



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TARTÓSZERKEZETEK MECHANIKÁJA TANSZÉK

ÁBRAHÁM ZOLTÁN

ÉPÍTŐMÉRNÖK HALLGATÓ (B. SC.)

FOTOELASZTIKUS ANYAGÚ GERENDÁK
FESZÜLTSGEI ÉS ALAKVÁLTOZÁSAI

TDK DOLGOZAT

KONZULENS:

DR. KÁROLYI GYÖRGY

EGYETEMI TANÁR

Absztrakt

Egyes nematikus folyadékkristály-elasztomerek, ún. fotoelasztomerek fény hatására megváltoztatják szerkezetüket és alakváltozást szenvednek. Mivel az anyagba behatoló fény intenzitása exponenciálisan csökken a behatolás mélységével, az eloszlása sem lesz lineáris. Emiatt külpontosan terhelt gerendáknál két semleges tengely is keletkezhet a keresztmetszetben. Kiegészítve M. Warner és L. Mahadevan munkáját [1], levezetem a külpontosan terhelt fotoelasztikus anyagból készült gerendák statikus viselkedését fény hatására. Szisztematikusan feltérképezem a semleges tengely helyzetét, majd analitikus és numerikus eredményt mutatok a semleges tengelyek számának és helyének paraméterfüggésére. Bemutatom a görbült fotoelasztikus gerenda egyensúlyi alakját.

[1]: M. Warner, L. Mahadevan, *Photo-induced deformations of beams, plates and films*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 134302 (2004).

Certain nematic liquid crystal elastomers, called photoelastomers, change their structure and deform when exposed to light. The distribution of light intensity is not linear, rather, absorbed light in the material decreases exponentially with depth. As a consequence, two neutral axes may develop when the beam, beside light, has excentric normal load. I supplement previous studies [1] by investigating the static behavior of excentrically loaded photoelastics beams under light. I systematically find the position of the neutral axes, then show analytical and numerical results of how the number and location of the neutral axes depend on the parameters. The equilibrium shape of the curved photoelastics beam is also presented.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani **Dr. Károlyi György** konzulensemnek, hogy lehetőséget biztosított munkám sikeres elvégzéséhez és a dolgozat megírásához. Köszönöm segítőkész támogatását és munkám alapos és kritikus szemrevételezését.

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS	4
1.1. Folyadékkristályok.....	4
1.2. A folyadékkristály elasztomerek termoelasztikus viselkedése.....	8
1.3. A folyadékkristály elasztomerek fotoelasztikus viselkedése.....	9
2. A FOTOELASZTIKUS LCE MECHANIKAI EGYENLETEI	13
2.1. A gerenda feszültségi és alakváltozásai	13
2.1.1. Anyagi egyenlet	13
2.1.2. Geometriai egyenlet.....	13
2.1.3. Egyensúlyi egyenletek.....	15
2.1.4. Egyenletek egyesítése.....	15
3. A SEMLEGES TENGELYEK SZÁMAI ÉS POZÍCIÓI	17
3.1. A zérushelyeket megadó egyenlet dimenziótlanítása	17
3.2. Paraméterek ábrázolása.....	18
3.2.1. Semleges tengely vizsgálata analitikus módszerrel	19
3.2.2. Semleges tengelyek vizsgálata numerikus módszerrel.....	21
4. A GERENDA GÖRBÜLETÉNEK EGYENLETE	23
4.1. Dimenziótlanítás	23
4.2. A κ dimenziótlan görbület számítása.....	23
4.3. A görbületi egyenlet analízise.....	23
5. A SEMLEGES TENGELYEK FÜGGVÉNYÉNEK ÁBRÁZOLÁSA	25
5.1. Terheletlen állapot.....	25
5.2. Központosan terhelt állapot.....	26
5.3. Külponos normálerővel terhelt állapot.....	26
6. A GERENDA RUGALMAS VONALÁNAK EGYENLETE	30
6.1. Statikai váz meghatározása	30
6.2. Mechanikai egyenletek.....	30
6.3. Differenciálegyenlet megoldása.....	31
7. PÉLDA BEMUTATÁSA	34
8. KONKLÚZIÓ	37
9. IRODALOMJEGYZÉK	38

1. Bevezető

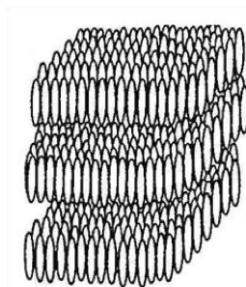
1.1. Folyadékkristályok

Napjainkban a folyadékkristály állapotú anyagokat különböző területeken egyre szélesebb körben alkalmazzák. A folyadékkristályok előnyös tulajdonsága abban rejlik, hogy szövetszerkezetük külső hatásokkal befolyásolható. Így a belőlük készült eszközök szilárdsági és geometriai tulajdonságai, bizonyos határokon belül, mesterséges módon a kívánt értékre beállíthatóak. Az elektromos- és villamosiparban, a távközléstechnikában, a vegyiparban, a gyógyászatban, a jármű-, és gépiparban, a légitözlekedésben, az űrtechnikában és még számos szakterületen egyaránt alkalmazzák őket [1,2].

A folyadékkristályok nem szokványos anyagok. Ahogy a nevük is mutatja, átmenetet képeznek a folyadékok és a szilárd anyagok között. A molekuláik hosszúságak, rúdszerűek, melyek orientáltsága mind egy irányba mutat. Ezt az állapotot egy meghatározott hőmérséklettartományban tartják meg, ilyenkor a szövetszerkezetük makroszkopikus méretekben folyékony, de mikroszkóp alatt vizsgálva a szilárd testekhez hasonló rendezettséget mutat.

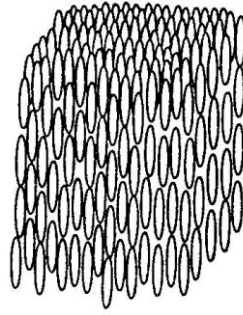
A folyadékkristályokat a szerkezetük alapján három nagy csoportra lehet osztani [3]:

Szmeztikus folyadékkristályok: a vastag, szivar alakú molekulák szorosan, egymással párhuzamosan, a molekulatengelyre merőleges síkú, mononukleáris rétegekben helyezkednek el, szorosan egymás mellett (1.1.1. ábra).



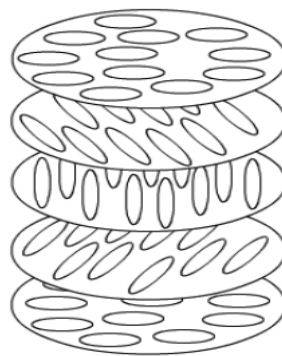
1.1.1. ábra. Szmeztikus folyadékkristály szerkezete [3]

Nematikus folyadékkristályok: szerkezetük kevésbé rendezett, molekuláik fonálszerű sorokat alkotnak, melyek molekuláris tengelyei egymással párhuzamosak (1.1.2. ábra). Ez a szerkezeti felépítés jól szemléltethető egy doboz fogvájójával, ahol a fogvájók a tengelyük irányában képesek elmozdulni, vagy a tengelyük körül elfordulni, de a doboz miatt a tengelyek végig párhuzamosak maradnak.



1.1.2. ábra. Nematikus folyadékkristályok szerkezete [3]

Koleszterisztikus folyadékkristályok: réteges felépítésű szerkezet, ahol a molekuláris tengelyek párhuzamosak egymással. Az egyes keskeny rétegekben elhelyezkedő molekulák tengelyei az egyes síkokban nem tetszőleges irányban helyezkednek el, hanem csak a szomszédos sík által meghatározottan (1.1.3. ábra).



1.1.3. ábra. Koleszterikus folyadékkristályok szerkezete

(forrás: http://fizikaweb.uni-pannon.hu/fizika_content/Oktatas/Bev_kem_kut_lab/folyadekkristalyok.pdf)

Míg szokásos anyagoknál jól meghatározott olvadáspont van a szilárd és a folyékony halmazállapot között, addig a folyadékkristályos anyagok olyan hőmérsékleti tartománnyal rendelkeznek a két fázis között, amelyben megmutatkozik az anyagnak a kettős szerkezete. A hőmérsékleti tartomány egyik végpontján, az úgynevezett C-N (crystalline-nematic) pontban van a szilárd és a folyadékkristály állapot határa, a másik végpontján, az N-L (nematic-liquid) pontban van a folyadékkristály és folyékony állapot határa. A folyadékkristály a C-N pontnál folyékony halmazállapotúvá válik a szó köznapi értelmében, de a molekulái részben megtartják eredeti rendezett szerkezetüket [3]. A C-N pontot üvegesedési hőmérsékletnek is szokták nevezni [3].

A továbbiakban a nematikus folyadékkristályokkal foglalkozunk. Ezen anyagokat például a folyadékkristályos kijelzőknél (liquid crystal display, LCD) alkalmazzák. Ezeknek a működési elve lényegében abból áll, hogy a vékony rétegben keltett elektromos tér létrehozásával befolyásolni tudják a molekulák irányultságát, s ez által beállítható a réteg fényáteresztő képessége [3].

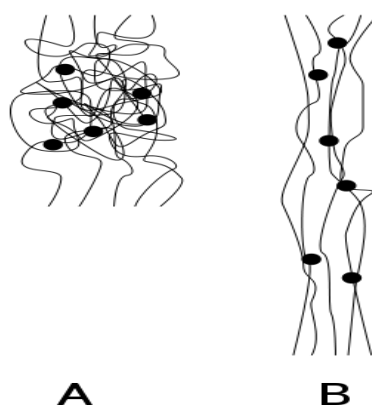
A műanyag eszközök gyártásában a folyadékkristályos anyagot folyadékkristály polimerként (liquid crystal polymer, LCP) szokták alkalmazni. Ezek olyan ismétlődő egységekből, monomerekből állnak, melyeket kémiai kötések kapcsolnak össze.

Bizonyos LCP-k, más polimerekhez hasonlóan, hagyományos fröccsöntő extrúziós, koextrúziós, fúvásos stb. eljárásokkal dolgozhatók fel [1,4]. Az folyékony és szilárd fázis közötti halmazállapotú ömledéket nyíró vagy nyújtó folyamnak teszik ki, így a merev makromolekulák maguktól szálakká vagy rostokká rendeződnek, melyek az ömledék lehülésekor megmerevednek, így sajátos molekulaszervezet alakul ki szilárd állapotban. Különösképpen a merev, pálca alakú LCP-k, összehasonlítva a hagyományos polimerekkel, sokkal kedvezőbb mechanikai tulajdonságokkal bírnak, különösen az anyag orientációjának irányában. Az elérhető előnyös tulajdonságok: sorjamentes minőség fröccsöntésnél, nagy szakítószilárdság és nagy rugalmassági modulus, nagy ütőszilárdság, kis hőtágulási együttható, kis vízfelvétel, jó hőrepedési teljesítmény, kivételes pontosság, méretstabilitás, kis zsugorodás, kitűnő kúszás-állóság stb. [1,2]. LCP-eket használnak elektromos és elektronikai alkatrészekhez, száloptikai összekötő elemek, távközléstechnikai készülékek, vegyipari feldolgozó berendezések, gépipari és űrtechnikai eszközök gyártásához. Bizonyos LCP-k a gyógyászati alkalmazásokban helyettesíthetik a rozsdamentes acélt, ellenállnak a gamma-sugárzásnak, valamint a legtöbb sterilizálási eljárásnak. Sebészeti eszközök, fogászati eszközök, steril tálcák és berendezések, gyógyszeradagoló- és diagnosztikai rendszerek esetében egyaránt kiválóan alkalmazható [1,2].

