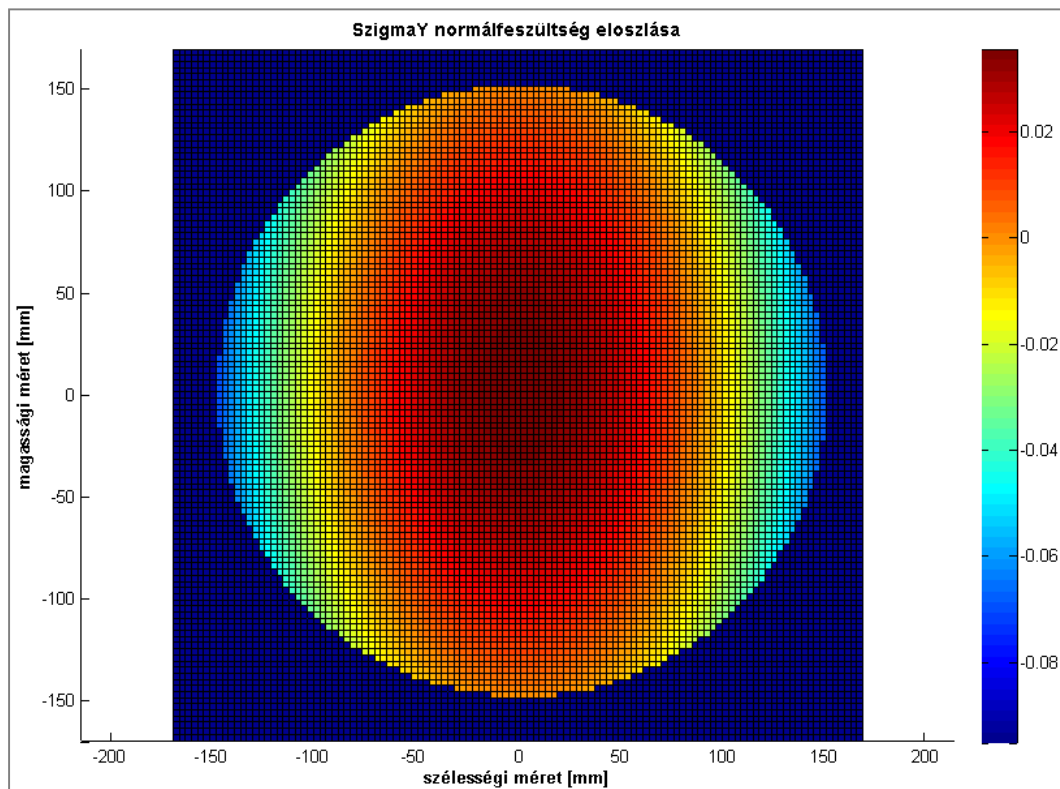
A 3D végelelemes szimulációval σ_x keresztirányú normál feszültség keresztmetszetek menti eloszlására az alábbi eredményt kaptam.



4.23 ábra σ_x keresztirányú normál feszültség keresztmetszetek menti eloszlása a numerikus megoldás szerint
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)

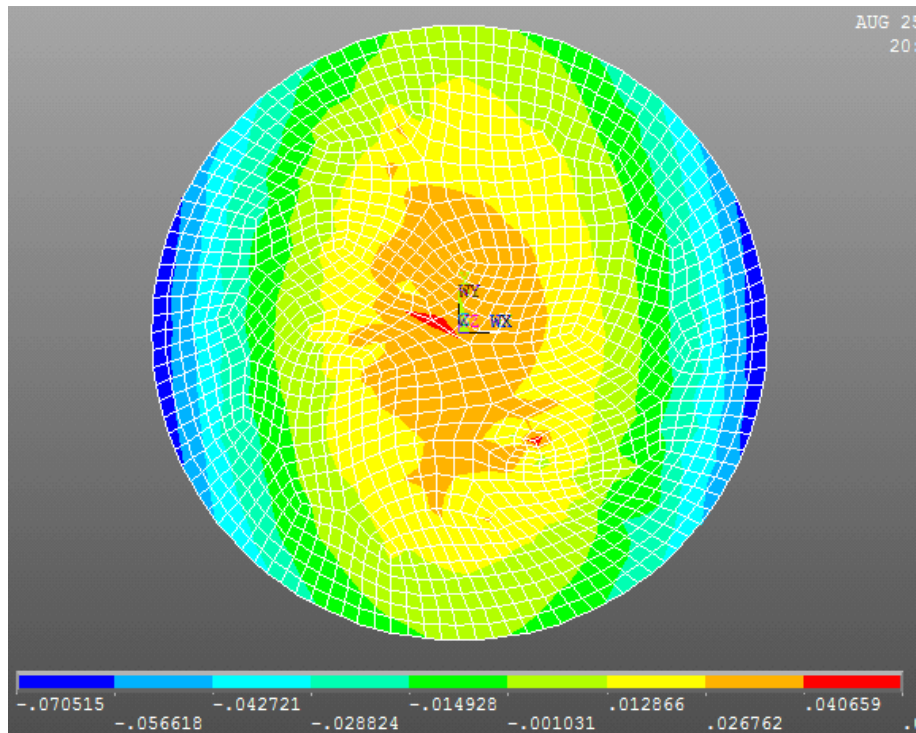


A σ_y keresztirányú normál feszültség keresztmetszet menti eloszlására a *Lekhnitskii-féle megoldással* a (4.24)-es ábrán látható eredményt kaptam.



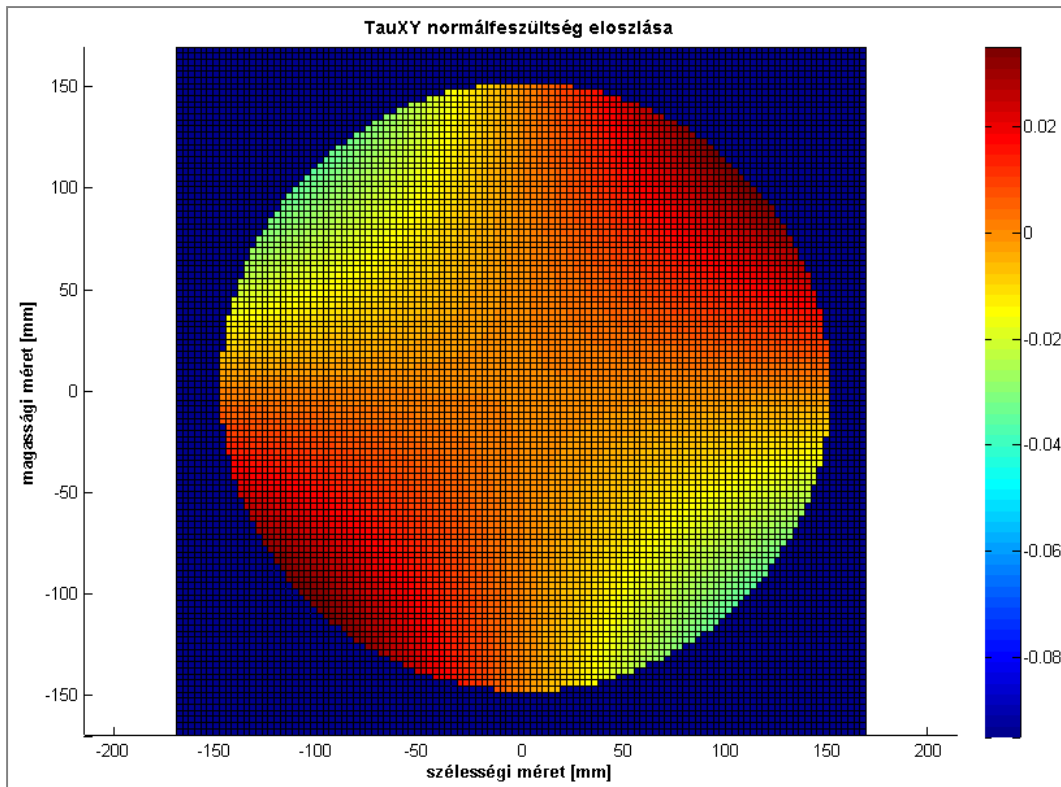
4.24 ábra σ_y keresztirányú normál feszültség keresztmetszetek menti eloszlása az analitikus megoldás szerint (az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)

Ezzel szemben a 3D *végeselemes szimulációval* σ_y normál feszültség eloszlására a következőt kaptam eredményül.

