

GPS mérések ionoszférikus hatásának meghatározása empirikus ortogonális függvényekkel

Szerző: Csönde Gergely

Konzulens: Dr. Rózsa Szabolcs

Budapest, 2014. október 22.



Tartalomjegyzék

1. Bevezető	2
2. Az ionoszférikus tomográfia elve.....	4
3. Folytonos modell térbeli gömbfüggvények alkalmazásával	8
4. Empirikus ortogonális függvények.....	12
5. Empirikus ortogonális függvények az ionoszférikus tomográfiában	16
6. Számítási modell.....	21
7. Számítógépes megvalósítás.....	23
8. Eredmények.....	25
9. Összegzés.....	35
10. Irodalomjegyzék.....	36



1. Bevezető

A globális helymeghatározásra manapság már rengeteg különböző módszer van, sok különböző eszközzel. Az egyes eszköztípusokkal elérhető pontosságok nagyban eltérnek egymástól. Ennek az okai az eltérő mérési technikák (kódmérés, fázismérés), a méréshez szükséges időtartam (valós idő, utófeldolgozás), a helymeghatározáshoz használt modellek és számítások, illetve a mai napra már egészen jól kiépített háttér infrastruktúra használata (OGPSH). Minden mérési módszerre igaz az, hogy amíg a GNSS jelek a műholdról elérnek a vevőig, számos zavaró tényező van, amelyek hibát okoznak a mérésekben, és így a meghatározott koordinátákban is. Ezeket a hibákat speciális mérési módszerekkel vagy hibamodellek figyelembevételével lehet csökkenteni, illetve kiküszöbölni. Az egyik legjelentősebb ilyen hibaforrás az ionoszférikus késleltetés.

Az ionoszférában található töltött részecskék megváltoztatják az elektromágneses hullámok terjedési sebességét, és mivel valós időben még csak közelítőleg sem ismerjük a részecskék térbeli eloszlását, így a sebességmódosító hatást sem. Annyit tudunk, hogy ez a hatás függ a műhold jel frekvenciájától, ezáltal kétfrekvenciás vevők használata esetén ez kiküszöbölhető. Ugyanakkor ezek a vevők elég drágák, és a hétköznapi felhasználók számára nem elérhetőek. Egy átlagos GPS felhasználónak valószínűleg csak egy egyszerű kódmérésen alapuló abszolút helymeghatározást végző egyfrekvenciás készüléke van. Ezeknél azonban jelenlegi tudásunk szerint nincsen mód az ionoszférikus hatás teljes kiküszöbölésére, így ezeket a méréseket terheli ez a hiba, ami pszeudotávolságban akár 10 méteres nagyságrendű is lehet. A hiba korrigálására különféle ionoszféra modellekkel próbálják figyelembe venni a hatást. Ezekről általánosan el lehet mondani, hogy használatukkal legfeljebb méteres pontosság érhető el valós idejű alkalmazás esetén, ami navigációs célon kívül másra nem nagyon jó.

Vannak azonban kísérletezések részletesebb ionoszféra modellek valósidejű előállítására tomografikus úton. A módszer lényege, hogy permanens állomások kétfrekvenciás méréseinek a segítségével adott műhold-vevő vektorok mentén meghatározzák a teljes elektrontartalmat, és kellően sok ilyen mérés ismeretében az elektronsűrűség nagy felbontással számítható.

Az egyik ilyen megközelítés az, hogy az ionoszférát állandó elektronsűrűségű cellákra osztják fel, és a mérésekre felírható egyenletekből ezeket az értékeket próbálják



meghatározni. Ilyen módszerre adnak példát a [4], [11] források. Egy korábbi dolgozatban mi is foglalkoztunk ezzel a megoldással, de ott a végső konklúzió az volt, hogy kicsi felbontású modell esetén túlságosan nagyok az ellentmondások a modellben, tehát egy cellán belül már nem tekinthető állandónak az elektronsűrűség. A nagyobb felbontású modellel meg már önmagában megnő a számítási igény, ráadásul ahhoz, hogy ne legyen a feladat alulhatározott, sokkal több permanens állomásra lenne szükség (célszerűen annyira, hogy minden cella alá jusson egy), ami csak még tovább növelné a futási időt.

Egy másik megközelítés, hogy térbeli gömbfüggvényként modellezzük az ionoszférát, ezáltal egy folytonos, minden pontban meghatározható elektronsűrűséget kapunk. Ezzel foglalkoztak a [12], [13] forrásokban, és jelen dolgozatunk tárgya is ez. A következőkben bemutatásra kerülő módszerrel a célunk az, hogy egy térben folytonos ionoszféra modellt alkossunk, ami kód mérésen alapuló abszolút helymeghatározást végző egyfrekvenciás készülékek használatánál valós időben tudja javítani a pontosságot.



2. Az ionoszférikus tomográfia elve

Az ionoszféra állapotát leggyakrabban a teljes elektron tartalommal (TEC) szokták jellemezni. Ez azt fejezi ki, hogy egy adott vonal mentén egy egység keresztmetszetű sávban összesen mennyi szabad elektron található. Mivel ezek az értékek igen nagyok lehetnek a légkör teljes vastagságában, bevezették a TECU (Total Electron Content Unit) mértékegységet melynek a nagysága:

$$1 \text{ TECU} = 10^{16} \text{ elektron} / \text{m}^2. \quad (2.1)$$

A TEC értéket tetszőleges irányban meg lehet határozni, de leggyakrabban a vertikális irányban szokás, mivel ezt jól lehet szemléltetni térképeken is (2.1 ábra). Vertikális irányban a szokványos értékek 1-100 TECU között változnak. Az ionoszféra okozta késleltetés a következő formában írható fel:

$$\Delta_f^{iono} = -\frac{40,3}{f^2} \text{TEC}, \quad (2.2)$$

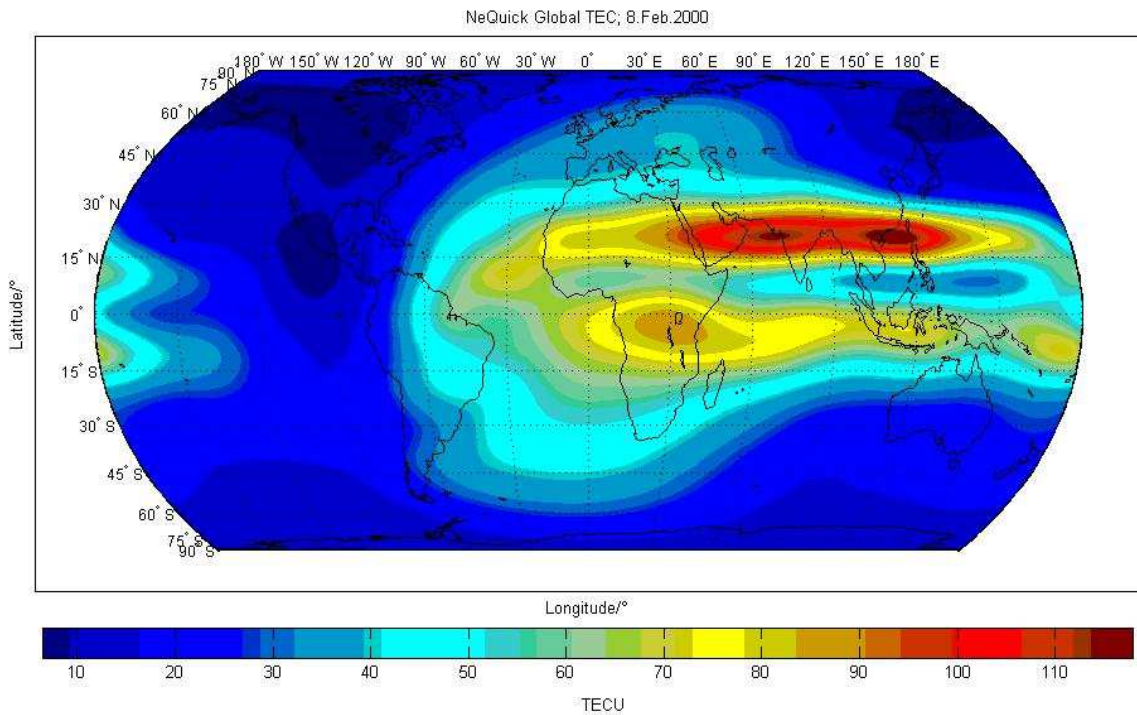
$$\Delta_{cs}^{iono} = \frac{40,3}{f^2} \text{TEC}. \quad (2.3)$$

A felső képlet fázismérés, míg az alsó kód mérés esetén érvényes. Mivel mi a kód méréssel foglalkozunk ezért a második képletet használjuk. Az f a műhold jel frekvenciáját jelenti, a 40,3 pedig konstans, mely a levezetésből jön ki. A Δ_f^{iono} a fázismérés esetén érvényes eltérés, a Δ_{cs}^{iono} pedig a kód mérés esetén érvényes eltérés. A képletek teljes levezetést itt most mellőzném, a [3], [4], [10] forrásokban utána lehet nézni a részleteknek, Mint azt a bevezetőben írtam, egy általános ionoszféra modell meghatározására nincsenek még megbízható valósidejű megoldások, viszont kétfrekvenciás vevőknél a műhold-vevő vonal mentén meghatározható a ferde irányú TEC érték, a két különböző frekvencián mért pszeudotávolságból. Ennek az oka az, hogy az ionoszféra az egyetlen hibaforrás, aminek eltérő hatása van különböző frekvenciájú elektromágneses hullámokra. A meghatározáshoz a következő – a fentiekből könnyedén levezethető - képletek használhatóak:

$$TEC = \frac{(R_{II} - R_I) f_I^2 f_{II}^2}{40,3(f_I^2 - f_{II}^2)}. \quad (2.4)$$

$$TEC = \frac{(R_{II} - R_I - b_{st} - b_{rc}) f_I^2 f_{II}^2}{40,3(f_I^2 - f_{II}^2)}. \quad (2.5)$$

Az R az a mért pszeudotávolság, az I illetve II indexek pedig az egyes frekvenciákat jelölik. A második képletben található még egy b_{st} és egy b_{rc} tag, melyek a műhold illetve a vevő hardver késését jelképezik (differential code bias vagy DCB). Ennek a jelentése annyi, hogy a műhold és a vevő nem ugyanabban a pillanatban sugározza, illetve észleli a két különböző frekvenciájú jelet, és emiatt további eltérés lesz a két pszeudotávolság között, amit ezekkel a tényezőkkel tudunk figyelembe venni.



2.1 ábra. TEC térkép

Amikor tomografikus módon modellezünk, az a cél, hogy olyan modellt állítsunk fel, aminek a segítségével tetszőleges vonal mentén meghatározható az elektromágneses jelekben okozott késleltetés, és így a TEC érték is. Mivel a modellezendő közeg állapota időben



változik (hiszen ha nem így lenne, nem lenne probléma a valósídejűség), ezért a modellűnk több időben változó $x_1, x_2, \dots, x_n$ paramétertől függ. Ahhoz hogy egy vonal mentén meg lehessen határozni a késleltetést, ismerni kell magát a vonalat is, amit egészen jól meg lehet adni a két végpontjával, az ionoszféra esetében a vevő r_{rec} és a műhold r_{sat} helyvektorával. Ezek alapján általánosan elmondható bármelyik modell esetén, hogy a teljes elektron tartalom a következő összefűggéssel írható fel:

$$TEC = f(x_1, x_2, \dots, x_n, r_{rec}, r_{sat}), \quad (2.6)$$

ahol az egyenlet jobb oldalán álló f függvény valamilyen a felállított modellből eredő kifejezés.

Mivel a paraméterek időfüggűek így azok minden időpillanatban ismeretlenek. Ugyanakkor a modelltől megkövetelt pontosság és a paraméterek változási sebességének függvényében egy bizonyos időintervallumban érvényesnek tekinthetűek, így elegendű őket ilyen időközönként meghatározni. A praktikusság megköveteli, hogy az érvényesség legalább annyi legyen, mint a meghatározási idő, hiszen csak ebben az esetben képzelhető el az, hogy minden időpillanatban lesz rendelkezésre álló érvényes modell.