Az eddig említett általános LCP-k esetében a fázisátmeneti hőmérséklettartományban kialakítják a kedvező szövetszerkezetet, majd az ömledéket lehűtik az üvegesedési hőmérséklet alá, tehát a felhasználási hőmérsékletén szilárd állapotban van. A folyadékkristály polimerek egy különleges csoportját alkotják a folyadékkristály-elasztomerek (liquid crystal elastomer, LCE). Ezeknek az anyagoknak az üzemi, illetve használati hőmérsékleti tartománya, az üvegesedési hőmérséklet felett helyezkedik el, tehát

az anyag már nem szilárd, de alul marad az N-L határtól, tehát az anyag még nem viselkedik teljes mértékben folyadékként sem. Az LCE-k ilyenkor a felhasználás hőmérsékletén *gumirugalmas* fizikai állapotban vannak [5].

A gumirugalmas állapot olyan anyagszerkezetet jelent, amely viszonylag kis erővel is nagymértékben deformálható, és rugalmas, tehát a deformáló erő megszűnte után (csekély maradó deformációtól eltekintve) ismét felveszi eredeti alakját, akár a sokadik deformációs ciklusban is [6].



1.1.4. ábra. (A) terheletlen elasztomer szövetszerkezete (B) ugyanaz az anyagszövet terhelés alatt. Ha a terhelést megszüntetjük, a szerkezet visszatér az A állapotba. A fekete pontok a keresztkötéseket jelölik [6]

A gumirugalmas anyag makromolekuláit, a nematikus folyadékkristály-láncokat első megközelítésben képzelhetjük fonaloknak, amelyeket egy-egy csepp ragasztóval (keresztkötések) helyenként összeragasztunk. Ha egy fonalszálat megpróbálunk kihúzni úgy, hogy a többi szálat lefogjuk, csak annyira fogjuk tudni kihúzni, amennyire a fonalszálak kiegyenesedés közben elmozdulnak egymáshoz képest. Ha elengedjük, akkor visszaugrik eredeti (ránccos) állapotába. Azonban a gumi (illetve az LCE) sokkal jobban deformálódik, mint az összeragasztott fonalak. Ennek az az oka, hogy a modell nem elég pontos, a makromolekulák igazából sokkal kevésbé párhuzamosak, mint a fonalak. A makromolekulák két keresztkötés között hatalmas kanyarokat írnak le a tér minden irányában. A terheletlen LCE esetén a folyadékkristály-láncok egyáltalán nem rendezettek, nem egységes orientáltságúak és a tengelyeik nem párhuzamosak egymással, tehát még nem alakult ki a nematikus izotrópia, ahogy azt a *1.1.4. ábra* szemlélteti. A szálak orientálódása csak külső teher, vagy deformáció hatására következik be, pl. húzás,

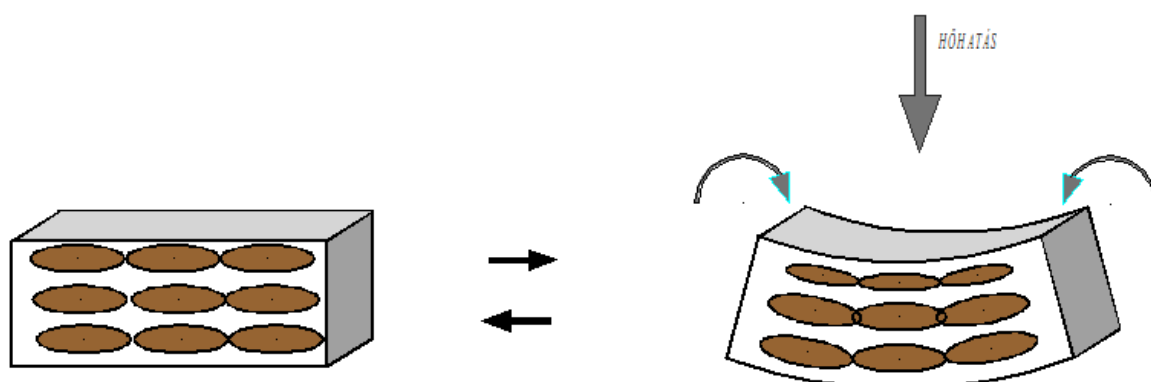
csavarás, görbítés (az LCE esetén szóba jöhet még külső mágneses, vagy elektromos tér hatása is, stb).

Az LCE-eket szokás intelligens anyagoknak nevezni [7], amelyek képesek mágneses, elektromos vagy optikai behatást mechanikai energiává alakítani és viszont. Az ilyen különleges fizikai tulajdonságokat használják ki például a jelátalakító egységekben [7,8]. Ezek olyan különleges szerkezetek, amelyekben feszültség, fény, mágneses vagy elektromos tér, vagy hőmérséklet hatására méret-, illetve alakváltozás következik be, miközben egy működő rendszer kinetikai láncának részét képezik. Legelterjedtebb az alkalmazásuk például rugalmas kijelzőknél, különleges membránoknál, piezoelemek és pirodetektoroknál [7]. Orvosi és biológiai alkalmazások terén is ígéretes lehetőségeket jelentenek implantátumok, például szemlencse vagy műizom esetében [7].

1.2. A folyadékkristály elasztomerek termoelasztikus viselkedése

Mint már említettük, a folyadékkristályok üzemi hőmérséklete a szilárd és a folyékony fázishoz tartozó hőmérsékleti határok között helyezkedik el, tehát az LCE átmeneti állapotban van a két fázis között. Ilyenkor az anyagszerkezetet folyadékkristály molekulák, ún. mezogének alkotják, amelyek nematikusán kapcsolódnak egymáshoz, tehát olyan fonálszerű sorokat tartalmaznak, amelyek tengelyei párhuzamosak egymással (1.1.2. ábra).

Ha a test hőmérsékletét addig növeljük, amíg a izotróp nematikus kötések felszakadnak, a mezogének elveszítik párhuzamosságukat és rendezettségüket. Ilyenkor maga a molekula is deformálódik: a rendezetlenség következtében kontrakció jön létre, amely annál nagyobb mértékű, minél magasabb a hőmérséklet.



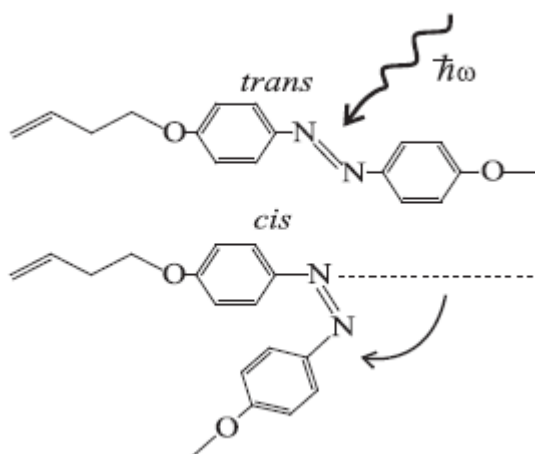
1.2.1. ábra. Bal oldalon a gerenda terheletlen helyzete, jobb oldalon a hőhatással terhelt

Ha egy rúd vagy lemez alakú LCE testet egyenlőtlen hőmérsékletnövekménynek teszünk ki, akkor a test meggörbül. Ha például a felső réteg felől kezdjük el melegíteni, akkor először a legfelsőbb réteg (molekula sor), tehát a közvetlenül melegített felület fog átalakulni a kontrakciós állapotba. Közben az alsóbb mezogén elemek, amelyek még nematikus rendszerben vannak, összébb préselődnek egymáshoz, megtartva az eredeti orientáltságukat (1.2.2. ábra).

A gumirugalmas állapotú LCE akár 400%-os deformációra is képes [10]. Ez a tulajdonság rendkívüli, speciális alkalmazásokra nyújt lehetőséget (lásd. 1.1. fejezet).

1.3. A folyadékkristály elasztomerek fotoelasztikus viselkedése

A folyadékkristály elasztomerek, mint például az azobenzolok [12], fény hatására akár rendkívül erős deformációra is képesek. Foton becsapódás hatására az anyag fotoizomerizálható csoportjának rúdszerű mezogénekből álló struktúrája eltorzul. Az 1.3.1. ábrán, felül látható az úgynevezett *trans* állapot, ahol az N=N kötés még egyensúlyban van. A mezogén láncok ilyenkor egyenesek, merevek és folytonos részét képezik a nematikus rendszernek. A *cis* állapot (1.3.1. ábra, alul) egy olyan fotonbecsapódás által előidézett metastabil helyzet, ahol az N=N kötés mentén a molekulák erősen meghajlanak és elhagyják rúdszerű struktúrájukat. A *cis* állapot, a termikus hatáshoz hasonlóan, kontrakcióhoz vezet [12].



1.3.1. ábra. Azobenzol molekuláris alakja fény ($\bar{h}\omega$) hatására bekövetkező *trans-cis* izomeráció következtében [12]

Minden szövetszerkezettel rendelkező anyag jellemezhető bizonyos mértékű abszorpciós tulajdonsággal. Azt a jelenséget nevezik abszorpciónak, amelyben egy anyag a rajta áthaladó sugárzás egy részét elnyeli, azaz a sugárzás elnyelődik az anyagban, vagy azon áthaladva csökkent mértékű intenzitással halad tovább [11].

A fény-, úgymint általában az elektromágneses sugárzások abszorpciója a hullámhossztól és az abszorbeáló anyagtól függ. Ha a sugárzás valamely anyag x vastagságú rétegén halad át, akkor az $I(0)$ kezdeti intenzitás $I(x)$ értékre csökken [11]:

$$I(x) = I(0)e^{-\frac{x}{d}},$$

ahol d a lassítási hossz, azaz az a hossz, amelyen az intenzitás a kezdeti érték e^{-1} -szeresére csökken, azaz az anyagban körülbelül 63%-os abszorpció következik be.

Az abszorpció során az elnyelt sugárzás energiáját az elnyelő közeg veszi át, rendszerint hőenergia formájában, de a közeg atom-, illetve atommagstruktúrájára is gerjesztő hatással lehet.

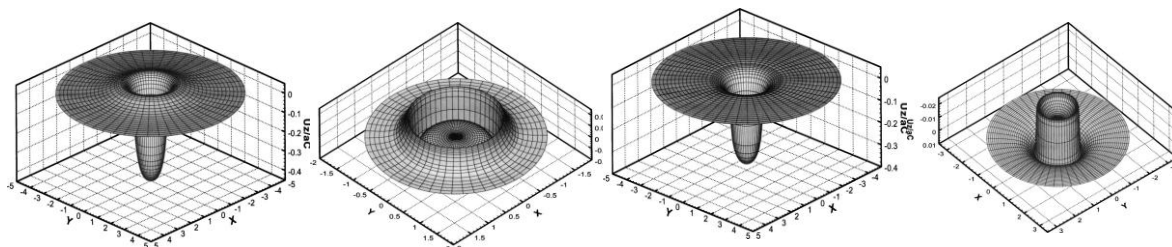
Ha az LCE anyagú testet UV fénysugárzásnak tesszük ki, az abszorpció során az anyag által elnyelt energia olyan változást okoz a molekuláris struktúrában, amely, hasonlóan a termikus stimulációhoz, kontrakcióhoz vezet. A kontrakció lineáris arányosságban van az intenzitással [10], tehát:

$$\varepsilon^r(x) = -C e^{-\frac{x}{d}}$$

ahol $\varepsilon^r(x)$ a sugárzásból származó alakváltozás, C pedig (az állandónak feltételezett hőmérséklettől függő [10]) konstans paraméter, amely a besugárzott felületen keletkező $\varepsilon^r(0) = -C$ alakváltozást adja meg [10].