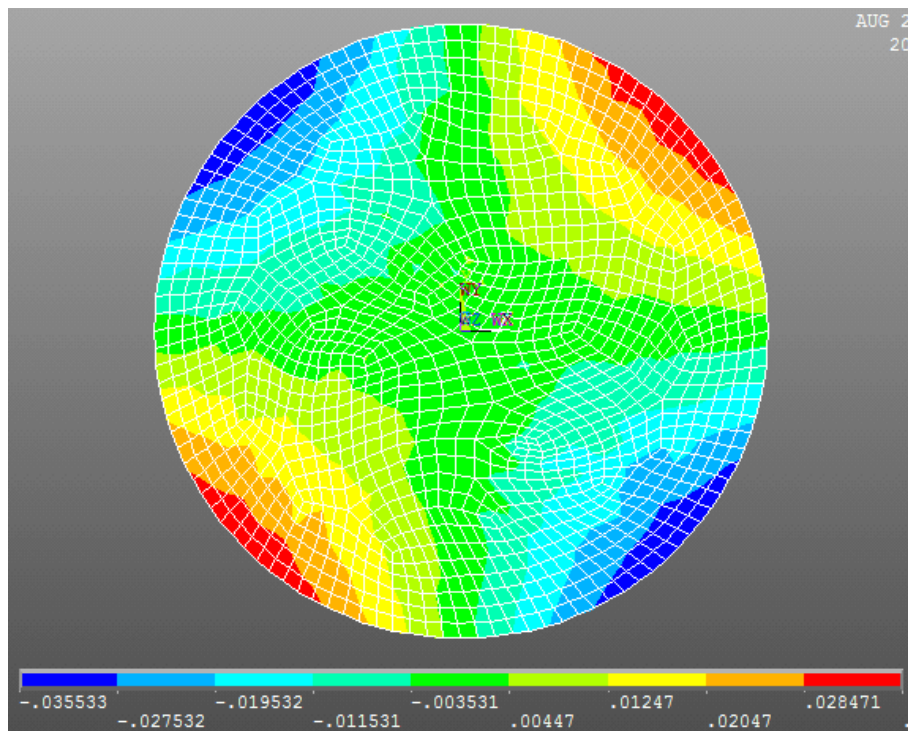


4.25 ábra σ_y keresztirányú normál feszültség keresztmetszetek menti eloszlása a numerikus megoldás szerint
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)

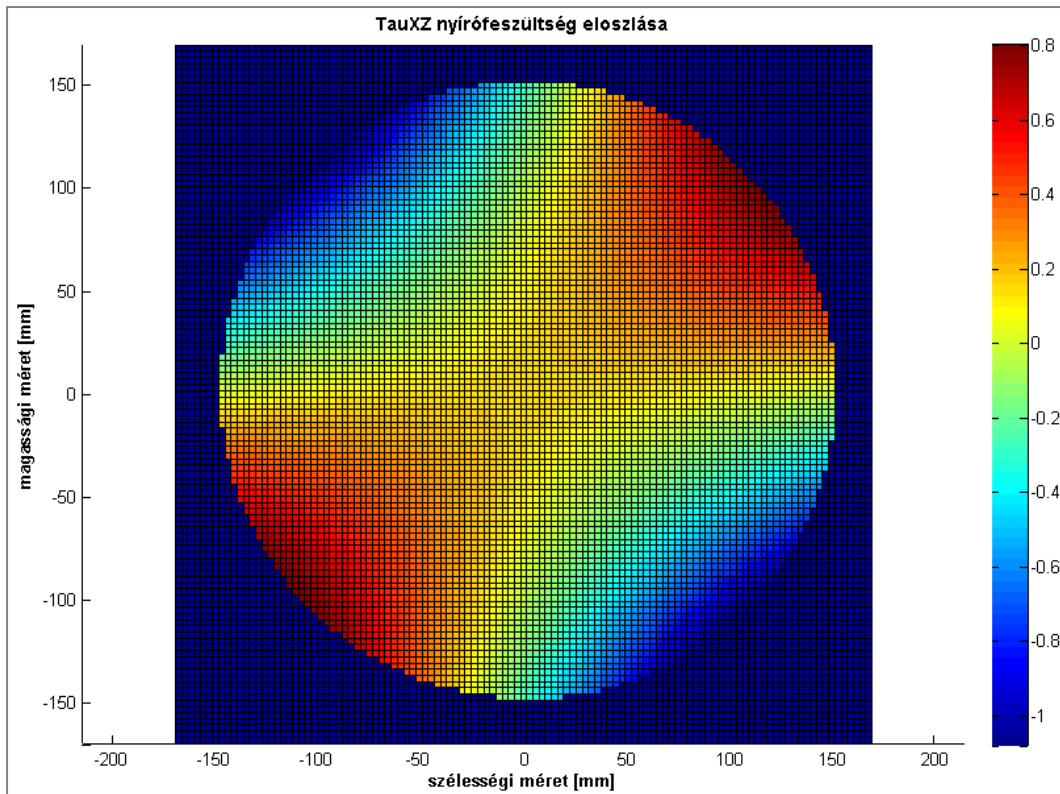
A (4.22)-(4.25)-ös ábrák alapján azt láthatjuk, hogy a *Lekhnitskii-megoldással* kapott eredmények jól közelítik a *végeselemes szimulációk* eredményét. Ezekben az esetekben a két módszerrel számított szélsőértékek között 2%-nál kisebb eltérést tapasztaltam. A τ_{xy} nyírófeszültségekre kapott megoldásaim a (4.26)-os és (4.27)-es, míg a τ_{xz} -re kapott eredményeim a (4.28)-as és (4.29)-es ábrán láthatók.



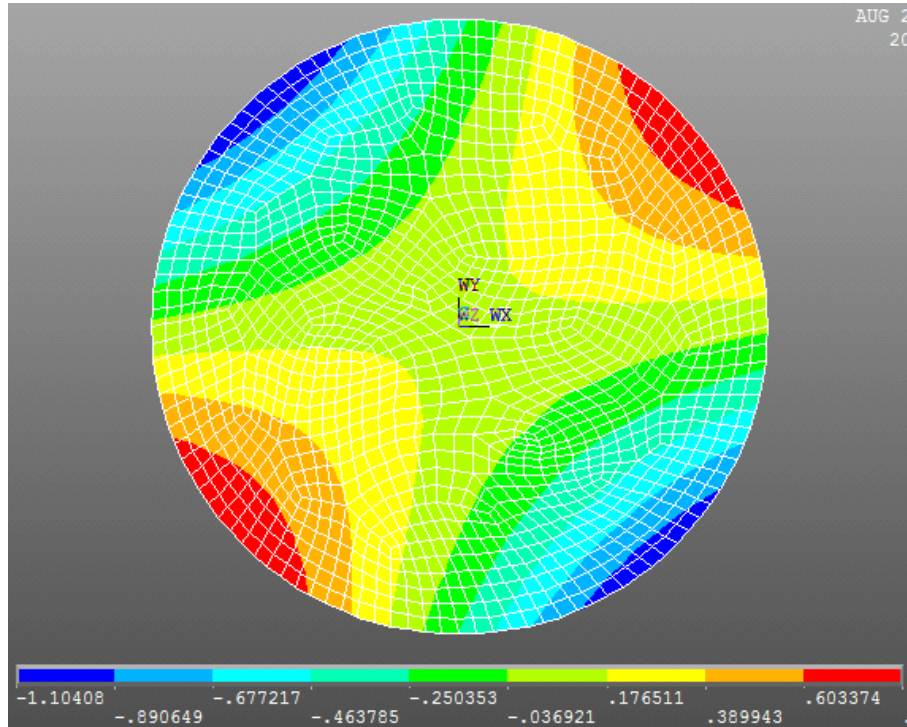
4.26 ábra τ_{xy} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása a Lekhnitskii-féle analitikus megoldás szerint
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



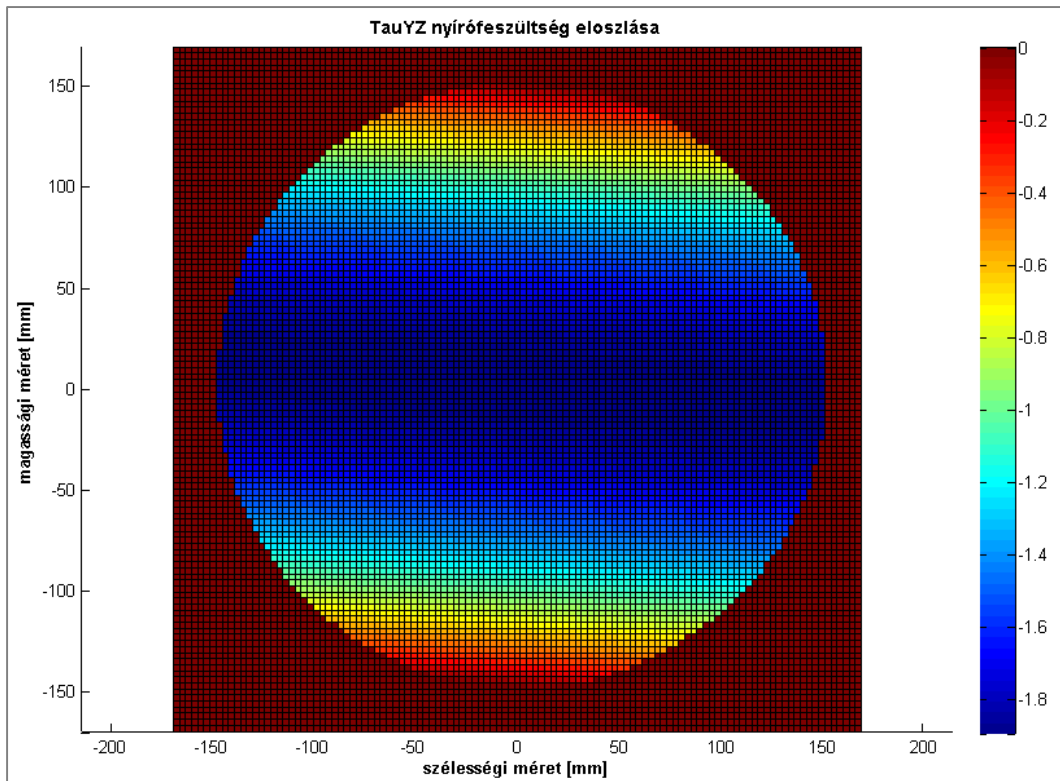
4.27 ábra τ_{xy} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása a végelemes megoldás szerint
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