A tomografikus úton való meghatározáshoz arra van szükség, hogy az f függvény viszonylag egyszerű legyen (pl. lineáris), és az egyenletet át lehessen rendezni könnyedén x_1 -re, x_2 -re, ... x_n -re. Amennyiben ez fennáll, valamint rendelkezésre állnak ismert koordinátájű műholdak és vevűk közötti TEC mérések (egészen pontosan pszeudotávolság mérésekből levezetett TEC értékek), felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} TEC_1 &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, r_{rec1}, r_{sat1}) \\ TEC_2 &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, r_{rec2}, r_{sat2}) \\ &\vdots \\ TEC_m &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, r_{recm}, r_{satm}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

melyben az ismeretlenek az $x_1, x_2, \dots, x_n$ paraméterek. Lineáris esetben a megoldhatóság egyik feltétele, hogy legalább annyi ilyen egyenletűnk legyen, mint ahány paraméter. Az egyenletrendszer valószínűleg még ekkor sem lesz megoldható, egyrészt mivel a modell nem tökéletes, másrészt a mérések sem hibátlanok, így a megoldás során jó eséllyel



ellentmondásokban ütköznénk. Ezeknek az ellentmondásoknak a feloldása úgy történhet, hogy figyelembe vesszük, hogy a méréseket egy ismeretlen nagyságú hiba terheli. Ha ezt a hibát hozzávesszük a mérésekhez, akkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
 TEC_1 + v_1 &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, r_{rec1}, r_{sat1}) \\
 TEC_2 + v_2 &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, r_{rec2}, r_{sat2}) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 TEC_m + v_m &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, r_{recm}, r_{satm})
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ebben már nem lesznek ellentmondások, viszont az ismeretlenek száma megnőtt m -el, emiatt az egyenletrendszer alulhatározott lesz. Ezt a problémát különböző kiegyenlítési módszerekkel lehet áthidalni oly módon, hogy extra feltételeket vezetünk be, általában valamilyen optimalitási kritériumot írunk elő (konyhanyelven fogalmazva: a végtelen sok megoldás közül azt keressük, amelyik a „legvalamilyenebb”).

A paraméterek meghatározását követően azok érvényességi idején belül a modell használható arra, amire készült, azaz hogy tetszőleges műhold vevő vektor mentén meghatározzuk a TEC értéket, és ebből a műhold jel késleltetését. Megjegyzendő még, hogy más területeken is (pl. szeizmológia vagy orvostudomány) hasonló elven történik a tomografikus modellalkotás.



3. Folytonos modell térbeli gömbfüggvények alkalmazásával

Mint azt a bevezetőben írtam, korábban létrehoztunk egy diszkrét modell, melyben cellákra osztjuk fel az ionoszférát. Ennek a modellnek sok hátulütője volt, és kevés sikerrel kecsegtetett. Emiatt döntöttünk úgy, hogy megpróbálunk létrehozni egy folytonos modellt, ami nagyobb közelítéseket tartalmaz, de kevesebb mérés is elegendő hozzá, illetve jobban tűri az ellentmondásokat. Egy ilyen modellt mutat be a [12] forrás, és mi is ezen a vonalon indultunk el.

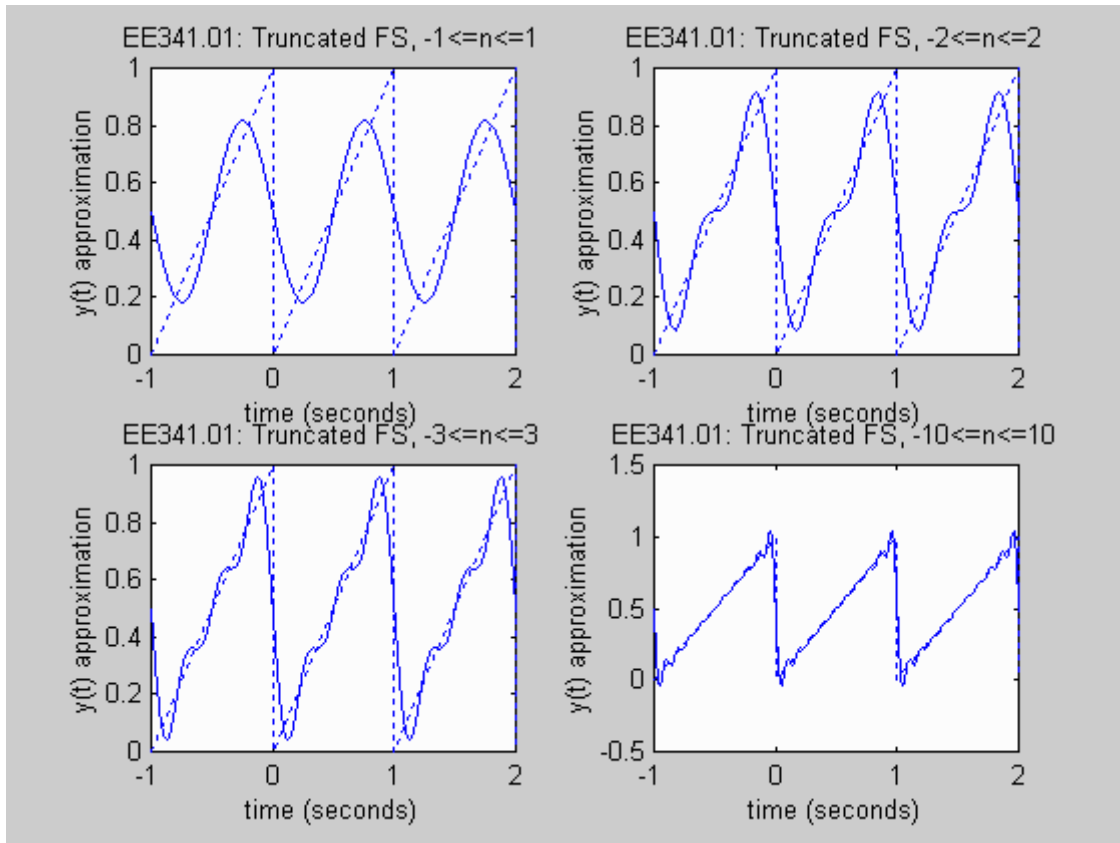
Utófeldolgozások módszerrel napjainkig már számtalan vertikális TEC modellt készítettek, és ezeket síkbeli gömbfüggvényekként modellezték. Az ilyen függvények általános alakja az alábbi:

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n a_{nm} \cdot \cos(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) + b_{nm} \cdot \sin(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)), \quad (3.1)$$

ahol a_{nm} és b_{nm} a gömbfüggvény együtthatók, λ és φ a földrajzi hosszúság és szélesség, P_{nm} pedig az n -ed fokú, m -ed rendű Legendre-polinom.

A síkbeli gömbfüggvényeket úgy kell elképzelni, mint egy két dimenziós Fourier-sor. A Fourier-soroknak megvan az a tulajdonságuk, hogy tetszőleges Riemann-integrálható periodikus függvény közelíthető velük (3.1 ábra). Ennek megfelelően a felületen periodikus függvények közelíthetők síkbeli gömbfüggvényekkel, márpedig a Föld egy periodikus felület. Kézenfekvő tehát, hogy egy térbeli ionoszféra modell alkotásához, mely nem csak a felületi, hanem a vertikális elektroneloszlást is megadja, lehetne használni a térbeli gömbfüggvényeket.

Térbeli gömbfüggvényeket használnak a Föld potenciáljának a modellezéséhez is. Én csak röviden kiemelném a párhuzamot. A potenciál esetében a függvény adott földrajzi szélességhez, hosszúsághoz és geocentrikus távolsághoz rendel (külső térben) potenciál értékeket. A mi esetünkben pedig arra lenne szükség, hogy adott földrajzi szélességhez, hosszúsághoz és alapfelület feletti magassághoz rendeljünk elektronsűrűség értékeket.



3.1 ábra. Fourier-soros közelítés

A TEC értékeket horizontális irányban egészen jól lehet közelíteni síkbeli gömbfüggvényekkel. Ebből úgy tudnánk térbeli függvényt csinálni, hogy a felszínre összegzett TEC értékeket vertikális irányban szétszórjuk valamilyen eloszlás szerint. Erre a legegyszerűbb mód, hogy beszorozzuk a függvényt egy vertikális profillal, aminek a teljes integrálja 1, így az alábbi alakot ölténé a függvény:

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n [a_{nm} \cdot \cos(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z(h) + b_{nm} \cdot \sin(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z(h)], \quad (3.2)$$

ahol Z a vertikális profil, h pedig az alapfelület (WGS84 ellipszoid) feletti magasság.

A profil integráljának nem feltétlenül kell 1-nek lennie, hiszen a gömbfüggvény együtthatókkal ez kompenzálható, így tulajdonképpen csupán a profil alakja az, ami számít. Innentől kezdve az a kérdés, hogy milyen legyen ez a vertikális profil. A legegyszerűbb eset az, ha azt mondjuk, hogy van egy általános profil alak, és minden pontban ez érvényes. Ezzel

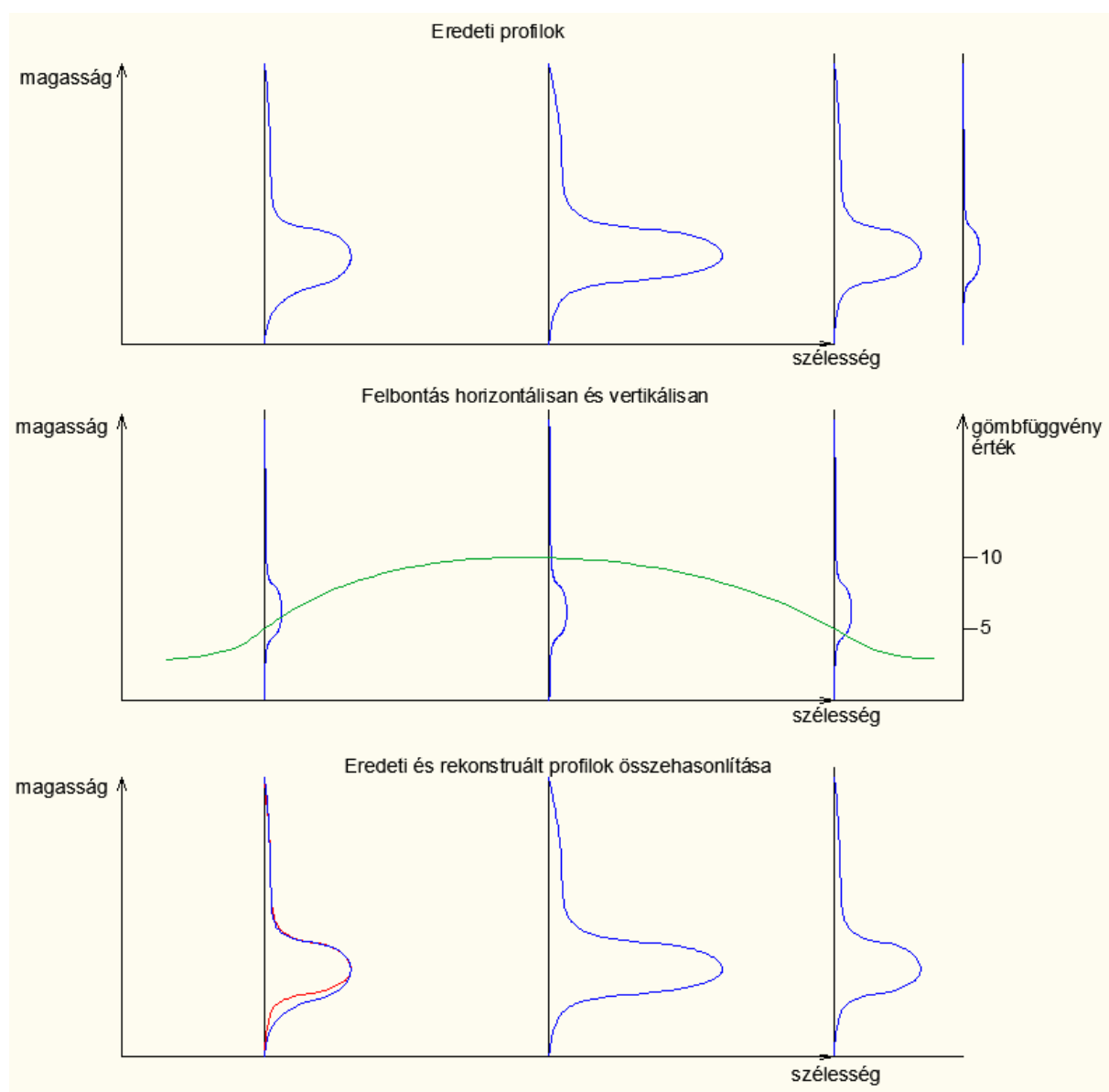


az a probléma, hogy a napfolt tevékenységek, és a lokális anomáliák miatt egyes helyeken túl nagy lenne az eltérés a tényleges értékektől, ezt szemlélteti 3.2 ábra. A felső grafikonon látható a tényleges vertikális elektronsűrűség profil 3 különböző helyen egy hosszúság mentén. Első ránézésre nagyon hasonlóak, de valójában van egy kis eltérés az alakjukban (a valóságban nem ilyen eltéréssel vannak, de most csak az érzékeltetés miatt emeltem ki ennyire). Mellettük jobbra látható egy közelítő profil, aminek az alakja nagyjából stimmel az eredeti profilokéval, csupán az értékek kisebbek rajta. Középen látható egy lehetséges gömbfüggvény soros felbontás vertikális (kék) és horizontális (zöld) összetevőkre. Az alsó ábrán pedig egyrészt ábrázolva van a 3 pontban a gömbfüggvényből adódó profil piros színnel, illetve erre ráhelyezve az eredeti profil kék színnel. Mivel a két jobb oldali profilra tökéletesen illeszkedik a modellből származó és az eredeti, csak a kék látszik. Ezzel szemben a bal oldalon szemmel látható eltérés van.