Eddigi kutatások során már számos kísérletet tettek az LCE anyagú testek fény hatására történő rugalmas alakváltozásnak, azaz *fotoelasztikus deformációjának* vizsgálatára [13]. A próbatesteknek különböző a viselkedése a fényforrás méretének függvényében. Alapvetően kétfajta deformáció a jellemző: az egyik, amikor a sugárzó fény lassítási hossza nagyságrendekkel nagyobb a próbatest vastagságánál, ilyenkor az optikai intenzitás nagyjából állandó a hártyszerű test vastagsága mentén; a másik eset, amikor a réteg vastagsága lényegesen nagyobb, tulajdonképpen egy effektív félteret képezve, és ilyenkor a fény optikai intenzitása exponenciálisan elnyelődik, a fent említett abszorpciós jelenség

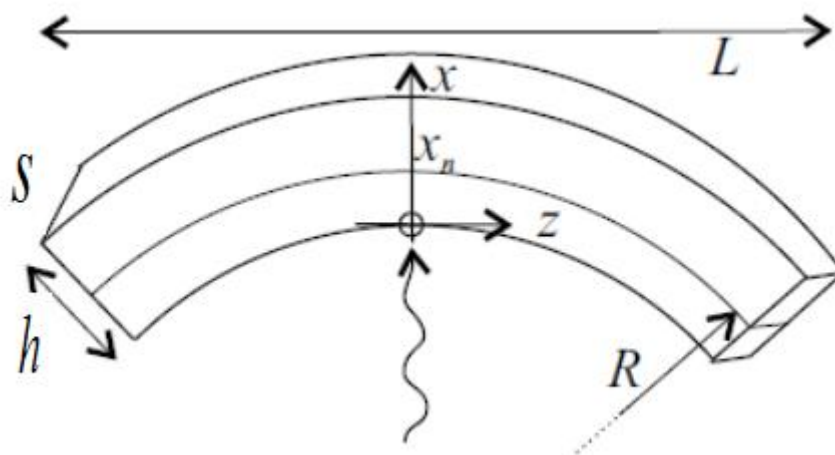
formájában. Numerikus számítással kimutatták, hogy a felületi deformáció erősen függ a megvilágított felület sugarának és a réteg vastagságának arányától. Az 1.3.2. ábra a jellemző felületek változatait mutatja térbeli ábrázolással [9].



1.3.2. ábra

1. kép: vékony rétegű test közepes hatósugárral megvilágított felületének térbeli deformációja;
2. kép: vékony rétegű test nagy hatósugárral megvilágított felületének térbeli deformációja;
3. kép: vastag rétegű test közepes hatósugárral megvilágított felületének térbeli deformációja;
4. kép: vastag rétegű test nagy hatósugárral megvilágított felület térbeli deformációja [9]

Dolgozatomban a hossz tengelye mentén állandó intenzitású fénysugárzással terhelt LCE anyagú gerenda viselkedését vizsgálom, továbbfejlesztve Warner és Mahadevan korábbi eredményeit [10]. Tekintsünk egy L hosszúságú gerendát, melynek a szélességét s -sel, a magasságát h -val jelöljük! A gerenda pontjainak definiálásához vegyünk fel egy koordináarendszert az egyik keresztmetszetben! Az x koordináta jelölje az anyagi pont magassági, az y a szélességi, a z pedig a gerenda tengelymenti helyzetét (1.3.3. ábra)!

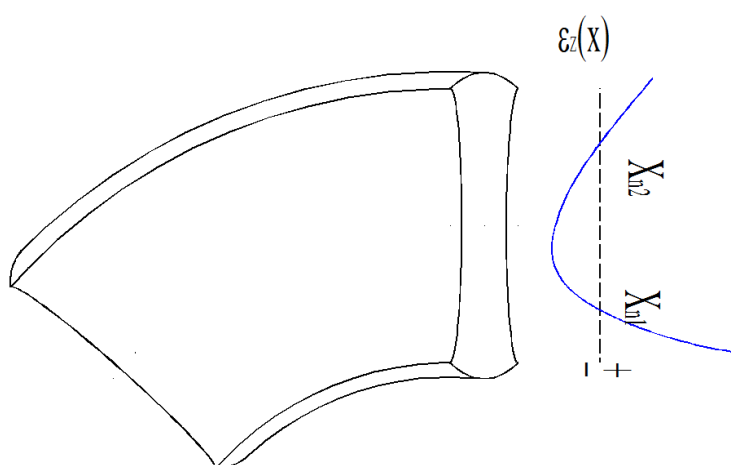


1.3.3. ábra. A görbült gerenda geometriai paramétere

A gerendára a z tengely mentén egy N nagyságú, külpontos, normálirányú teher működik, amelynek az x tengelyen elfoglalt pozícióját az X_m paraméter jelöli.

Amennyiben a lassítási hossz lényegesen nagyobb a gerenda h magassági kiterjedésénél ($d \gg h$), az alakváltozás a fénysugár irányába eső x tengely mentén kvázi-lineáris. Amikor meggörbül a gerenda, a semleges tengely, tehát ahol az alakváltozás zérus, hozzávetőlegesen a magasság felében lesz, $\varepsilon\left(\frac{h}{2}\right) \approx 0$.

Ha azonban a lassítási hosszánál lényegesen nagyobb a magassági kiterjedés ($h \gg d$), az alakváltozás eloszlása már nem közelíthető lineárisan. Az alakváltozás ilyenkor két lényegesen elkülönülő részből tevődik össze: a sugározatlan hajlított gerenda lineáris alakváltozás-eloszlásából és a sugárzásból adódó exponenciális alakváltozás-függvényből. Ekkor a megfelelő paraméterekkel akár olyan különleges eset is kialakulhat, amikor két semleges tengely jön létre (1.3.4. ábra). Ebben az esetben nyúlás jön létre a $x \in [0, X_{n1}]$ régióban, annak ellenére, hogy a fotokontrakció nagy. A két zérushely között kontrakció, a második semleges tengely, X_{n2} után pedig ismét nyúlás alakul ki [10].



1.3.4. ábra A deformált alak és a keresztmetszet alakváltozása, a nyúlás pozitív értelmű, az összehúzódás negatív, az X_{n1} és X_{n2} a semleges tengelyek helyét jelölik

Munkám célja annak feltérképezése, hogy a paraméterek terében hol és mennyi zérushely alakul ki a deformáció során. Ebből a célból, az eddigi kutatásokat kiegészítve, megvizsgáljuk a terhelő nyomaték behatását, feltérképezzük a viselkedés paraméterfüggőségét, továbbá megvizsgáljuk a görbült rúd közelítő alakját.

2. A fotoelasztikus LCE mechanikai egyenletei

2.1. A gerenda feszültségi és alakváltozásai

Ebben a fejezetben egy LCE anyagú gerenda deformációját vizsgálom, amelyet alulról, az $x = 0$ oldal felől, hossz mentén konstans intenzitással sugárzó fényhatásnak teszünk ki és a végkeresztmetszetben külpontos normálerővel terheljük. Cél a deformáció során a keresztmetszetben kialakuló semleges tengely(ek) helyzetének meghatározása.

2.1.1. *Anyagi egyenlet*

A gerenda anyagát tekintve lineárisan rugalmas modellt követ, tehát a feszültségből származó alakváltozás a következő anyagi egyenletet elégíti ki:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z^b, \quad (1)$$

ahol a σ_z a feszültséget, ε_z^b a feszültségből származó alakváltozást, E pedig a rugalmassági modulust jelöli.

2.2.2. *Geometriai egyenlet*

A gerenda alakváltozása két részből tevődik össze: a fényből származó $\varepsilon_z^r(x)$ alakváltozásból, illetve a deformáció folytán a hajlításból származó $\varepsilon_z^b(x)$ alakváltozásból. A teljes alakváltozás:

$$\varepsilon_z(x) = \varepsilon_z^r(x) + \varepsilon_z^b(x). \quad (2)$$

Jelöljük X_n -nel azt az x értéket, amelynél a feszültség értéke zérus:

$$\sigma_z(X_n) = 0. \quad (3)$$

Ez (1.) segítségével azt eredményezi, hogy

$$\varepsilon_z^b(X_n) = 0, \quad (4)$$

tehát ha csak a feszültségekből származna alakváltozás, $x = X_n$ helyben lenne a semleges tengely.

Az előző fejezetben már említett, fénysugárzásból származó alakváltozás a következő:

$$\varepsilon_z^r(x) = -C e^{-\frac{x}{d}}. \quad (5.)$$

Az igazi semleges tengely helyét, tehát ahol az alakváltozás zérus, jelöljük \bar{X}_n -nel! Ha a fény a teljes alsó oldalt éri, akkor kialakul egy állandó $\frac{1}{R}$, ahol R az \bar{X}_n helyeken áthaladó vonal görbületi sugara [10]. Teljesül:

$$\varepsilon_z(x) = \frac{(x-\bar{X}_n)}{R}, \quad (6.)$$

és $x = X_n$ helyettesítéssel

$$\varepsilon_z(X_n) = \frac{(X_n-\bar{X}_n)}{R}. \quad (7.)$$

Kifejezve a (6.) és (7.) egyenletből az $\frac{\bar{X}_n}{R}$ -t, kapjuk, hogy

$$\frac{x-X_n}{R} + \varepsilon_z(X_n) = \varepsilon_z(x). \quad (8.)$$

Az (2.) egyenlet alapján

$$\varepsilon_z(X_n) = \varepsilon_z^r(X_n) + \varepsilon_z^b(X_n), \quad (9.)$$

ez a (4.) és az (5.) egyenlőség figyelembevételével

$$\varepsilon_z(X_n) = -C e^{-\frac{X_n}{d}} + 0 \quad (10.)$$

alakba írható. Ez beírva a (8.) egyenletbe

$$\frac{x-X_n}{R} - C e^{-\frac{X_n}{d}} = \varepsilon_z(x), \quad (11.)$$

ahol $\varepsilon_z(x)$ az (2.) és (5.) alapján

$$\varepsilon_z(x) = -C e^{-\frac{x}{a}} + \varepsilon_z^b(x). \quad (12.)$$

Ebből a két egyenletből a geometriai egyenletet a következő alakban kapjuk:

$$\varepsilon_z^b(x) = C \left(e^{-\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x_n}{a}} \right) + \frac{x - x_n}{R}. \quad (13.)$$

2.2.3. Egyensúlyi egyenletek

A gerenda egy keresztmetszetében a normálerő és a nyomatéki egyensúlyt kifejező egyensúlyi egyenletek a következők:

$$s \int_0^h \sigma_z(x) dx = N, \quad (14.)$$

$$s \int_0^h \sigma_z(x) x dx = X_m N. \quad (15.)$$

2.2.4. Egyenletek egyesítése

A feladat során két ismeretlen mennyiségünk van: a görbületi sugár (R) és a semleges tengely helye (X_n).