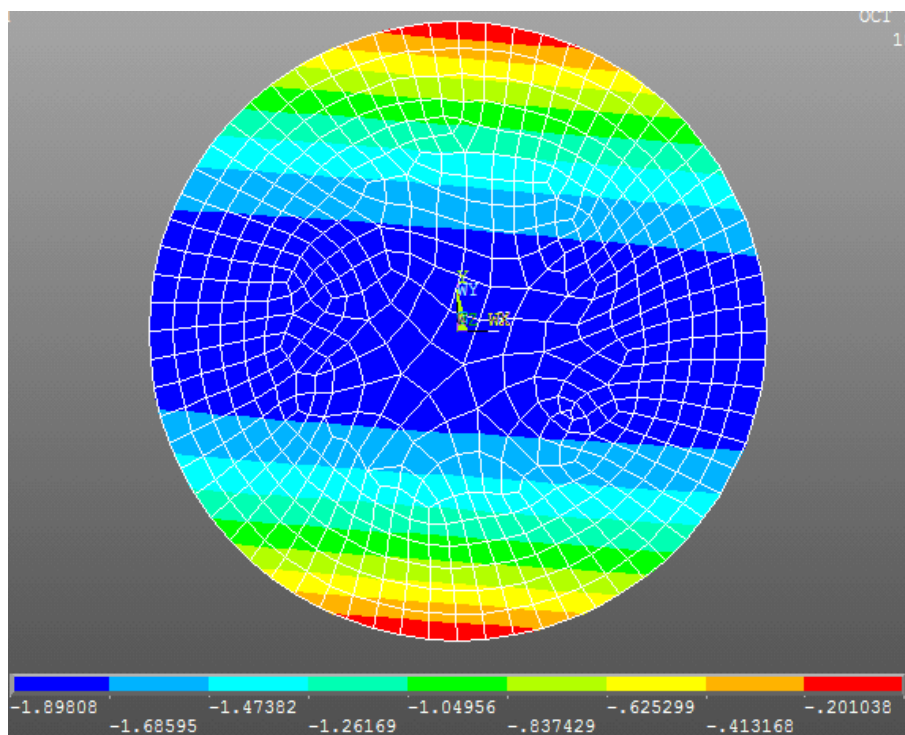
4.28 ábra τ_{xz} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása a Lekhnitskii-féle analitikus megoldás szerint (az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



4.29 ábra τ_{xz} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása a végelemes megoldás szerint (az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



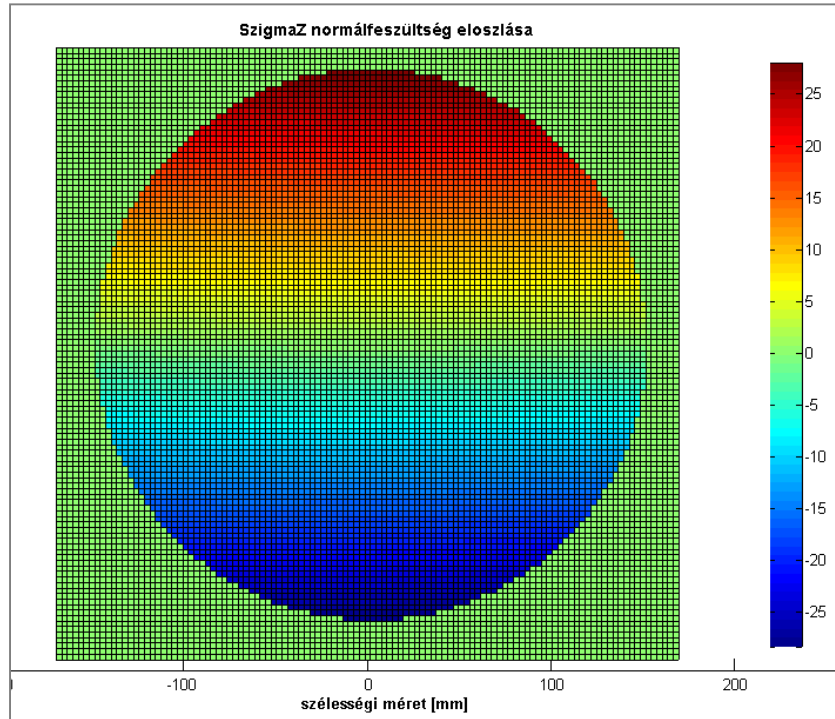
4.30 ábra τ_{yz} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása az analitikus megoldás szerint (az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



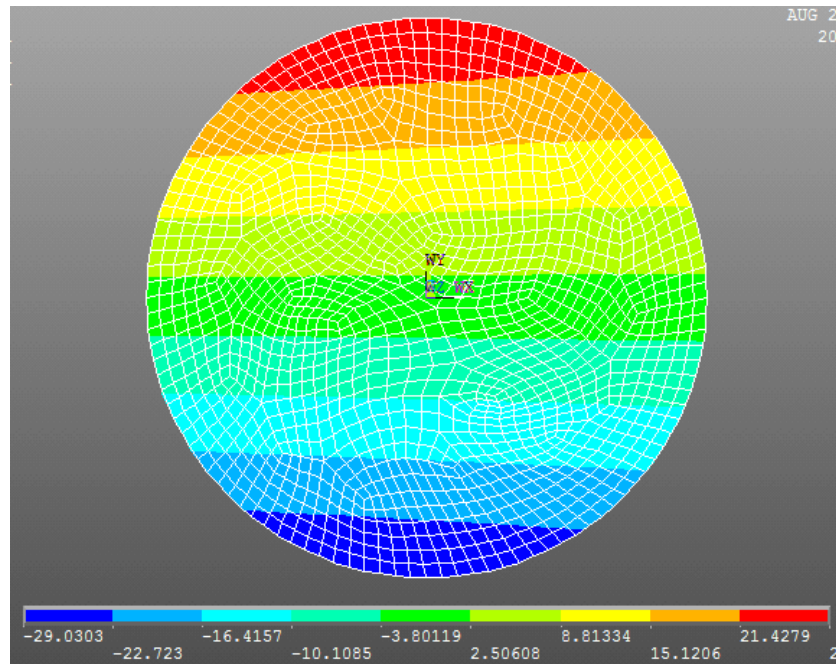
4.31 ábra τ_{yz} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása a végelemes megoldás szerint (az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



A (4.26)-(4.31)-es ábrákon látható eredmények is igen jó egyezést mutatnak. A szélsőértékek között maximum 3-6%-os eltérést figyelhettünk meg. A σ_z hosszirányú normál feszültségek esetén is az előzőekben megfigyelt kb. 5%-os eltérést figyelhetjük meg a két módszer eredményei között, ahogy erről a (4.32)-es és (4.33)-as ábrákon meggyőződhetünk.