A megoldást az jelenthetné, hogy több gömbfüggvény sort veszünk fel több vertikális profillal. Az első vertikális profil lehetne egy általános profil, ami a vertikális elektron eloszlás fő alakját tükrözné, tehát valamilyen aszimmetrikus haranggörbe, ami 300-400 km körül éri el a maximumát, és ehhez tartozna a legnagyobb súlyú gömbfüggvény sor (itt a súly az impliciten benne lenne a gömbfüggvény együtthatóban). Az ebből előálló elektroneloszlásokat kivonva az eredeti elektron eloszlásokból kapnánk egy maradék profilt minden pontban. Ezekhez a maradék profilokhoz is lehetne illeszteni egy vertikális profilt, amihez szintén tartozna egy gömbfüggvény sor, aminek már kisebb a súlya, mint az előzőnek. Ezek után ismét lenne minden pontban egy maradék profil, és ezt lehetne folytatni addig ameddig szükséges. Ily módon a modellünket leíró egyenletek egy további szummával bővülnek:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left[a_{nm}^k \cdot \cos(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z_k(h) + b_{nm}^k \cdot \sin(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z_k(h) \right]. \quad (3.3)$$

Ezek után még az a kérdés, hogy hogyan tudnánk olyan vertikális profil sorozatot előállítani, ami a célunknak megfelel. Erre adnak egy megoldási lehetőséget az empirikus ortogonális függvények.



3.2 ábra. 1 darab általános vertikális profil használata



4. Empirikus ortogonális függvények

Az empirikus ortogonális függvények (EOF) a statisztikából erednek, és főkomponens analízis (principal component analysis, PCA) segítségével állíthatóak elő. Az egésznek az alapgondolata, hogy van mondjuk néhány entitásunk, amelyeknek sok tulajdonságát jellemezzük valamilyen mérőszámmal, de mégis szeretnénk kevés, esetleg 1 mennyiség alapján osztályozni őket, de úgy hogy az eredeti adatok információtartalma ne csökkenjen túlságosan. Formálisabban megfogalmazva van mondjuk k darab valószínűségi változónk ($X_1, X_2, \dots, X_k$), ezek a tulajdonságok, és ezekből vannak n elemű sorozataink (minden entitáshoz egy érték minden tulajdonságból). A cél pedig az lenne, hogy ezt az n darab entitást a k darab mérőszám helyett $m < k$ darab mérőszámmal jellemezzük, úgy hogy az m darab mérőszám megőrzi a variancia nagy részét. Ezt pedig úgy érik el, hogy egy olyan koordináta rendszerbe transzformálják az adatokat, ahol a koordinátatengelyek a maximális varianciák irányába mutatnak. Az ezekbe az irányokba mutató egység vektorokat szokás empirikus ortogonális függvényeknek nevezni. Ebben a koordinátarendszerben általában elegendő az első néhány legnagyobb varianciájú irányban megadni a koordinátákat, mert azok a variancia nagy részét lefedik. Persze ez nem minden esetben van így, például ha a valószínűségi változók korrelálatlanok, és az eloszlásuk teljesen egyenletes, akkor ez az elemzési módszer nem használható.

Egy egyszerű példán keresztül szemléltetném az elvet. Legyen két valószínűségi változó sorozatunk. Az egyik az egy osztály tanulóinak az eredménye egy matematika dolgozathoz, a másik az ugyanezen osztály diákjainak eredményei egy magyar dolgozathoz (4.1 ábra). A várakozások szerint az lesz az eredmény, hogy akinek az egyik tárgyból jó érdemjegye van, a másiktól rosszabb, hiszen általában egy személy vagy reál, vagy humán beállítottságú. Természetesen ettől még lehetnek olyan diákok, akik nagyon jó tanulók, és minden tárgyból jó eredményt érnek el, de lehetnek olyanok is, akik mindenből bukducsolnak, viszont nem ezek a tipikusak.



	Matematika %	Magyar %
1. diák	96	29
2. diák	88	33
3. diák	90	89
4. diák	34	78
5. diák	53	49
6. diák	70	95
7. diák	12	19
8. diák	23	87
9. diák	78	39
10. diák	47	93
11. diák	59	78
12. diák	60	14
13. diák	10	77
14. diák	99	27
15. diák	81	18
16. diák	30	70
17. diák	85	26
18. diák	67	71
19. diák	47	49
20. diák	44	46
21. diák	33	70
22. diák	82	24
23. diák	45	63
24. diák	66	39

4.1 ábra. Diákok dolgozat eredményei két tantárgyból

Ábrázoljuk egy koordináta rendszerben az eredményeket, ahol a tengelyek a tárgyakból elért eredményt jelentik, és egy pont az egy diák (4.2 ábra). Szabad szemmel is jól kivehető, hogy az eredmények valamelyest egy egyenesre illeszkednek. Ez az egyenes lesz az első

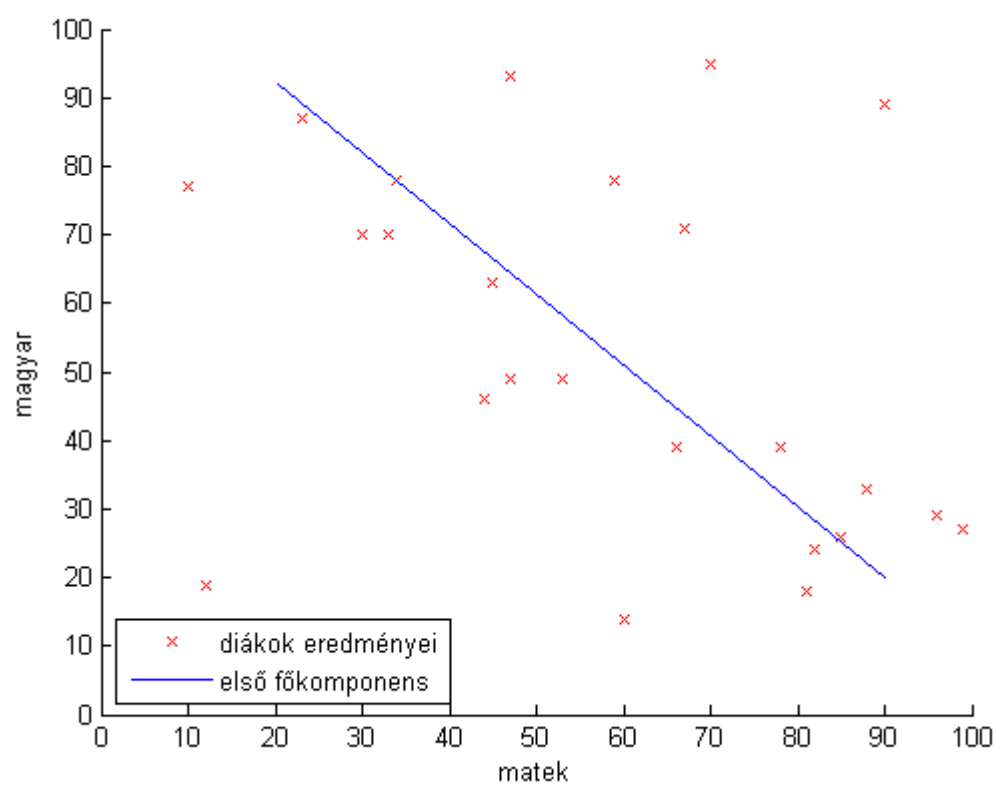


főkomponens, hiszen ennek a mentén a legnagyobb a variancia. A második főkomponens pedig az erre merőleges legnagyobb varianciájú irány (mivel a mostani eset kétdimenziós, így sok lehetőség nincsen). A főkomponensek értékei:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.6955 \\ 0.7185 \end{bmatrix},$$
$$v_2 = \begin{bmatrix} -0.7185 \\ -0.6955 \end{bmatrix}.$$

Ezek után, ha megnézzük az első főkomponens irányába eső koordinátákat (amit úgy kapunk meg, hogy vesszük a főkomponens és a diák jegyeiből alkotott vektor skaláris szorzatát), akkor egy olyan mérőszámot kapunk, amivel egészen jól lehet jellemezni a diák beállítottságát. Nagyobb értékek esetén humán, kisebb értékek esetén reál. A kérdés még, hogy ezen felül mennyi információ van még a többi főkomponensben, amit pedig százalékosan lehet kifejezni azzal, hogy az első főkomponens a teljes variancia mekkora részét adja. Általában olyan adatsoroknál, ahol tényleges mögöttes információtartalom van, az első néhány komponens adja a variancia nagyon nagy részét, tehát ezekből lehet érdemi következtetéseket levonni, és a többit figyelmen kívül lehet hagyni.

A főkomponensek nagyon egyszerűen lehet meghatározni. Fel kell írni az $X_1, X_2, \dots, X_k$ valószínűségi változók kovariancia mátrixát, majd meg kell határozni ennek a sajátértékeit, és sajátvektorait. A legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor lesz az első főkomponens, a második legnagyobbhoz tartozó a második, és így tovább. A teljes varianciát a sajátértékek összege adja meg, míg az egyes főkomponensek varianciához való hozzájárulását a sajátérték és a teljes variancia hányadosa adja. Ezek után nagy kérdés, hogy hogyan lehet ezt az empirikus ortogonális függvényeknél hasznosítani.



4.2 ábra. Diákok eredményei és az első főkomponens



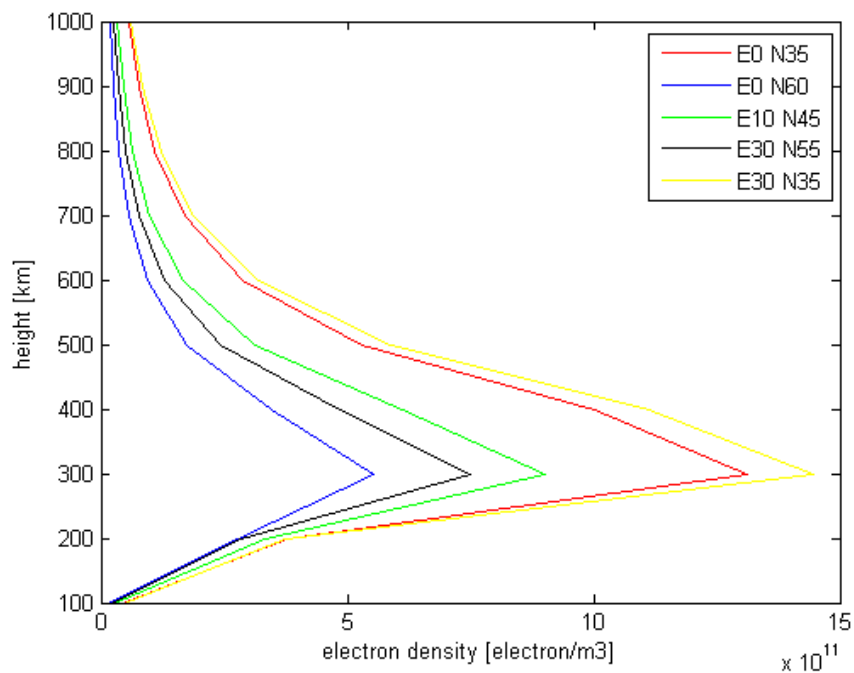
5. Empirikus ortogonális függvények az ionoszférikus tomográfiában

A munkánk egyik legnehezebb része az volt, hogy rájövünk, hogyan lehet az empirikus ortogonális függvényeket felhasználni a mi céljainkra, hiszen látszólag semmi kapcsolódási pont sincs. Több geofizikai modellalkotással foglalkozó cikkben is említették, hogy a modellezéshez EOF-ket használtak ([2], [6] források), de részletekbe menően sehol sem magyarázták el, hogy hogyan. A [12] forrásban említettek meg annyit róla, hogy ismert elektronsűrűség adatok alapján állították őket elő.