A (14.) jelű egyensúlyi egyenlet kifejtése (1.) és (13.) alapján:

$$Es \int_0^h \left(C e^{-\frac{x}{a}} - C e^{-\frac{x_n}{a}} + \frac{x}{R} - \frac{x_n}{R} \right) dx = N,$$

$$Es \int_0^h \left(C e^{-\frac{x}{a}} + \frac{x}{R} \right) dx - Es \int_0^h \left(C e^{-\frac{x_n}{a}} + \frac{x_n}{R} \right) dx = N.$$

Elvégezve az integrálást:

$$\frac{N}{Es} + C h e^{-\frac{x_n}{a}} + C d \left(e^{-\frac{h}{a}} - 1 \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{h^2}{2} - X_n h \right). \quad (16.)$$

A (15.) jelű egyensúlyi egyenlet kifejtése, (1.) és (13.) segítségével:

$$Es \int_0^h Cxe^{-\frac{x}{d}} - Cxe^{-\frac{x_n}{d}} + \frac{x^2}{R} - \frac{X_n x}{R} dx = X_m N$$

Elvégezve az integrálást:

$$\frac{X_m N}{Es} + C \frac{h^2}{2} e^{-\frac{x_n}{d}} + Cd^2 \left[e^{-\frac{h}{d}} \left(1 + \frac{h}{d} \right) - 1 \right] = \frac{1}{R} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{X_n h^2}{2} \right).$$

(17.)

Először ahhoz, hogy kifejezhessük az X_n -t, osszuk el a (16.) egyenletet a (17.)-mal, hogy kiessen az ismeretlen R :

$$\frac{\frac{N}{Es} + Che^{-\frac{x_n}{d}} + Cd \left(e^{-\frac{h}{d}} - 1 \right)}{\frac{X_m N}{Es} + C \frac{h^2}{2} e^{-\frac{x_n}{d}} + Cd^2 \left[e^{-\frac{h}{d}} \left(1 + \frac{h}{d} \right) - 1 \right]} = \frac{\frac{h^2}{2} - X_n h}{\frac{h^3}{3} - \frac{X_n h^2}{2}} = \frac{3h - 6X_n}{2h^2 - 3X_n h}$$

$$\begin{aligned} \frac{N}{Es} [2h^2 - 3X_n h - 3hX_m + 6X_n X_m] + Ce^{-\frac{x_n}{d}} \frac{h^3}{2} + Cd[6X_n d + 3X_n h - h^2 - 3d^2]e^{-\frac{h}{d}} \\ + Cd[3hd + 3X_n h - 2h^2 - 6X_n d] = 0 \end{aligned}$$

(18.)

Az így kialakult egyenletben csak egy ismeretlen van, a semleges tengely X_n helye. Ebből a nemlineáris egyenletből megkapjuk, hogy mely paraméter esetén hol és hány darab zérushely alakul ki a deformáció során. A következő fejezetekben ennek az egyenletnek a vizsgálatát végezzük el. Ezt követően a 4. fejezetben a másik változó, az R görbületi sugár kerül kifejezésre.

3. A semleges tengelyek számai és pozíciói

Az előző fejezetben meghatároztuk a semleges tengely helyére vonatkozó (18.) egyenletet. Jelöljük a bal oldali kifejezést $f(X_n)$ -nel:

$$f(X_n) = \frac{N}{Es} [2h^2 - 3X_n h - 3hX_m + 6X_n X_m] + C e^{-\frac{X_n}{d}} \frac{h^3}{2} + Cd[6X_n d + 3X_n h - h^2 - 3d^2] e^{-\frac{h}{d}} + Cd[3hd + 3X_n h - 2h^2 - 6X_n d] \quad (19.)$$

Az $f(X_n)$ függvény zérushelyei adják meg a keresett X_n értékeket. Ebben a fejezetben ennek a függvénynek a vizsgálatát végezzük el, abból a szempontból, hogy az adott paraméterek mellett hol és hány darab zérushely található.

3.1. A zérushelyeket megadó egyenlet dimenziótlantítása

Érdeemes (19.)-öt dimenziótlan alakban is felírni, hogy láthatóvá váljon, hogy a paraméterek milyen kombinációi írják le a viselkedés lényegét. Bevezetve az $Y_n = \frac{X_n}{d}$ új, dimenziótlan változót, (19.) a következő alakban írható:

$$f(X_n) = g(Y_n) = Q + P Y_n + e^{-Y_n} \quad (20.)$$

ahol:

$$Q = \frac{\frac{N}{Es d} \left(2 \frac{h^2}{d^2} - 3 \frac{h X_m}{d} \right) + C \left[e^{-\frac{h}{d}} \left(-\frac{h^2}{d^2} - 3 \right) + 3 \frac{h}{d} - 2 \frac{h^2}{d^2} \right]}{\frac{C h^3}{2 d^3}}$$

$$P = \frac{\frac{N}{Es d} \left(-3 \frac{h}{d} + 6 \frac{X_m}{d} \right) + C \left[e^{-\frac{h}{d}} \left(6 + 3 \frac{h}{d} \right) + 3 \frac{h}{d} - 6 \right]}{\frac{C h^3}{2 d^3}} \quad (21.)$$

dimenziótlan paraméterek.

Vezessük be a következő dimenziótlan paramétereket is:

$$n = \frac{N}{EsdC},$$

$$w = \frac{h}{d},$$

$$m = \frac{X_m}{h}.$$

(22.)

Egyszerűsítve a Q és P paramétereket, a következő összefüggéseket kapjuk a dimenziótlanított paraméterek között:

$$Q(n, w, m) = \frac{n(2w^2 - 3mw^2) + [e^{-w}(-w^2 - 3) + 3w - 2w^2]}{\frac{w^3}{2}},$$

(23.)

$$P(n, w, m) = \frac{n(-3w + 6mw) + [e^{-w}(6 + 3w) + 3w - 6]}{\frac{w^3}{2}}.$$

(24.)

A továbbiakban a semleges tengely elhelyezkedését ezeknek a dimenziótlan paraméterek függvényében vizsgáljuk.

3.2. Paraméterek ábrázolása

Keressük a (20.) függvény zérusértékeit, azaz a következő egyenletet akarjuk megoldani:

$$0 = Q + PY_n + e^{-Y_n}$$

(25.)

A megoldásokat két módszerrel vizsgáljuk; először analitikus módszerrel meghatározzuk, hogy mely tartományon hány darab megoldás létezik, majd numerikus vizsgálattal meghatározzuk azok értékét.

3.2.1. Semleges tengely vizsgálata analitikus módszerrel

A $g(Y_n)$ függvény első deriváltja a meredekség:

$$\frac{dg(Y_n)}{dY_n} = -e^{-Y_n} + P, \quad (26.)$$

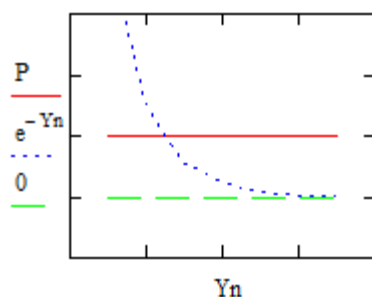
második deriváltja a görbület:

$$\frac{d^2g(Y_n)}{dY_n^2} = e^{-Y_n}. \quad (27.)$$

Mivel a görbület pozitív minden Y_n -re, így nincs inflexiós pontja (20.)-nek. Tehát az első derivált szigorúan monoton növekvő. Így a $g(Y_n)$ függvénynek legfeljebb 1 minimum pontja van, tehát zérushelye maximum 2 lehet, tehát legfeljebb két semleges tengely létezhet.

Vegyük a $g(Y_n)$ függvény minimumát, tehát (26.) zérushelyét:

$$e^{-Y_n} = P. \quad (28.)$$



3.2.1.1. ábra A (28.) egyenlet megoldása

Az 3.2.1.1. ábrán a P és az e^{-Y_n} függvény metszéspontja adja az eredeti $g(Y_n)$ függvény minimumhelyét. Jól látható hogy az e^{-Y_n} alulról korlátos, tehát a P érték előjele határozza meg, hogy a $g(Y_n)$ függvénynek van-e minimumpontja.

Két esetet különböztetünk meg:

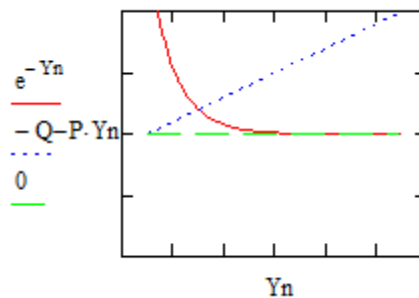
- első eset: $P \leq 0$.

Ekkor a $g(Y_n)$ függvénynek nincs minimumpontja, a 3.2.1.1. ábrán nincs metszéspont. Ekkor $g(Y_n)$ -nek 0, vagy 1 zérushelye lehet. Vizsgáljuk meg, hogy hol alakulhat ki 1 zérushely!

(20.)-et átrendezve:

$$e^{-Y_n} = -Q - PY_n \quad (29.)$$

A 3.2.1.2. ábrán jól látható, hogy mindig van metszéspont, ha a $P < 0$. Mindig pontosan egy megoldás van.



3.2.1.2. ábra. (29.) egyenlet ábrázolása

Vizsgáljuk meg a $P = 0$ esetet! Ilyenkor leegyszerűsödik az egyenlet:

$$e^{-Y_n} = -Q. \quad (30.)$$

Ha $Q < 0$, akkor mindig 1 megoldás van,

ha $Q \geq 0$, akkor nincs megoldás.

- második eset: $P > 0$

Ekkor a $g(Y_n)$ függvénynek 1 minimumpontja van. Ez azt jelenti, hogy 0, 1, vagy 2 zérushely lehetséges. Vizsgáljuk meg, hogy mely tartományon mennyi a megoldások száma!

Tudjuk, hogy $g(Y_n)$ függvény grafikonja egy olyan konvex görbe, amely egyetlen minimumponttal rendelkezik. Ebből kifolyólag a minimumpont helyzetének ismeretében meg lehet határozni a zérushelyek számát.

A derivált függvény zérusértékéből, azaz a (28.) egyenletből a minimumhely:

$$Y_n = -\ln(P) \tag{31.}$$

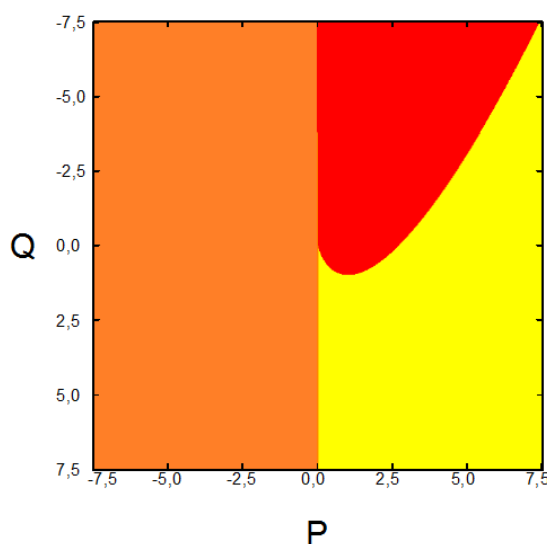
Ez behelyettesítve az eredeti függvénybe:

$$g(Y_n)_{min} = P(1 - \ln(P)) + Q. \tag{32.}$$

A $g(Y_n)_{min}$ előjelének ismeretében három eset különböztethető meg:

- Ha $P(1 - \ln(P)) + Q > 0$ akkor nincs zérushely.
- Ha $P(1 - \ln(P)) + Q = 0$ akkor pontosan 1 zérushely van.
- Ha $P(1 - \ln(P)) + Q < 0$ akkor biztosan 2 zérushely található.