4.32 ábra σ_z normál feszültség középső km. menti eloszlása a Lekhnitskii-féle analitikus megoldás szerint (az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



4.33 ábra σ_z normál feszültség középső km. menti eloszlása a véges elemes megoldás szerint (az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)

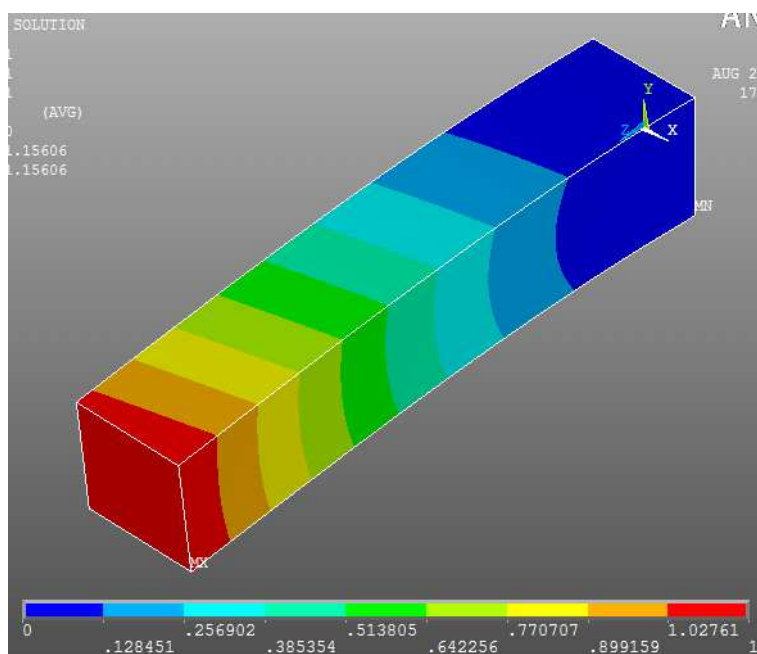


4.4.2. Kapcsolt monoklinális anyagú konzol numerikus vizsgálata

Ebben a pontban egy fiktív *MON13y* anyagú konzol feszültségeit és eltolódásait vizsgálom. Ehhez először elvégzem a (4.3.2)-es pontban szereplő *közelítő analitikus módszer* megoldását, majd ezeket az eredményeket összevetem 3D *végeleemes szimuláció* eredményével. A numerikus vizsgálatok céljára egy 1,5 m hosszú konzolt választottam, 30 cm oldalhosszú négyzet keresztmetszettel. A koncentrált terhelés ezúttal is $F=100$ kN nagyságú volt. Az alfejezet célja annak megvizsgálása, hogy a közelítő, kézi megoldással kapott eredmények mennyire közelítik meg a *testelemes végeleemes szimulációk* "pontos" eredményeit. A számítások során vizsgált gerenda anyagának *hajlékonysági mátrixát*, a (4.115)-ös összefüggés mutatja be.

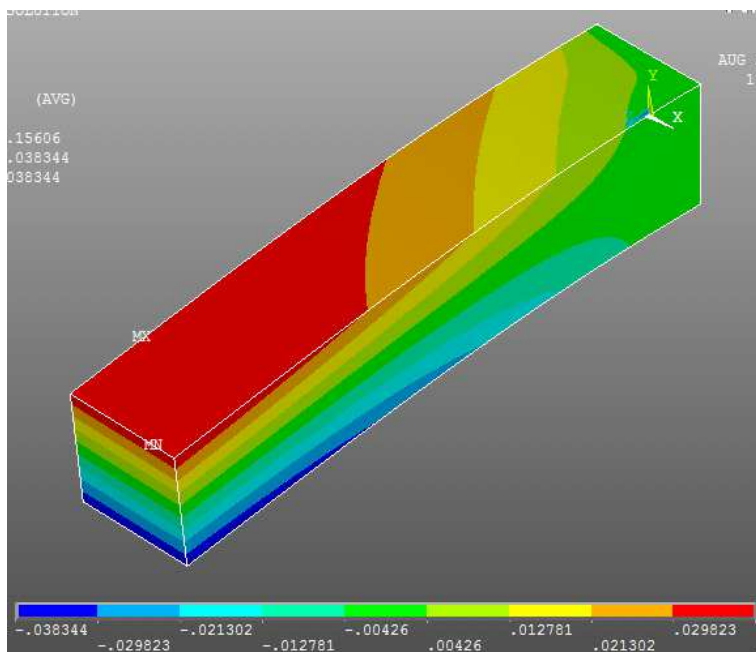
$$\underline{\underline{C}} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,0476 & -0,0167 & -0,0167 & 0 & 0,0187 & 0 \\ -0,0167 & 0,0556 & -0,0133 & 0 & 0,0313 & 0 \\ -0,0167 & -0,0133 & 0,0667 & 0 & 0,0287 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1818 & 0 & 0,025 \\ 0,0187 & 0,0313 & 0,0287 & 0 & 0,125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,025 & 0 & 0,1667 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{MPa}}. \quad (4.115)$$

A következőkben rátérek az eredmények bemutatására. A vizsgált, - gerendavégen függőleges koncentrált erővel terhelt - konzol elmozdulásai a (4.34)-es ábrán láthatók.



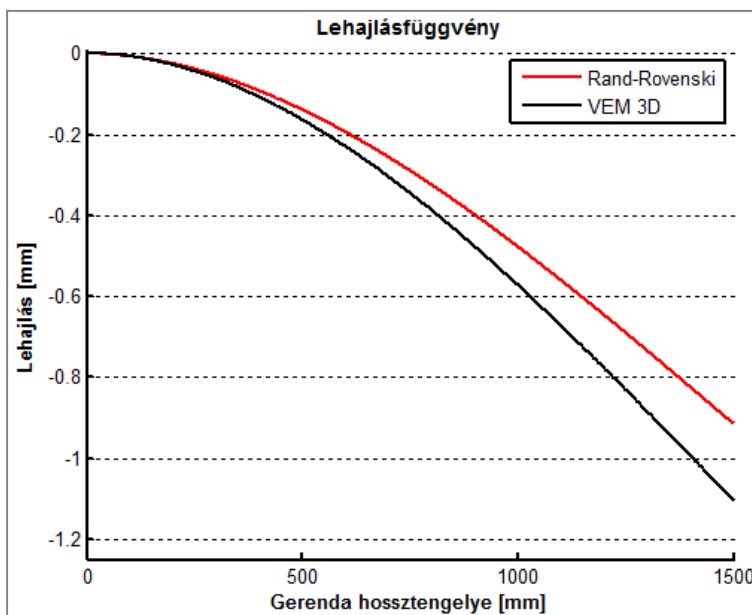
4.34 ábra *MON13y* anyagú konzol elmozdulásai

A fenti ábrán jól kivehető a gerenda elcsavarodása, vagyis a *szerkezeti szintű rugalmas kapcsolódás* jelensége. Az elcsavarodást a (4.35)-ös ábra is jól illusztrálja, ahol a pontok vízszintes eltolódását láthatjuk.



4.35 ábra MON13y anyagú konzol pontjainak x irányú eltolódása

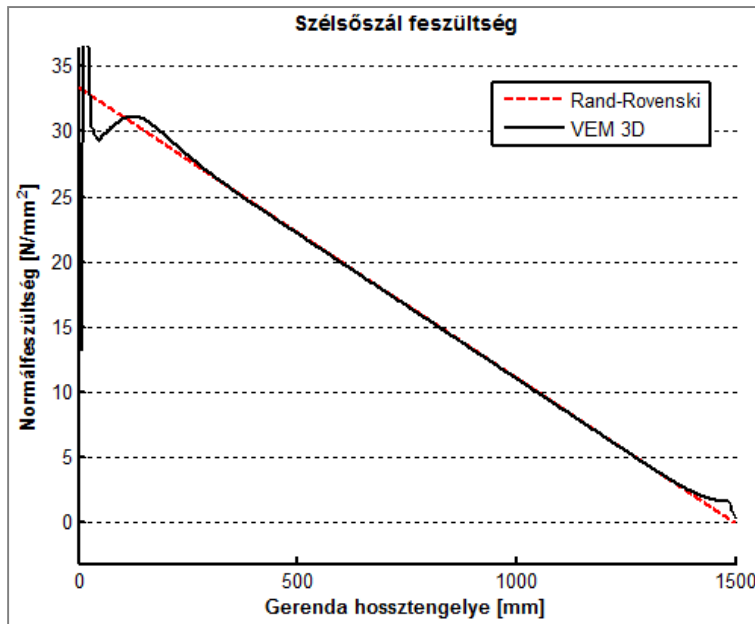
A gerenda lehajlására kapott eredményeket a (4.36)-os ábrán ábrázoltam.



4.36 ábra MON13y anyagú konzol lehajlása

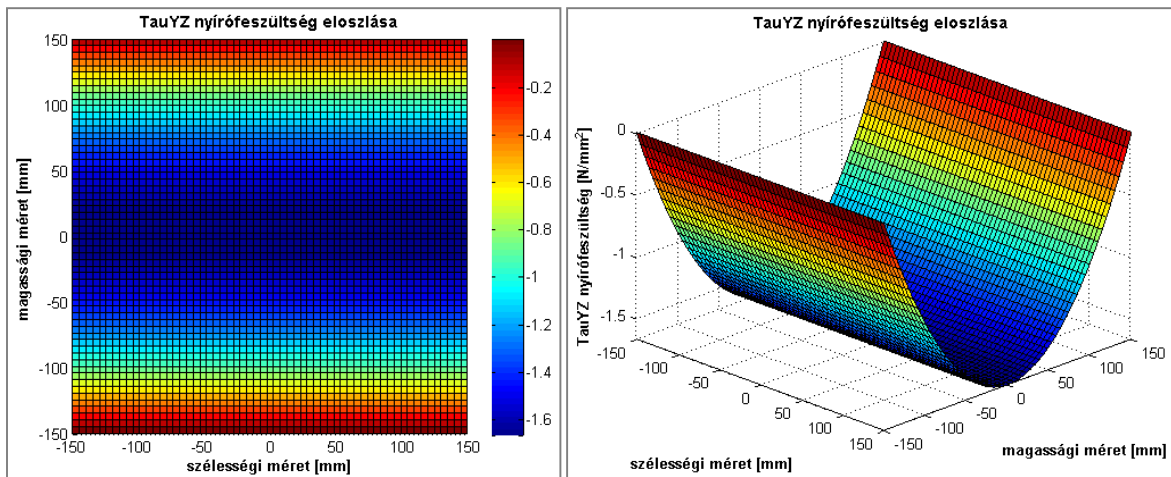
A fenti ábra alapján megállapítható, hogy a közelítő analitikus megoldással kapott lehajlásfüggvény csak bizonyos hibával közelíti a véges elemes szimulációk eredményét. A maximális lehajlásra vonatkozóan a közelítő analitikus megoldás relatív hibája a véges elemes szimulációk eredményéhez viszonyítva 17,28%.