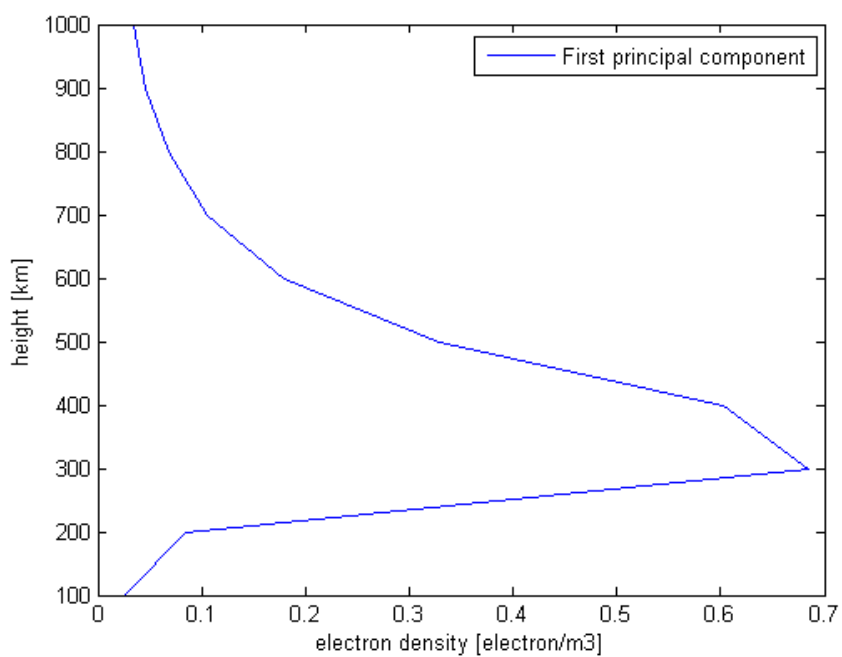
Végül egy óceáni áramlások modellezésével foglalkozó cikk ([5] forrás) hozta meg az áttörést. Ebben azt modellezték, hogy különböző mélységekben az év különböző időszakaiban mekkora a víz áramlási sebessége. Itt a „tulajdonságok” az egyes mélységekben mért sebességek, és az „entitások” a különböző időpontok. Ennek analógiájára az ionoszféra különböző magasságaiban levő elektronsűrűségek lennének a valószínűségi változó sorozatok, és a sorozatok egyes elemei egy földrajzi szélességhez, és hosszúsághoz tartoznak. Azonnal észrevehető, hogy az ismert elektronsűrűség adatok szükségessége miatt a valósidejűség elve már megbukik, de erről később szólnék részletesebben. Egyelőre tegyük fel, hogy ilyen adatok rendelkezésünkre állnak valós időben.

Az így előálló valószínűségi változó sorozatokból, úgy gondoljuk, hogy olyan főkomponensek állíthatóak elő, melyek nagyban jellemzik az ionoszféra vertikális profiljának alakját. Ehhez azonban egy feltételezéssel kell élnünk, mégpedig azzal, hogy a kiindulási ismert elektronsűrűségek olyan profilokat adnak, amelyekre igaz az, hogy nagyobb értékekhez nagyobb variancia tartozik. Ennek a feltételezésnek a helyessége bonyolultabb korrelációs vizsgálatokat igényelne, egyrészt hogy pontosan mikor is jelenthetjük ezt ki, másrészt hogy valóban igaz-e ez az ionoszféra vertikális profiljaira. Ettől mi most eltekintünk, és úgy vesszük, hogy igaz (de belegondolva, igazán nagy elektromágneses anomáliáknak kellene lennie, hogy ez ne így legyen, és a valószínűségi változók korrelálatlanok legyenek).

Ezen megfontolások alapján egy példán szemléltetném az alkalmazást. Az 5.1-es ábrán láthatóak a kiindulási vertikális elektronsűrűség profiljaink. Ezeknek először meghatározzuk a tapasztalati kovariancia mátrixát, majd ebből a főkomponenseket (a kovariancia mátrix sajátvektorát), és azok súlyát (a kovariancia mátrix sajátértékeit).



5.1 ábra. Kiindulási vertikális elektron profilok



5.2 ábra. Első főkomponens

Számszerűen nem közölném az adatokat, mivel a lényeg az ábrákon látszik, kivéve a sajátértékeket, ezekből az első néhány legnagyobb:



$$\lambda_1 = 1.3395 \cdot 10^{23}$$

$$\lambda_2 = 1.2041 \cdot 10^{20}$$

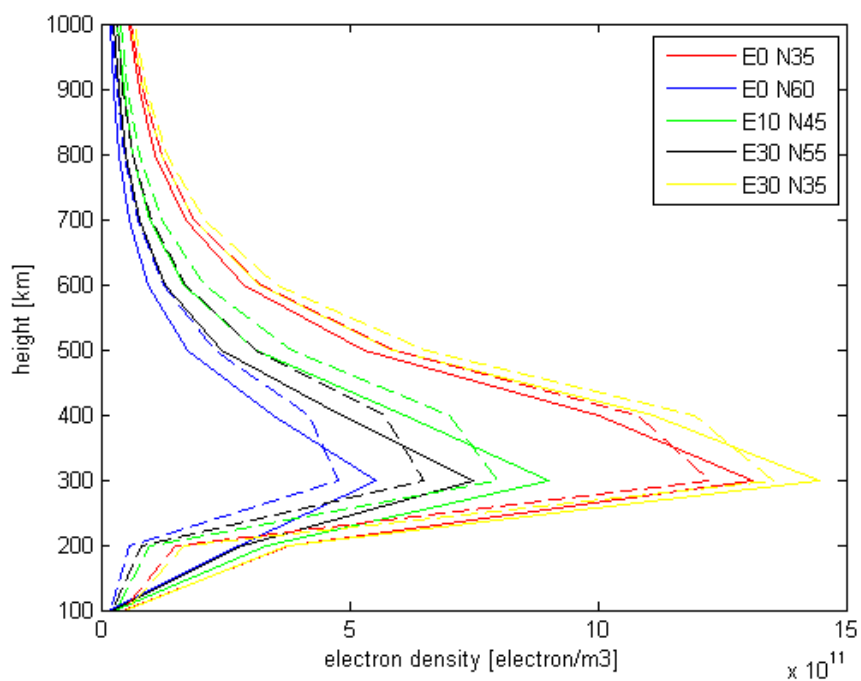
$$\lambda_3 = 6.8883 \cdot 10^{19}$$

$$\lambda_4 = 1.5895 \cdot 10^{17}$$

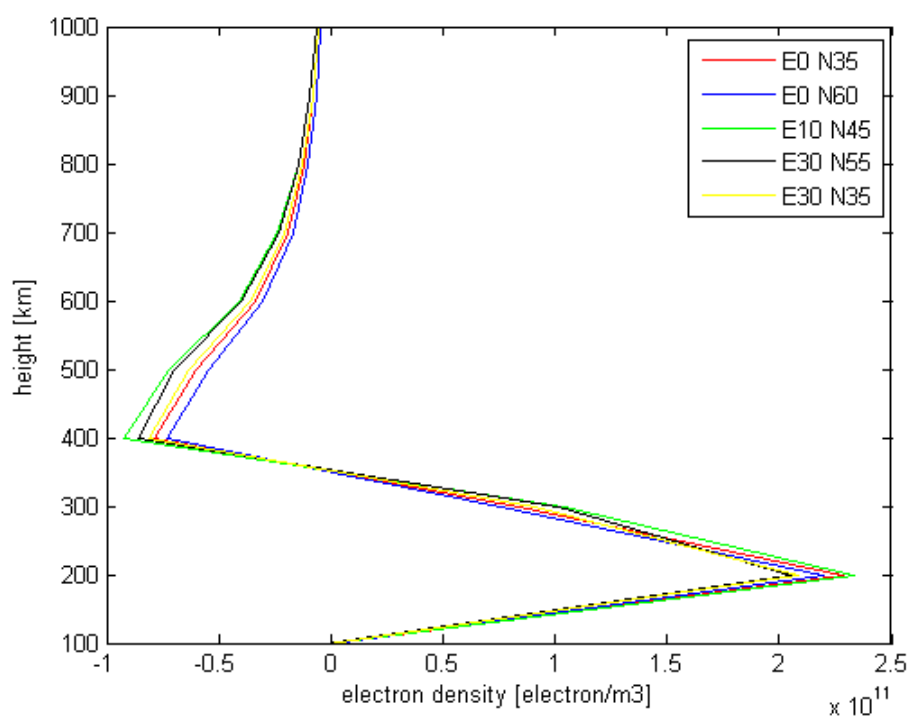
$$\lambda_5 = 1.0152 \cdot 10^7$$

Az első főkomponensen (5.2-es ábra) jól látszik, hogy a várakozásoknak megfelelően egy általános profilt ábrázol, tehát követi azt az elvet, hogy a nagyobb függvényértékekhez nagyobb variancia tartozik. A hozzátartozó sajátértékből pedig az látszik, hogy ennek a súlya nagyon nagy, tehát a profilok nagy része ezt az alakot követi, és lehetnek apró lokális anomáliák. Ha vesszük az első főkomponens skaláris szorzatát az eredeti vertikális profilokkal, akkor megkapjuk, hogy az eredeti profilnak mekkora a vetülete az első főkomponens irányában. Ha ezzel beszorozzuk az első főkomponenst, megkapjuk ezt vektorként is. Az 5.3-as ábrán ezeket szaggatott vonallal ábrázoltuk, itt látható igazán jól, hogy mennyire illeszkednek a kiindulási profilok az első főkomponensre.

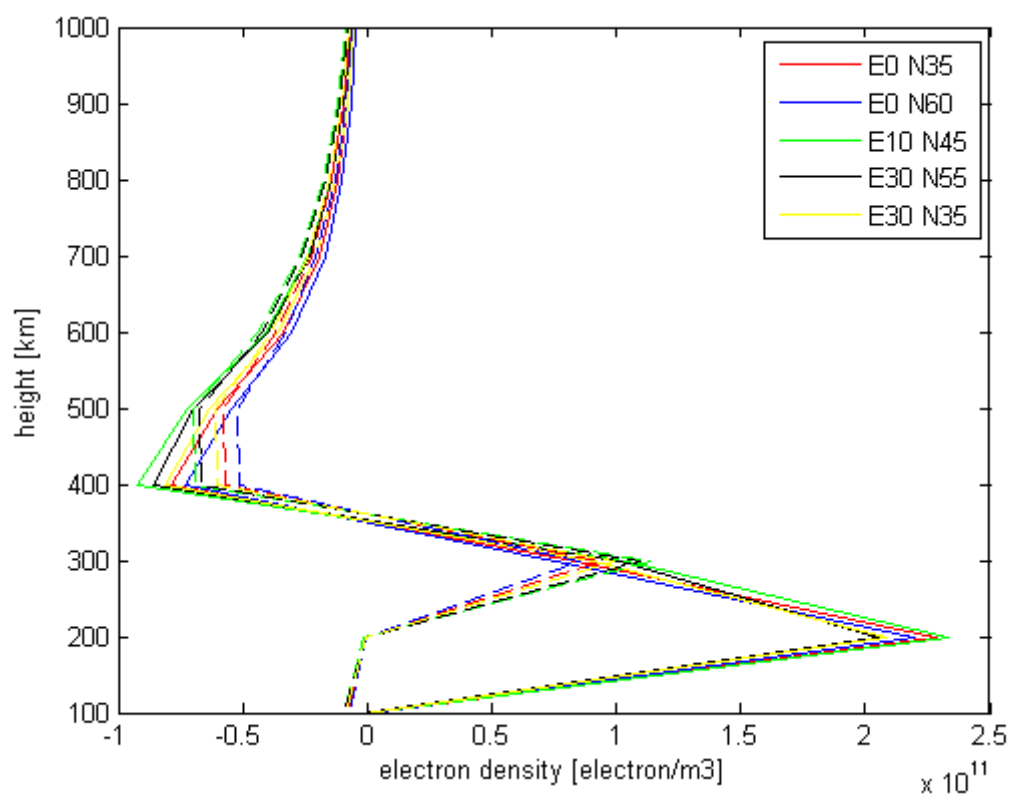
Ezután ha ezt levonjuk az eredeti vertikális profilból, akkor a maradék az az általános profiltól való eltérés lesz, tehát a maradék profil, azaz az anomáliák (5.4-es ábra). Mivel ennek nincsen első főkomponens irányú összetevője, biztosan ortogonális arra, tehát ha ebből meghatározzuk a maximális variancia irányát, az pontosan a második főkomponens lesz (ami ortogonális az elsőre), ami az elsődleges anomáliák alakját fogja tükrözni. Az 5.5-ös ábrán látható, hogy a második főkomponens profilja (szaggatott vonal) hogyan követi a maradék profilt. Alacsonyabb magasságoknál láthatóak elég nagy eltérések, viszont csalóka az ábra, itt az első főkomponenshez képest 1 nagyságrenddel kisebb értékek szerepelnek, és ha jól megnézzük, ott nagyobb eltérések voltak. Ezt az eltérést a későbbi főkomponensek fogják kiejteni. A modellt lehetne folytatni, ameddig szükségesnek látjuk, de a sajátértékekből látszik, hogy már az 5. főkomponenst is jó eséllyel felesleges felhasználni, mivel az nagyon kis súlyú lesz a többihez képest.