Összegzésként a 3.2.1.3. *ábra* színkódolással mutatja a semleges tengelyek számát a P és Q paraméterek függvényében.

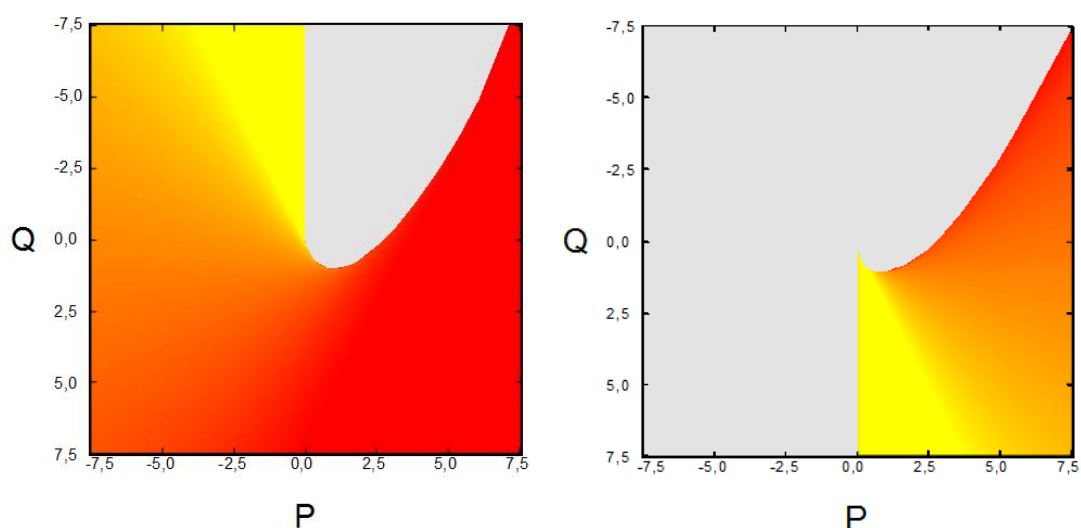


3.2.1.3. *ábra*. A semleges tengely száma szerinti tartományok. Jelölések: citromsárga=2, narancssárga=1, piros=0 semleges tengely található a keresztmetszetben

3.2.2. Semleges tengelyek vizsgálata numerikus módszerrel

A *MathCad 14* szoftver segítségével numerikusan is meghatároztuk a különféle P és Q paraméterértékek esetében a semleges tengely(ek) helyzetét. A 3.2.2.1. ábra a $P, Q \in [-7,5; 7,5]$ tartományban mutatja az eredményeket. Ezt a vizsgált tartományt 600×600 pontra bontva, az egyes pontokban kiszámítottam a semleges tengelyek számát és helyzetét (lásd. 1. melléklet).

Az algoritmus lényege, hogy sorra veszi a különböző P és Q paramétereket, minden egyes ciklusban újra definiálja a (20.) semleges tengely függvényét, majd a manuálisan megadott intervallumban megkeresi a függvény zérushelyét. Amennyiben a semleges tengelyt nem találja, tudatja azt is, hogy ott nincs.



3.2.2.1. ábra Az első (bal oldali ábra) és a második semleges (jobb oldali ábra) tengely helyének ábrázolása színskálával. A citromsárgától a piros tartományig skálázva jelennek meg a semleges tengelyek helyei az legalacsonyabtból ($Y_n = -3,524$) a legmagasabb értékekig ($Y_n = 300$). A szürke tartomány azt jelenti, hogy ott nem található semleges tengely.

4. A gerenda görbületének egyenlete

4.1. Dimenziótlanítás

A 2.2.4. fejezetben a gerenda mechanikai egyenleteiből levezetett (16.) és (17.) egyenleteket illetően megállapítottuk, hogy a két egyenlethez két ismeretlen paraméter tartozik: X_n és R . Akkor az X_n került kifejezésre, az R -t kiejtve. Ebben a fejezetben az R -t fogjuk kifejezni, pontosabban a görbületi sugarat magába foglaló görbület dimenziótlan alakját.

Első lépésként dimenziótlanítsuk az egyenleteket, ehhez először bevezetjük a 3. fejezetben ismerttetett (22.) dimenziótlan paramétereket, és az R és az X_n helyett a dimenziótlan $\kappa = \frac{h}{R \cdot C}$ és $Y_n = \frac{X_n}{d}$ változókat.

A dimenziótlan paraméterek behelyettesítésével (16.)-ből kapjuk:

$$n = \frac{1}{2}\kappa - \frac{Y_n}{w}\kappa - e^{-Y_n} - \frac{e^{-w}}{w} + \frac{1}{w}, \quad (33.)$$

(17.)-ből pedig:

$$m \cdot n = \frac{1}{3}\kappa - \frac{Y_n}{2w}\kappa - w^{-2}e^{-w}(1+w) + w^{-2} - \frac{1}{2}e^{-Y_n}. \quad (34.)$$

4.2. A κ dimenziótlan görbület számítása

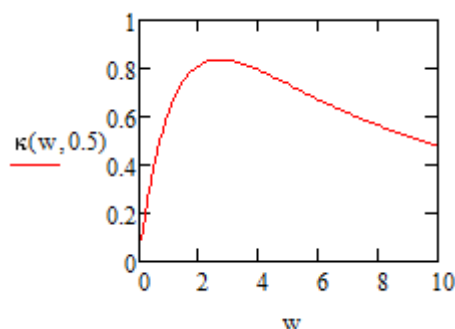
Fejazzük ki (33.)-ből e^{-Y_n} -t, majd helyettesítsük be a (34.) egyenletbe! Az Y_n ekkor kiesik, így kifejezhető a κ relatív görbület:

$$\kappa = 6n(2m - 1) - 6w^{-1}(2w^{-1} - 1) + 6w^{-1}(2w^{-1} + 1)e^{-w}. \quad (35.)$$

4.3. A görbületi egyenlet analízise

Vizsgáljuk meg (35.) egyenletet! Két részre különíthető el ez a kifejezés. Az egyik az erőteher helyétől és nagyságától függő, a másik csak a fényteher intenzitásától függő tagból áll.

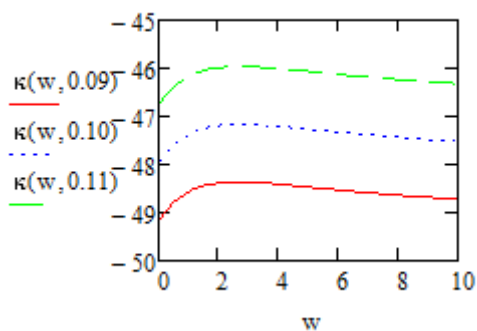
Központos terhelésnél ($m = 0,5$) az első tag kiesik, tehát megállapítható, hogy ebben az esetben a görbület független az erő nagyságától és csak a sugárzás behatolási mélysége befolyásolja. A központos terhelés esetén a κ dimenziótlan görbület alakulását a 4.3.1. ábra szemlélteti.



4.3.1. ábra. A dimenziótlan görbület központos teher esetén ($m=0.5$) w függvényében

A központosan terhelt rúd maximális görbülete $w = 2,688$ -nél van, ahol a görbület értéke: $\kappa = 0,836$.

Ha ennél nagyobb görbületet akarunk elérni, akkor külpontosan kell terhelni a gerendát. Mivel a (35.) kifejezés első tagja nem függ a w -tól, így a függvény csak függőlegesen tolódik el, de az alakja nem változik (4.3.2. ábra).



4.3.2. ábra. A különböző külpontossághoz tartozó görbületek alakulása w és a normálteher külpontosságának függvényében (A κ második változója az m paraméter).

Mindéből az következik, hogy a maximális görbületet mindig ugyanakkora fényintenzitással tudjuk előidézni, értéke csupán a kezdeti görbülettől függ, amit a külpontos teherrel lehet előidézni.

5. A semleges tengelyek függvényének ábrázolása

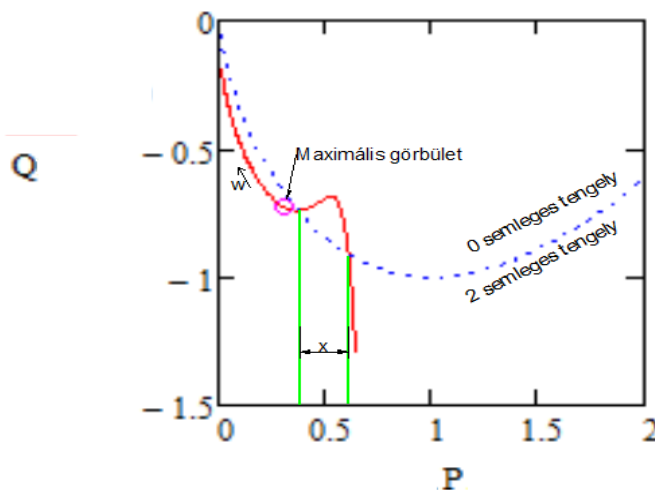
Gyakorlati alkalmazásokban a fotoelasztikus gerenda pontosan megtervezett deformációit elsősorban a sugárzó fény intenzitásának változtatásával kívánjuk befolyásolni. Ahhoz hogy pontosan ismerjük az egyes fényintenzitások mellett a gerenda viselkedését, szükséges a w behatolási mélység függvényében is meghatározni a keresztmetszetekben kialakuló semleges tengelyek számát és helyzetét.

A 3. fejezetben bemutattuk a semleges tengelyek számának és helyének P és Q paraméterfüggését.

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a különböző (relatív fényintenzitást jellemző) w behatolási mélységektől függő görbék hogyan helyezkednek el és hogyan változnak a vizsgált tartományokon.

5.1. Terheletlen állapot

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor nem működtetünk normálterhelést a gerendára. Ilyenkor a P és Q paraméter kizárólag a w behatolási mélységtől függ. Ezek függvényeit a 5.1.1. ábra szemlélteti, amelyen leolvasható hogy $P \in (0,374; 0,618)$ -on a gerenda nem rendelkezik semleges tengellyel, amely a behatolási mélység szempontjából $w \in (1,013; 2,207)$ tartományt jelenti.