A szélső szálban lévő hosszirányú normál feszültségekre a (4.37)-es ábrán látható eredményt kaptam.



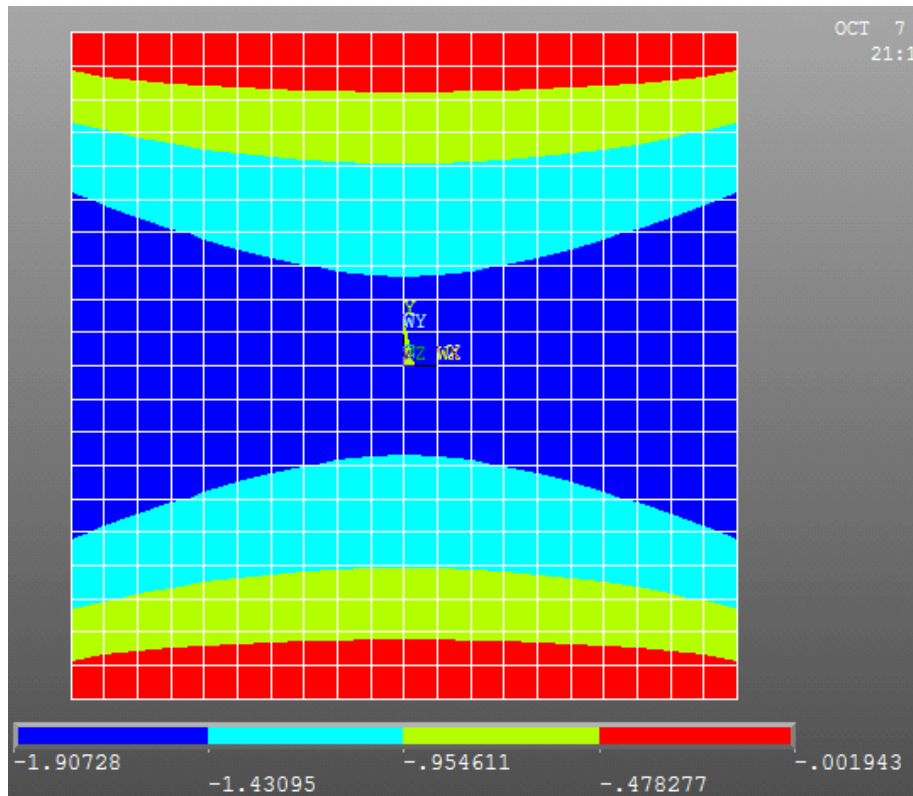
4.37 ábra MONI3y anyagú konzol hosszirányú normálfeszültségei a felső szélső szálban

A fenti ábra alapján megállapíthatjuk, hogy - a lokális hatásokat leszámítva - a közelítő analitikus megoldással kapott normálfeszültségek nagyon jól megközelítik a vége-selemes szimuláció eredményét. Bizonyára ez részben most is annak köszönhető, hogy statikailag határozott szerkezetet vizsgáltam. A közelítő analitikus megoldással kapott τ_{yz} nyírófeszültségek keresztmetszet menti eloszlását a (4.38)-as ábrán láthatjuk.



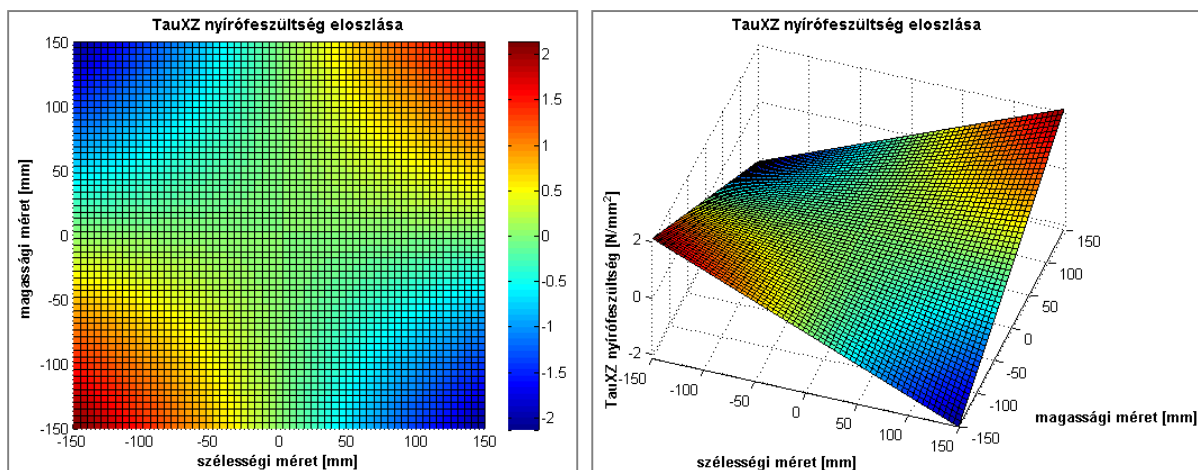
4.38 ábra τ_{yz} nyírófeszültség eloszlása a keresztmetszet mentén az analitikus megoldás szerint

A 3D vége-selemes szimulációval kapott τ_{yz} eloszlást a (4.39)-es ábra mutatja.



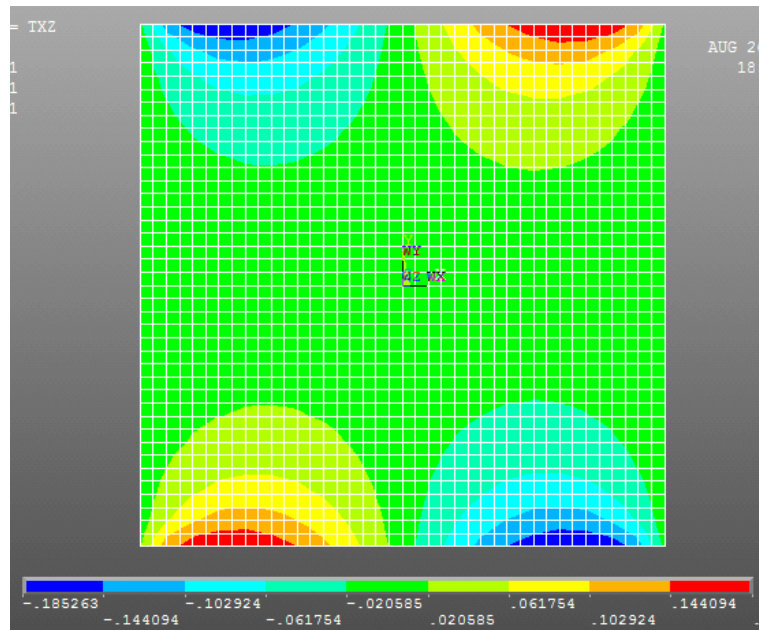
4.39 ábra τ_{yz} nyírőfeszültség eloszlása a keresztmetszet mentén a végeselemes szimuláció alapján
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)

A (4.38)-as és (4.39)-es ábrák alapján elmondható, hogy a τ_{yz} nyírőfeszültségeknél is jó egyezést tapasztaltunk. A τ_{xz} nyírőfeszültségek keresztmetszet menti eloszlására a közelítő analitikus megoldással a (4.40)-es ábrán látható eredményt kaptam.



4.40 ábra τ_{xz} nyírőfeszültség eloszlása a keresztmetszet mentén az analitikus megoldás szerint

A 3D végeselemes szimulációval kapott τ_{xz} eloszlást a (4.41)-es ábra mutatja.