5.3 ábra. Kiindulási vertikális elektron profilok és az első főkomponensből adódó összetevőik



5.4 ábra. Az első főkomponens levonása után maradó elektron profilok



5.5 ábra. Az első főkomponens levonása után maradó elektron profilok és a második főkomponensből adódó összetevők



6. Számítási modell

Most már minden szükséges információ rendelkezésünkre áll a tényleges modell felállításához. A (2.5) és (3.3) összefüggéseket felhasználva, az alábbi egyenleteket írhatjuk fel:

$$\frac{(R_{II} - R_I - b_{st} - b_{rc}) f_I^2 f_{II}^2}{40,3(f_I^2 - f_{II}^2)} = \int_{rec}^{sat} \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left[a_{nm}^k \cdot \cos(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z_k(h) + b_{nm}^k \cdot \sin(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z_k(h) \right] \cdot ds, \quad (6.1)$$

ahol a bal oldal a TEC értékek meghatározására használható képlet, a jobb oldalán látható integrál pedig a gömbfüggvény alapú modellből meghatározható elektronsűrűségek integrálja az adott műhold-vevő vektor mentén. Minden egyes a mérésekben résztvevő vevő-műhold párra felírhatunk egy ilyen egyenletet. Az egyenletek ismeretlenjei az a_{nm}^k, b_{nm}^k gömbfüggvény együtthatók. Ezeknek a darabszáma a K és N értékektől függ, minél nagyobbra vesszük ezeket, annál pontosabb lesz a modell. Ennek két dolog szab határt, az egyik, hogy nem lehet több ismeretlenünk, mint ahány egyenletünk, a másik pedig, hogy az ismeretlenek számának a növelésével a számítási idő rohamosan nő.

Ha átrendezzük az egyenletet az alábbi formára:

$$\frac{(R_{II} - R_I - b_{st} - b_{rc}) f_I^2 f_{II}^2}{40,3(f_I^2 - f_{II}^2)} = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n a_{nm}^k \cdot \int_{rec}^{sat} \cos(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z_k(h) \cdot ds + \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n b_{nm}^k \cdot \int_{rec}^{sat} \sin(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z_k(h) \cdot ds, \quad (6.2)$$

akkor az egyenleteink egy közösleges lineáris egyenletrendszer alakját öltik:

$$Ax = b, \quad (6.3)$$



viszont a jobb oldali integrálok sajnos igazán bonyolult összefüggések, zárt alakban könnyedén egészen biztosan nem számíthatóak. Emiatt közelítőleg fogjuk meghatározni azokat numerikus integrálással.

A numerikus integrálásnál két tényező befolyásolja a pontosságot. Az egyik, hogy a műhold-vevő vektort milyen hosszúságú szakaszokra osztjuk, a másik, hogy a vertikális profilokat hány darab magasságban ismert értékkel adjuk meg. Mivel az integrálandó függvény igen bonyolult alakú, ami nagyban függ a műhold-vevő vektor magassági szögétől is, nem tudunk egy egzakt korlátot adni erre. Emiatt magát a numerikus integrálást is iteratívan kellene végezni folyamatosan növekvő felbontással addig, amíg az szumma értékének a változása megfelelően kicsi nem lesz. Ezzel a megvalósítás során nem foglalkoztunk, a műhold-vevő vektort mindig 1000 részre bontjuk, a vertikális profiloknak meg 100 km-ként adunk meg pontokat, és a köztes magasságokban lineáris közelítést használunk, abban bízva, hogy ezzel elérjük a kellő pontosságot.

Ha a numerikus integrálás megtörtént, akkor már felírhatóak az egyenleteink lineáris egyenletrendszer formájában. Mint korábban említettem, ez az egyenletrendszer jó eséllyel túlhatározott, de ha hozzávesszük ismeretlenként a mérési javításokat, akkor már alulhatározott lesz, és valamilyen kiegyenlítési módszerrel meg lehet oldani. A megoldást követően pedig az a_{nm}^k, b_{nm}^k paraméterek ismeretében a (3.3) összefüggés alapján tetszőleges pontban meghatározható az elektronsűrűség.



7. Számítógépes megvalósítás

A modell előállítását végző programot C++ nyelven írtuk meg, a rekonstrukcióhoz pedig Matlabot használtunk. Az előbbi az indokolja, hogy a korábbi munkák során komoly gondot okoztak a rosszul kondicionált mátrixok, mivel a 64 bites számábrázolás miatt az egyébként nem szinguláris mátrix mégiscsak szingulárisnak adódott. Ezt a problémát C++-ban viszonylag könnyedén lehet orvosolni. A Matlab használatát pedig az indokolja, hogy rekonstrukció közben már nem számít annyira a számábrázolási pontosság, viszont az eredményeket könnyedén meg lehet jeleníteni grafikusán, ami sokat segít az elemzésen, és az esetleges hibák feltárásában.

A modellünk felállításához először is szükség volt kétfrekvenciás vevők mérési adataira. Ezeket már korábban is használt ([4] forrás) RINEX fájlokból ([9] forrás) szereztük be, amiket TEQC programmal ([7] forrás) előszűrtünk, hogy ez is gyorsítsa a feldolgozást. A korábbi munkánk során elkészítettünk már egy RINEX parser könyvtárat C nyelven, és mivel C++ kódból nagyon könnyen lehet C könyvtárakba behívni, így ezt továbbra is tudtuk használni különösebb nehézség nélkül.

A másik fontos dolog, amire szükségünk volt, azok a $Z_k(h)$ függvények, azaz a vertikális profilok. Ehhez a NeQuick ionoszféramodellező programhoz fordultunk segítségért. A programmal előállítottunk Európa felett 30 pontban vertikális irányban elektronsűrűségeket a méréseknek megfelelő időpontra vonatkozóan. A pontok koordinátái nyugati hosszúság 10° -tól keleti hosszúság 30° -ig, illetve északi szélesség 35° -tól északi szélesség 60° -ig terjednek, hosszúsági irányban 5° -ként, szélességi irányban 10° -ként. Ezután egy általunk írt programmal kiolvastuk a NeQuick adatokból a nekünk szükséges értékeket 100 km -ként 2000 km -ig, ami összesen 20 magasság, valamit előállítottuk a főkomponensekre bontását az adatoknak. A felbontás után a sajátértékekből jól látszott, hogy az első 5 főkomponens használata elegendő lesz a 20-ból.

Ezek után két dologra volt még szükség, az alakmátrix előállítására, illetve az egyenletrendszer megoldására. Az alakmátrix előállításához az előző fejezetben leírtaknak megfelelően numerikus integrálást használtunk fel, az értékeket egy generikus mátrix osztályban tároltuk. Az egyenletrendszer megoldásánál kezdődtek az igazi izgalmak. Először legkisebb négyzetek módszerével kíséreltünk meg kiegyenlítést elvégezni. Itt ismét



belefutottunk a rosszul kondicionált alakmátrix problémájába, az alakmátrix kondíció száma 10^{16} nagyságrendű volt, tehát a 64 bites számábrázolás határán állt, de sajnos a rossz oldalon. Emiatt el kezdtünk keresgélni végtelen pontosságú (úgynevezett multiple precision) C++-os számtípusok után.

Abban reménykedtünk, hogy fogunk találni olyan osztályt, ami tud megfelelően együttműködni az általunk használt generikus mátrix osztállyal, és így minden különösebb kódolás nélkül át tudunk térni annak a használtára. Ez nem így lett, mivel minden lehetséges kombináció, ami kipróbáltunk rossz eredményt adott. Némelyik elvesztette a pontosságot, némelyik le sem fordult, némelyik meg futás közben elszállt. Emiatt döntöttünk úgy, hogy kiválasztunk egy végtelen pontosságú szám típust, és ahhoz írunk egy saját mátrix osztályt csak a legszükségesebb műveletekkel. A választásunk a GMP ([8] forrás) könyvtárra esett, mivel a modern processzorok már hardveresen támogatják a nagy pontosságú számábrázolást, és ha olyan könyvtárat használunk, ami ezt a támogatást kezelni is tudja, akkor nem veszítünk sokat a teljesítményből, és a GMP tudja kezelni. Az elkészített mátrix osztály az alapvető műveleteken kívül tud még invertálni, mivel ez szükséges a legkisebb négyzetek módszeréhez. Az invertálást gauss eliminációval implementáltam, ami a lehető legkevésbé hatékony viszont a legegyszerűbb módszer. Ezek után már el tudtuk végezni a kiegyenlítést.

A legkisebb négyzetek módszerén kívül implementáltam még egy Kaczmarz algoritmust is ([15] forrás), illetve annak több variációját (véletlenszerű Kaczmarz, KE, KERP). Ez az algoritmus iteratív módon határozza meg az egyenletrendszer megoldását, és minden iterációban egyre közelebb kerül a legkisebb négyzetek módszere szerinti megoldáshoz.

Az utolsó megoldó algoritmus, amit elkészítettünk, az a csillapított legkisebb négyzetek módszere ([14] forrás) volt. Ennek az a lényege, hogy a mérési hibák négyzetösszegének minimalizálása helyett a mérési hibák és a paraméterértékek együttes négyzetösszegét minimalizálja. A paraméterértékeket egy csillapítási tényezővel súlyozza, amivel azt lehet befolyásolni, hogy melyik oldalon (mérések, vagy paraméterek) engedünk meg nagyobb változást.



8. Eredmények

A vizsgálatainkhoz 2013. április 13-a 12:00 és 13:00 közötti méréseket használtunk fel. A vizsgálati terület Európa felett van a pontos kiindulási koordinátákat az előző fejezetben már leírtam. A gömbfüggvény sor együtthatók darabszámát illetően $K=5$, $N=6,8,10,12$ értékekkel dolgoztunk.

A legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítés sajnos nem hozott használható eredményt. Ennek az oka jó eséllyel az, hogy a mérési hibák négyzetösszegére vonatkozó feltétel közel sem esik egybe a megfelelő modell paraméterekkel. A kiegyenlítés ugyan helyesen lefut, és az ellenőrzés is jó, tehát a meghatározott paraméterekkel a kiindulási műhold-vevő vektorok mentén valóban megkapjuk a TEC értékeket, de sajnos más irányokban az eredmény teljesen használhatatlan. Erről írnak az [1] forrásban is, hogy tomografikus rekonstrukciónál a legkisebb négyzetek módszerével történő kiegyenlítéskor, az egyes pontok értékei nagyon távol is lehetnek a ténylegesektől. Emiatt fordultunk más kiegyenlítési módszerekhez.

A Kaczmarz algoritmus tűnt ígéretesnek első körben, de sajnos ez sem vezetett célra, a [15] forrásban tomografikus képrekonstrukcióra használták. Az ott közölt eredményekből jól látszik, hogy a kiugró értékeket egészen jól vissza tudja állítani, viszont az átlagosnak mondhatóakat összemossa.

Ezek után jutottunk oda, hogy megpróbálkozunk a csillapított legkisebb négyzetek módszerével, mert arra gondoltunk, hogy ha nem a hibák négyzetösszegére optimalizálunk, hanem nagyobb javításokat engedünk meg, akkor talán a valósághoz közeli eredményt fogunk kapni. A módszerrel egy nagy problémánk volt, hogy jónak mondható előzetes paraméterértékekre van szükség hozzá. Ezeknek az előállításához ismét az empirikus ortogonális függvényekhez fordultunk. Az 5-ös fejezetben bemutatott példából látható volt, hogy azt az elvet követjük, hogy egy adott magasságban levő elektronsűrűség értékeket főkomponensek szerint bontjuk összetevőkre úgy, hogy a főkomponens és a vertikális profil skaláris szorzata lesz az adott főkomponens adott magasságú koordinátájának a szorzótényezője. Ez a szorzat pedig nem más, mint az adott főkomponens adott magasságban vett gömbfüggvény értéke. Emiatt az alábbi egyenleteket írhatjuk fel:



$$\langle Z_k, V_l(\varphi, \lambda) \rangle \cdot Z_{kh_i} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left[a_{nm}^k \cdot \cos(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z_{kh_i} + b_{nm}^k \cdot \sin(m \cdot \lambda) \cdot P_{nm}(\cos(\varphi)) \cdot Z_{kh_i} \right] , \quad (8.1)$$

$$k = 1, 2, \dots, K, l = 1, 2, \dots, L, i = 1, 2, \dots, I$$

$$h_1 = 100, h_2 = 200, \dots, h_I = H$$

ahol V_l az egyes földrajzi pontokban NeQuick-kel előállított elektronsűrűség profil vektoros formában. Látható, hogy ilyen egyenletből összesen $K \cdot L \cdot I$ darab lesz az a mi estünkben összesen 3000, ami azért már igencsak tekintélyes szám. Ezt az egyenletrendszert legkisebb négyzetek módszere szerint kiegyenlítve kapunk előzetes értékeket, amit utána felhasználhatunk csillapított legkisebb négyzetek módszeréhez.