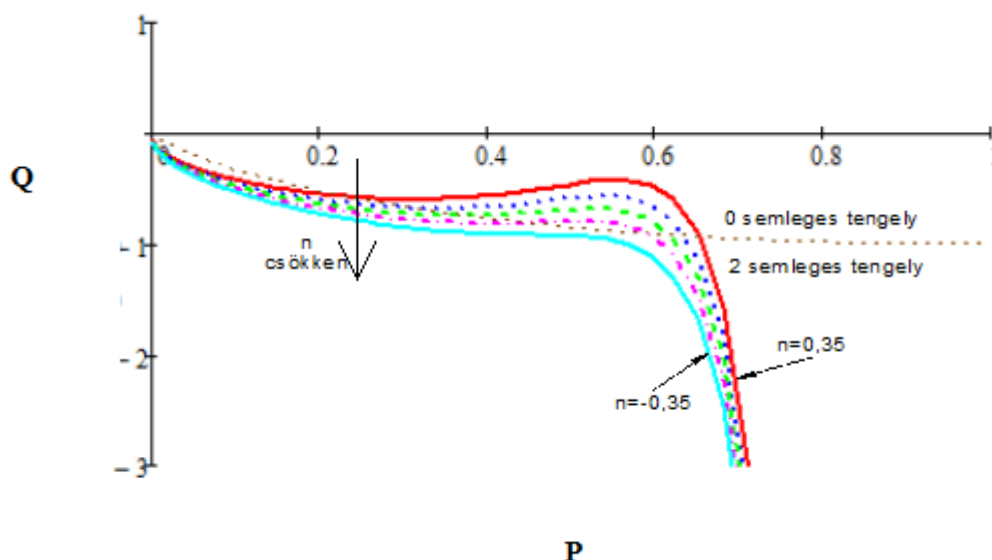
5.1.1. ábra. A terheletlen gerenda semleges tengelyeit leíró görbe, a w függvényében (piros). Az x intervallum a görbe semleges tengely nélküli tartományát jelöli.

A 4.3. fejezetben megállapítottuk, hogy a görbület a gerenda terheletlen és központosan terhelt állapotában kizárólag a relatív fényintenzitástól függ. A központosan terhelt rúd maximális görbülete $w = 2,689$ -nél van, ahol a görbület értéke: $\kappa = 0,836$.

Az 5.1.1. ábrán látható, hogy a *maximális görbület* a két *semleges tengelyt* tartalmazó tartományon található, a (0,311;-0,729) pontban.

5.2. Központosan terhelt állapot

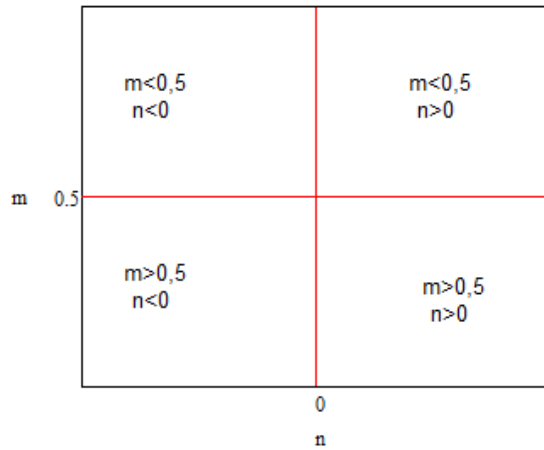
A központosan terhelt gerenda w behatolási mélységtől függő viselkedését az 5.2.1. ábra szemlélteti, ahol a normálteher fokozatos csökkentését is figyelemmel kísérhetjük.



5.2.1. ábra Központosan terhelt állapot görbéinek változása a terhelő erő fokozatos módosítása során

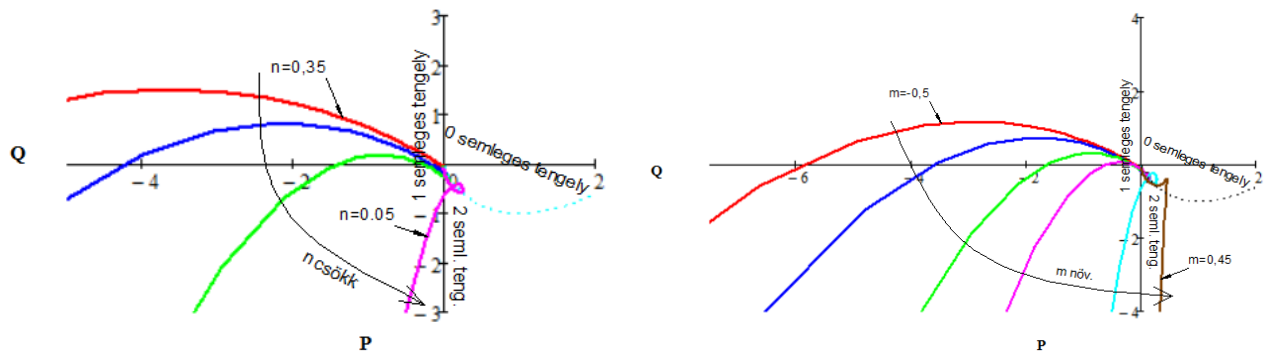
5.3. Külpontos normálerővel terhelt állapot

Vezessük be a normálteher valamilyen mértékű külpontosságát! Ekkor két paraméter fogja a w -tól függő görbét befolyásolni: az m erőteher helyét, és az n erőteher relatív nagyságát befolyásoló tényező. A két paraméter viszonyát az 5.3.1. ábrán mutatjuk be. Az ábrán a vízszintes tengelyen levő pontok a központosan terhelt eseteket ábrázolják ($m = 0,5$), a függőleges tengelyen lévő pontok, pedig a terheletlen állapotot mutatják ($n = 0$). Ezeket az eseteket a fentiekben már megvizsgáltuk. A továbbiakban tehát már csak a tengelyek által határolt, négy tartomány vizsgálata szükséges.



5.3.1. *ábra* Az erőteher nagysága (n) és a külpontosság (m) kombinációit bemutató grafikon

1. *tartomány*: $m < 0,5$ és $n > 0$

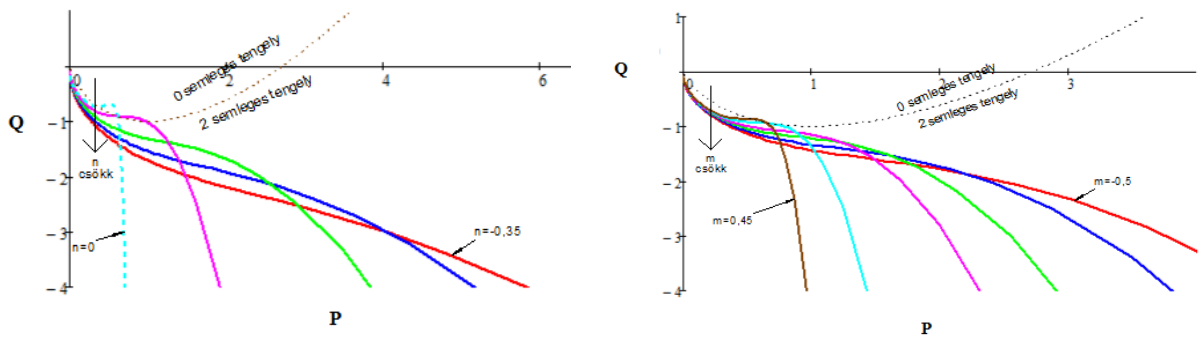


5.3.2. *ábra* Az első tartomány görbéi. Bal oldalon a húzóerő, jobb oldalon a külpontosság fokozatos csökkentésének hatása figyelhető meg

Megállapítható, hogy kellően kis nyomatóki terhelés (kis teher, illetve kis külpontosság) esetén, már előfordulhat 2 illetve 0 semlegestengelyű állapot is.

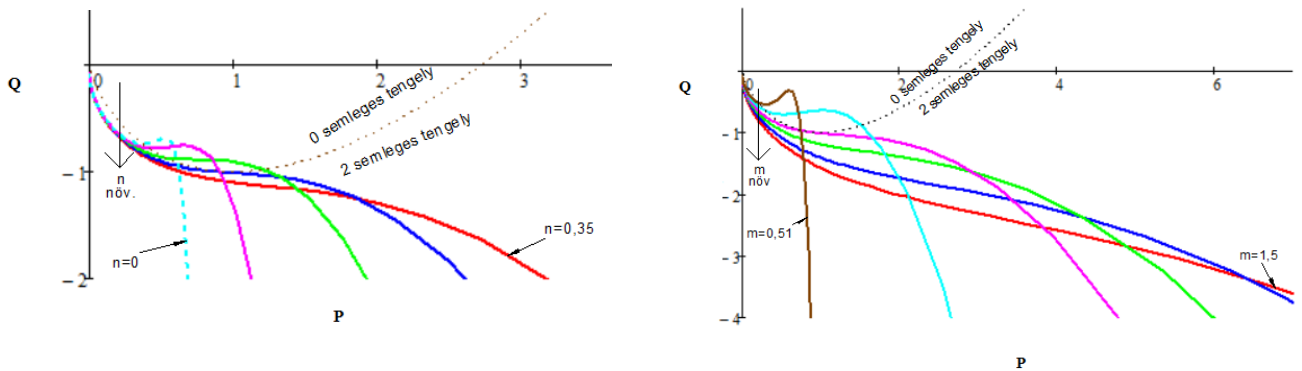
2. *tartomány*: $m < 0,5$ és $n < 0$

Az 1. esettel ellentétes nyomatók alakul ki a szerkezetben, mivel itt nyomóerőt alkalmazunk. Kis nyomatók esetében még így is kialakulhat semlegestengely-mentes állapot.



5.2.3. ábra A második tartomány görbéi. Bal oldalon a nyomóerő, jobb oldalon a külpontosság fokozatos növelésének hatása figyelhető meg

3. tartomány: $m > 0,5$ és $n > 0$

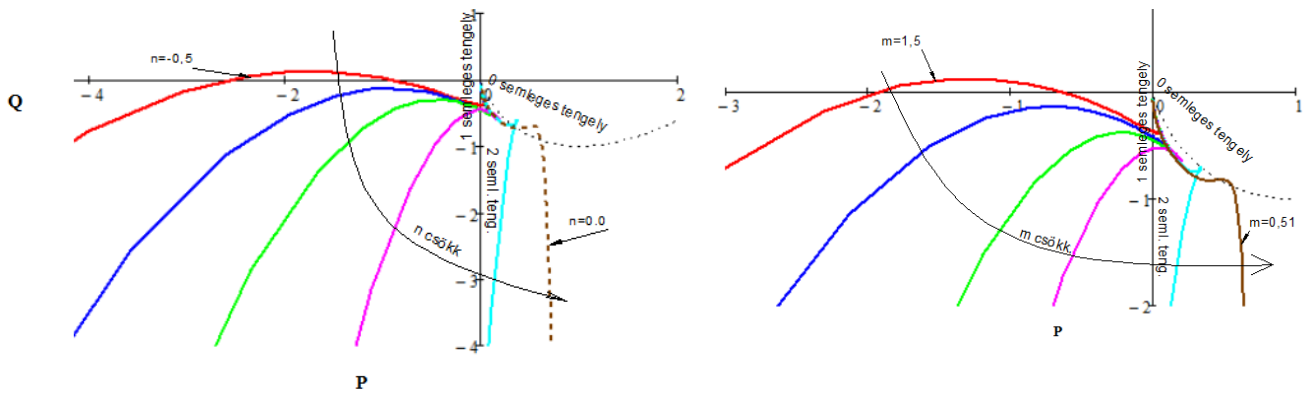


5.2.4. ábra A harmadik tartomány görbéi. Bal oldalon a húzóerő, jobb oldalon a külpontosság fokozatos növelésének hatása figyelhető meg

Az m növelésével (a külpontosság folyamatos növelésével), illetve a n folyamatos növelésével hasonló jellemzők érvényesek, mint a 2. tartománynál. Ennek az az oka, hogy míg ott a középvonal alatti nyomásnak, itt a középvonal feletti húzásnak tettük ki a testet, amely ugyanolyan jellegű hajlítást eredményez.

4. tartomány: $m > 0,5$ és $n < 0$

Az m növelésével (a külpontosság folyamatos növelésével), illetve a n folyamatos növelésével a hasonló jellegű hajlítás miatt, ugyanazok a jellemzők érvényesek, mint az 1. tartományon.