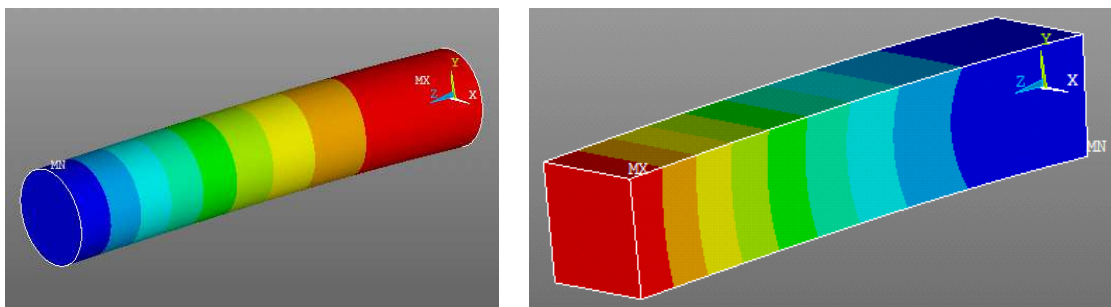


4.41 ábra τ_{xz} nyírófeszültség eloszlása a keresztmetszet mentén a végeselemes szimuláció alapján
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)

A (4.40)-es és (4.41)-es ábrák azt mutatják, hogy a τ_{xz} nyírófeszültségeknél jelentős eltérést figyelhetünk meg a két módszer eredményei között. Ez volt az egyetlen eset, ahol azt tapasztaltam, hogy a közelítő analitikus megoldással kapott eredmény távol áll a numerikus szimulációk eredményétől. A (4.41)-es ábrán a τ_{xz} nyírófeszültségek x szerinti eloszlása - közelítően - egy harmadfokú polinommal írható le. Úgy vélem, hogy a fenti ábrákon látott eltérés oka az, hogy a (4.94.c) egyenlettel leírt analitikus megoldásban x az első hatványon szerepelt. Ez nyilvánvalóan hibás összefüggésekhez vezet, hiszen a keresztmetszet (terheletlen) peremein, - $x=-b/2$ -nél és $x=b/2$ -nél - az x irányú nyírófeszültségekre zérus értéket kellene kapnunk.

4.4.3. Nem kapcsolt monoklinális anyagú konzol numerikus vizsgálata

Nem kapcsolt gerendák esetén, hajlítás hatására elcsavarodó viselkedést már nem figyelhetünk meg. A *MON13Z* anyagú gerendákra jellemző alakváltozást a (4.42)-es ábrán láthatjuk.



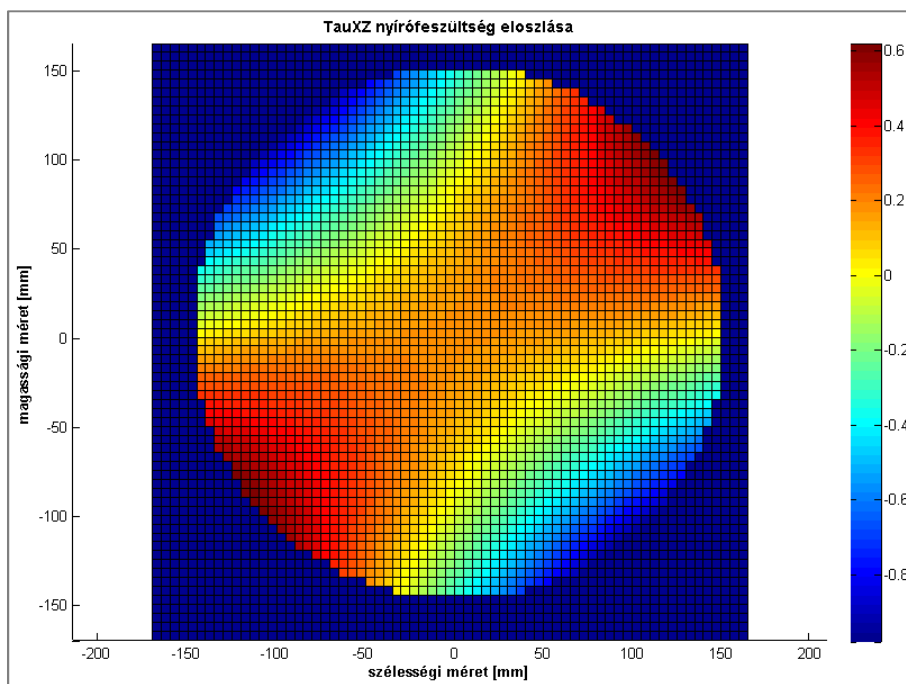
4.42 ábra Nem kapcsolt gerendák alakváltozása



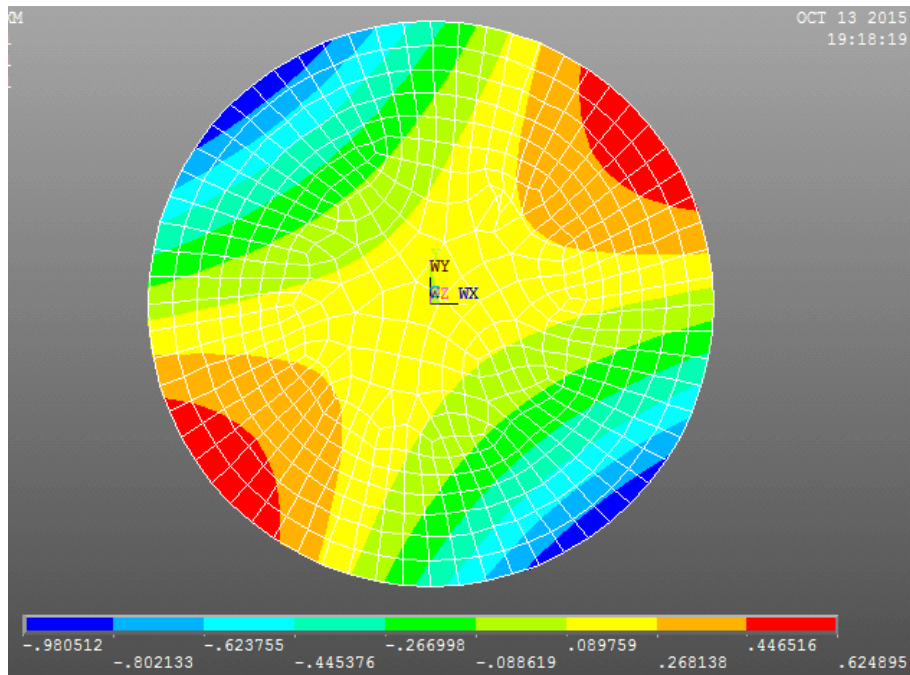
A következőkben bemutatom, hogy nem kapcsolt gerendák esetén a *Lekhnitskii-féle* megoldással kapott eredmények, mennyire közelítik meg a numerikus számítások eredményeit. A számítás bemenő adatai megegyeznek az általános anizotrop anyagú konzolnál alkalmazottakkal, azzal a különbséggel, hogy jelen esetben, a vizsgált gerenda anyagának *hajlékonysági mátrixa* az alábbi módon alakult:

$$\underline{\underline{C}} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,0476 & -0,0167 & -0,0167 & 0 & 0 & 0,025 \\ -0,0167 & 0,0556 & -0,0133 & 0 & 0 & 0,0417 \\ -0,0167 & -0,0133 & 0,0667 & 0 & 0 & 0,0383 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1818 & 0,0333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0333 & 0,222 & 0 \\ 0,025 & 0,0417 & 0,0383 & 0 & 0 & 0,1667 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{MPa}}. \quad (4.116)$$

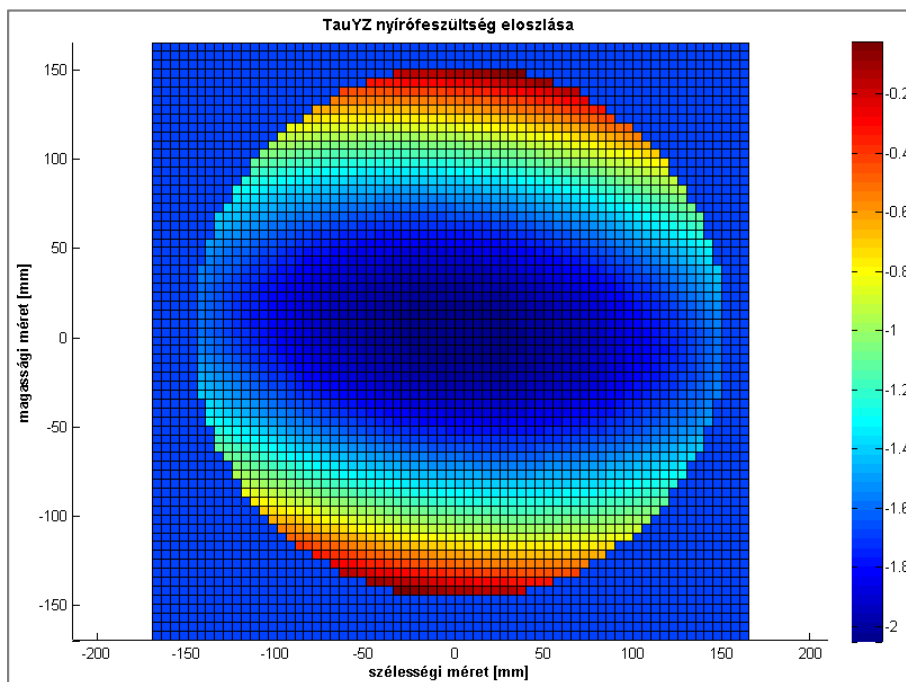
A hosszirányú normálfeszültségek vizsgálatát már számtalanszor elvégeztem, és konzol esetén mindig jó egyezést tapasztaltam. Ezért az eredmények bemutatását jelen esetben csupán a nyírófeszültségekre korlátozom. Mindez a (4.43)-(4.46)-os ábrákon látható.