Az előzetes értékekre vonatkozó kiegyenlítést több N értékre is elvégeztük. Az ezekből rekonstruált 300 km-es magasságban vett elektron sűrűség látható a 8.1, 8.2, 8.3-as ábrákon. Néhány dolgot kiemelnék. Ami elsőre nem látszik (csak az ábrákat jobban megvizsgálva), de mindenképpen fontos, hogy a kiindulás pontjainkban, ahol a NeQuick modelleket előállítottuk, nagyon sok tizedes jegyre visszakaptuk az elektronsűrűséget, tehát ezekben a pontokban a modell hibája 0-nak tekinthető. A déli területeken úgy tűnik, hogy a rekonstrukció egészen jó eredményt adott, észak felé haladva azonban egyre romlik a helyzet. Látható, hogy a hosszúságok mentén hullámszik a függvény, és ennek a hullámszásnak az amplitúdója észak felé haladva rohamosan növekszik. Mivel egyedül a P_{nm} együtthatókban szerepel a földrajzi szélesség, így valószínűleg azok okozzák. Hogy miért, arra csak találgatásaink vannak. Ugyanakkor az is észrevehető, hogy ez a kilengés az N érték növelésével egyre csökken. Ahogyan a szélesség növekszik, és közeledik a 90 fokhoz, úgy a koszinusza közeledik a 0-hoz. A P_{nm} együtthatók pedig úgy viselkednek, hogy szélsőértékük a 0-nál van, és ez jóval nagyobb, mint a többi P_{nm} együttható értéke, ráadásul ahogyan n növekszik, az érték akár 1 nagyságrendet is ugorhat, miközben előjelet vált. Arra gyanakszunk, hogy ezek a hatalmas ugrások okozzák a nagy kilengéseket, és azért csillapodnak N növelésével, mert jönnek be újabb, nagyobb frekvenciás tagok, amik tudják azt kompenzálni. Ennek megfelelően $N=12$ -nél már egészen használható eredményt kaptunk, jelentősen lecsökkent a hullámszás amplitúdója. A 8.4-8.6-os ábrákon egy ezzel rekonstruált elektronsűrűség sorozat látható 300 km-enkénti felbontással, illetve a 8.7-es ábrán egy ezekből integrálással előállított TEC ábra. Az ábrákon egyértelműen látszik, hogy merre növekszik az elektronsűrűség, és ez a valóságnak is megfelel a kiindulási adatok alapján. Az is látszik, hogy a függvény hullámszásának az amplitúdója már jóval kisebb az elektronsűrűség



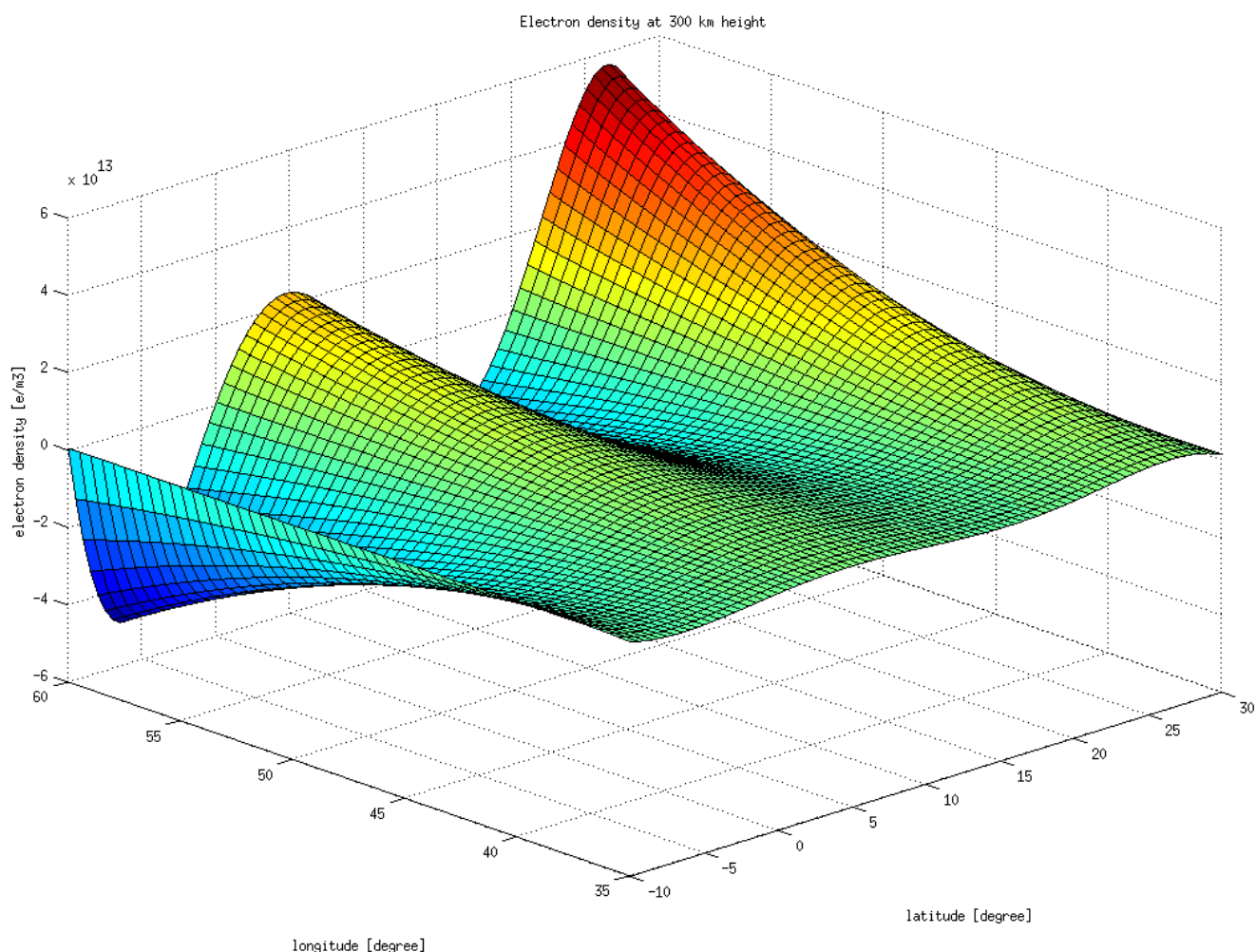
értékek nagyságrendjénél. Persze ez még messze nem tökéletes, úgy gondoljuk, hogy a hullámváz akkor fog elérni egy elfogadható szintet, ha bejönnek az olyan nagy frekvenciájú tagok, amiknél egy fél hullámhossz már belefér két kiindulási pont közé (ez a mi esetünkben kb. $N=18$), de erről a futási idő miatt már nem tudtunk meggyőződni. A kiegyenlített paraméterek középhibáit illetően, többségében nagyságrendekkel kisebbek a paraméter értékeknél, azonban van néhány, ami pont fordítva több nagyságrenddel nagyobb. Azonban ezekből nem tudunk különösebb következtetéseket levonni, mivel ez a tényleges gömbfüggvény értékekre vonatkozóan semmit sem jelent, a paraméterértékeknek pedig jelen tudásunk szerint nincsen konkrét fizikai tartalma.

Az előzetes értékek előállítása után megkíséreltünk tényleges mérések alapján történő kiegyenlítést is. Ennek sajnos nem lett használható eredménye, mivel idő hiányában nem tudtunk kisakkozni egy olyan csillapítási tényezőt, amivel megfelelő eredményt kaptunk volna.

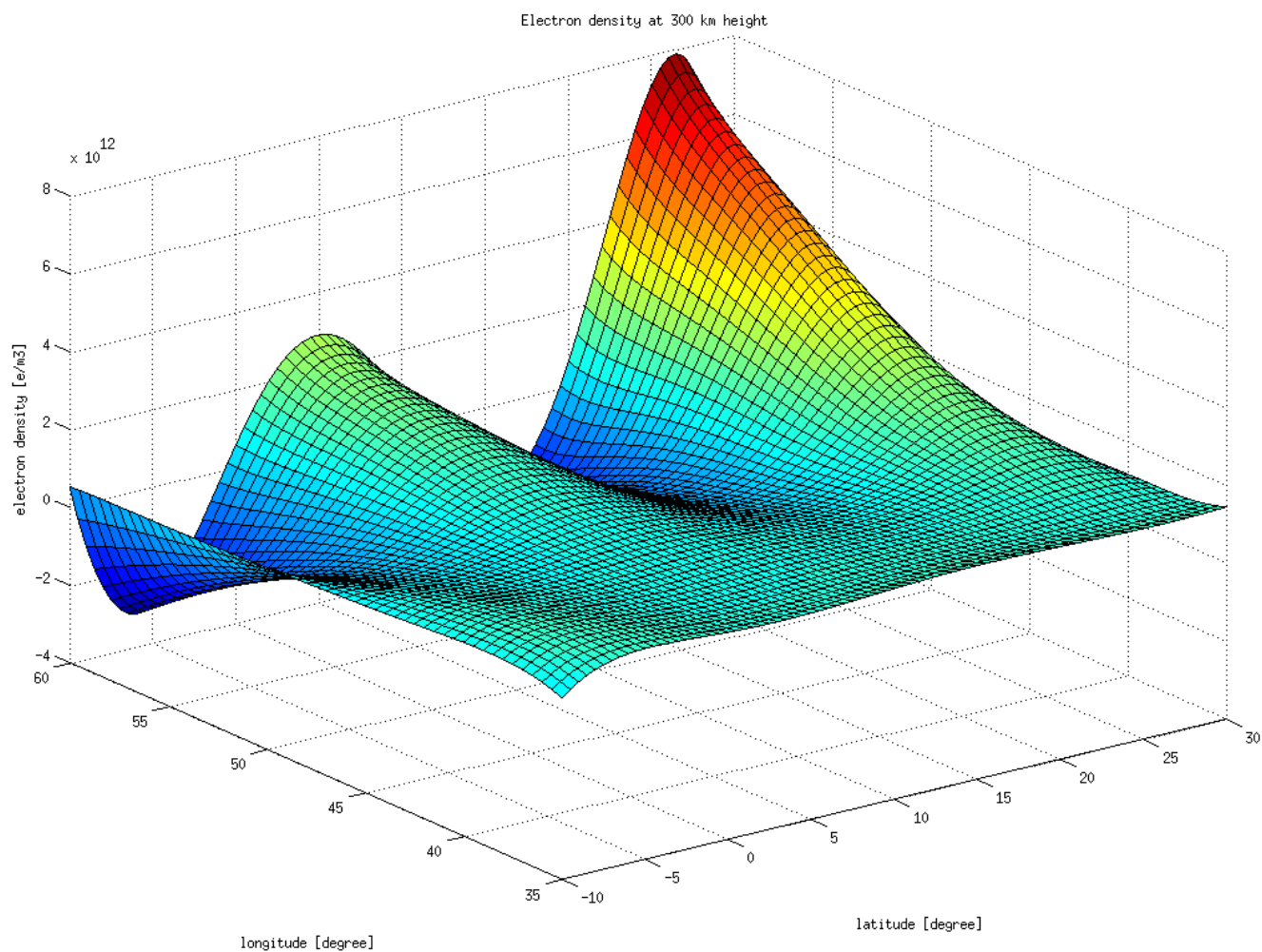
Mivel valósidejű alkalmazásról van szó, beszélnünk kell még a teljesítményről is. A megvalósított program memóriahasználata elhanyagolható, a futási idő azonban már nem. Itt is a legtovább futó megoldás a csillapított legkisebb négyzetek módszeréhez szükséges előzetes értékek előállítása, mivel rendkívül nagy az alakmátrix. A jelenlegi felállásban (30 földrajzi pont, $K=5$, $N=12$) a mátrix mérete nagyjából 3000x900-as. Ezzel az előzetes értékek kiegyenlítése 1 processzor magon 2 GHz-el valamivel több mint 2 óráig fut, ami nem valami gyors. Ezen felül a méréseken alapuló csillapított legkisebb négyzetek módszere is fut még 1 órát. Azonban forráskódon nagyon sokat lehetne még optimalizálni. Jelenleg rengeteg felesleges ellenőrző célú számítás van a programban, amiket el lehetne hagyni (pl. inverz mátrix ellenőrzése, visszahelyettesítés a normálegyenletbe). Többszálúsítással is sokat lehetne hozni a teljesítményen, továbbá egy hatékonyabb lineáris egyenletrendszer megoldó algoritmust is lehetne használni (a mátrix invertálás felesleges). További lassító tényező, hogy a kódot debug módban fordítottam és futtattam. Én úgy becsülöm, hogy egy ma piaci forgalomban kapható átlagosabb 4 magos processzorral, ez a futási idő levihető néhány percre. Komolyabb számítógépekkel pedig ez az idő még tovább csökkenthető, tehát én úgy gondolom, hogy egy közel valósidejű alkalmazásnak ilyen szempontból nincs akadálya.