5.2.5. ábra A negyedik tartomány görbéi. Bal oldalon a húzóerő, jobb oldalon a külpontosság fokozatos csökkentésének hatása figyelhető meg

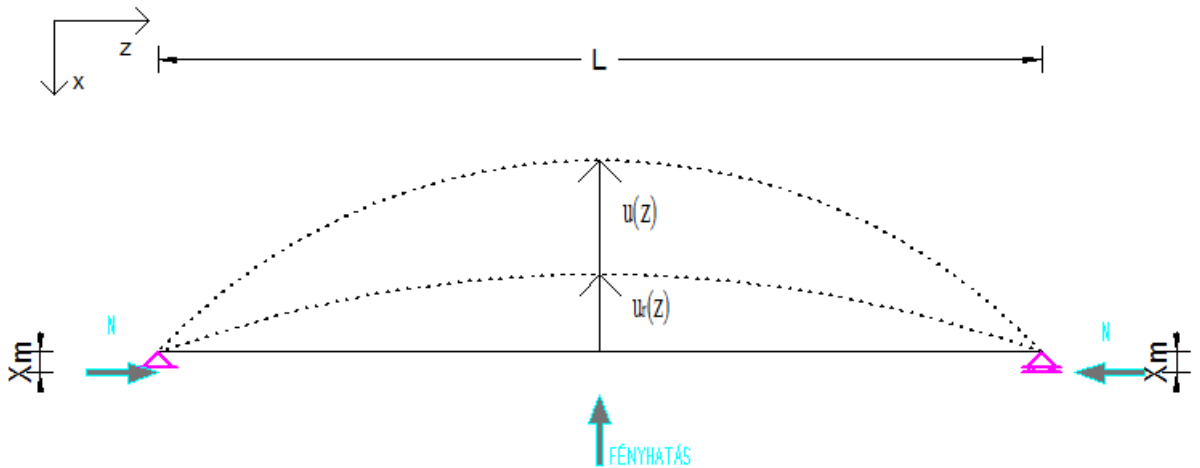
6. A gerenda rugalmas vonalának egyenlete

Dolgozatunkban eddig a csak a gerenda keresztmetszetének viselkedésével foglalkoztunk. Ebben a fejezetben a gerenda fény, illetve nyomatéki teher hatására történő lehajlásának egyenletét határozzuk meg.

6.1. Statikai váz meghatározása

Ugyanúgy, mint a keresztmetszet alakváltozásainál, a lehajlásnál is kétféle alakváltozásról beszélhetünk: $u_r(z)$ fényből adódó alakváltozásról és $u(z)$ rugalmas alakváltozásból, melyet a teher idéz elő.

Az egyszerű peremfeltételek kedvéért a statikai vázat kéttámaszú tartóként vettük fel (6.1.1. ábra).



6.1.1. ábra Gerenda statikai váza és a rá ható terhek

6.2. Mechanikai egyenletek

A fényből adódó $u_r(z)$ alakváltozást kezeljük úgy, mint egy kezdeti alakváltozást.

A z pontra felírható *mechanikai egyenletek*:

$$M_y(z) = N \left(u_r(z) + u(z) + X_m - \frac{h}{2} \right), \quad (36.)$$

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} = - \frac{M_y(z)}{EI_y}, \quad (37.)$$

$$u_r(z) = \iint \kappa_r dzdz = \kappa_r \frac{z^2}{2} - \frac{\kappa_r L}{2} z, \quad (38.)$$

ahol N a terhelő normálerő, X_m a teher külpontossága, h a keresztmetszet magassága, E a rugalmassági modulus, I_y a keresztmetszet y tengelyre vonatkozó inercianyomatéka, κ_r pedig a fény által előidézett görbület és kihasználtuk, hogy a gerenda végein csuklós a megtámasztás (6.1.1. ábra).

A három differenciálegyenlet összevonása:

$$\frac{N}{EI_y} u(z) + \frac{N}{EI_y} \left(\kappa_r \frac{z^2}{2} - \frac{\kappa_r L}{2} z + X_m - \frac{h}{2} \right) + \frac{d^2 u(z)}{dz^2} = 0 \quad (39.)$$

Egyszerűsítsünk a $k = \sqrt{\frac{N}{EI_y}}$ paraméter bevezetésével.

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + k^2 u(z) = -k^2 \left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + X_m - \frac{h}{2} \right) \quad (40.)$$

6.3. Differenciálegyenlet megoldása

Homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + k^2 u(z) = 0.$$

Megoldása:

$$Y_{hom, \acute{a}lt} = c_1 \cos(kz) + c_2 \sin(kz). \quad (41.)$$

Partikuláris megoldás:

$$Y_{ip} = -C k^2 \left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + X_m - \frac{h}{2} \right),$$

$$\frac{d^2 Y_{ip}}{dz^2} = -C k^2 \kappa_r$$

$$-Ck^2 \kappa_r + k^2 \left[-Ck^2 \left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + Xm - \frac{h}{2} \right) \right] = -k^2 \left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 + Xm - \frac{h}{2} \right)$$

$$C = \frac{\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + Xm - \frac{h}{2}}{\kappa_r + k^2 \left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + Xm - \frac{h}{2} \right)}$$

(42.)

A differenciálegyenlet megoldása

$$u(z) = c_1 \cos(kz) + c_2 \sin(kz) - \frac{k^2 \left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + Xm - \frac{h}{2} \right)^2}{\left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + Xm - \frac{h}{2} \right) k^2 + \kappa_r}$$

(43.)

A peremfeltételek a következők:

$$u(0) = 0 \rightarrow c_1 = \frac{k^2 \left(Xm - \frac{h}{2} \right)^2}{\left(Xm - \frac{h}{2} \right) k^2 + \kappa_r}$$

$$u(L) = 0 \rightarrow c_2 = \frac{\frac{k^2 \left(Xm - \frac{h}{2} \right)^2}{\left(Xm - \frac{h}{2} \right) k^2 + \kappa_r} - \frac{k^2 \left(Xm - \frac{h}{2} \right)^2}{\left(Xm - \frac{h}{2} \right) k^2 + \kappa_r} \cos(kL)}{\sin(kL)}$$

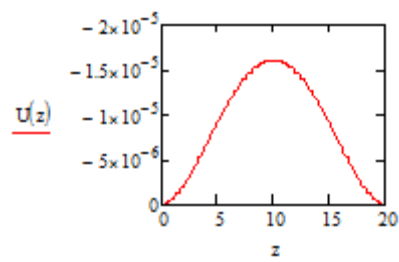
(44.)

Így a differenciálegyenlet megoldása a következő:

$$u(z) = \frac{\sin(kz) \left[\frac{k^2 \left(Xm - \frac{h}{2} \right)^2}{\left(Xm - \frac{h}{2} \right) k^2 + \kappa_r} - \frac{k^2 \left(Xm - \frac{h}{2} \right)^2}{\left(Xm - \frac{h}{2} \right) k^2 + \kappa_r} \cos(kL) \right]}{\sin(kL)} - \frac{k^2 \left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + Xm - \frac{h}{2} \right)^2}{\left(\frac{\kappa_r}{2} z^2 - \frac{\kappa_r L}{2} z + Xm - \frac{h}{2} \right) k^2 + \kappa_r} + \frac{k^2 \cos(kz) \left(Xm - \frac{h}{2} \right)^2}{\left(Xm - \frac{h}{2} \right) k^2 + \kappa_r}$$

(45.)

Mivel a 6.1.1. ábrán feltüntetett globális koordináta-rendszerek megfelelően az $u(z)$ elmozdulás egy lehetséges függvényét a 6.1.2. ábra ábrázolja.



6.1.2. ábra. Példa az $u(z)$ lehajlás függvény alakjára

7. Példa bemutatása

Példa:

A gerenda geometriai paraméterei a következők:

$$\text{hossz: } L = 10\text{cm},$$

$$\text{szélesség: } s = 1\text{cm},$$

$$\text{magasság: } h = 2\text{cm}.$$

A testet alulról terhelje egy a hossz mentén konstans $d = 4\text{mm}$ lassítási hosszal jellemzett fényhatás, továbbá legyen külpontos nyomóerővel terhelt a keresztmetszet alsó élében.

$$X_m = 0\text{cm},$$

$$N = 1\text{N}.$$

Az anyag rugalmassági modulusa: $E = 10^{12}\text{N/mm}^2$.

Az anyagra, illetve a sugárzásra jellemző alakváltozási paraméter: $C = 1\%$.

Dimenziótlan paraméterek meghatározása 3.1. fejezet alapján:

$$n = 2,5 \times 10^{-6},$$

$$w = 5,$$

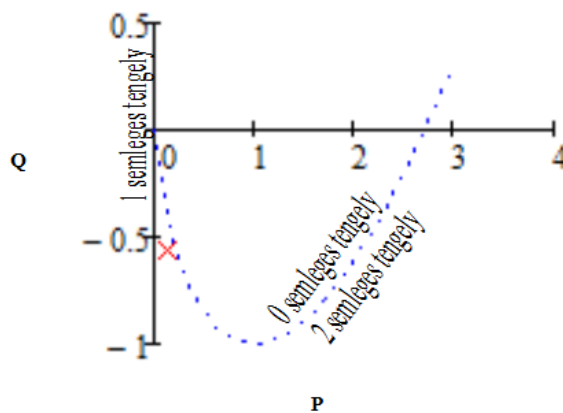
$$m = 0.$$

Semleges tengely(ek) számának és helye(i)nek meghatározása 3. fejezet alapján:

$$P = 0,146,$$

$$Q = -0,563.$$

A grafikonon való elhelyezkedést a 7.1. ábra mutatja. Leolvasható hogy a testnek 2 darab semleges tengelye van.



7.1. ábra. A Q - P grafikon. Az x -szel jelölt pont mutatja a test helyzetét

Analitikusan megadható a két semleges tengely konkrét helyzete:

$$Y_{n1} = 0,750,$$

ami konkrétan: $X_{n1} = 0,3 \text{ cm}$.

$$Y_{n2} = 3,582,$$

ami konkrétan: $X_{n2} = 1,4 \text{ cm}$.

Görbület meghatározása 4.2. fejezet alapján:

$$\kappa = 0,731.$$

Görbületi sugár $\kappa = \frac{h}{R \cdot C}$ alapján:

$$R = 2.735 \text{ m}.$$

A deformáció során a keresztmetszetben kialakuló $\varepsilon_z^b(x)$ alakváltozási függvény 2.2.2. fejezet alapján:

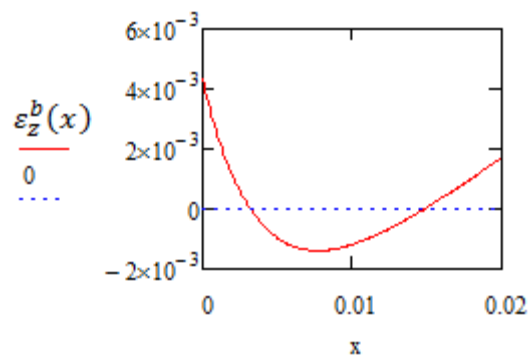
X_{n1} -ből:

$$\varepsilon_z^b(x) = 0,01 \left(e^{-\frac{x}{0,004}} - e^{-\frac{0,003}{0,004}} \right) + \frac{x-0,003}{2,735},$$

X_{n2} -ből:

$$\varepsilon_z^b(x) = 0,01 \left(e^{-\frac{x}{0,004}} - e^{-\frac{0,014}{0,004}} \right) + \frac{x-0,014}{2,735}.$$

Mivel a (18.) semleges tengelyek egyenletének mindkét semleges tengely megoldása, ezért mindkét $\varepsilon_z^b(x)$ alakváltozás egyenlet ugyanazt a görbét adja. A 7.2. ábrán ezért elegendő csupán az egyik függvényt ábrázolni.