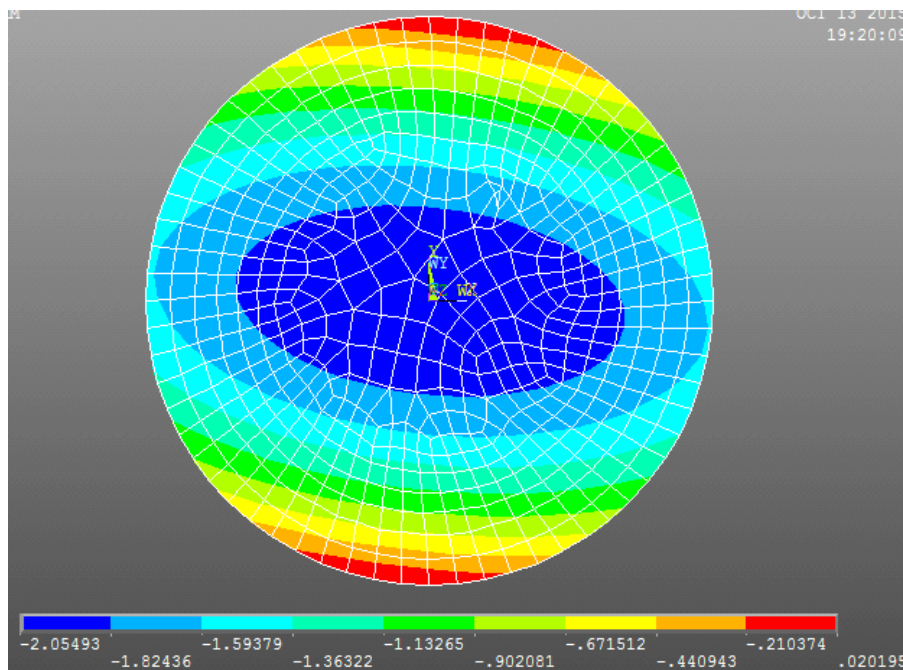
4.43 ábra τ_{xz} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása az analitikus megoldás szerint
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



4.44 ábra τ_{xz} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása a numerikus megoldás szerint
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



4.45 ábra τ_{yz} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása az analitikus megoldás szerint
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)



4.46 ábra τ_{yz} nyírófeszültség keresztmetszetek menti eloszlása a numerikus megoldás szerint
(az értékek N/mm^2 dimenzióban értendők)

Látható, hogy az anizotrop rugalmasságtan egyenletein alapuló *Lekhnitskii-megoldással* kapott eredmények ezúttal is jól megközelítik a *végeselemes számítások* eredményét. Az eltérések mértéke minden esetben néhány százalék alatt marad.

4.5. Anizotrop anyagú gerendák vizsgálatának összefoglalása

Ebben a fejezetben áttekintettük az **anizotrop anyagú gerendák mechanikai viselkedésével** kapcsolatos legfőbb tudnivalókat. Először bemutattam, hogy a későbbi vizsgálatok elvégzésére leggyakrabban **milyen típusú mérnöki problémák** esetén merülhet fel igény. Látható volt, hogy a **szálerősítésű kompozitok** alkalmazásakor, a **szálak elrendezésétől** függően az **anizotropia különböző esetei** fordulhatnak elő. Ennek megfelelően áttekintettük, az **anizotrop anyagi viselkedés** legfontosabb típusait, azok jellemzőit valamint leírásuk módját.

Ezt követően rátértünk a **gerendák** vizsgálatára. Itt mindenekelőtt megkülönböztettük egymástól az **anizotrop anyagú gerendák főbb eseteit** attól függően, hogy az adott esetben beszélhetünk-e **szerkezeti szintű rugalmas kapcsolódásról**. Ezután az egyes esetekre bemutattam az *anizotrop rugalmasságtan* elvein alapuló **analitikus megoldást**. Látható volt, hogy az ún. *nem kapcsolt* gerendák esetén egy tetszőleges feladat vizsgálata egy **másodrendű parciális inhomogén differenciálegyenlet** megoldását igényli, ahol a keresztmetszet peremén **Neumann-típusú peremfeltételeket** írunk elő. Általános esetben ennek megoldására elsősorban valamilyen **numerikus módszerrel** (pl.: *végeselemmódszerrel* vagy a *véges differenciák módszerével*) van lehetőségünk. Munkámban - egyszerű négyzet keresztmetszetre - javasoltam egy, a *véges differenciák módszerén* alapuló megoldási



technikát, mellyel a keresett ún. *hajlítási függvény* meghatározható⁷⁵. *Kapcsolt gerendák* esetén a matematikai probléma még összetettebbé válik, ugyanis ilyenkor már egy *parciális differenciálegyenlet-rendszert* kell megoldanunk.

A módszerek összehasonlításánál használt **analitikus eredményeket**, most is olyan **egyszerűbb esetekre** határoztam meg, melyekre a szakirodalomban - többé-kevésbé - zárt alakú megoldás található. Ezeket az analitikus eredményeket ezúttal is a **végelelemmódszerrel kapott numerikus eredményekkel hasonlítottam össze**. Az eredmények értékelésénél láttuk, hogy az **analitikus eredmények nagyon jól** (legfeljebb néhány százalékos eltéréssel) **megközelítik a numerikus szimulációk eredményeit**. Ezek alapján elmondható, hogy a korábban részletezett *anizotrop rugalmasságtanon* alapuló megoldás **megbízható eredményekre** vezet, azonban **általános esetben** a mérnöki probléma vizsgálata olyan összetett matematikai probléma megoldását igényli, amelyre általában csak valamilyen **numerikus módszer alkalmazásával** van lehetőségünk.

⁷⁵ Úgy gondolom, hogy általános alakú keresztmetszet esetén a javasolt módszert a keresztmetszet kontúrjának parametrizálásával kell kiegészíteni. Így egyúttal a keresztmetszetek sarkainál tapasztalt lokális szingularitásoktól is eltekinthetünk, melyek abból adódnak, hogy a *Neumann-típusú peremfeltételek* ezekben a pontokban nem értelmezhetők.

5. Összefoglalás

Munkámban **gerendamodellek összehasonlító elemzését** végeztem el. A **gerendamodellek eredményeinek értékelésekor, ezeket 3D végeselemes szimulációk eredményeivel hasonlítottam össze.** Dolgozatomban izotrop anyagú, szendvics keresztmetszetű és anizotrop anyagú gerendák mechanikai vizsgálatával foglalkoztam. Munkámat egy **történelmi áttekintéssel** kezdtem, mely során bemutattam, hogy a hajlított gerenda, mint mechanikai fogalom, hogyan alakult ki és fejlődött az évszázadok alatt valamint, hogy melyek a gerendák mechanikai viselkedésével kapcsolatos **közelmúltbeli és jelenlegi kutatások főbb irányzatai.**

Az **izotrop anyagú gerendák** vizsgálata során megállapítottam, hogy **tömör keresztmetszetek** esetén az alkalmazott **modelljeink igen megbízhatók.** A nagyon rövid és magas gerendák esetét leszámítva, a lehajlások vizsgálatakor minden esetben **néhány százaléknál kisebb eltérést** tapasztaltam. Mindez némiképpen megváltozik abban az esetben, amikor **vékonyfalú keresztmetszetű** gerendát vizsgálunk. Ilyenkor némelyik modellnél még viszonylag karcsú gerenda esetén is közel **10%-os eltérést** láthatunk a pontos eredményekhez képest. Egyúttal azt is láttuk, hogy kifejezetten **rövid gerendák** esetén a **klasszikus modell** relatív **hibája még az 50%-ot is meghaladta.** Ezeknek a nagyobb hibáknak az az oka, hogy ilyen keresztmetszeteknél a **hajlítási és nyírási merevség aránya megnövekszik,** amitől a **nyírási alakváltozások hatása jelentősebbé válik.** Ezek alapján megállapítható, hogy az **izotrop modellek megbízhatósága bizonyos mértékben a keresztmetszet geometriájától függ.** Statikailag **határozott gerendánál a feszültségek** vizsgálatakor az eredmények szinte **tökéletes egyezést** mutattak. Emellett, amikor a h/L arány 0,2 vagy annál kisebb értéket vett fel, akkor még **statikailag határozatlan** esetben is csak **néhány százalékos eltérést** állapíthattunk meg. Az egyes modellek összehasonlításakor a **Timoshenko-modell** eredményei bizonyultak a **leginkább megbízhatóknak.** Ennek az az oka, hogy ez az egyetlen modell, mely az ún. **nyírási korrekciós tényező** használatán keresztül **kompenzálja az elméleti háttér hiányosságait.** Ezen felül, **tömör keresztmetszetek** esetén a **hiperbolikus modell** is **viszonylag pontosnak** bizonyult, azonban megfigyelhettük, hogy ennek a modellnek a **megbízhatósága erősen függ a keresztmetszet alakjától.**