Egy akadálya lenne, amit korábban említettem, hogy a módszerhez szükség van ismert elektronsűrűség adatokra, amik jelenleg nem állnak rendelkezésünkre valós időben. Itt említeném meg a COSMIC (Constellation Observing System for Meteorology, Ionosphere, and Climate) projektet. Ez többek között egy műholdról műholdra való mérési elvvel

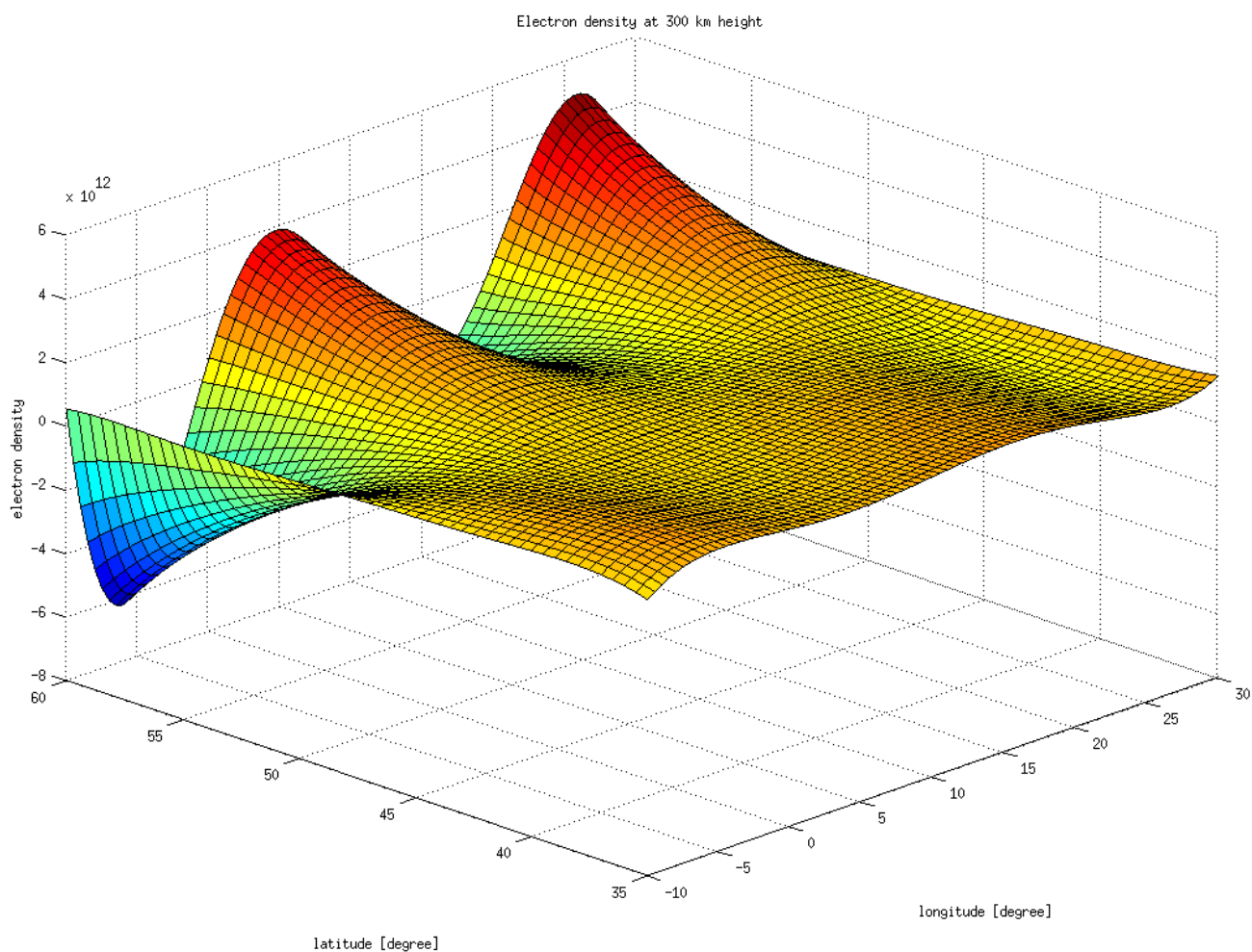
foglalkozik. Nagyon röviden a lényege az, hogy mivel az ionoszféra módosítja az elektromágneses hullámok terjedését, így a hullám elhajlása miatt egy műhold tud olyan másik műholdról is jelet venni, ami a Föld takarásában. Ennek az elvnek a felhasználásával a hullám terjedési útjának elhajlási középpontjában meg tudják határozni az elektronsűrűséget. Igaz, hogy ez csak egy pont, és annak a helyét sem lehet meghatározni, hanem éppen ahol a műholdak vannak, de mindenképpen ígéretes próbálkozás, és ki tudja, hol fog tartani 10 év múlva.



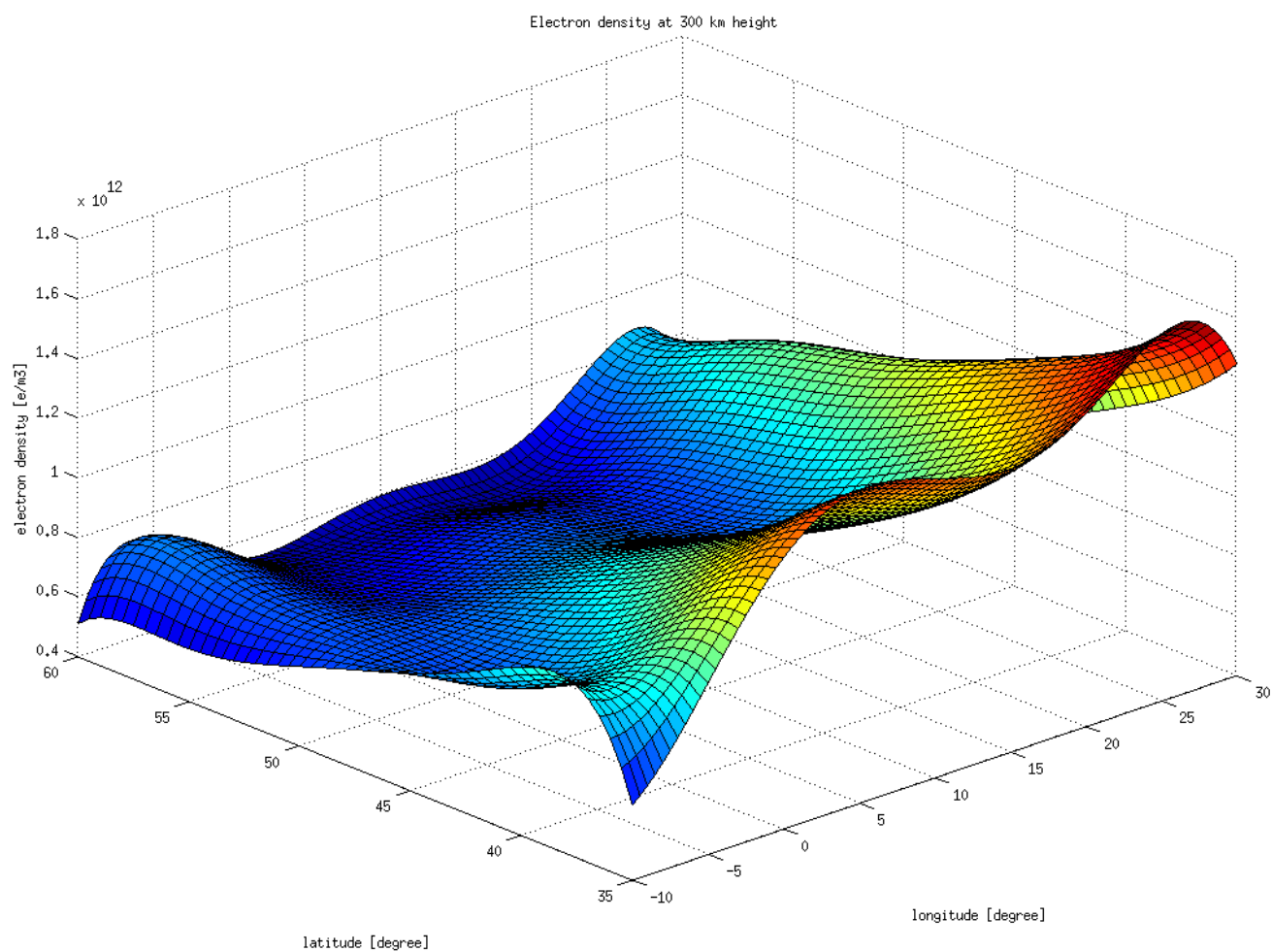
8.1 ábra. Előzetes paraméterértékek kiegyenlítéséből rekonstruált elektronsűrűség 300 km magasan, $N=6$



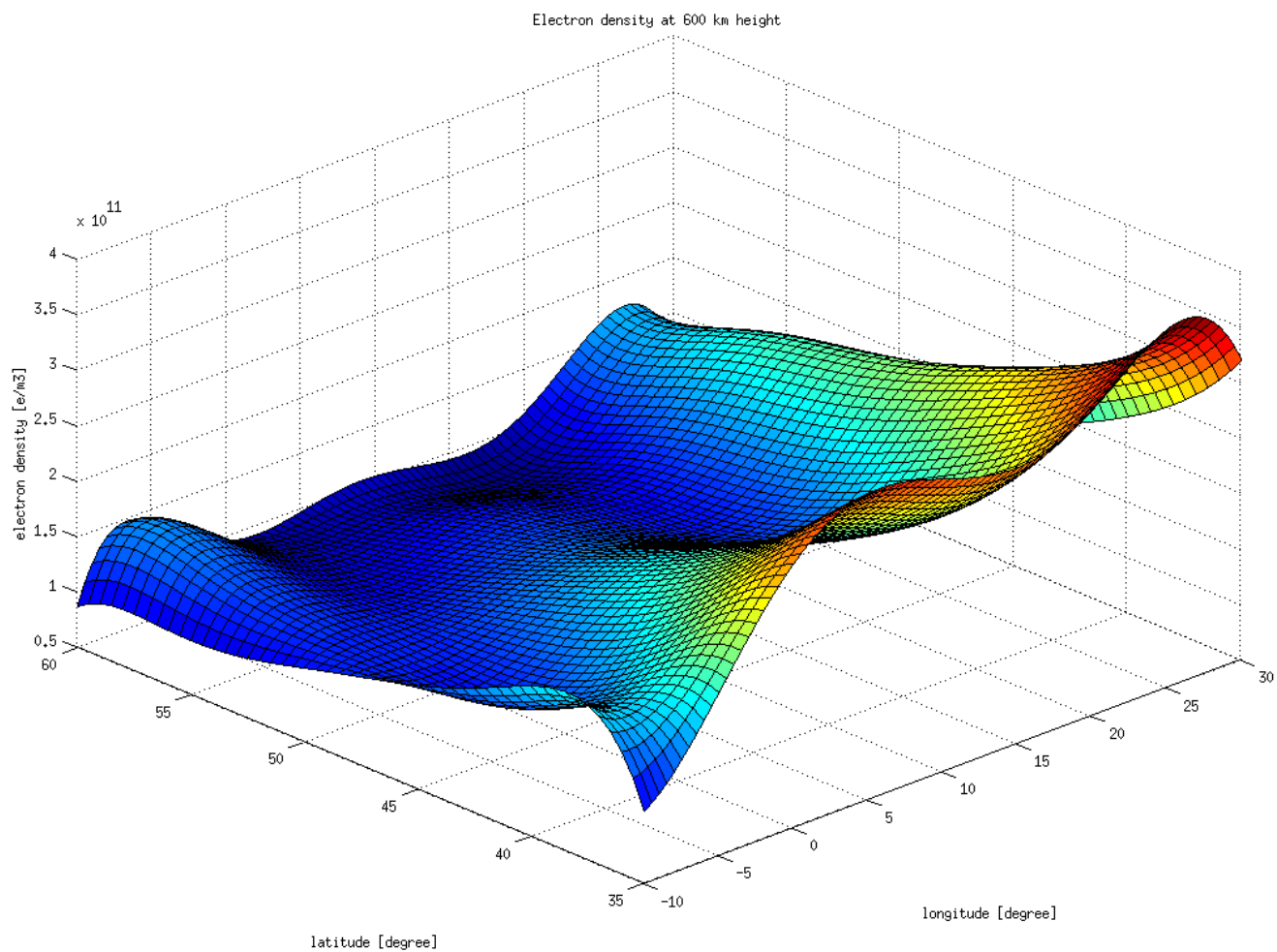
8.2 ábra. Előzetes paraméterértékek kiegyenlítéséből rekonstruált elektronsűrűség 300 km magasan, $N=8$