7.2. ábra. A keresztmetszet normál irányú alakváltozása

A gerenda rugalmas vonalának meghatározása 6.3. fejezet alapján

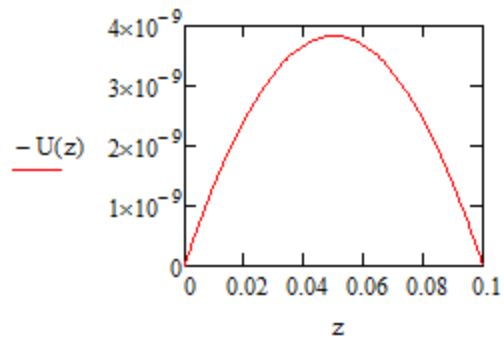
$$I_y = \frac{0,01 \times 0,02^3}{12} = 6,667 \times 10^{-9} \text{ m}^4,$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{10^{12} \times 6,667 \times 10^{-9}}} = 0.01225 \text{ m}^{-1},$$

$$\kappa_r = \frac{1}{R} = 0,3657 \text{ m}^{-1}.$$

$$u(z) = 4,102 \times 10^{-8} \times \cos(0,01225 \times z) + 2,512 \times 10^{-11} \times \sin(0,01225 \times z)$$

$$- \frac{1,500 \times 10^{-4} \times (0,01828 \times z - 0,1825 \times z^2 + 0,01)^2}{-2,7424 \times 10^{-6} \times z + 2,7424 \times 10^{-6} \times z^2 + 0,3657}$$



7.3. ábra. A gerenda lehajlása

8. Konklúzió

A munkánk során folyadékkristály elasztomer anyagú gerenda fény hatására történő alakváltozását vizsgáltuk, nyomatéki terheléssel kiegészítve a jelenséget.

A tanulmány egy szakirodalmi áttekintéssel nyit, amely átfogó ismereteket nyújt a folyadékkristály állapotú anyagok szerkezeti felépítésére, és viselkedésére, illetve felhasználási technológiák, és alkalmazási szakterületek széles skáláját ismerteti. A bevezető végén megfogalmazzuk a tanulmány alapját képező jelenség lényegi felépítését és definiáltuk az alapvető geometriai paramétereket.

Mechanikai egyenletek segítségével meghatároztuk a keletkező semleges tengelyek helyét leíró egyenletet, majd elvégeztük annak analízisét. A vizsgálat során megállapítottuk, hogy bizonyos paraméterértékek esetén a gerenda keresztmetszetében két semleges tengely is található.

A paraméterek összevonása és grafikonba rendezése után lehatároltuk a semleges tengelyek száma szerinti tartományokat analitikus módszerrel, majd numerikus módszerrel meghatároztuk a semleges tengelyek helyét.

E grafikonon kimutattuk a fény intenzitásának függvényében a különböző görbék alakját. Tanulmányoztuk egy-egy paraméter fokozatos módosításával a görbék változásának jellegét, illetve a semleges tengely száma szerinti tartományokhoz képesti elhelyezkedését.

Szintén a mechanikai egyenletekből meghatároztuk a deformált gerenda görbületét. A vizsgálat során eredményül kaptuk, hogy a görbület mindig egy bizonyos behatolási mélység értéknél éri el a maximális értéket. Megállapítottuk továbbá, hogy a görbület központosan terhelt állapotban nem függ az erőteher értékétől.

A munkánk végén a gerenda lehajlása került meghatározásra, ahol a fény által előidézett alakváltozást kezdeti alakváltozásként vettük figyelembe.

Végül számpéldával mutattuk be a kapott összefüggések gyakorlati alkalmazását, az analízis levezetését.

9. Hivatkozások:

1. <http://www.ticona.hu/hu/home/portfolio/vectra.htm>
2. http://www.ticona.com/products/zenite_lcp
3. <http://www.agt.bme.hu/szakm/szg/monitor/elemek/LCD.htm>
4. http://www.nordenia.hu/article,navsub_id-lang,25-hu.html
5. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Elasztomer>
6. <http://hu.wikipedia.org/wiki/Gumi>
7. V. Vargha, *Folyadékkristály elasztomerek (Liquid crystal elastomers) Kutatási jelentés. OTKA, (2007)*
8. J. Naciri, A. Srinivasan, Jeon Hong, N Nikolov, P Keller; B R Ratna: *Nematic elastomer fiber actuator. Macromolecules, 22, 8499-8505 (2003)*
9. Z. Y. Wei and L. H. He, *Surface topography and its transition of nematic elastomers due to photoinduced deformation J. Chem. Phys. 124, 064708 (2006)*
10. M. Warner, L. Mahadevan, *Photo-induced deformations of beams, plates and films, Phys. Rev. Lett. 92, 134302 (2004).*
11. [http://hu.wikipedia.org/wiki/Abszorpció_\(fizika\)](http://hu.wikipedia.org/wiki/Abszorpció_(fizika))
12. J. Cviklinski, A. R. Tajbakhsh, E. M. Terentjev, *UV isomerisation in nematic elastomers as a route to photo-mechanical transducer, Eur. Phys. J. E 9, 427 (2002).*
13. M. Warner, E. M. Terentjev, *Liquid Crystal Elastomer, Clarendon press, Oxford, (2006)*

1. MELLÉKLET

A melléklet a 600X600-as mátrixnak egy 150x150-es részét tartalmazza.

$$Pr := 0..7.5$$

$$Qr := -7.5..7.5$$

$$Pr := \begin{cases} \text{for } i \in 0..300 \\ v_i \leftarrow 0.025 \cdot i \\ v \end{cases}$$

$$Qr := \begin{cases} \text{for } i \in 300..-300 \\ v_{i+300} \leftarrow 0.025 \cdot i \\ v \end{cases}$$

$$Pr =$$

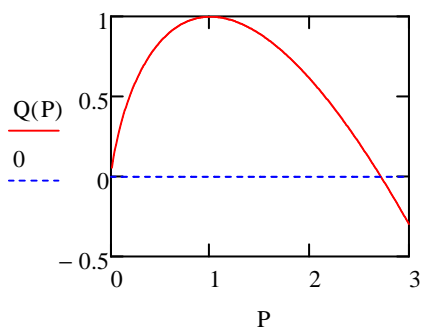
	0
0	0
1	0.025
2	0.05
3	0.075
4	0.1
5	0.125
6	0.15
7	0.175
8	0.2
9	0.225
10	0.25
11	0.275
12	0.3
13	0.325
14	0.35
15	...

$$Qr =$$

	0
0	-7.5
1	-7.475
2	-7.45
3	-7.425
4	-7.4
5	-7.375
6	-7.35
7	-7.325
8	-7.3
9	-7.275
10	-7.25
11	-7.225
12	-7.2
13	-7.175
14	-7.15
15	...

$$Q(P) := P \cdot (1 - \ln(P))$$

$$P := 0, 0.01..3$$



$$-Q(0.85) = -0.988$$

```
ZH1 :=
  for i ∈ 0..150
    for j ∈ 0..150
      f ← i
      g ← j
      εr(Yn) ← Qrf + Yn·Prg + e-Yn
      Yni,j ← "nines" on error Yni,j ← root(εr(Yn), Yn, -100, 0)
    Yn
```

$$\text{Pr}^T =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	...

$$\text{Qr} =$$

	0
0	-7.5
1	-7.475
2	-7.45
3	-7.425
4	-7.4
5	-7.375
6	-7.35
7	-7.325
8	-7.3
9	-7.275
10	-7.25
11	-7.225
12	-7.2
13	-7.175
14	-7.15
15	...

$$\text{ZH1} =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-2.015	-2.022	-2.028	-2.035	-2.042	-2.048	-2.055	-2.062
1	-2.012	-2.018	-2.025	-2.032	-2.038	-2.045	-2.052	-2.059
2	-2.008	-2.015	-2.022	-2.028	-2.035	-2.042	-2.049	-2.055
3	-2.005	-2.012	-2.018	-2.025	-2.032	-2.039	-2.045	-2.052
4	-2.001	-2.008	-2.015	-2.022	-2.029	-2.035	-2.042	-2.049
5	-1.998	-2.005	-2.012	-2.018	-2.025	-2.032	-2.039	-2.045
6	-1.995	-2.001	-2.008	-2.015	-2.022	-2.029	-2.035	-2.042
7	-1.991	-1.998	-2.005	-2.012	-2.018	-2.025	-2.032	-2.039
8	-1.988	-1.995	-2.001	-2.008	-2.015	-2.022	-2.029	-2.036
9	-1.984	-1.991	-1.998	-2.005	-2.012	-2.019	-2.025	-2.032
10	-1.981	-1.988	-1.995	-2.001	-2.008	-2.015	-2.022	-2.029
11	-1.978	-1.984	-1.991	-1.998	-2.005	-2.012	-2.019	-2.025
12	-1.974	-1.981	-1.988	-1.995	-2.002	-2.008	-2.015	-2.022
13	-1.971	-1.977	-1.984	-1.991	-1.998	-2.005	-2.012	-2.019
14	-1.967	-1.974	-1.981	-1.988	-1.995	-2.002	-2.008	-2.015
15	-1.964	-1.97	-1.977	-1.984	-1.991	-1.998	-2.005	...

```

ZH2 := | for i ∈ 0..150
      |   for j ∈ 0..150
      |     f ← i
      |     g ← j
      |     εr(Yn) ← Qrf + Yn·Prg + e-Yn
      |     Yni,j ← "nincs" on error Yni,j ← root(εr(Yn), Yn, 0, 404)
      | Yn

```

	0	1	2	3	4	5	6	7	
ZH2 =	0	"nincs"	300	150	100	75	60	50	42.857
	1	"nincs"	299	149.5	99.667	74.75	59.8	49.833	42.714
	2	"nincs"	298	149	99.333	74.5	59.6	49.667	42.571
	3	"nincs"	297	148.5	99	74.25	59.4	49.5	42.429
	4	"nincs"	296	148	98.667	74	59.2	49.333	42.286
	5	"nincs"	295	147.5	98.333	73.75	59	49.167	42.143
	6	"nincs"	294	147	98	73.5	58.8	49	42
	7	"nincs"	293	146.5	97.667	73.25	58.6	48.833	41.857
	8	"nincs"	292	146	97.333	73	58.4	48.667	41.714
	9	"nincs"	291	145.5	97	72.75	58.2	48.5	41.571
	10	"nincs"	290	145	96.667	72.5	58	48.333	41.429
	11	"nincs"	289	144.5	96.333	72.25	57.8	48.167	41.286
	12	"nincs"	288	144	96	72	57.6	48	41.143
	13	"nincs"	287	143.5	95.667	71.75	57.4	47.833	41
	14	"nincs"	286	143	95.333	71.5	57.2	47.667	40.857
	15	"nincs"	285	142.5	95	71.25	57	47.5	...