A **szendvics keresztmetszetű gerendák** mechanikai vizsgálata megmutatta, hogy az egyes **modellek** sok esetben sokkal **nagyobb hibával dolgoznak** annál, mint amit korábban az izotrop anyagú gerendák vizsgálatánál megfigyelhettünk. Ezeknek a gerendáknak a **viselkedését** elsősorban **két fontos hatás jellemzi.** Az **egyik,** hogy általában igen **fajsúlyos nyírási deformációkról** beszélhetünk, mivel ilyen esetekben a hajlítási és nyírási merevség aránya meglehetősen nagy. A **másik** hatás abból áll, hogy viszonylag puha belső mag esetén a **kéregrétegek együttdolgozása nem biztosított.** A **lehajlások** vizsgálata rámutatott arra, hogy a nagy nyírási alakváltozások következtében a **modellek eredményei** olykor **számottevően eltérnek a pontos megoldástól.** Ebből adódóan a **klasszikus modell az esetek többségében nem alkalmazható,** de még az egyes **Timoshenko-modellek alkalmazhatósága** is sokszor **megkérdőjelezhető.** Megfigyelhettük, hogy **számtalan Timoshenko-modell fellelhető a szakirodalomban,** melyek a **nyírási korrekciós tényező**



meghatározásának módjában különböznek egymástól. Számításaim azt mutatják, hogy azok a **módszerek**, melyek a **korrekciós-tényező meghatározása során nem veszik figyelembe a keresztmetszet geometriai és merevségi viszonyait, a legtöbb esetben nem alkalmazhatók.** Azok a **módszerek**, melyek a fenti körülményeket **figyelembe veszik, sok esetben viszonylag pontos eredményre vezetnek, azonban** ezeknél is egy nagyon fontos **alkalmazhatósági korlát figyelhető meg. Számottevő kéregvastagság és rendkívül puha belső mag esetén** ezek a modellek jelentősen **túlbecsülik a nyírési alakváltozások hatását,** mely így a **lehajlások számításában több nagyságrendnyi hibához** vezethet. A szakirodalomban fellelhető **modellek** minden esetben **teljes mértékben együttműködő keresztmetszettel számolnak,** azonban a **feszültségek vizsgálata** rámutatott arra, hogy ez **komoly hibákhoz** vezethet. Viszonylag **puha mag** esetén a kéregrétegek nem tekinthetők együttműködőnek, így ezek a **modellek az inerciát túl-, a feszültségeket pedig jelentősen alulbecsülhetik.**

Az **anizotrop anyagú gerendák** vizsgálata előtt példákkal illusztrálva áttekintettük az **anizotropia főbb eseteit.** Az anyagi viselkedés főbb fajtáinak megismerése után megvizsgáltuk, hogy az anizotrop anyagú gerendákra az egyes esetekben milyen viselkedés jellemző. Az alapján, hogy az egyes gerendák hajlítással egyidejű nyírás hatására a **lehajlások túl elcsavarodó viselkedést is** produkálhatnak, a gerendákat **kapcsoltnak** vagy pedig **nem kapcsoltnak nevezük.** Ezekre a főbb esetekre bemutattam a szakirodalomban fellelhető megoldások menetét. Megfigyelhettük, hogy még a **nem kapcsolt gerendák** esetén is, a szóban forgó mechanika probléma megoldása egy igen összetett matematikai probléma megoldását igényli, ahol egy **másodrendű parciális inhomogén differenciálegyenlet** kell megoldanunk a **Neumann-típusú peremfeltételeket** kielégítése mellett. **Kapcsolt gerendák** esetén a feladat még inkább összetetté válik, ugyanis ilyenkor a problémát leíró egyenletek is kapcsoltnak, így ebben az esetben a feladat megoldása egy *parciális differenciálegyenlet-rendszer*t kell megoldását igényli. Általános esetben az ilyen feladatok megoldására valamilyen **numerikus módszerrel** van lehetőségünk. Munkámban **kidolgoztam** egy, a **véges differenciák módszerén alapuló megoldási technikát,** mellyel a keresett ún. *hajlítási függvény* meghatározható. A szakirodalomban néhány egyszerűbb esetre fellelhető **analitikus megoldással kapott eredmények** igen jó **egyezést** mutattak a **végeleemes szimulációk eredményeivel.** Az eltérés mértéke rendszerint néhány százaléknál kisebb volt, ily módon az **anizotrop rugalmasságtanon** alapuló megoldások **alkalmazhatónak** bizonyulnak.

Véleményem szerint jelen dolgozat - elsősorban - az *MSc* képzésen szereplő szilárdságtannal foglalkozó tantárgyak **oktatásában "kiegészítő anyagként" felhasználható.** Az érdeklődő hallgatók itt részletesen olvashatnak az egyes **modellek elméleti háttéréről,** megismerve a bennük szereplő **feltételrendszert,** mindamelllett, hogy ezek alkalmazására is **példát** látnak. Továbbá dolgozatom olyan témaköröket is érint (pl. szendvics keresztmetszetű, vagy anizotrop anyagú gerendák), melyek a dolgozat írásának időpontjában nem képezik az oktatás szerves részét. Ezen felül úgy gondolom, hogy munkám a modellek kvantitatív összehasonlításából adódóan olyan **eredményeket** is tartalmaz, melynek **tanulságait** a mérnökök **gyakorlati munkájuk** során is **felhasználhatják.**

Irodalomjegyzék

1. S.P. Timoshenko: History of Strength of Materials. *McGraw and Hill*. (1953).
2. Bojtár Imre: A szilárdságtan nagy tudósai - Bernoulli, Navier és a klasszikus gerendaelmélet, *BME*, (2007).
3. S.P. Timoshenko: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine, Ser. 6*, 41:742-746 . (1921).
4. S.P. Timoshenko: On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine, Ser. 6*, 43:125-131. (1922).
5. J.A.C. Bresse: Cours de Mecanique Analytique. *Paris: Mallet-Bachelier*, (1859).
6. P.R. Heyliger & J.N. Reddy: A higher-order beam finite element for bending and vibration problems. *J. Sound and Vibration*, 126(2), 309-326, (1988).
7. C.M. Wang, J.N. Reddy & K.H. Lee: Shear Deformable Beams and Plates. Relationships with Classical Solutions. *Elsevier Science*, (2000).
8. G. Shi & G.Z. Voyiadjis: A Sixth-Order Theory of Shear Deformable Beams with Variational Consistent Boundary Conditions. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 78 (2011).
9. Y.M. Ghugal & R. Sharma: A refined shear deformation theory for flexure of thick beams. *Latin American Journal of Solids and Structures* 8: 183-195. (2011).
10. E. Carrera, G. Giunta & M. Petrolo: Beam Structures. Classical and Advanced Theories. *John Wiley and Sons*, (2011).
11. V. Birman & C.W. Bert: On the Choice of Shear Correction Factor in Sandwich Structures. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, Vol. 4. (2002).
12. R. Rikards: Analysis of Laminated Structures. Course of Lectures. *Riga Technical University*, (1999)
13. S.G. Lekhnitskii: Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. *USSR: Mir Publishers*, (1981).
14. O. Rand & V. Rovenski: Analytical Methods in Anisotropic Elasticity. *Birkhauser Boston*, (2005).
15. A.H. Nayfeh & P.F. Pai: Linear and Nonlinear Structural Mechanics. *John Wiley and Sons*, (2004).
16. G.R. Cowper: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 33: 335-340. (1966).
17. A.E.H. Love: A treatise on the mathematical theory of elasticity. *Cambridge University Press*, (1927).
18. N. G. Stephen: Timoshenko's Shear Coefficient from a Beam Subjected to Gravity Loading. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47: 121-127. (1980).
19. G. Tolf: Saint-Venant bending of an orthotropic beam, *Composite Structures*, Vol. 4, 1-14 (1985).
20. N. G. Stephen: Timoshenko's Shear Coefficient from a Beam Subjected to Gravity Loading. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47: 121-127. (1980).
21. T. Kaneko: On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 8. (1975).



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

22. I.H.Shames & C.L. Dym: Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics, *McGraw-Hill, New York. (1985)*
23. L.P. Kollár & G.S. Springer: Mechanics of Composite Structures. *Cambridge University Press, (2003).*