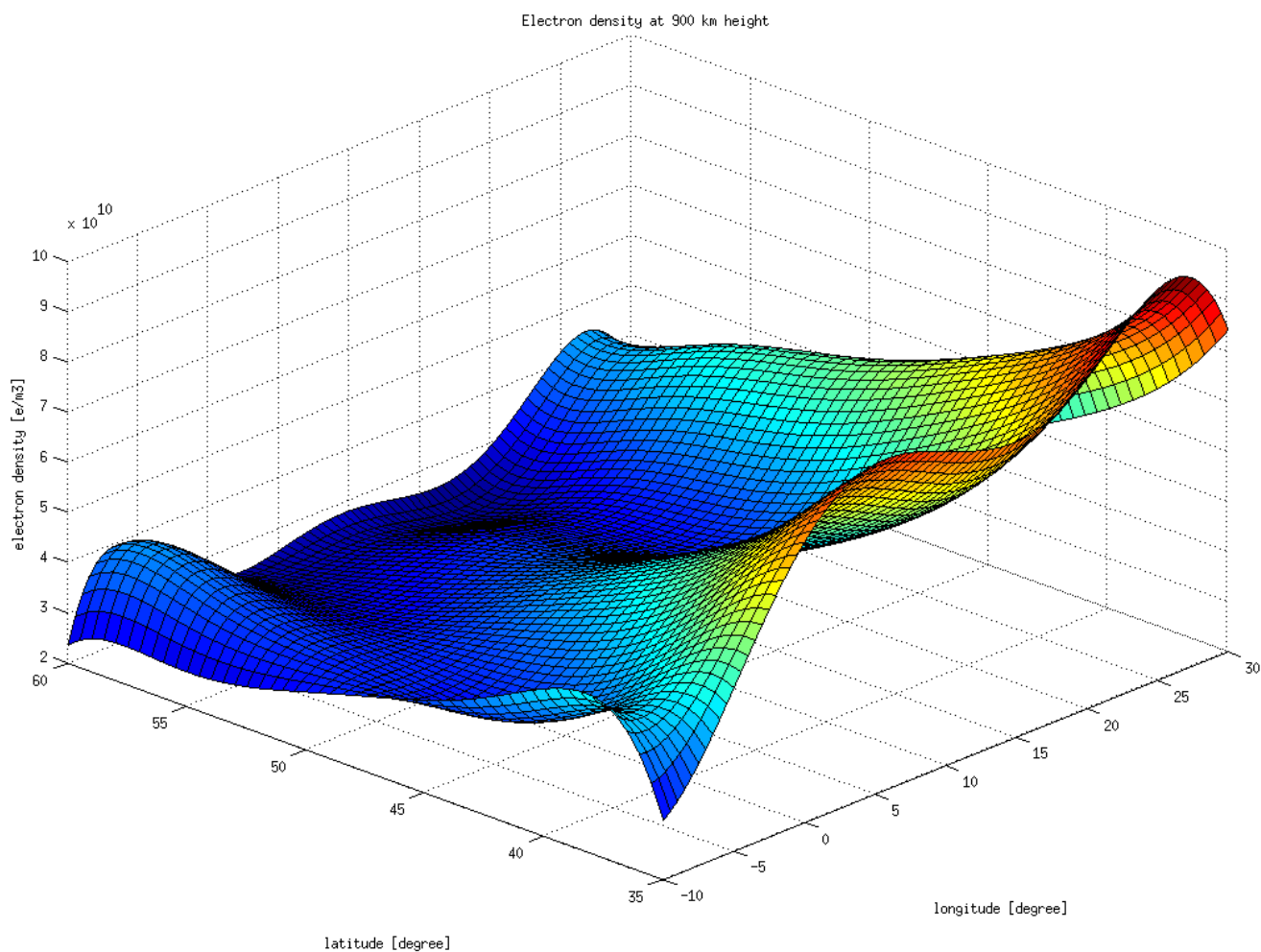
**8.3 ábra. Előzetes paraméterértékek kiegyenlítéséből rekonstruált
elektronsűrűség 300 km magasan, $N=10$**



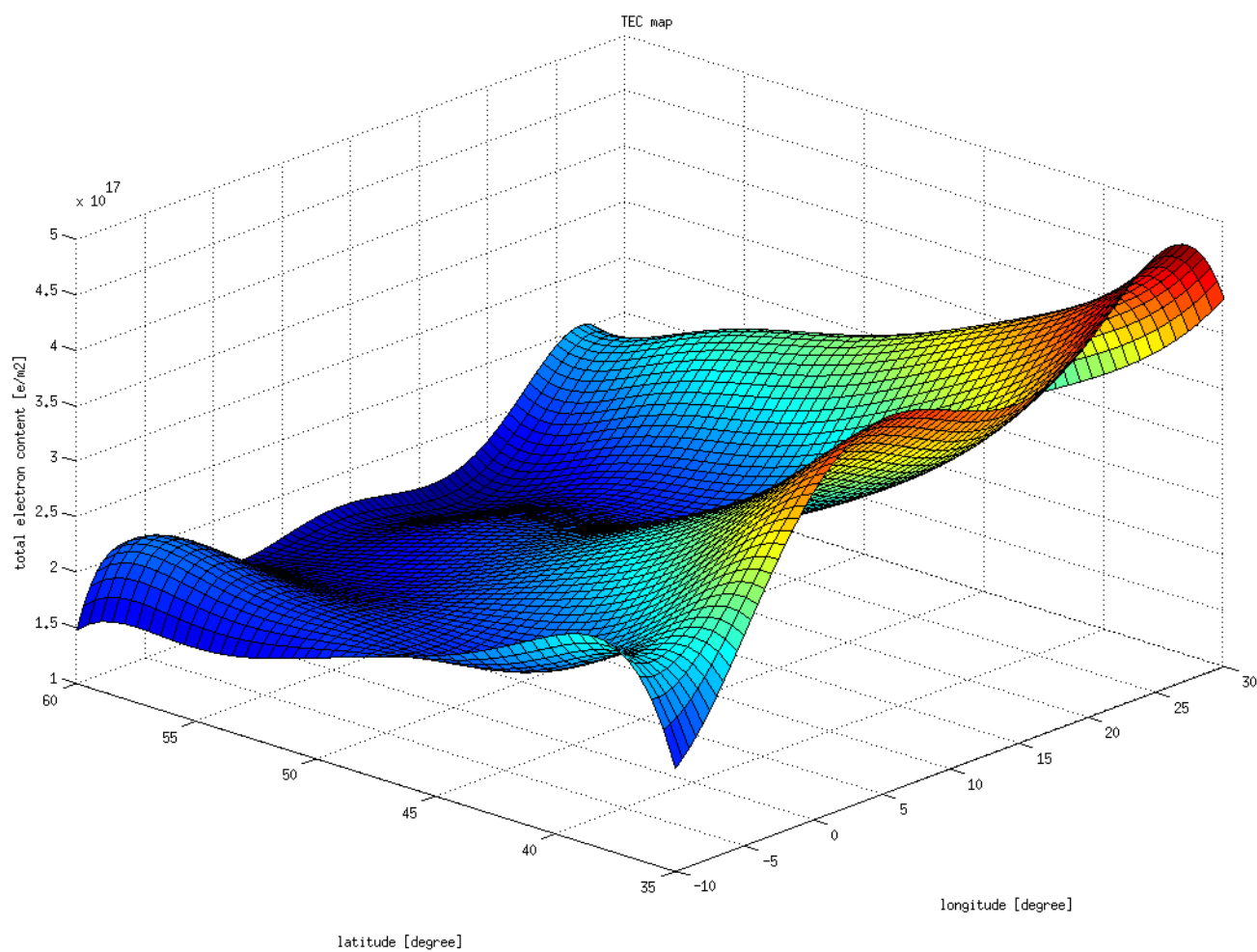
**8.4 ábra. Előzetes paraméterértékek kiegyenlítéséből rekonstruált
elektronsűrűség 300 km magasan, $N=12$**



**8.5 ábra. Előzetes paraméterértékek kiegyenlítéséből rekonstruált
elektronsűrűség 600 km magasan, $N=12$**



8.6 ábra. Előzetes paraméterértékek kiegyenlítéséből rekonstruált elektronsűrűség 900 km magasan, $N=12$



**8.7 ábra. Előzetes paraméterértékek kiegyenlítéséből rekonstruált
TEC térkép, $N=12$**



9. Összegzés

A dolgozatban bemutattunk egy olyan módszert, aminek a segítségével részletes ionoszféra modellt szerettünk volna előállítani. Sajnos a módszer helyességét gyakorlatban nem sikerült tökéletesen bizonyítani, de az eredményeink alapján bizakodhatunk abban, hogy a modell használható lesz az ionoszféra tomografikus rekonstrukciójára.

A legnagyobb kérdés az volt, hogy valós időben megoldható-e a probléma, hiszen munkánkat az inspirálta, hogy az olcsó egyfrekvenciás kód mérésen alapuló vevőkészülékkel elérhető pontosságot növeljük. Az eddigiek alapján azt lehet kijelenteni, hogy a valósidejűség elérhető azzal a feltétellel, hogy rendelkezésünkre állnak valós időben ismert elektronsűrűség adatok. Ez ugyan ma még nem igaz, de vannak ezzel kapcsolatos kutatások. Viszont a mi munkánk legfontosabb vívmánya az, hogy véges sok (100-200) elektronsűrűség adatból építünk fel egy olyan térben folytonos modellt, ami alkalmas lehet tetszőleges műhold-vevő vektor mentén az ionoszférikus késleltetés meghatározására.



10. Irodalomjegyzék

- [1] Abdulwahab A. Abokhodair: *Geophysical Inverse Problem*, http://faculty.kfupm.edu.sa/ES/akwahab/inversion_examples.htm
- [2] ALISHOUSE J. C., CRONE L. J., FLEMING H. E., F. L. VAN CLEEF H. E., WARK D. Q.: *A discussion of empirical orthogonal functions and their application to vertical temperature profiles*, Environmental Science Services Administration, National Environmental Satellite Center, Washington, D.C., 1966
- [3] Ádám J., Rózsa Sz., Takács B.: *GNSS elmélete és felhasználása*, Elektronikus jegyzet, 2012
- [4] Csönde G.: *Az ionoszféra GPS jelekben okozott késleltető hatásának meghatározása tomografikus úton*, BME TDK, 2013
- [5] Cygnus Research International, <http://www.cygres.com/OcnPageE/Glosry/OcnEof1E.html>
- [6] Ercha A, Donghe Zhang, Aaron J. Ridley, Zuo Xiao, Yongqiang Hao: *A global model: Empirical orthogonal function analysis of total electron content 1999–2009 data*, JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 117
- [7] Estey L., Wier S.: *Teqc Tutorial: Basics of Teqc Use and Teqc Products*, UNAVCO, 2013, <http://facility.unavco.org/software/teqc/>
- [8] Free Software Foundation, Inc.: *The GNU Multiple Precision Arithmetic Library*, <https://gmplib.org/>
- [9] Gurtner W.: *RINEX: The Receiver Independent Exchange Format Version 2.11*, 2007, <ftp://igs.org/pub/data/format/rinex211.txt>
- [10] Hofmann-Wellenhof, Lichtenegger, Wasle: *GNSS – Global Navigation Satellite Systems*, SpringerWienNewYork, 2008
- [11] Jin S., Jin R.: *GPS IONOSPHERIC MAPPING AND TOMOGRAPHY: A CASE OF STUDY IN A GEOMAGNETIC STORM*, Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2011 IEEE International
- [12] Liu Z., Gao Y.: *Ionospheric Tomography Using GPS Measurements*, KIS-2001, 2001



-
- [13] Liu Z., Gao Y.: *Precise Ionosphere Modeling Using Regional GPS Network Data*, Journal of Global Positioning Systems (2002), Vol. 1, No. 1: 18-24
- [14] Molnár G.: *Geofizikai inverzió*, ISBN 978-963-284-385-8
<http://elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/geofizikaiinverzio/ch12.html>
- [15] Popa C., Zdunek R.: *Kaczmarz Extended Algorithm for Tomographical Image Reconstruction from Limited-Data*